한국초등수학교육학회지 21(1) 49-72.
2017. 02. 28
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 21(1) 49-72.
February 28. 2017.

7~9세 학생들의 관계 파악 및 표현 능력

방정숙[1] · 이유진[2]

최근 초등학교에서 함수적 사고의 중요성과 필요성이 대두되었지만, 국내에서는 초등학생들의 함수적 사고에 대한 연구가 많지 않으며 특히 저학년 학생들을 대상으로 한 연구는 찾아보기 어렵다. 이에 본 연구에서는 7~9세 학생들의 함수적 사고 능력을 파악하기 위해 학생 수준과 외국의 선행 연구를 바탕으로 상황을 기반으로 한 과제를 제시하고, 학생들이 두 양 사이의 관계를 어떻게 파악하고 표현하는지 알아보았다. 이를 위해 12명의 학생들을 선정하여 면담하였고, 3가지 함수 유형에 따른 과제를 제시하여 학생들의 관계 파악 능력과 표현 능력을 분석하였다. 그 결과 학생들은 다양한 방법으로 관계를 파악하였는데, 함수 유형이나 과제 특성과 같은 변인에 영향을 받았다. 또한, 두 양 사이의 관계를 몸짓, 그림, 말, 변수 등 다양한 방법을 통해 표현할 수 있었으며 표현 방식 중 말을 통한 관계 표현이 가장 두드러진 반면에 변수를 통한 관계 표현에는 어려움을 겪었다. 이러한 결과를 토대로 본 논문은 7~9세 학생들의 함수적 사고 지도에 대한 시사점을 제시한다.

주제어: 관계, 함수적 사고, 일반화, 표현, 변수

Ⅰ. 서 론

함수적 사고란 공변 사이의 관계를 일반화하는 것, 단어, 기호, 표, 또는 그래프로 이러한 관계를 표현하는 것, 함수를 분석하기 위해 다양한 표현으로 추론하는 것을 포함한다(Blanton, Levi, Crites, Dougherty, & Zbiek, 2011). 함수에 대한 이해는 기존 교육과정 내의 지식을 심화하거나 통합시키며 수학적 일반화 능력을 증진시키고 추후에 보다 형식적인 대수와 함수의 도입에 도움을 주기 때문에 함수적 사고는 대수로 들어가는 중요한 진입점이 된다(Carraher & Schliemann, 2007). 또한 함수적 사고가 공변량 사이의 관계를 일반화하고 이러한 관계를 다양한 방법으로 표현하며 함수적 특징을 이해하고 추론한다는 점에서 대수적 사고 능력과도 밀접하게 관련되어 있다(Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2015).

이처럼 함수적 사고는 대수적 사고 능력 발달에 매우 중요하며, 초등학교에서도 이미 함수 개념의 기초가 되는 규칙성을 한 영역으로 지도하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서 초등에서의 함수에 관한 내용은 중등의 형식적인 함수 내용과 일관성 있게 연결되지 못하는 경우가 많다(김성준, 2003; 변희현, 주미경, 2012). 또한 함수의 중요성에도 불구하

1) 한국교원대학교
2) 한국교원대학교 대학원

고, 함수가 형식적이고 추상적인 사고를 요구한다는 인식 때문에 역사적으로 함수에 대한 연구는 중등에 국한되어 왔다(Blanton et al., 2015).

이러한 문제점을 극복하고자 미국, 호주, 캐나다 등 여러 국가에서는 초등학교 수학 교육과정에서 함수적 사고를 체계적으로 가르치기 위해 노력하고 있다(Cañadas, Brizuela, & Blanton, 2016). 이러한 노력들을 바탕으로 학생들의 함수적 사고를 분석하고 함수적 사고를 효과적으로 지도하기 위한 연구들이 활발히 이루어지고 있으며 최근 초등학교 저학년은 물론 유치원 학생들까지도 상당한 함수적 사고가 가능하다는 것이 지속적으로 강조되고 있다(Blanton et al., 2015; Blanton & Kaput, 2011). 국내에서도 학생들의 함수적 사고 능력과 지도에 대한 연구가 이루어지고 있으나(권보영, 2012; 김정원, 방정숙, 2008; 최지영, 방정숙, 2012) 아직까지 유치원과 초등학교 저학년을 대상으로 한 연구는 찾아보기 어렵다. 이에 누리교육과정과 초등학교 수학과 교육과정에 녹아 있는 함수 관련 내용을 바탕으로 어린 학생들에게 제시할 수 있는 구체적인 과제를 마련하여 학생들의 함수적 사고의 특징을 파악하는 연구가 필요하다.

이와 같은 연구 배경과 필요성을 바탕으로, 본 연구에서는 우리나라 유치원 7세 아동 및 초등학교 저학년 학생들의 함수적 사고를 파악하고 이를 분석함으로써 함수적 사고 지도의 가능성에 대한 기초 자료를 수집하고자 했다. 이를 토대로 누리교육과정에서부터 중등 수학과 교육과정에 이르기까지 일관성 있게 함수적 사고를 신장하기 위한 교수·학습 마련에 부족하나마 시사점을 줄 수 있기를 기대한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 초등학생들의 함수적 사고에 관한 선행 연구 분석

초기 대수적 관점에서는 중등에서의 대수를 분절적으로 보지 않고, 이른 시기부터 대수적 사고를 강조함으로써 학생들이 대수 학습에서 겪는 어려움을 피할 수 있다고 주장한다(Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). 이러한 관점에서 Kaput(2008)은 대수를 특정한 형태의 사고로 정의했으며, 이러한 대수적 사고가 산술에서의 구조와 관계, 함수, 모델링의 영역에 걸쳐 일어난다고 보았다. 또한 Blanton 외(2011)에서는 이러한 대수적 사고의 특징을 수학적 구조와 관계를 일반화하고, 표현하고, 정당화하고, 추론하는 것으로 그 과정을 세분화했다. 이러한 맥락에서 함수적 사고란 공변량 사이의 관계를 일반화하고, 이러한 관계를 여러 가지 방법으로 표현하고 정당화하며, 함수적 특징을 추론하는 것을 수반하는 개념이다. 본 연구에서는 7~9세 학생들의 함수적 사고 능력을 살펴보았기 때문에 두 양 사이의 관계를 파악하고 이를 함수식으로 표현하는 것뿐만 아니라 관계를 여러 가지 방식으로 파악하고 표현하는 것을 모두 함수적 사고로 포함하였다. 이와 같은 함수적 사고에 대한 개념을 바탕으로, 초등학생들의 함수적 사고에 관한 선행 연구를 Blanton 외(2015)에서 제시한 단계를 고려하여 자료 생성하기, 관계 탐색하기, 관계 표현하기, 관계 활용하기로 나누어 분석하였다.

첫째, 자료 생성하기와 관련된 선행 연구 분석 결과는 다음과 같다. 초등학교 학생들은 과제에서 구체적인 대응값을 구하고 이를 통해 관계를 파악하고 일반화할 수 있다(Blanton et al., 2015; Carraher, Schliemann, & Schwartz 2008). 특히 일반적으로 구체적인 대응값을 구할 때 독립변수에 대한 대응값보다 종속변수에 대한 대응값을, 가까운 값에 대한 대응

값보다 먼 값에 대한 대응값을 구하는 것을 어려워한다(김경혜, 2015; 김정원, 2014). 그러나 이러한 어려움에도 불구하고 먼 값에 대한 대응값을 구하는 활동은 두 양 사이의 관계를 일반화하는 데 도움을 준다(Cañadas et al., 2016; Radford, 2011). 한편 선행 연구에서 공통적으로 자료를 생성하기 위해 기하 패턴과 함수표를 많이 활용하였는데 특히 Moss와 McNab(2011)에 따르면, 기하 패턴의 경우 학생들이 두 양 사이의 관계를 파악하기 위해 위치번호를 활용하는 것이 효과적이다. 함수표의 경우 열에 각각의 값이 무엇을 의미하는지 명칭을 붙이지 않은 경우 학생들이 수에만 초점을 맞춰 문제 맥락과 연결시키지 못하는 오류를 보였으며(Cañadas et al., 2016), 두 양 사이의 관계에 초점을 맞추도록 비연속적인 함수표가 사용되는 경향이 있다(Tanisli, 2011).

둘째, 관계 탐색하기와 관련된 선행 연구를 분석한 결과는 다음과 같다. 학생들은 공변량 사이의 관계를 재귀적, 공변적, 대응적 관계로 다양하게 파악한다(Cañadas et al., 2016). 대체적으로 재귀적 관계를 더 쉽게 파악하지만, 다수의 연구에서 함수적 사고를 발달시키고 공변량 사이의 관계를 일반화하기 위해서 대응적으로 관계를 파악할 것을 강조한다. 주목할 만한 것은 학생들이 구체적인 대응값을 하나의 예로 사용하여 관계를 파악한다는 것이다(Blanton et al., 2015). 한편 국외 연구에서 저학년 학생들도 연산 가능한 수의 범위를 넘어서도 일반화 할 수 있으며, 선형 관계(y=ax+b)까지도 일반화 할 수 있음이 드러났다(Blanton et al., 2015; Moss & McNab, 2011). 국내에서도 초등학생을 대상으로 한 실태조사에서 공통적으로 덧셈 관계, 곱셈 관계, 선형 관계 순으로 어려워하는 것으로 드러났으며(권보영, 2012; 김경혜, 2015; 김정원, 2014), 특히 2학년 학생들을 대상으로 한 전국단위 검사에서 반 이상이 덧셈 관계와 곱셈 관계를 파악할 수 있었고 일부 학생들은 선형 관계(y=ax+b)도 파악할 수 있음이 드러났다(최지영, 방정숙, 2012). 즉 함수 유형에 따라 학생들의 일반화 양상이 달라짐을 알 수 있다. 또한 자료를 수치적으로 제시하는지 기하적 패턴으로 제시하는지에 따라 즉, 자료 제시 방법에 따라서도 학생의 관계 탐색의 양상이 달라짐에 유의할 필요가 있다(권보영, 2012).

셋째, 관계 표현하기와 관련된 선행 연구 분석 결과는 다음과 같다. 학생들은 공변량 사이의 관계를 말, 그림, 몸짓, 변수 등 다양한 방법을 사용하여 표현할 수 있다.(Blanton et al., 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, & Gardiner, 2015; Brizuela & Earnest, 2008; Cañadas et al., 2016). 특히 저학년 학생들의 경우 말로 관계를 표현하기도 하지만, 변수를 사용하여 공변량 사이의 관계를 표현할 수도 있다(Blanton et al., 2015). 변수를 사용하여 관계를 표현하는 것은 일반화를 촉진하고 미결정된 양에 대해 반영할 수 있도록 돕는다(Brizuela et al., 2015). 단, 변수를 사용한 일반화에서 학생들은 변수와 숫자를 함께 쓰는 것에 대해 낯설어 하고, 정해지지 않은 양보다는 구체적이고 고정된 양을 선호하여 문자에 구체적인 값을 도입하는 경우가 많다(방정숙, 최인영, 2016; Brizuela et al., 2015; Cañadas et al., 2016). 또한 변수가 동시에 두 가지 이상의 수를 나타낼 수 있다고 생각하거나 변수를 수처럼 인식하지 못하는 경우도 있다(Blanton et al., 2015; Brizuela et al., 2015).

마지막으로, 관계 활용하기와 관련된 선행 연구 분석 결과는 다음과 같다. 관계 활용은 일반화한 규칙을 하나의 대상(object)으로 활용하여 문제를 해결하거나 추론하는 것을 말한다(김정원, 2014; Blanton et al., 2015). 즉 이미 일반화한 관계를 하나의 대상으로 보고 이를 활용하여 새로운 관계를 만들어 내는 것으로, Blanton 외(2015)는 1학년 학생들도 이러한 관계 활용이 가능함을 밝혔다. 또한 서로 다른 유형의 함수에서 차이점을 발견하고 이를 문제 해결에 활용하는 것과 관련하여 김정원(2014)은 함수 유형의 특징을 활용했을

때 6학년 학생들이 제시된 다양한 상황을 대응 관계에 따라 분류할 수 있었지만, 결과를 정당화하는 능력은 부족하다고 하였다. 이러한 선행연구 분석 결과, 자료를 생성하고, 관계를 파악하며, 표현하는 활동뿐만 아니라 관계를 활용하는 활동 또한 필요하지만, 저학년 학생들의 관계 활용에 대한 예는 찾아보기 어렵다.

2. 교육과정 상의 7~9세 학생들을 위한 함수적 사고 관련 내용 분석

본 논문에서 연구 대상이 유치원 학생과 초등학교 저학년 학생들이기 때문에, 이와 관련하여 누리교육과정과 초등학교 1~2학년군의 교육과정을 살펴보았다. 우선 유치원 학생들을 위한 누리교육과정에서 함수적 사고와 가장 관련된 부분은 ‘수학적 탐구하기’ 중 ‘규칙성 이해하기’이다(교육과학기술부, 2012). 이와 관련된 활동을 찾아 <표 1>과 같이 정리한 결과, 패턴의 규칙성을 찾고 이어질 항이나 중간에 빈 항을 찾는 활동을 주로 다룬다는 것을 알 수 있다.

<표 1> 만5세 누리교육과정 교사용 지도서 활동 중 규칙성 이해하기와 관련된 내용

순	생활주제	활동명	내용
1	유치원과 친구	우리가 만드는 하루 일과	일과계획표를 작성해봄으로써 다음에 하게 될 활동을 예측해보기
2	건강과 안전	요리도구 패턴 찾기	요리도구 패턴카드로 단순 및 복합 패턴을 구성해보고 다음 패턴 예측해보기
3	교통기관	고마운 자동차를 찾아주세요	물음표에 알맞은 카드를 찾아 패턴카드 빈칸에 올려놓기
4	우리나라	도개걸윷모 윷놀이	윷놀이를 통해 윷가락의 모양과 말이 움직이는 규칙 인식하기
5		민화를 찾아라	민화 빙고 게임을 통해 규칙 인식하기
6	세계 여러 나라	작은 집 창가에서	리듬 패턴 제작표에 다양한 종류의 악기를 붙여보며 패턴 만들고 인식하기
7	봄・여름・가을・겨울	봄・여름・가을・겨울 젠가	젠가를 활용하여 사계절이 순환하는 패턴을 이해하고, 패턴을 만들어보기

다음으로 초등학교 수학과 교육과정에서 규칙성은 생활 주변의 여러 현상을 탐구하는데 중요하며 함수 개념의 기초가 되므로 규칙성 영역은 함수적 사고와 가장 관련 깊은 영역이다(교육부, 2015). 이 영역과 관련된 초등학교 1~2학년군의 내용을 정리하면 <표 2>와 같다. 이를 보면, 물체, 무늬, 수의 배열에서 규칙을 찾아 여러 가지 방법으로 나타내고, 자신이 정한 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열하는 활동 위주로 구성되어 있다는 것을 확인할 수 있다.

<표 2> 초등학교 1~2학년군에서 규칙성 영역의 내용

학년-학기	단원명	내용
1-2	6. 규칙 찾기	· 물체, 무늬, 수 배열에서 규칙 찾아 여러 가지 방법으로 나타내기 · 자신이 정한 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열하기
2-1	2. 여러 가지 도형	· 규칙에 따라 알맞은 도형 붙이고 규칙 설명하기 · 새로운 규칙을 만들어 도형을 붙이고 규칙 설명하기
2-2	6. 규칙 찾기	· 규칙에 따라 무늬 꾸미기 · 수 배열표, 덧셈표, 곱셈표에서 규칙 찾기 · 자신이 정한 규칙에 따라 수를 배열하고 설명하기

만5세 누리교육과정 지도서와 초등학교 1~2학년군에서 다루는 과제를 비교 분석하면 다음과 같다. 두 교육과정에서 모두 규칙을 찾고 표현하는 활동이 많으며 빠진 부분을 추측하여 규칙을 찾거나 새로운 규칙을 만들어 내게 한다. 또한 대부분 실생활 상황을 기반으로 과제를 제시하여 학생들이 친근하게 느끼도록 구성하였다. 그러나 누리교육과정에서는 물체의 배열만을 소재로 하여 과제를 제시한 반면에, 초등학교 1~2학년군에서는 물체의 배열뿐만 아니라 무늬의 크기, 색깔, 위치, 방향 등 다양한 요소를 변형하고 수 배열표, 덧셈표, 곱셈표 등과 같은 수의 배열도 다루고 있다. 또한 누리교육과정에서는 AB, ABB, ABC 등과 같은 패턴을 다루는데 비해, 초등학교 1~2학년군에서는 AABB, AABBCC, ABBA와 같은 좀 더 복잡한 형태의 규칙을 다루고 있다. 한편, 누리교육과정에서는 반복 패턴만을 다룬 반면에, 1~2학년군에서는 증가 패턴도 다루고 있으며 학년이 올라감에 따라 더 많이 다루고 있다(방정숙, 선우진, 2016). 또한 규칙을 어떻게 표현하는지를 살펴본 결과, 초등학교 1-2학년군에서는 규칙을 말 뿐만 아니라 수, 그림, 기호, 구체물, 행동 등 다양한 방법으로 나타내게 하고 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 분석 대상

본 연구를 위해 청주시 S초등학교의 병설유치원 7세 학생들, 청주시 G초등학교 1학년 학생들, 대전광역시 C초등학교 2학년 학생들 각 4명씩, 총 12명의 학생들을 연구 대상으로 선정하였다. 본 연구의 특성상 학급 담임교사의 추천을 통해 언어적 표현 수준이 뛰어난 학생들을 선정하였다. 언어적 표현 능력을 중시한 이유는 본 연구가 7~9세 학생들을 대상으로 함수적 사고의 가능성을 살펴보고 그에 대한 상세한 정보를 얻고자 면담을 통한 질적 분석을 시도하였기 때문이다.

7~9세 학생들을 연구 대상으로 선정한 이유는 성공적인 대수 학습을 위해 초등학교에서도 연계성 있는 접근이 필요함에도 불구하고 우리나라에서 대부분의 함수적 사고에 대한 연구는 초등 고학년을 대상으로 이루어졌다는 것과, 외국 문헌의 경우 최근 초등 저학년 심지어 유치원 학생들도 함수적 사고가 가능하다는 결과가 발표되기 때문에, 우리나라에서도 어린 학생들을 대상으로 함수적 사고 능력 및 특징을 살펴보기 위해서다.

2. 자료 수집 및 분석

본 연구에 참여하는 학생들의 수준을 감안하여 누리교육과정 및 초등학교 1-2학년군의 교육과정을 참조하고 선행 연구를 바탕으로 우선 과제를 구안하고자 노력하였다. 면담에서 사용된 과제는 <표 3>처럼 Blanton 외(2015)에서 1학년 학생을 대상으로 사용한 과제를 참고하여 학생들이 이해할 만한 상황을 기반으로 하였으며, 이와 같은 과제 상황을 문장으로 제시하지 않고 면담 과정에서 말로 설명하여 학생들의 수준에서 과제 상황을 이해할 수 있게 하였다. 면담 과제의 수준은 교육과정과 선행 연구 결과를 참고하여 상수를 최대한 간단히 하였다. 또한 과제 2는 과제 1의 조건을 약간 변형하여 학생들이 관계를 어떻게 활용하는지 살펴보고자 했다. 과제 3의 경우는 $y=2\times x$ (또는 곱셈을 사용하지 않고 $y=x+x$로 표현 가능) 형태의 관계를 다루는데, 본 연구에 참여한 9세 학생들은 2학년 1학기의 '곱셈' 단원을 학습한 상태였다.

<표 3> 과제 상황 및 함수 관계

과제	과제 상황	함수 관계
과제 1	빵 한 봉지에는 캐릭터 스티커가 한 개씩 들어있습니다. 이 때 내가 산 빵의 수와 스티커의 개수 사이에는 어떤 관계가 있을까요?	y=x
과제 2	유진이가 캐릭터 스티커를 한 개 가지고 있습니다. 빵 한 봉지에는 캐릭터 스티커가 한 개씩 들어있을 때, 유진이가 산 빵의 수와 갖게 되는 스티커의 개수 사이에는 어떤 관계가 있을까요?	y=x+1
과제 3	재원이는 생일파티에 친구들을 초대했습니다. 친구들이 앉으려 하는 하나의 사각형 테이블에는 두 사람이 마주보고 앉을 수 있습니다. 이 테이블을 계속해서 붙여서 친구들이 앉을 때, 테이블의 수와 사람의 수 사이에는 어떤 관계가 있을까요?	y=2x y=x+x

본 연구는 위에서 제시된 과제를 해결하는 과정에서 드러나는 7~9세 학생들의 함수적 사고를 조사하기 위해 면담을 실시하였다. 어린 학생들을 대상으로 면담을 실시하기 때문에 사전에 예비 면담을 통해 과제 및 면담 과정에서 사용되는 용어에 대한 적절성을 알아보고자 했다. 예비 면담에서 예를 들어 과제 1을 해결하는 과정에서 "빵의 수와 스티커의 개수 사이에서 계속 변하지 않고 나타나는 관계가 있니?" 와 같이 관계를 표현하도록 요구하는 질문에 답을 하지 못하는 경향이 있었고, 관계라는 용어를 이해하는 데 어려움을 겪었다. 이에 본 면담에서는 먼저 관계에 대해 학생들이 가장 쉽게 접하고 이해하기 쉬운 나이의 차를 예로 들어 간단히 설명하였고, 직접적으로 관계를 표현하라는 질문 외에도 <표 4>와 같이 보조 질문을 준비하여 활용하였다.

<표 4> 과제 1에 대한 보조 질문의 예

· 우리가 빵을 한 개씩 더 더할 때마다 스티커의 개수가 어떻게 변하는지 설명할 수 있니?
· 빵이 몇 개 있을 때 스티커 몇 개인지 알아내는 방법이 있니?
· 어떻게 빵의 수만 알고 바로 스티커의 개수를 구할 수 있었는지 설명할 수 있니?
· 스티커의 개수를 구하는 방법을 친구에게 어떻게 보여줄 수 있니?
· 어떻게 계산하지 않고 바로 스티커의 개수를 구할 수 있었니?

면담은 아침자습 시간과 방과 후 시간을 이용하여 총 12명의 학생들에게 각 30분~40분씩 실시되었다. 연구자는 면담자로 직접 참여하였으며, 학생의 함수적 사고 정도를 면밀히 살펴보기 위해 사전에 면담 질문지를 준비하여 융통성 있게 사용하였다. 면담 초반에는 학생들이 함수적 문제 상황을 잘 이해한 후 자신의 생각을 표현하게 하는 데 초점을 두었다. 면담 과정은 오디오로 녹화되었으며, 면담을 통해 산출되는 모든 기록물 및 활동 결과물을 수집하여 활용하였다. 또한 면담에서 관찰한 내용은 연구자의 필드노트에 즉각적으로 기록하여 활용하였다. 최종 면담이 끝난 후에는 학생과의 면담 내용을 문장단위로 분석하여 정리하였다.

본 연구에서는 학생들의 함수적 사고를 분석하기 위해 Blanton 외(2015)를 바탕으로 자료 생성하기, 관계 탐색하기, 관계 표현하기, 관계 활용하기를 염두에 두었다. 이 중 본 연구에서는 학생들이 두 양 사이의 관계를 어떻게 '파악'하고 '표현'하는지에 초점을 두었기 때문에, 이 부분에 대해서 구체적인 분석의 초점을 마련하였다. 우선 관계 파악과 관련해서는 〈표 5〉와 같이 학생들이 관계를 부분적으로 파악하는지 일반적 관계로 파악하는지 구분하였는데, 부분적 관계 파악은 학생들이 구체적인 대응값을 하나의 예로 사용하여 관계를 파악하는 경우를 일컫는 것이다. 일반적 관계 파악의 경우 선행 연구를 바탕으로 재귀적, 공변적, 대응적 관계 파악으로 나누었다.

<표 5> 관계 파악의 유형

관계 파악 유형		분석의 초점
부분적		· 특정한 대응값을 예로 하여 관계를 파악했는가?
일반적	재귀적	· 종속변수에서의 변화에만 초점을 두는가?
	공변적	· 한 양이 변화할 때 다른 한 양이 어떻게 변화하는지 두 양 사이의 변화를 서로 관련지어 파악했는가?
	대응적	· 다른 대응값은 모르더라도 특정한 대응값을 알 수 있도록 일반적인 관계를 파악했는가?

다음으로, 관계 표현과 관련해서는 학생들이 두 양 사이의 관계를 어떤 방법으로 표현하는지에 주목하여 분석하였고, 특히 학생들의 수준을 감안하여 말, 몸짓, 그림, 변수 등 다양한 표현 방법에 유의하였다. 이 중 변수를 사용한 표현에 대해서는 더 상세하게 유형을 나누어 분석하였다. 선행 연구에서 드러난 학생들의 변수 사용을 살펴본 결과 변수의 의미를 잘 이해하지 못하고 구체적인 값으로 인식하거나 동시에 다양한 값을 나타낼 수 있다고 생각한 경우도 있었다. 또한 변수를 문자처럼 인식하여 수처럼 사용하지 못하는 경우도 있었다. 이러한 다양한 변수에 대한 이해 및 사용은 한 학생에게 한 가지 유형만 나타나기도 하지만, 두 가지 이상의 표현 유형이 복합적으로 나타나기도 했다. 이러한 문헌 분석을 바탕으로 학생들의 변수 표현 양상을 분석하였으며, 각 유형에 따른 분석의 초점은 〈표 6〉과 같다.

<표 6> 변수 표현의 유형

변수 표현 유형	분석의 초점
구체적인 값으로 인식	· 변수를 구체적인 값으로 인식하거나 구체적인 값을 대입하는가?
동시에 다양한 값을 나타냄	· 변수를 동시에 두 가지 이상의 값으로 인식하거나 구체적인 값을 대입하는가?
수처럼 인식하지 못함	· 변수를 수처럼 사용하지 못하는가?
변수의 의미를 알고 관계를 표현함	· 변수의 의미를 알고 변수를 사용하여 두 양 사이의 관계를 표현할 수 있는가?

본 연구의 초점은 각 나이별로 학생들이 두 양 사이의 관계를 어떻게 파악하고 표현하는지 비교하는 것이 아니라 어린 학생들의 함수적 사고의 가능성을 탐색하는 것이었기 때문에, 나이별 분석은 하지 않았다. 실제 본 연구에서 분석한 관계 파악과 관계 표현의 유형 중 특정 나이에서만 나타나는 유형은 없었다. 이에 결과 분석에서 전체 12명의 학생들을 대상으로 기술하되, 구체적인 면담 자료를 언급하는 경우에는 해당 학생의 나이를 제시하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 관계 파악의 양상

연구 결과 7~9세 학생들이 주어진 세 가지 과제 상황에 대해서 어떻게 두 양의 관계를 파악하는지 분석한 결과를 요약하면 〈표 7〉과 같다. 이는 분석 전에 이론적 배경을 바탕으로 한 〈표 5〉의 관계 파악의 유형보다 세분화되었는데, 그 이유는 학생들의 반응이 다양하여 기존의 분석틀을 보다 상세하게 나눌 필요성이 있었고, 특히 기존에 소개되지 않았던 새로운 경우 즉, 두 변량의 차로 관계를 파악하는 경우가 있었기 때문이었다.

<표 7> 학생들의 관계 파악 유형과 반응 예시

<table>
<tr><th colspan="3">관계 파악 유형</th><th>학생 반응</th></tr>
<tr><td rowspan="2">부분적</td><td colspan="2">구체적인 값</td><td>· 구체적인 함숫값을 관계의 예로 제시하여 관계를 파악함
예) 만약에 빵이 4개 있으면, 스티커 4개 있어요.</td></tr>
<tr><td colspan="2">과제의 조건</td><td>· 맨 처음 제시한 과제 조건을 관계로 파악함
예) 빵이 하나씩 나올 때 스티커도 하나씩 나오는 규칙이요.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">일반적</td><td colspan="2">재귀적</td><td>· 한 양(종속변수)의 변화로만 관계를 파악함
예) 스티커의 수가 1씩 더 커져요.</td></tr>
<tr><td colspan="2">새로운 양으로
관계 파악</td><td>· 두 양의 차이로 관계를 파악함
예) 테이블과 앉을 수 있는 사람 수가 처음에는 1만큼 차이가 나고, 그 다음은 2만큼 차이가 나고, 그 다음은 3만큼 차이가 나요.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">공
변
적</td><td>부분적 공변</td><td>· 두 양이 서로 관련지어 어떻게 변화하는지 단일 사례에서 파악함
예) 지금 있는 테이블이 다해서 4개니까 2명이 더 늘어나면 테이블도 하나 더 필요하니까요.</td></tr>
<tr><td>모호한
경향성</td><td>· 두 양이 서로 관련지어 어떻게 변화하는지 구체적인 값이 아닌 증가 혹은 감소로만 파악함
예) 테이블이 점점 늘어나면 사람도 늘어나요.</td></tr>
<tr><td>공변적</td><td>· 두 양이 서로 관련지어 어떻게 변화하는지 파악함
예) 빵의 수가 하나씩 증가할수록, 스티커 개수도 하나씩 증가해요.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">대
응
적</td><td>부분적 대응</td><td>· 구체적인 값으로 두 양 사이의 일반화된 관계를 파악함
예) 똑같이 규칙대로 스티커 한 장, (빵) 한 개 이렇게 돼요.</td></tr>
<tr><td>대응적</td><td>· 두 양 사이의 일반화된 관계를 파악함
예) 빵과 스티커의 개수가 똑같아요.</td></tr>
</table>

부분적 관계 파악의 경우 구체적인 값을 찾는 것과 과제의 조건을 제시하는 경우로 나눠볼 수 있었다. 전자는 예를 들어, “만약에 빵이 4개 있으면, 스티커 4개 있는 거”처럼 주어진 독립변수에 따른 종속변수의 값을 구하는 것인 반면에, 후자는 “빵이 하나씩 나올 때 스티커도 하나씩 나오는 규칙이요.” 혹은 “테이블 하나당 사람이 두 명 앉는 규칙이요.”처럼 과제의 조건을 관계로 파악하는 것이었다. 이 경우 두 양이 서로 어떻게 관련되어 있는지는 알 수 있지만 어떻게 변화하는지는 알 수 없다.

일반적 관계 파악의 경우 선행 연구에서처럼 크게 재귀적 관계, 공변적 관계, 대응적 관계 나눠서 분석할 수 있었으나, 기존 연구에서 다루지 않은 두 변량의 차로 관계를 파악한 사례도 드러나 전체 4가지로 나눠서 분석하였다. 첫째, 재귀적 관계 파악의 경우 한 양의 변화만 살펴본 것으로 “스티커의 수가 1씩 더 커져요.”와 같이 종속변수의 변화만 파악한 것이다. 본 연구에서는 학생들이 재귀적 관계 파악의 사례가 많지 않았는데, 그 이유는 과제 자체가 두 양을 명확히 언급하고 있으며 면담에서 두 양의 관계에 초점을 맞춰 질문했기 때문으로 추측된다. 다만, 어떤 학생은 상대적으로 먼 값에 대해서도 재귀적으로 관계를 파악하는 경우가 있었는데, 예를 들면, <에피소드 1>과 같다.

<에피소드 1: 먼 값에 대해서도 재귀적으로 관계를 파악하는 경우, 과제 3, 8세>

T: 도연아, 이거 어떻게 이렇게 쉽게 바로바로 할 수 있었어요?
S: (사람의 수를 가리키며) 둘씩 더해주면 되니까…….
(중략)
T: 이 20이라는 건 어떻게 그렇게 금방 나왔어요?
S: (표에서 10을 가리키며) 그냥 숫자 없이도 여기다가 2씩 더하면 되니까…….
T: 어, 근데 여기에다가 2를 더하면 12잖아요?
S: 아니, 여기 없는 수도 생각해서 더해요.

위 학생은 사람의 수를 가리키며 ‘둘씩 더해주면 되니까…….’ 라는 대답을 했다. 이를 보았을 때 사람의 수가 2씩 증가한다고 재귀적으로 관계를 파악하여 문제에 대한 답을 구하고 있음을 알 수 있다. 면담자에 의해 ‘테이블의 수가 10일 때 사람의 수는 몇 명인가?’ 라는 질문을 받았을 때도 학생은 20이라는 대답을 정확히 했는데, 이 문제를 해결할 때 없는 숫자까지도 생각해서 2를 여러 번 더하여 구했다. 이를 보았을 때, 단순히 앞에 주어진 숫자에다 2를 더하는 전략을 이용하는 것이 아니라, 생략된 과정까지도 염두하고 있는 것을 볼 수 있다.

둘째, 기존에 살펴보지 못했던 관계 파악의 유형이 본 연구에서 드러났는데, <에피소드 2>처럼 두 변량의 차로 새로운 제 3의 변량을 만들어 내면서 두 양 사이의 관계를 파악하는 경우이다.

<에피소드 2: 두 변량의 차를 새로운 양으로 인식하는 경우, 과제 3, 7세>

T: 자 그러면 이 숫자 사이의 관계를 한번 찾아볼게요. 이 숫자들 사이엔 어떤 관계가 있나요?
S: (테이블의 숫자를 손가락으로 쭉 따라가면서) 점점 늘어나면, 사람도 늘어나요.
T: 테이블의 수가 늘어나면 사람의 수도 늘어나는구나.
S: (함수표의 첫 열을 가리키며) 여긴 1개 차이나요.
T: 그럼 그 다음은요?
S: 2 차이나요.
T: 그럼 (3열을 가리키며) 여기는요?
S: 3개가 차이나요.
T: 그러면 우리가 이 표 전체를 봤을 때 어떤 관계가 있다고 말할 수 있을까요?
S: 테이블이 많아지면 사람의 수도 많아진다.

이처럼 새로운 제 3의 변량을 가지고 관계를 파악하는 것은 기존에 주어진 변량 외에 새로운 변량을 만들어 냈다는 점과 관계를 파악하는 새로운 방법을 찾았다는 데 의미가 있다. 하지만 초등학교 학생의 수준에서 이러한 관계 파악을 통해 두 양 사이의 관계를 일반화하기는 어렵다는 현실적인 한계가 있다.

셋째, 공변적 관계 파악의 경우 학생 반응을 분석한 결과 좀 더 세부적으로 ‘부분적인

가, 일반적인가', '전체적인 경향성인가, 구체적인 변화량인가', '두 변량이 명확하게 드러났는가, 드러나지 않았는가'로 나눌 수 있었다. 이러한 기준에 따라 우선 두 양이 서로 관련지어 어떻게 변화하는지 단일 사례에서 파악했다면 '부분적 공변'으로 분류하였다. 구체적인 예로 과제 3에서 사람이 10명일 때 테이블 개수를 구하는 문제에서 "지금 있는 테이블이 다해서 4개니까 2명이 더 늘어나면 테이블도 하나 더 필요하니까."라는 학생의 발언을 살펴보면, 기존에 테이블 4개에 사람이 8명이라는 값에서 사람이 2명 늘어나면 테이블이 1개 늘어난다는 양 사이 관계를 이용하여 사람이 10명일 때 테이블의 수를 구했다. 이와 비슷한 예시로 사람이 70명일 때 테이블 개수를 구하는 문제에서 "2가 20이면 40이고 2 5 10해서 책상 수가 다섯인데, 2 5 10 더하기 2 5 10 해서 35"라는 학생의 발언을 살펴보면, 두 양을 정확히 언급하지는 않았지만 테이블이 20개일 때 사람은 40이고 책상 수가 5개 늘 때마다 사람은 10명씩 늘어나므로 이러한 과정을 3번 반복하여 사람이 70명일 때 테이블의 수를 구했다는 것을 알 수 있다. 이는 일반적인 관계를 설명한 것은 아니지만 즉, 사람이 10명 늘어나면 테이블이 5개 늘어난다는 부분적인 양 사이 관계를 이용하여 값을 구하기는 했지만 학생이 사람 수 70을 구하기 위해 선택적으로 전체 공변 중 하나의 예를 선택했다고 볼 수 있다. 따라서 이러한 학생의 관계 파악의 사례를 '부분적 공변'으로 분석하였다.

한편, 두 양이 서로 관련지어 어떻게 변화하는지 구체적인 값이 아닌 증가 혹은 감소로만 파악했다면 '모호한 경향성'으로 분류하였다. 구체적인 예로 "테이블이 점점 늘어나면 사람도 늘어나요."처럼 한 양이 증가할 때 다른 한 양도 증가한다든지, "빵의 수가 더 많아지면 스티커가 더 많아지고, 빵의 수가 적어지면 스티커가 더 적어져요."처럼 한 양이 감소할 때 다른 한 양도 감소한다든지 하는 양 사이 관계를 파악하고는 있지만 구체적으로 어떻게 변화하는지는 파악하지 못한 것이다. 또한 이 때 두 양이 서로 관련지어 어떻게 변화하는지 알고 있으나 두 양이 무엇인지 명확히 밝히지 않는 경우가 많았다. 예를 들어, "빵의 수에 따라 한 장씩 추가됩니다."는 빵의 수에 따라 스티커의 개수도 한 장씩 늘어난다는 의미지만 한 변량만 명확하게 언급했다. 유사하게 "(빵의 수와 스티커 개수가) 똑같이 늘어나요.", "(빵의 수와 스티커 개수가) 늘어나는 게 똑같아요.", "한 장씩 한 장씩 똑같이"와 같이 두 변량을 모두 생략한 경우도 있었다. 본 연구에서는 변량을 명확히 밝히지 않은 경우가 많이 나타났는데 그 이유는 면담 질문지에서 "빵의 수와 스티커 개수 사이에서 계속 변하지 않고 나타나는 관계가 있니?"에 대한 보충 질문으로 "빵을 한 개씩 더 더할 때마다 스티커 개수가 어떻게 변하는지 설명할 수 있니?"를 제시했기 때문으로 추측된다.

마지막으로 대응적 관계 파악의 경우 좀 더 세부적으로 '부분적인가, 일반적인가', '두 양이 무엇인지 명확하게 드러났는가, 드러나지 않았는가'를 기준으로 구분하였다. 이러한 기준에 따라 앞서 공변적 관계 파악의 경우처럼 구체적인 값으로 두 양 사이의 일반화된 관계를 파악했다면 '부분적 대응'으로 분석하였다. 구체적인 예로 "똑같이 규칙대로 스티커 한 장, 한 개 이렇게 돼요."라는 학생의 발언을 살펴보면, 학생은 빵의 수와 스티커 개수가 같다는 관계를 인식하고 있으나 이를 '한 장, 한 개'라는 부분적인 예시를 들어 파악하고 있다. 이는 일반적인 관계 즉 두 양이 똑같다는 것을 설명하기 위해 스티커가 한 장일 때 빵도 한 개라는 것을 예로 들었다는 것이다. 단 학생이 이러한 관계가 변함없이 모든 경우 적용된다는 것을 알고 있는지는 알 수 없다.

대응적 관계 파악의 경우에서도 두 양 사이의 일반화된 관계를 파악하기는 하지만, 두 양이 무엇인지 명확히 밝히지 않는 경우가 있었다. 예를 들어 "1개씩 더 많아진다는 규

칙이요.” 라는 것은 “(스티커의 수가 빵의 수보다)1개씩 더 많아진다는 규칙이요.” 라는 의미로 이해할 수 있다. 〈에피소드 3〉은 과제 2에 대한 면담 과정을 나타낸 것이다. 학생은 “얘는 적구요, 얘는 하나씩 더 많으니까” 라고 관계를 파악하고 있는데, 면담자의 질문 내용에 답하는 과정을 보면, 스티커의 수가 빵의 수보다 하나 더 많다는 것을 파악했음을 알 수 있다. 그러나 그런 관계를 파악하는 과정에서 두 변량을 모두 생략하거나 또는 한 변량을 생략하는 경우가 많았다. 이는 원래 질문에서 예를 들어 “빵의 수와 스티커 수 사이에 어떤 관계가 있을까?” 와 같이 두 변량을 언급했기 때문에 중복을 방지하기 위해서 학생들이 생략했거나, 학생들이 관계를 나타낼 때 두 변량을 언급하는 것이 불필요하다고 생각했을 것으로 추측된다.

<에피소드 3: 변량을 정확히 지칭하지 않고 관계 파악하는 경우, 과제 2, 8세>

T: 이번에는 빵의 수와 스티커 수 사이에 어떤 관계가 있을까요?

S: 어, 얘는 1개씩……, 조금씩 얘(빵)는 적구요. 얘(스티커)는 하나씩 더 많으니까.

T: 뭐가 뭐보다 하나 더 많은데요?

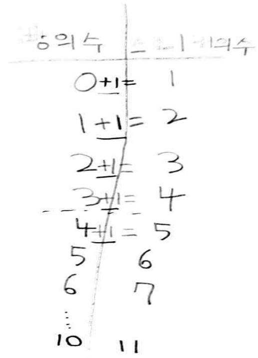
S: 스티커의 수가요.

T: 스티커의 수가 뭐의 수보다 하나 더 많아요?

S: 빵의 수보다요.

T: 스티커의 수가 빵의 수보다 하나 더 많아요?

S: 네.



본 연구에서 기대되는 가장 명확한 관계 파악은 두 양 사이의 관계를 일반적인 것으로, 그리고 그 두 변량이 무엇인지 명확하게 드러나게 하는 것이다. 예를 들어 “빵과 스티커의 수가 똑같아요.”, “테이블 수를 2배하면 사람 수예요.”, “테이블 수를 두 번 더하면 사람 수예요.” 와 같이 파악하는 것이다. 그러나 7~9세의 어린 학생들이었다는 점과 과제 및 면담 과정에서 두 양이 정확히 지칭된다는 점에서 학생들이 관계를 공변적으로나 대응적으로 파악한 경우에도 두 변량을 굳이 말하지 않았을 것으로 생각된다.

한편, 학생들이 두 양 사이의 관계를 파악하는 과정에서 두 가지 주목할 만한 점이 있었다. 첫째, 두 양 사이의 관계를 파악할 때 독립변수와 종속변수를 바꿔서 질문함으로써 과제 상황을 제대로 이해하고 문제 상황에서 두 변량이 무엇인지 그리고 어떤 관계가 있는지 보다 명확히 할 수 있었다. 〈에피소드 4〉는 이에 대한 예로, 과제 2에 대해 빵의 수가 주어지고 스티커의 수를 묻는 대신에, 거꾸로 스티커의 수를 제시하고 빵의 수를 묻는 상황에서 발생한 것이다.

<에피소드 4: 독립변수와 종속변수를 바꿔서 묻기, 과제 2, 9세>

T: 선생님이 가지고 있는 스티커가 5개였어. 그 때 빵은 몇 개일까요?

S: 5개.

T: 스티커가 5개일 때 빵도 5개구나. 그럼 한 번 거꾸로 질문해 볼게. 선생님이 빵이 5개라면 스티커가 몇 개일까요?

S: 5개.

T: 선생님이 빵을 하나도 안 샀을 때 스티커는 몇 개였어요?

S: 없어요.
T: 없어요? 그럼 선생님이 선물 받았던 스티커는 잃어버렸나요?
S: 1개.
T: 그럼 선생님은 원래 1개 가지고 있는 거예요?
S: 네.

(중략)

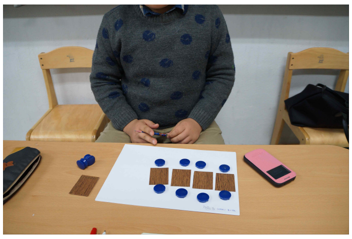
T: 그럼 선생님이 스티커를 5개 가지고 있으면 빵은 몇 개일까요?
S: 4개.

<에피소드 4>에서 종속변수에 대한 독립변수의 값을 잘 구했던 학생이 독립변수에 대한 종속변수의 값에서 오류를 보인 뒤 다시 종속변수에 대한 독립변수의 값을 구할 때 동일한 오류 즉, 종속변수와 독립변수의 값이 같다는 관계를 그대로 적용한 것을 살펴볼 수 있었다. 이후 다시 문제의 조건을 상기시킨 뒤 독립변수에 대한 종속변수의 값을 구해보고 다시 종속변수에 대한 독립변수의 값을 구하는 과정을 거치자 오류를 수정할 수 있었다. 이처럼 역으로 질문하기, 문제 조건 상기시키기의 방법을 사용하자, 학생이 스스로 관계를 잘못 적용한 것을 인식하고 값을 수정하였으며, 이 과정에서 관계를 좀 더 명확하게 파악할 수 있었다.

둘째, 두 양 사이의 관계를 파악할 때, 특히 가까운 값보다 먼 값을 구하는 것과 독립변수에 대한 대응값보다 종속변수에 대한 대응값을 구하는 것을 더 어려워하였는데, 이 때 함수표나 기하패턴 등 보조적인 수단이 도움이 되었다. 본 연구에서는 세 가지 과제를 사용하였는데, 과제 1은 아마도 두 양의 값이 같았기 때문에 대부분의 학생들이 가까운 값, 먼 값 그리고 독립변수에 대한 대응값, 종속변수에 대한 대응값을 모두 잘 찾았다. 그러나 과제 2와 과제 3에서는 어려움을 겪었는데 이 때 면담과정에서 함수표를 만들어 보거나 기하패턴을 활용하여 과제의 구조를 발견하고 관계를 파악할 수 있었다. <에피소드 5>는 과제 3에 대해서 기하적 특성을 이용하여 함수 관계를 파악한 경우이다.

<에피소드 5: 패턴에서 기하적 특성을 찾아 함수 관계를 파악한 경우, 과제 3, 7세>

T: 그럼 어떻게 이렇게 금방 대답이 나왔어요?
S: 어……, 테이블에는 두 자리가 있으니까요. 하나, 둘, 세 개가 놓여 있으면 사람이 (기하패턴의 위쪽을 가리키며)이쪽에 3명, (기하패턴의 아래쪽을 가리키며)이쪽에 3명이 있어서, 3명, 3명은 6명이예요.



위 학생은 두 양 사이의 관계를 말 또는 변수로 명확하게 표현하지는 못했지만, 구체적인 값을 구할 때 기하패턴에서 파악한 관계, 즉 테이블과 같은 수를 두 번 더한다는 것을 활용하여 어려움 없이 구체적인 값을 구했다. 다른 학생들의 경우 테이블 수에 2배하거나 혹은 2씩 증가하는 관계를 이용한 반면, 위 학생은 초반부터 이러한 관계를 구체적인 값을 구하는데 활용할 수 있었으며, 이는 패턴을 잘 활용한 결과라 볼 수 있다. 이렇듯 과제의 특성에 따라 패턴의 구조적 또는 기하적 특성이 관계 파악에 도움을 주는 경우가 있음을 알 수 있다.

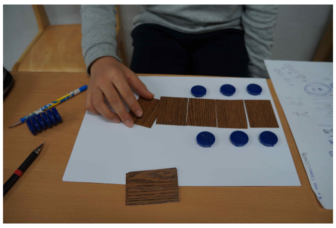
2. 관계 표현의 양상

가. 관계 표현의 다양성

학생들이 관계를 표현하기 위해 말, 몸짓, 그림, 변수 등 여러 가지 방법을 사용했다. 특히 7~9세 학생의 경우 변수 개념을 이해하기 힘들기 때문에 대부분 말, 몸짓, 그림 등의 방법으로 관계를 표현했다. <에피소드 6>은 과제 3에 대해서 몸짓으로 관계를 표현한 경우이다.

<에피소드 6: 몸짓으로 관계 표현, 과제 3, 7세>

T: 그러면, 이번에는 테이블이 5개 있대요.
S: 어, 그건 10개.
T: 이건 바로 계산을 했네요?
S: (책상 위에 놓인 패턴을 가리키며) 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯 여기까지니까, 여기 다섯, 이쪽에 다섯 명이 있을 거구요. 그다음에 여기도 다섯 명이니까, 다섯, 다섯, 열 명이에요.
(중략)
S: (패턴을 가리키며) 10개, 10개면 20?
T: 그렇지. 10개, 10개를 더하면 20이에요. 그럼 만약 테이블이 20개라면?
S: 음……, 40?



<에피소드 6>에서는 학생이 기하 패턴을 가리키는 몸짓으로 관계를 표현했다. 7세의 경우 아직 곱셈에 대해 학습하지 않은 상태로 $y=2x$의 함수 관계를 $y=x+x$로 파악할 수밖에 없었는데 위 사례에서는 학생이 기하 패턴에서 이러한 관계를 구조적으로 파악하여 몸짓을 표현한 것으로 보인다. 테이블 수와 동일하게 위, 아래에 각각 사람이 앉아있다는 관계를 손가락을 가리키며 “(위쪽 사람을 가리키며)여기 다섯, (테이블을 가리키며)이쪽에 다섯 명이 있을 거구요. (아래쪽 사람을 가리키며)그 다음에 여기도 다섯 명이니까, 다섯, 다섯, 열 명이에요.” 라고 말하며 테이블 수를 두 번 더하면 앉을 수 있는 사람의 수가 나온다는 것을 표현하였다. 특히 이러한 몸짓을 사용한 표현은 과제 3에서 두드러지는 경향을 볼 수 있는데 이는 과제 3이 관계를 구조적으로 파악하기 용이한 과제이며 다른 과제 1, 2에 비해 더 복잡하기 때문으로 추측된다. 비슷한 이유로 <에피소드 7>에 제시한 바와 같이 과제 3에서 그림으로 관계를 표현한 사례도 찾아볼 수 있었다.

<에피소드 7: 그림으로 관계 표현, 과제 3, 8세>

T: 그럼 이번에는 사람이 10명 있어. 테이블은?
S: 5개.
T: 이건 어떻게 했어요?
S: (빈 종이에 점을 위, 아래로 번갈아가며 5쌍 찍으면서) 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, 여섯, 일곱, 여덟, 아홉, 열. (점과 점 사이를 가리키며) 그리고 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯.

〈에피소드 7〉을 살펴보면 학생이 종속변수(앉을 수 있는 사람 수)에 대한 대응값을 구하는 과정에서 사람은 두 개로 이루어진 한 쌍의 점으로 테이블은 두 점 사이로 표현하였는데 이는 사람 2명 당 테이블이 1개라는 관계를 그림으로 표현한 것이다. 특히 사람을 무작위로 찍은 것이 아니라 2개씩 열을 맞춰 쌍으로 그렸다는 점, 한 쌍의 점을 단위로 독립변수를 구했다는 점으로 보아, 학생이 문제의 조건을 이해하고 있고 명확하지는 않지만 두 양 사이의 관계를 인식하고 있는 것으로 보인다. 하지만 아직 두 양 사이의 관계를 일반화하지 못하며 한 양이 제시되었을 때만 다른 한 양을 구할 수 있는 수준으로 생각된다.

본 연구에서 학생들은 관계를 말로 표현한 경우가 가장 많았는데, 관계를 어떻게 파악하고 있는지 명확하게 드러나지 않는 경우가 많았다. 이에 후속 질문을 통해 학생들의 관계 표현을 정교화시키는 과정이 필요했다. 면담 결과 학생들은 정당화와 관련된 질문 즉, 어떻게 구체적인 값을 구했는지 설명하도록 하는 질문에서 관계를 자연스럽게 표현하는 경향을 보였으며, 두 양 사이의 일반화된 관계를 표현하기 어려워하는 것과는 달리 구체적으로 독립변수가 변할 때 종속변수가 어떻게 변화하는지 질문하면 관계를 훨씬 더 잘 표현할 수 있었다.

나. 변수 의미 및 표현의 다양성

본 연구에서는 7~9세 학생들이 어떻게 변수를 사용하여 일반화된 관계를 표현하는지를 살펴보기 위해서, 면담 중에 변수를 도입하였다. 면담한 12명의 학생들 중에서 8세 학생 1명만이 변수를 스스로 도입했으며, 그 외의 학생들은 스스로 변수를 도입하지 못했다. 이렇게 변수를 스스로 도입하지 못하는 학생에게는 교사가 먼저 준변수를 소개한 후, 변수를 소개하는 순서로 면담을 진행하였다. 학생의 다양한 변수 사용을 분석함으로써 〈표 6〉의 기존 틀보다 더 상세히 학생 반응을 정리하여 〈표 8〉과 같이 학생들의 변수 표현 유형을 정리하였다.

<표 8> 학생들이 파악한 변수 의미와 표현의 예시

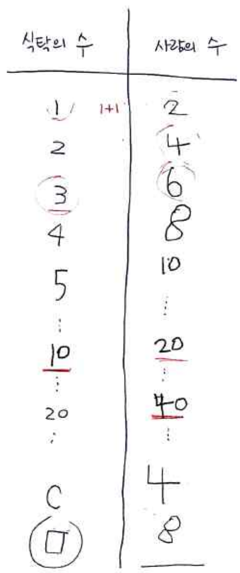
변수 의미		변수 표현의 예
구체적인 값으로 인식	근거 없음	· 변수를 구체적인 값으로 인식하지만 근거는 알 수 없음
	기하적 특징	· 변수의 기하적 특징을 근거로 구체적인 값으로 인식함 예) □의 꼭짓점과 변을 근거로 4로 인식함
	알파벳 순서	· 알파벳 순서를 근거로 구체적인 값으로 인식함 예) X 더하기 1을 Y로 표현하거나 A 더하기 1을 B로 표현함
동시에 다양한 값을 나타냄	미지수로 파악	· 변수를 미지수로 파악하여 그에 해당하는 종속변수의 값도 알 수 없다고 생각하여 같은 변수 혹은 관계없는 다른 변수로 표현함 예) 빵이 B개일 때, 빵 개수를 모르니까 스티커 개수도 몰라서 B개라고 표현
	미결정의 양으로 파악	· 변수를 미결정의 양으로 파악하여 그에 해당하는 종속변수의 값도 어떤 수든지 될 수 있기 때문에 같은 변수 혹은 관계없는 다른 변수로 표현함 예) 과제 2에서 빵과 스티커의 수가 다르지만 □가 어떤 수든지 될 수 있으므로 빵이 □개 일 때, 스티커의 수도 □개로 표현함, 혹은 빵이 □일 때, 스티커가 B개라고 표현함

수처럼 인식하지 못함		· 변수를 계산할 수 없어 수처럼 표현할 수 없다고 생각함 예) ●+●는 계산을 못하기 때문에 쓰지 못하거나 ●●로 표현함
변수의 의미를 알고 관계를 표현함	한 변수 사용	· 한 변수만을 사용하여 두 양 사이의 관계를 표현함 예) 빵의 수와 스티커의 수가 같기 때문에 둘 다 B로 표현하며 각각이 빵의 수와 스티커의 수를 나타낸다는 것을 앎
	두 변수 사용	· 두 양에 각각 다른 변수를 사용하여 관계를 표현함 예) 빵의 수와 스티커의 수를 각각 X와 Y로 표현하며 X에 1을 더하면 Y와 같다는 관계를 표현할 수 있음

첫째, 변수를 구체적인 값으로 인식하는 것은 변수의 개념에 대해 학생들이 받아들이기 어려워하기 때문에 발생한 것으로 보인다. 특히 구체적인 값으로 인식하는데 있어 근거 없이 특정한 값을 대입하는 경우도 있지만, 변수의 기하적 특징이나 알파벳 순서 같은 나름의 규칙을 통해 특정한 값을 대입하는 경우도 있었다. 구체적으로 〈에피소드 8〉에서는 과제 3을 해결하면서 학생이 변수의 모양에 근거하여 특정한 값으로 인식한 경우이다.

<에피소드 8: 변수의 기하적 특징을 근거로 특정한 값으로 인식하는 경우, 과제 3, 7세 >

T: 그러면 이번에는 식탁이 C개 있다고 해 봅시다. 그때 앉을 수 있는 사람의 수는 몇 명일까요?
S: C개, 그러면……. (함수표의 왼쪽에 C를 쓰고, 오른쪽에 4를 쓴다.)
T: 4명. 그건 왜 그렇게 생각했어요?
S: (알파벳 C의 양 끝을 가리키며) 여기 2개 있잖아요. 이게 두 자리에요. 그러면 이게 두 개니까 하나, 둘, 셋, 넷.
(중략)
T: 그럼 여기 있는 □를 한 번 살펴볼게요. 우리가 또 식탁의 수를 잘 몰라요. □개 있다고 했을 때 사람의 수는?
S: (표의 오른쪽에 8을 쓴다.)
T: 그건 왜 그렇게 생각했어요?
S: (□의 뾰족한 꼭짓점 4개를 하나씩 가리킨다.)
T: 아, 그래서 4 더하기 4 해서 8?
S: 그리고 (선분 4개에 동그라미치며) 여기도 하나, 둘, 셋, 넷.

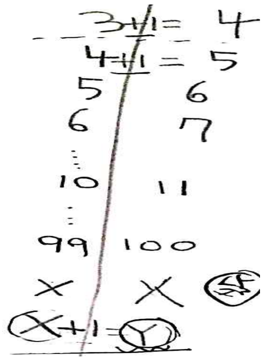


과제 3을 해결하면서 학생은 준변수(□)나 문자를 사용해서 독립변수(식탁의 수)를 표현하는 것을 받아들였다. 하지만 알파벳 C는 양 끝이 2개 있으므로 숫자 2로 인식하고, □는 꼭짓점이 4개이며 변도 4개이므로 숫자 4로 인식했다. 즉, 변수의 모양에 초점을 두어 변수를 특정한 값으로 인식한 후 자신이 알고 있는 규칙을 적용한 것이다. 이러한 경향은 과제 1과 2에서보다 과제 3에서 더 두드러지게 나타났는데, 과제의 소재가 테이블이었기 때문에 좀 더 변수의 모양에 집중했을 것으로 추측된다. 한편 알파벳 순서를 근거로 변수에 특정한 값을 대입하는 학생도 있었다. 〈에피소드 9〉에서는 학생이 과제 2를 해결하면서

알파벳 순서에 따라 변수에 특정한 값을 대입했다. 이 학생은 앞서 과제 1에서 관계를 잘 찾았으며, 변수를 이용해 관계를 잘 표현했던 학생이었다.

<에피소드 9: 변수의 알파벳 순서를 근거로 구체적인 값으로 인식하는 경우, 과제 2, 8세>

(학생이 빵의 수와 스티커의 수를 둘 다 X로 표현함)
T: 그럼 스티커의 수를 우리가 뭐라고 쓰면 될까요?
S: Y요.
T: 그럼 표에 한 번 써 봐요.
S: (표의 왼쪽에 X, 오른쪽에 Y를 쓴다.)
(중략)
T: 그럼 이 X와 Y 사이에는 어떤 관계가 있어요?
(학생이 잘 대답하지 못하자 관계의 의미에 대해 설명함)
S: (X 옆에 '+1'을 쓰면서 중얼거리며) 더하기 1.
T: 그럼 뭐가 나오는 건데요?
S: Y.



위 학생은 맨 처음 빵의 수와 스티커의 수를 모두 X로 표현했다가 교사가 "이 수는 정해져 있는 숫자야. 그러면 이 X와 이 X가 나타내는 숫자는 같아야 하는 걸로" 라며 변수가 동일한 식에서는 동일한 값을 의미한다는 것을 알려주자 스티커의 수를 Y로 표현하였다. 이에 연구자가 학생이 어떤 의미로 서로 다른 변수를 사용한 것인지 알기 위해 변수 X와 Y 사이에 어떤 관계가 있는지 물었지만 학생이 잘 대답하지 못했고, 이에 관계의 의미에 대해 다시 한 번 설명하고 표를 전체적으로 다시 한 번 살펴볼 수 있도록 제안했다. 그러자 학생은 앞서서 함숫값 사이에 '+1' 이라고 썼던 것을 똑같이 X와 Y 사이에 '+1' 라고 쓰고 X에 1을 더하면 Y가 된다고 말했다. 이로써 학생이 서로 다른 두 양을 각각 다른 변수로 나타냈으며, 알파벳 문자 순서관계를 이용하여 빵과 스티커의 수 사이의 관계를 표현했다. 즉 X 다음에 Y가 온다는 알파벳 순서를 통해 빵의 수보다 스티커의 수가 하나 많다는 관계를 표현한 것이다. 후속 질문에서도 빵의 수를 A로 두었을 때 스티커의 수를 B로 나타내었으며, 빵의 수를 B로 두면 스티커의 수를 C로 표현했다.

둘째, 학생들은 변수를 동시에 다양한 값을 나타내는 것으로 파악하기도 하였다. 본 연구에서 학생들에게 변수를 도입할 때 미지수와 미결정의 양이라는 두 가지 개념으로 소개하였다. 즉 변수의 구체적인 값은 정해지지 않았지만 어떤 수든지 될 수 있다는 미결정의 개념과 변수가 구체적으로 어떤 값인지 알 수 없다는 미지수의 개념을 상황에 따라 설명하였다. 하지만 7~9세 학생들에게 변수에 대한 이러한 개념은 받아들이기 어려운 측면이 있었으며, <에피소드 10>과 같이 학생들은 변수가 알 수 없는 값이라는 것에 초점을 맞추는 경향이 있었다.

<에피소드 10: 변수를 ‘모른다’의 의미로 사용한 경우, 과제 2, 9세>

T: 그럼 우리 네모 대신에 알파벳 B라고 한 번 써볼까요? 왜냐하면 네모라고 쓰면 이게 도형인지 숫자인지 헷갈릴 수 있으니까요. 그러면 우리가 빵의 개수를 B라고 나타냈을 때 스티커 개수는 몇 장일까요?

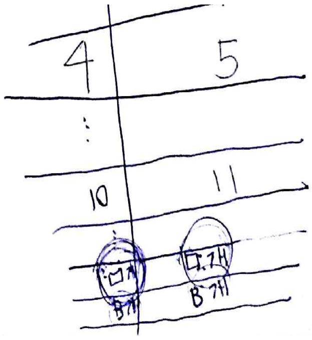
S: B개.

T: 왜 B개예요?

S: B개는 모르는 수니까 빵 개수를 모르니까 스티커 개수도 몰라서.

T: 둘 다 몰라서 그냥 모른다고 쓴 거네. 빵 개수를 모르면 스티커 개수도 모른다?

S: 네.



<에피소드 10>에서처럼 학생은 독립변수의 값을 모르기 때문에 당연히 종속변수의 값도 알 수 없고 따라서 두 양을 모두 변수로 표현한다는 생각이다. 이와 유사하게 서로 값이 다른 두 변량을 A, B처럼 다른 변수로 표현한 경우에도 같은 오류가 나타난 경우도 있었다. 후속질문을 통해 각 변수의 의미를 질문한 결과 독립변수와 종속변수의 값은 서로 다르기 때문에 다른 변수 A, B로 표현했지만, 독립변수의 값을 모르기 때문에 종속변수의 값도 알 수 없다는 의미로 표현했다는 것이다. 이러한 변수 개념에 대한 오류는 <에피소드 11>처럼 미결정으로 변수를 이해한 경우도 유사하게 나타나는 것을 확인할 수 있었다.

<에피소드 11 : 변수를 ‘동시에 여러 수를 나타낼 수 있다’는 의미로 사용한 경우, 과제 2, 8세>

S: 얘네 둘 다 수를 모르잖아요. 그러니까 어쨌든 모르니까 아무거나 예시로 나타낼 수 있으니까요. 얘는 만약에 이런 수를 넣으면 얘는(함수표의 왼쪽에 쓴 X를 가리키며) 99개고, 그러면 얘는(함수표의 오른쪽에 쓴 X를 가리키며) 100이 되는 거예요.

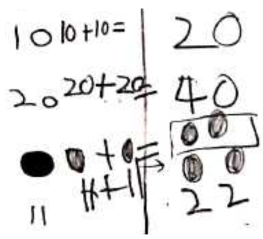
위 학생은 변수가 어떤 수든지 될 수 있다는 의미를 한 번에 여러 수를 의미할 수 있다는 의미로 받아들여 서로 다른 값에 같은 변수를 사용하여 표현하였다. 즉 두 양이 다르다는 것을 인식하고는 있지만, 미결정의 양을 언제나 X로 표현하는 것이다. 두 양을 다르게 인식하고 있는지 확인하기 위한 후속질문에 “그럼 두 개가 똑같은데? 원래 가지고 있던 스티커는 어디 갔어?” 라고 질문하자 두 변수에 각각 특정한 값을 부여하여 자신의 생각을 설명했다.

셋째, 변수를 수처럼 인식하지 못하기 때문에 연산 기호를 함께 쓰는 것에 대해 불가능하다고 생각하는 오류도 드러났다. <에피소드 12>처럼 학생은 테이블 수를 두 번 더하면 앉을 수 있는 사람의 수가 나온다는 관계를 알고 있지만 변수가 수와 다르기 때문에 덧셈 기호를 써서 표현하지 못했다. 따라서 덧셈 기호 없이 변수를 두 번 적어서 사람의 수를 표현했다. 이러한 오류를 수정하기 위해 앞에서 찾은 대응값의 쌍을 살펴보며 식으로 표현해 보게 했고, 이후 다시 변수로 돌아와 앞에서처럼 표현해보도록 했다. 이에 학생은 ‘●+●=’ 라고 표현하며 변수와 연산 기호를 함께 사용하였으나 다시 종속변수를 써보도

록 했을 때 처음처럼 두 변수를 두 번 적어서 표현했다. 이는 학생이 '●+●' 가 하나의 수를 의미한다고 생각하지 못하며 자연수처럼 표현하기 위해 연산 기호를 쓰지 않아야 한다고 생각한 것으로 추측할 수 있다.

<에피소드 12 : 변수를 수처럼 인식하지 못한 경우, 과제 3, 8세>

T: 이 동그라미는 1이 될 수도 있고, 2가 될 수도 있고, 20이 될 수도 있고, 어떤 숫자든 들어갈 수 있어요. 그러면 그 때의 사람의 수를 우리가 어떻게 나타내야 할까요?
S: (● 옆에 ●●라고 그린다.)
(중략)
T: 그러면 아까랑 똑같은 관계를 적용해 보면 어떻게 쓸 수 있을까요?
S: (관계를 쓰는 자리에 '●+●='이라고 쓴다.)
T: 우와, 까만 동그라미 더하기 까만 동그라미라고 썼어요. 그럼 여긴(오른쪽) 어떻게 써야 할까요?
S: ('●●'를 쓴다.)



마지막으로, 변수를 통한 관계 표현이 잘 이루어진 경우가 있었는데, 이 경우에도 두 양에 2개의 서로 다른 변수를 사용하는지 같은 변수를 사용하는지에 따라 크게 나누어 살펴볼 수 있었다. 본 연구에서 대다수의 학생들은 두 양을 같은 변수를 사용하여 관계를 표현하였으며 단 한 명의 학생만 서로 다른 두 양에 다른 변수를 사용하여 관계를 표현하였다.

<에피소드 13 : 서로 다른 두 변수를 사용한 경우, 과제 2, 8세>

S: (표의 왼쪽에 X, 오른쪽에 Y를 쓴다.)
T: 그럼 얘(X)와 얘(Y) 사이에도 하나가 차이나는 거예요?
S: 아니요.
(중략)
S: 얘네 둘 다 수를 모르잖아요. 그러니까 어쨌든 모르니까 아무거나 예시로 나타낼 수 있으니까요. 얘는 만약에 이런 수를 넣으면 얘는(왼쪽 X) 99개고, 그러면 얘는(오른쪽 X) 100이 되는 거예요.
T: 우리가 앞으로 약속을 하자. 한 번 X라고 나타낸 수는 이 수는 뭔지는 몰라요. 하지만 이 수는 정해져 있는 숫자야. 그러면 이 X와 이 X가 나타내는 숫자는 같아야 하는 걸로 해요.
S: 응, 그럼 Y였구나. (왼쪽에 X, 오른쪽에 Y를 쓴다.)

이 학생도 맨 처음 서로 다른 두 양을 다른 변수로 표현하였을 때 변수를 앞서 설명한 '모른다' 는 의미로 사용하는 오류를 보였다. 하지만 구체적인 값의 예를 들어보게 하고, 다양한 대응값의 쌍을 다시 살펴본 후 서로 다른 두 변수의 관계를 설명하도록 하자, 다시 구체적인 값으로부터 관계를 인식하고 서로 다른 변수 사이의 관계를 설명하고 표현할 수 있었다. 이처럼 서로 다른 두 양에 서로 다른 변수를 사용하여 표현하는 것이 관계를 명확

하게 나타내는데 도움을 주지만 변수의 개념을 제대로 이해하지 못한 학생들에게 서로 다른 변수 2가지를 동시에 사용하는 것은 무리였기에 대다수의 학생들은 한 가지 변수를 가지고 관계를 표현했다. 특히 관계 표현에 있어 이전에 살펴보았던 구체값을 다시 한 번 살펴보는 것이 도움이 되었으며, 그 과정에서 표를 사용하는 경우가 많아 변수를 사용한 관계 표현에 있어서도 각 함수표에 적는 경우가 많았다. 이 때문에 함수표에 서로 다른 변수가 아닌 같은 변수를 사용하여 해당 칸에 적음으로써 서로 다른 변수를 사용하지 않아도 관계를 표현할 수 있게 되었다. 이러한 이유로 인해 같은 변수를 사용한 경우가 더 많은 것으로 보인다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 7~9세 학생들이 함수적 과제를 해결할 때 어떻게 두 양 사이의 관계를 파악하고 표현하는지 분석하였다. 이에 따른 결론 및 제언은 다음과 같다.

첫째, 본 연구에 참여한 어린 학생들도 두 양 사이의 관계를 파악할 수 있었다. 본 연구는 어린 학생들을 대상으로 하여 함수적 사고의 가능성을 탐색한 것으로 생각될 수 있다. 선행 연구를 참조하여 어린 학생들에게 적합한 과제 상황을 기반으로 하여 두 양 사이의 관계를 파악해 보도록 했을 때, 학생들은 완벽하지는 않지만, 여러 가지 사고에 기초하여 관계를 파악할 수 있었다. 우리나라에서 함수적 사고에 대한 연구가 주로 고학년에 집중되어 있고, 외국의 경우 유치원생까지 포함하는 등 저학년으로 그 연구 대상이 확대되고 있지만, 이 경우 대부분 학생 수준에 적합한 지도가 이루어진 후나 이루어지는 과정에서 학생들의 함수적 사고를 분석하는 경우가 많다. 이에 비해 본 연구는 기초 연구로써 우선 개별 면담 과정을 통해 학생들이 어느 정도로 주어진 과제 상황에서 두 양을 인식하고, 그 양의 관계를 파악하는지 알아본 것이라는 점을 감안하면 학생들의 함수적 관계 파악 능력은 상당히 고무적이라고 생각된다.

둘째, 본 연구에 참여한 어린 학생들은 두 양 사이의 관계를 말, 그림, 몸짓, 변수 등 다양한 방식으로 표현할 수 있었다. 7~9세 학생들이기 때문에 말로 표현하는 경우가 가장 많았으나, 주어진 과제 유형에 따라 그림이나 몸짓으로 표현하는 경우도 있었다. 최근 패턴의 일반화 과정에서 특히 저학년 학생들의 몸짓이나 언어의 중요성이 강조된다는 점을 감안하면, 함수적 사고 과정에서 이에 대한 연구가 보다 활성화될 필요가 있다. 또한 여건상 본 연구에서는 비디오 녹화를 할 수 없었지만, 관계를 파악하고 표현하는 과정에서 학생들의 몸짓과 언어를 연계하여 분석하기 위해서는 비디오 녹화가 필요해 보인다.

셋째, 본 연구에 참여한 어린 학생들은 두 양 사이의 관계를 파악하고 표현하는 데 어려움을 겪은 부분들이 있었다. 예를 들어, 관계를 파악할 때 가까운 값보다는 먼 값을 구할 때, 독립변수에 대한 대응값을 구할 때보다는 종속변수에 대한 대응값을 구할 때 어려움을 겪었다. 관계를 표현할 때는 두 양을 명확하게 지칭하지 않고 전체적인 경향성만을 표현하는 경우도 있었다. 또한 변수 표현과 관련해서는 구체적인 값으로 변수를 인식하거나 변수가 동시에 다양한 값을 나타낼 수 있다든지, 수로 인식하지 못하는 등의 여러 가지 오개념을 보이기도 했다. 이러한 어려움에 반하여 면담 과정에서 "이건 뭐야?"와 같은 발문을 통해 기하패턴, 표, 변수 등에서 각각이 의미하는 것이 무엇인지 계속해서 확인함으로써 학생들이 두 양을 명확하게 인식하고 표현할 수 있게 하였다. 또한 학생이 오답을

말했을 때 기하패턴으로 직접 보여주거나 문제의 조건을 다시 언급해주는 활동도 학생들이 스스로 오류를 수정할 수 있도록 도움을 주었다. 특히 학생이 표에서 재귀적으로 보지 않고 두 양에 집중할 수 있도록 한 행씩 살펴본 것, 변수에 특정한 값을 대입해 보는 활동은 학생이 두 양 사이의 관계를 파악하는데 도움을 주었다. 이와 같은 활동은 추후 저학년 학생들의 함수적 사고 능력을 신장시키고자 할 때 고려해야 할 요소로 논의해 볼 필요가 있다.

넷째, 방법론적인 측면에서 본 연구는 관계를 파악하고 표현하는 것과 관련하여 선행 연구를 기반으로 하여 기본적인 틀을 가지고 학생들의 함수적 사고 양상을 분석하기 시작하였으나, 학생들의 다양한 반응을 포함하고자 분석틀을 보다 상세화할 수 있었다. 예를 들어, 관계 파악의 경우 기존의 재귀적, 공변적, 대응적 관계 파악뿐만 아니라, 두 양 사이의 관계를 과제의 조건을 들어 설명하거나 특정한 값을 예로 들어 설명하는 경우도 있었고, 두 변량의 차를 새로운 제 3의 양으로 인식하여 두 양 사이의 관계를 파악하는 경우도 다. 이처럼 학생들은 다양한 방식으로 관계를 파악하였으며, 각각의 방식 내에서도 조금씩 그러나 의미 있는 차이가 드러났다. 또한 변수 표현과 관련해서도 7~9세 학생들을 대상으로 한 만큼 기존의 연구에서 밝히지 않았던 다양한 의미 및 반응을 제시할 수 있었다. 우리나라에서 미지수로서의 변수를 1학년부터 네모 모양으로 도입하는 것과 관련하여 어린 학생들을 대상으로 본 연구의 상세화된 분석틀을 기반으로 보다 체계화된 연구가 진행되기를 기대한다.

강조하건대, 초등학교에서 함수적 사고 능력의 발달이 중요시되는 것에 비해 실제 학생들을 대상으로 한 연구는 여전히 미흡한 실정이다. 특히 어린 학생들을 대상으로 한 연구는 매우 부족하다. 어려운 개념이기 때문에 무조건 늦게 도입하는 것이 아니라, 어떻게 도입하는 것이 학생들의 의미 있는 사고 발달에 도움이 되는지를 진지하게 고민하면서 초등학교에서 함수적 사고를 일관성 있게 체계적으로 지도하려는 노력과 관련 연구가 활성화되기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2012). **유치원 교육과정.** 교육과학기술부 고시 제2012-16호.

교육부 (2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호.

권보영 (2012). **초기 대수적 관점에 따른 초등학교 4학년 함수적 사고 지도 방안.** 한국교원대학교 석사학위논문.

김경혜 (2015). **4학년 '규칙과 대응' 단원의 함수적 사고 향상 지도 방안 탐색**. 한국교원대학교 석사학위논문.

김성준 (2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **학교수학, 5**(3), 343-360.

김정원 (2014). **초등학교 학생들의 함수적 사고의 특징 및 지도 방향 탐색.** 한국교원대학교 박사학위논문.

김정원, 방정숙 (2008). 초등학교 3학년 학생들의 함수적 사고 분석. **초등수학교육, 11**(2), 105-119.

방정숙, 선우진 (2016). 초등학교 수학 교과서에 제시된 패턴 지도방안에 대한 분석. **초등수학교육, 19**(1), 1-18.

방정숙, 최인영 (2016). **초등학교 3학년 학생들의 대수적 사고에 대한 실태 분석. 초등수학교육, 19**(3), 223-247.

변희현, 주미경 (2012). 우리나라 중학생의 함수 개념화 특성. **수학교육학연구, 22**(3), 353-370.

최지영, 방정숙 (2012). 초등학교 2, 4, 6 학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. **학교수학, 14**(3), 275-296.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing algebraic relationships in functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization; A global dialogue from multiple perspectives* (pp.5-23). Heidelberg: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In B. J. Dougherty & R. M. Zbiek (Eds.), *Essential understandings series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. M. (2015) Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 34-63

Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “Best Deal” problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). New York: Lawrence Erlbaum.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). New York: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J. swafford, J. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students’ reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). New York: Springer.

Radford, L. (2011). Grade 2 students’ non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization; A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Heidelberg: Springer.

Tanişli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

<Abstract>

Ability of Recognizing and Representing the Relations between Two Quantities by Seven to Nine Years Old Students

Pang, JeongSuk[3]; & Lee, YuJin[4]

Despite the importance and necessity of functional thinking in a primary school there has been lack of research in this area, specifically regarding young children. Given this, this study analyzed how students aged from 7 to 9 would figure out and represent the co-variational relationships in context-driven tasks. Semi-clinical interviews were conducted with a total of 12 students. Interview tasks included three types of functions: (a) y=x, (b) y=x+1, and (c) y=x+x. The results of this study showed that most students were able to figure out co-variational relationships in diverse ways. Some factors such as types of function or characteristics of tasks had an impact on how students recognized the relationships. The students also could represent the relationship in diverse ways such as gesture, picture, natural language, and variables. They usually used natural language, but had a trouble using variables when representing the relation between co-varying quantities. Based on these results, this study provides implications on how to foster functional thinking ability at the elementary school.

Key words: Relation, Functional Thinking, Generalization, Representation, Variables

논문접수: 2017. 01. 15
논문심사: 2017. 02. 17
게재확정: 2017. 02. 23

3) jeongsuk@knue.ac.kr
4) kjyjl4231@naver.com