한국초등수학교육학회지 21(1) 1-22. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 21(1) 1-22.
2017. 02. 28 February 28. 2017.

교과서 분석에 기초한 연산법칙의 지도 방안 탐색[1]

장혜원[2]

연산법칙은 산술 학습을 위해 계산 원리 파악 및 효과적인 계산 전략 개발에 필수적인 것으로 간주되며, 초등학교에서 초기 대수 지도에 대한 긍정적 견해와 더불어 연산에 대한 직관적 관념 및 구조적 이해를 위해 연산법칙 자체에 대한 탐구가 요구된다. 따라서 연산법칙에 대한 이해가 부족할 경우, 연산법칙을 가정한 후속 학습시 학습 곤란과 오개념 형성을 유발할 우려가 있다. 이에 본 연구는 초등학교 수학 교과서에서 연산법칙이 다루어지는 특성을 분석함으로써 연산법칙의 바람직한 지도 방안을 탐색하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 우리나라 교육과정기에 따른 교과서 분석을 통해 어떤 연산법칙이 어느 시기에 어떤 방법으로 지도되어 왔는지를 비교하고 연산법칙을 가정하는 내용 전개 사례를 추출하였다. 그 결과에 대한 논의에 기초하여 초등학교 수학에서 연산법칙의 지도 필요성과 가능성을 확인하고 지도 방안에 대한 시사점을 도출하였다.

주제어: 연산법칙, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 교과서 분석, 초기 대수, 계산 원리, 계산 전략

Ⅰ. 서 론

초등학교 수학에서 가장 큰 비중을 차지하는 영역이 수와 연산이고, 그 중 연산의 의미와 더불어 계산 원리 및 계산 기능은 초등 수학의 중요한 목표가 된다. 이를 위해 다양한 필수 요소를 학습해야하는데, 본 연구의 관심은 연산법칙에 있다. 여기서 연산법칙은 체의 공리에 포함된 덧셈과 곱셈과 관련한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 말한다.

대수가 산술의 일반화라는 관점에서 초등 수학교육에 초기 대수가 포함되어야 한다는 것에 대해 공감대가 형성된 오늘날, 연산법칙은 초기 대수 학습에서 수학적 구조를 경험할 수 있는 기회를 제공하기 때문에 초등학교에서 다루어지는 초기 대수의 대표적인 내용이라 할 것이다. 연산법칙이 대수적 표현으로 일반화되기에 앞서 학생들이 다루는 모든 수에 대해 그러한 연산법칙이 성립함을 경험하는 산술적 접근이 유효하며, 이것이 초기 대수의 면모를 보여준다. 연산법칙은 이와 같은 초기 대수의 측면뿐만 아니라 산술 자체에서 효과적인 계산을 가능하게 하고 계산 원리의 근거가 된다. 즉 연산법칙에 대한 대수적 구조 인식에 앞서 연산법칙 자체가 산술적 계산을 전개하기 위해 필수적임을 함의한다. 따라서 연산법칙은 산술 학습에 있어 명시적으로 또는 암묵적으로 다루어져왔고, 초등

1) 이 논문은 2016년도 서울교육대학교 교내연구비에 의하여 연구되었음.
2) 서울교육대학교

학교 수학 교과서에서는 명시적인 지도 여부에 관계없이 연산법칙을 전제로 전개되는 내용이 다수 발견된다.

수학교육의 역사상 수학적 구조와 엄밀성을 강조했던 새수학 시대처럼 연산법칙이 명시적으로 지도된다면 후속 학습의 내용 전개에 있어 지나친 비약에 대한 우려는 불필요하다. 그러나 연산법칙에 대한 명시적인 일반화 없이도 자연스럽게 파악 가능하다는 가정이 수학 내용 전개상의 지나친 비약을 야기할 수 있고, 나아가 개념적 오류를 야기할 가능성도 배제할 수 없는 것이다. 실제로 Schifter et al.(2008)에서 3학년 학생은 덧셈의 교환법칙 사례를 접하여 규칙성에 주목하지만 연산이 아닌 수 자체만을 생각하여 수의 순서 변화가 결과를 변화시키지 않았다는 생각에, 그 법칙이 덧셈과 곱셈과 같은 특정 연산에 대해서만 성립한다는 사실을 놓치는 우를 범한다. 또한 Caldwell et al.(2011)에서는 많은 학생들이 역연산 관계로 밀접히 관련되어 있는 덧셈과 뺄셈이 동일한 성질을 지닌다고 잘못 알고 있어서 종종 결합법칙이 덧셈과 뺄셈에서 모두 성립하는 것처럼 계산한다.

이와 같이 산술 및 초기 대수의 관점에서 초등학교 수학에서 다루어져야 하는 연산법칙에 대한 지도 상황은 어떠한가? 초등학교에서 산술, 중학교에서 대수로의 일반화라는 학교급에 의한 단절이 암묵적인 우리나라와 달리, 외국의 교육과정에서는 초등학교에서 대수 자체가 아닌 대수적 사고라는 견고한 토대를 제공해야 한다(Taylor-Cox, 2003)는 관점이 우세하다. 본 연구의 관심인 연산법칙만 보더라고 미국의 경우에는 일찌감치 다루어지는 경향이 있다. NCTM(2000)에서는 유치원~2학년에서 특정수를 이용하여 교환법칙과 같은 연산의 성질과 원리를 예시하고, 3~5학년에서 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙과 같은 성질을 알고 이를 범자연수 계산에 사용하여야 한다고 하였다. 이후 CCSSI(2010)에서는 연산의 성질에 대한 이해와 적용의 차원에서 1학년 때 덧셈의 교환법칙과 결합법칙을, 3학년 때 곱셈의 교환법칙, 결합법칙과 분배법칙을 다루도록 되어 있다. 특히 결합법칙이 적용되는 상황으로 제공된 예시는 $2+6+4$나 $3\times5\times2$와 같이 10 만들기를 이용한 계산의 효율성과 관련된다. 또한 일본 초등학교 교과서에서도 분배법칙을 도식화하여 지도하고 있다(변희현, 2011).

이에 비해 초기 대수의 측면이 비교적 약한 우리나라의 2015 개정 초등 수학과 교육과정(교육부, 2015)을 일견할 때, 연산법칙 관련 내용은 찾아볼 수 없다. 다만 성취기준의 상세화 수준 제약에 따라 교육과정에 제시되지 않더라도 그 구현 과정에서 교과서에서는 어느 정도 다루어지는 것이 불가피하다. 관련 연구로, 유진호(2006)는 1차~7차 교과서의 연산법칙을 분석하고 있지만, 누락된 것이 다수 있을 뿐만 아니라 다루어진 내용을 제시하는 수준에 그쳐 심도 있는 분석에는 미치지 못한다는 한계가 있다. 최지영, 방정숙(2011a)은 초등학교 2, 4, 6학년을 대상으로 한 연산법칙에 대한 이해 조사 결과, 교과서에서 명시적으로 다루어지는 교환법칙에 대해서는 비교적 높은 성취도를 보인 것에 비해 결합법칙과 분배법칙의 낮은 성취도를 근거로 하여 교과서에서 결합법칙 또는 분배법칙을 여러 학년에 걸쳐 더욱 명시적이고 지속적으로, 체계적이고 집중적으로 다룰 필요성을 주장하였다. 이와 같은 연구 결과는 초등학교 수학 교과서의 연산법칙 관련 내용에 대한 심도 있는 분석을 통해 명시적인 지도가 부족한 연산법칙에 대해서는 보강해야할 필요를 제안한다.

이에 본 연구에서는 제1차 교육과정기 이후 수학 교과서에 대한 분석을 통해 '어떤 연산법칙이 어느 시기에 명시적으로 지도되는가? 지도된다면 그 방법은 어떠한가? 내용 전개에 있어 연산법칙을 전제로 하는 후속 학습 내용은 어떤 것이 있는가?' 에 대해 조사함으로써 초등 교사의 전문성 함양을 위한 교수학적 지식을 제공하고, 연산법칙 지도를 위한 바람직한 교수학적 시사점을 모색하고자 한다.

Ⅱ. 연산법칙의 지도 관련 이론

초등학교 수학에서 연산법칙을 다루는 것에 대한 부정적 이미지가 있다면 새수학 시대로 거슬러 올라, 예컨대 Kline(1973)에서 $2+3=3+2$에 대한 이유로 양변이 5이기 때문이 아니라 덧셈의 교환법칙의 성립이라는 답을 기대하는 죠니의 선생님 탓으로 돌릴 수 있을지도 모른다. 당시 구조 중심의 수학적 엄밀성을 배제한다면, 오늘날 많은 수학교육자들은 초등학교 수학에서도 연산법칙을 다루는 것이 필요하고 바람직하다는 긍정적 입장을 취한다(Reys et al., 1998; Van de Walle, 2004; NCTM, 2006; Caldwell et al., 2011; 변희현, 2011 등). 형식화의 정도에 있어서는 의견 차이가 있겠지만, 연산법칙을 이해하고 효과적으로 사용할 수 있는 능력이 산술 교육에서 중요하다는 인식이 있기 때문이다.

좀 더 구체적으로, Reys et al.(1998)은 초등학교에서 수업의 목표는 연산법칙을 정확히 설명하거나 이름 지어 구분하게 하는 것이 아니라 각각의 법칙과 그것을 언제 사용하는 것이 효과적인지 알게 하는 것이라고 한다. Van de Walle(2004) 역시 순서 성질이라 하여 교환법칙과 결합법칙이 문제 해결, 수 구구 숙달, 암산 등에 유용하기 때문에 이름이 아닌 그 아이디어를 담은 관계 구성에 시간을 할애할 가치가 있다고 한다. NCTM(2006)은 초등학교 6학년 학생들이 두 식이 동치임을 보이기 위해 교환, 결합, 분배법칙을 이용하고, 또한 두 식이 주어진 맥락에서 동치임을 보임으로써 연산의 성질을 예시하는 것을 대수 영역의 초점이라 본다. Caldwell et al.(2011)은 자연수의 덧셈의 교환법칙과 결합법칙이 능숙한 계산을 돕는다는 것을 덧셈과 뺄셈의 핵심 아이디어를 위해 반드시 요구되는 필수 이해로 포함시킨다. 변희현(2011)은 초등학교에서 다루어지는 곱셈 계산의 원리를 이해하고 보다 효과적인 계산 숙달을 위해 특수한 맥락에서 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙에 대한 풍부한 이해의 필요성에 주목한다.

나아가 Schifter et al.(2008)은 초등학교 수학과 교육과정에 연산법칙에 대한 이해가 포함되어야 하는가라는 질문에 대해 논의하면서 수학자의 관점과 아동의 관점이 모두 고려되어야 함을 강조한다. 전자는 교과의 기초 요소를 규명하는 교과 전문가로서의 관점이며 후자는 수와 연산의 탐구 방법을 처음 배우는 학습자의 관점이다. 수학자의 관점에서 연산법칙은 체의 공리로서 기본적인 대수적 구조를 보여준다. 한편, $13+23=23+13$에 대해 양변의 합이 같다는 것을 앎에도 불구하고, 등호를 오른쪽에 답을 써야하는 기호로 인식하는 데서 비롯된 오개념 탓에 답이 제시되지 않았기 때문에 식이 성립하지 않는다고 한 2학년 학생이나 합은 같지만 순서가 바뀌어 그 자리가 다르기 때문에 같은 식은 아니라는 3학년 학생의 응답은 학생의 관점을 이해해야 함을 함의한다.

또한 학생의 관점에서는 교환법칙과 결합법칙을 유사한 것으로 보기도 한다. $13+6+7+4$을 계산할 때 $(13+7)+(6+4)=20+10=30$이라고 하는데, 교환법칙과 결합법칙이 동시에 사용되는 상황이라 둘의 차이를 놓치게 된다(Tent, 2006). 수의 순서와 연산의 순서를 혼동하는 것도 원인이 된다. 연산의 순서에 대한 것인 결합법칙은 자연스럽게 발생하지 않는다. 세 수를 더하는 상황에서 먼저 더하는 것을 먼저 써서 식으로 나타내면 결합법칙이 불필요하기 때문이다. 결국 결합법칙은 상황과 무관하게 식의 표현이 이미 주어졌을 때 관련되는 법칙인 것이다. 학교 수학에서 대표적인 적용 사례는 10 만들기를 이용한 덧셈이다. 세 수의 덧셈이나 곱셈에서 순서대로 계산하는 것이 원칙이지만 뒤의 연산을 먼저 해도 된다는 성질이 계산을 간편하게 만들며, 궁극적으로는 $8+5$와 같은 덧셈구구 원리로 이어진다. NCTM(2000)은 $8+5$를 계산하면서 $8+2$는 10이고, 3을 더하면 13이라

고 생각하는 것이 수의 분해를 통한 결합법칙의 적용이라고 하였지만, 수학적 관점에서 이와 같이 명료한 해석이 초등학생에게도 가능한 것인지 명확하지 않다.

초등학교에서의 연산법칙은 구체적 사례를 통해 다루어지지만 법칙에 대한 이해는 일반화로 이어질 필요가 있다. 교과서에서 특정 사례를 통해 곱셈의 교환법칙을 경험적 지식인 양 다룬다는 사실에 대한 비판(임재훈, 2014)이 있고, 연산법칙에 대한 일반화의 기회 제공이 부족하다는 교과서 분석 결과(방정숙, 최지영, 2011)도 있다. 이에 반해 Bastable & Schifter(2008)는 곱셈의 교환법칙에 대한 일반화 탐색을 보여주는 초등 교실의 일화를 제공한다. 3학년 학생들이 몇 개의 사례에서 두 수를 바꾸어 곱해도 곱이 같음을 발견한 후, 그것이 항상 성립하는 것인지에 대한 정당화 상황이다. 행과 열의 사각 배열과 옆으로 돌려 행과 열이 바뀐 배열로 곱셈의 교환법칙을 정당화한 것이다. 연산법칙의 일반화는 자연스럽게 정당화를 필요로 한다. 선험성과 도식성이라는 수학적 지식의 특징에 근거하여 곱셈의 교환법칙을 수의 순서에 무관하게 곱이 동일함을 확인하여 지도하는 교과서의 방법을 비판하는 임재훈(2014)에서 보듯이, 학교 수학에서 연산법칙에 대한 수학적 증명은 없다. 연산법칙은 구체적인 사례를 통해 직관적으로, 귀납적으로 파악되는 성질의 것으로 다루어진다. 실제로 립쉬츠에 따르면, 기수와 셈하는 방법의 독립성이나 덧셈의 교환법칙과 결합법칙을 주장하는 문장들은 내적 직관으로부터 나온다고 하였다(Frege, 1884). 이에 반해 Frege(1884)에 따르면, $5+7=12$와 같은 수식과 덧셈의 결합법칙 같은 법칙은 매일 이루어지는 수많은 적용 사례들을 통해 다양하게 확증되었기 때문에 증명을 요구해 그것들을 의심하려는 것은 거의 우스운 일로 보일 수도 있지만, 증명이 가능한 곳이면 어디서나 귀납에 의한 확증보다 증명을 선호하는 것이 수학의 본성이라고 하였다. 이와 같이 연산법칙에 대한 이해는 다양한 사례를 경험하고 그것이 모든 경우에 성립하는가에 대한 질문에 기초한 일반화 및 그것을 표현하는 기호화와 참임을 보이는 정당화가 개입되는 복잡한 과정이다. 다만 초등학교 수준에서는 문자를 이용하여 대수적으로 기호화되지 않아도 수식 및 그 밖의 직관적 표현을 이용한 일반화 탐색과 정당화에 국한시켜 생각할 것이다.

마지막으로 연산법칙의 명시적인 지도에 관한 것이다. 교과서의 일부 내용 전개를 보면 학생들에게 연산법칙을 명시적으로 지도하지 않고서도 암묵적으로 인식하게 할 수 있고 따라서 명시적인 지도 없이 사용할 수 있다고 생각하는 것 같다. Brown(2013)이 Brousseau의 쥬르댕효과(Jourdain effect)를 빌어 희곡의 주인공 쥬르댕이 수십 년간 산문을 인식하지 못하였지만 실제로는 산문을 사용하고 있었음에 비유하였듯이, 연산법칙은 명시적인 지도 없이도 학생들이 자연스럽게 사용 가능한 지식이라는 가정 하에 후속 학습에서 연산법칙이 요구되는 내용을 전개할 수도 있다. 문제는 연산법칙의 오용에 있다.

Caldwell et al.(2011)은 덧셈과 뺄셈의 핵심 아이디어를 위해 반드시 요구되는 필수 이해로 앞서 언급한 자연수의 덧셈의 교환법칙과 결합법칙이 능숙한 계산을 돕는다는 것과 더불어 뺄셈에서는 교환법칙이나 결합법칙이 성립하지 않는다는 것을 포함시킨다. 연산보다 수에 집중하는 학생들은 수를 바꾸거나 뒤의 연산을 먼저 해도 된다는 성질을 뺄셈에까지 적용시킬 수 있다. 특히 덧셈과 곱셈에 대해 명시적인 지도 없이 경험에 기초하여 암묵적으로 이해한 성질이라면 그 위험은 더 크다. $15-7$을 $15-5+2$이 아닌 $15-5-2$로 이해해야 하고, 이를 위해 7을 빼는 것은 5를 빼고 다시 2를 빼는 것과 같다는 제거의 상황을 이용할 필요가 있다. 그렇게 식을 얻었다고 하더라도 뺄셈에서는 수나 연산의 순서를 바꾸면 안 된다는 것을 경험시켜야 한다. 더욱이 $15-7=15-(5+2)=(15-5)-2=10-2=8$과 같이 계산하는 것은 초등학생의 이해 범위를 넘어선다.

따라서 아동의 관점에 주의하여 초등학교에서도 연산법칙이 지도될 필요가 있다. 연산법칙은 대수 학습의 성공을 위한 전제 조건일 뿐만 아니라(Tent, 2006) 이후 산술 학습에

서의 역할이 중요하기 때문이다. Caldwell et al.(2011)에 따르면 교환법칙은 덧셈을 매우 간편하게 만들어주며, 학생들이 수 구구를 배울 때 특히 그렇다. 3+8은 8+3과 같기 때문에 학생들은 큰 수에서부터 이어 세기 전략을 통해 합을 구할 수 있다. 17+135과 같이 큰 수의 암산에서는 더욱 그렇다. 또한 교환법칙은 암기해야할 덧셈구구의 수를 반으로 줄여주며, 결합법칙을 이용하면 10 만들기, 나아가 100 만들기를 이용하여 세 수의 덧셈을 효과적으로 할 수 있다. 이는 곱셈에서도 마찬가지로 유효하다. 교환법칙과 결합법칙의 활용은 다양한 계산 전략을 개발하게 함으로써 수 감각과 연산 감각을 발달시킨다. 또한 두 자리 수 이상의 곱셈과 나눗셈에 대한 후속 학습에 이용되는 분배법칙은 곱셈과 나눗셈 알고리즘의 원리가 연산법칙에 기초함으로 보여준다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구는 논문 제목에서도 암시되듯이 교과서 분석을 기반으로 한다. 1차 교육과정부터 현재 적용 중인 2009 개정 교육과정까지의 초등학교 1~6학년 수학 교과서를 분석 대상으로 한다. 수학 교과서의 경우, 교육과정마다 학년에 따라 학기별로 교과서가 집필되므로 총 12권이 해당된다. 따라서 12권씩 9개의 시기에 걸친 108권의 교과서를 대상으로 연산법칙이 지도되는 내용을 추출하면서 그 시기와 지도 방법 및 표현에 주목하고, 후속 내용 전개에서 연산법칙이 가정된 부분을 분석하였다.

2. 분석 방법

분석 기준 및 내용은 <표 1>과 같다.

<표 1> 분석 방법

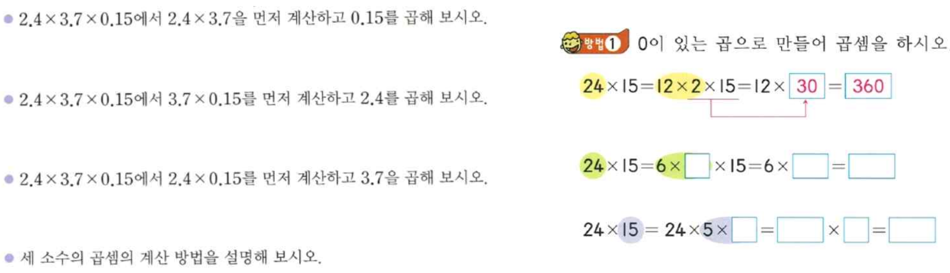
분석 기준	분석 내용
연산법칙의 명시적인 지도 여부 및 시기	각 교육과정에 따른 교과서에서 어떤 연산법칙이 지도되며, 어느 시기에 지도되었는가?
연산법칙의 제시 방법 비교	교과서에서 각 연산법칙을 지도하기 위해 어떤 방법을 이용하고 있는가?
연산법칙을 가정하는 내용 전개 사례	연산법칙에 대한 명시적인 지도 여부와 무관하게 연산법칙을 적용하여 전개되는 내용으로 어떠한 것이 있는가?

첫째, 덧셈과 곱셈 각각의 교환법칙과 결합법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 명시적으로 다루어졌는지, 다루어졌다면 어느 시기에 다루어졌는지를 교육과정기별로 분석한다. 이때, 교과서에서 연산법칙이 명시적으로 다루어진다는 것은 연산법칙 자체에 대한 이해를 다루고 있음을 의미한다. 내용 전개를 위해 연산법칙을 이용하는 맥락은 제외한다.

예를 들어 [그림 1]에서 보듯이 2007 개정 교과서에서는 곱셈의 결합법칙을 5-2[3]에서와

3) 분석 대상인 교과서가 다수이므로, 교과서 인용시 편의를 위해 교육과정 시기와 학년-학기로 간략하게 나타낼 것이다. 예컨대 '2007 개정 5-2'는 2007 개정 교육과정에 따른 5학년 2학기 수학 교과서를 말한다.

같이 다른 순서로 곱하였을 때 그 결과를 비교해봄으로써 법칙을 파악하는 것을 목적으로 하는 활동과 3-2에서처럼 법칙에 대한 탐구 없이 효과적인 곱셈을 위해 몇 십이 되는 곱을 먼저 하도록 하는 활동이 있다. 본 연구에서 연산법칙의 지도에 대한 분석 결과는 연산법칙 자체에 대한 이해인 전자의 경우만을 포함한다.



[그림 1] 연산법칙의 명시적 지도와 적용 : 2007 개정 5-2(71쪽)과 3-2(32쪽)

둘째, 다섯 가지 연산법칙이 지도된 방법을 추출하여 비교 분석하고 교수학적 관점에서 논의할 것이다. 교육과정에 따라 큰 변화가 없이 유사한 방식을 택한 경우도 다수 있기 때문에, 이 분석에서는 교육과정기별 분석이 아닌 각각의 연산법칙을 위해 적용된 특징적인 방식에 주목하여 지도 방법의 다양성에 초점을 맞추었다.

셋째, 이론적 고찰에서 보였듯이 연산법칙은 후속 학습에 필수적인 요소이므로, 실제로 어떤 내용 전개에서 어떤 연산법칙이 가정되어 적용되는지 조사할 것이다. 이는 연산법칙에 대한 명시적인 지도가 필수적이라는 논의를 뒷받침하는 기초 자료가 될 것이다.

Ⅳ. 교과서 분석 결과

1. 교육과정기에 따른 연산법칙의 지도 시기 및 특징

1차 교육과정부터 2009 개정 교육과정까지의 초등학교 수학 교과서에서 덧셈과 곱셈 각각의 교환법칙과 결합법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 명시적으로 다룬 시기는 <표 2>와 같다. 연산법칙의 지도 시기나 강도에 있어 각 교육과정기의 특성이 잘 반영된 것으로 나타난다.

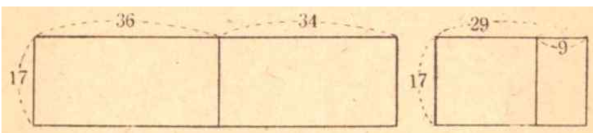
연산법칙별로 보면, 대체로 덧셈의 교환법칙과 결합법칙, 곱셈의 교환법칙은 저학년에서, 곱셈의 결합법칙은 3, 4, 5학년에서, 분배법칙은 주로 5학년에서 지도되기 시작하는 것으로 나타난다. 그러나 3, 4차는 모든 연산법칙이 저학년에서 지도되기 시작하며, 특히 3차는 다루어지는 학년도 광범위하다. 한편 교육과정별로 보면, 학문적 체계가 약한 1차는 교환법칙만 다루어지고 2차와 7차와 2009 개정에는 결합법칙이 다루어지지 않았다. 그 외에는 3차를 비롯하여 연산법칙이 잘 다루어졌으나 위계적으로 순서가 적절하지 않은 경우도 있다. 구체적인 내용을 살펴보자.

<표 2> 교육과정기별 연산법칙의 지도 시기

교육과정	교환법칙		결합법칙		분배법칙
	덧셈	곱셈	덧셈	곱셈	
1차	2-1	3-1, 3-2 4-2 5-1			
2차	1-2 2-1	2-2 3-1			5-1 6-1
3차	1-1, 1-2 2-1 4-2 5-1, 5-2 6-2	2-1 4-2 5-1 6-1, 6-2	1-2 2-1 5-1, 5-2 6-2	3-1 5-1 6-1 6-2	3-1, 3-2 4-1 5-1 6-1
4차	1-1 1-2	2-1, 2-2 3-1 5-1	2-1	3-1 5-1	3-1
5차	1-1	2-2	2-1 4-2	5-1	5-1
6차	1-1	2-1, 2-2 3-1	2-1	5-1	5-1
7차	1-가	2-나			5-가
2007개정	1-1	2-2 5-2	3-2	4-1 5-2	5-1
2009개정	1-1	2-2			5-1

실생활 맥락의 경험중심 교육과정인 1차 교육과정기는 수학적 위계성이 매우 약한 시기였고 연산법칙도 소홀히 다루어진다. 덧셈의 교환법칙은 2-1에서 화폐모형을 이용하여 $4+30$과 $30+4$가 각각 얼마인지 발문이 있을 뿐이다. 곱셈의 교환법칙은 3학년에서 나눗셈을 배우기에 앞서 사물의 배열을 2×3과 3×2로 해석하여 둘 다 '이삼은 육'이라는 구구를 이용하여 구한다고 하고, 4, 5학년에서 두 자리 수끼리 또는 세 자리 수와 한 자리 수의 곱셈을 다루면서 수를 바꾸어 곱한 결과가 같은지 발문함으로써 주목하도록 한다.

2차 교육과정기는 수학적 위계를 갖추게 되는 시기라는 점에서 연산법칙이 어느 정도 다루어질 것으로 예상된다. 실제로 교환법칙이 1, 2, 3학년에서 다루어지고, 5, 6학년에서 이어붙인 두 직사각형의 넓이를 이용하여 분배법칙이 성립함을 보여준다. 이후의 교육과정기와 달리 등식의 양변이 바뀌어 $36\times17+34\times17=(36+34)\times17$인 것이 특이하다. 또한 두 직사각형을 겹쳐놓은 표현을 통해 뺄셈에 대한 곱셈의 분배법칙도 다룬다([그림 2]).



[그림 2] 2차 6-1 (127쪽)

<표 2>에서 가장 주목되는 시기는 3차 교육과정기이다. 새수학 시대의 수학적 구조 및 엄밀성에 대한 강조에 따라 연산법칙을 지도한다는 의도가 잘 드러나 있다. 연산법칙은

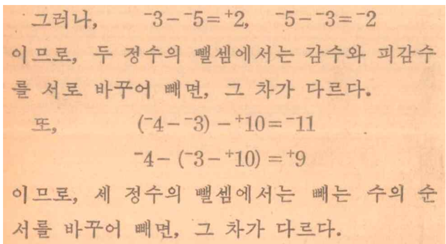
그 자체로서 체의 공리에 해당하지만, 이후 학습 과정에 필수적인 요소이기 때문에 이 시기에는 연산법칙에 대한 명시적인 지도 없이 경험에 의한 자연스런 파악에 기초하여 후속 학습에 적용하는 방식의 교수학적 비약이 수용되기 어려웠을 것이다.

모든 연산법칙이 여러 학년에 걸쳐 지도되는데, 수의 범위가 자연수, 분수, 소수, 정수, 거듭제곱까지 확대되면서 각각 별도의 주제로서 다루어지기 때문이다. 또한 표현 방법에 있어서도 그림, 식, 문장, 수직선, 표 등이 다양하게 활용된다.

덧셈의 교환법칙이 1-1의 지도 내용이 된 것이 3차부터이다. 그만큼 자연스럽고 유용한 성질로 간주된 것이다. 1-2(51쪽)에서 덧셈의 결합법칙은 십 몇이 되는 덧셈구구에 앞서 지도된다. 2-1은 4단원 '집합과 분할'을 제외한 4개 단원이 모두 수와 연산 영역이다. 첫 장부터 덧셈의 교환법칙과 결합법칙, 그리고 $4+(5+6)=4+(6+5)=(4+6)+5$와 같이 두 법칙의 복합 적용 식이 다루어진다. 특히 5단원 '곱셈의 기초'에서는 곱셈 개념 도입에 앞서 사각배열에서의 세는 방법을 달리하여 곱셈의 교환법칙의 기초를 다룬다. 사각배열에서 가로줄 또는 세로줄 중 어느 것을 기준으로 하는가에 따라 세는 방법이 다른데, 두 방법으로 센 결과가 같음을 이용한 것이다. 곱셈의 교환법칙은 2-2에서 다루게 되고 이후 곱셈구구에서 2의 단 구구 후 피승수와 승수의 위치를 바꾼 것도 제시하고 있다.

3-1에서 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙은 두 자리 수와 한 자리 수의 곱의 원리에 필요하므로 그에 앞서 제시된다. 4-1(21, 22, 45쪽)에서는 점 배열의 가로를 2묶음이 아닌 3묶음으로 분리하거나 몇 줄을 삭제하는 상황을 통해 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 $3\times12=3\times(3+4+5)=(3\times3)+3\times(4\times5)=(3\times3)+(3\times4)+(3\times5)$까지 확장하고 뺄셈에 대한 곱셈의 분배법칙도 다룬다. 2차 교육과정기에 직사각형의 넓이를 이용할 때와 같은 원리이다. 다만 연속량이 아닌 이산량이라는 차이가 있다. 3-1에서 다룬 곱셈의 결합법칙은 3-2에서 몇 십이나 몇 백과의 곱에 이용된다. 이와 같이 각 연산법칙이 요구되는 후속 내용에 연관성 있게 제시되는 것이 3차기의 특징이라 할 만하다.

6-2에서는 '수의 집합' 단원에서 자연수의 집합에서는 덧셈과 곱셈의 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 정리하면서, 정수의 뺄셈에서는 교환법칙과 결합법칙이 성립하지 않음을 언급하고 있다([그림 3]). 덧셈의 연산법칙을 뺄셈으로까지 일반화하지 않도록 해야 하는데, 이는 $5-3$와 $3-5$의 차가 다르다는 것을 파악할 수 있어야 하므로 수의 범위가 정수까지 확장되어 있어 가능한 교수학적 조치임을 알려준다.


그러나, ${}^{-}3-{}^{-}5={}^{+}2$, ${}^{-}5-{}^{-}3={}^{-}2$
이므로, 두 정수의 뺄셈에서는 감수와 피감수를 서로 바꾸어 빼면, 그 차가 다르다.
또, $({}^{-}4-{}^{-}3)-{}^{+}10={}^{-}11$
${}^{-}4-({}^{-}3-{}^{+}10)={}^{+}9$
이므로, 세 정수의 뺄셈에서는 빼는 수의 순서를 바꾸어 빼면, 그 차가 다르다.

[그림 3] 3차 6-2 (16쪽)

새수학 운동의 쇠퇴로 기초·기본을 강조한 4차 교육과정기로 접어들어 연산법칙에 대한 강조가 급격히 줄어든 것을 확인할 수 있다. 예를 들어 2-1, 2-2에서 수의 순서를 바꾼 곱셈 상황이나 식을 함께 제시하여 곱셈의 교환법칙을 의도하는 것으로 보이지만 곱이 같음을 파악하게 하는 명시적인 발문은 찾을 수 없다. 또한 내용 전개에서 위계가 잘못되어 있음도 확인된다. 덧셈의 결합법칙은 2-1(22쪽)에서 지도되는데 그 전에 1-2(85쪽)에서 계산을 위해 이미 사용되고 있어 위계가 맞지 않는다.

5차 교육과정기에도 4차와 마찬가지로 덧셈의 결합법칙은 2-1(20쪽)에서 지도되는데 계산 순서를 나타내는 시각적 표현의 변화와 도식이 적절하게 제시되어 법칙을 직관적으로 잘 파악하도록 되어 있다([그림 12]). 그런데, 1-2(45, 47쪽)에서 합이 십 몇인 덧셈구구를

하면서 10 만들기를 위해 결합법칙을 적용하고 있어 위계가 맞지 않는 사례이다. 2-2에서는 6단 이상의 구구단을 하면서 '6×4와 4×6은 같습니까?'와 같은 발문을 통해 곱셈 구구 학습시 곱셈의 교환법칙이 유용함을 인식하도록 의도하고 있다.

5-1(106, 110쪽)에서 대분수와 자연수의 곱을 다루면서 [그림 15]를 통해 분배법칙이 성립함을 이용한다. 110쪽에서 '그림에서 알아보면…'이라고 설명하고 있고, 이후 풀이에서는 그림 없이 이용한다는 점에서 이 부분을 명시적인 지도로 분석하였다. 나아가 121쪽에서는 $(\frac{2}{5}+\frac{1}{3})\times9$를 $(\frac{2}{5}\times9)+(\frac{1}{3}\times9)$와 비교하도록 하는 발문이 보완되어 있다.

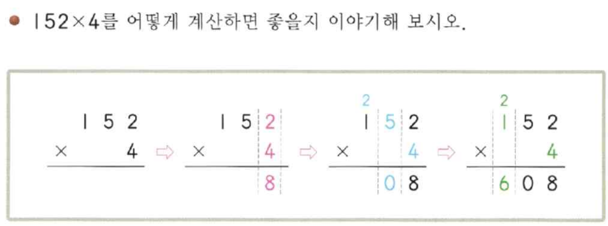
한편 5-1(119쪽)의 세 분수의 곱셈에서 서로 다른 순서로 곱한 결과에 대한 비교를 통해 곱셈의 결합법칙이 등장한다. 그런데 3-2(122쪽)의 두 자리 수의 곱셈에서 이미 곱셈의 결합법칙을 가정한 활동이 포함되어 있어 위계상 문제가 발견된다.

6차 교육과정기에는 5차와 유사한 방식으로 다루어진다. 다만 곱셈의 교환법칙이 2-1부터로 앞당겨지고 5-1에서 직사각형의 넓이를 이용하여 뺄셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 다루어진다.

7차 교육과정기는 전체적인 연산법칙의 지도가 약화된 것으로 나타나지만, 덧셈과 곱셈의 교환법칙이 각각 하나의 독립 차시 주제로 다루어진다는 면에서는 부분적 강화로 해석된다. 예를 들어 2-나에서 '두 수를 바꾸어 곱하여 봅시다'의 한 차시를 통해 배열 모델을 이용하는 동시에 곱셈식의 결과를 통해 곱셈의 교환법칙을 다룰 뿐만 아니라 다음 차시에서는 곱셈구구표를 이용하여 다시 한 번 교환법칙에 주목하도록 한다는 점에서 곱셈의 교환법칙을 강조하고 있음을 보여준다. 반면 4-가에서 세 수의 곱셈, 5-가에서 세 분수의 곱셈을 다루지만 결합법칙은 언급되지 않는다. 5-가(82쪽)에서는 자연수에 대한 복습을 통해 세 분수의 덧셈을 하는데, 방법은 유일하게 순서대로 하는 것이다.

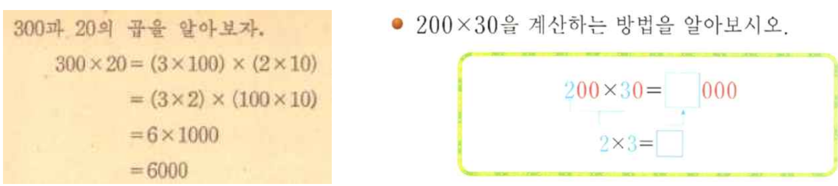
2007 개정기에는 전반적으로 연산법칙에 대한 지도가 명시적이고 강화되어, 곱셈의 교환법칙과 결합법칙이 자연수에서 뿐만 아니라 소수(5-2, 70-71쪽)에서 다시금 다루어지는 것으로 나타난다. 그러나 분배법칙을 5-1에서 명시적으로 다루기에 앞서 대분수와 자연수의 곱(5-1, 51쪽)에서 먼저 사용하는 등 위계상의 오류도 발견된다.

<표 2>에서 현행 2009 개정 교과서는 7차와 유사한 경향으로 읽힌다. 연산법칙에 대한 지도가 약함을 함의한다. 그 결과로 후속 내용 전개에서도 연산법칙을 적극 활용하지 않는 경향을 보인다. 예를 들어 이전 교육과정에서 세 자리 수와 한 자리 수의 곱셈에서 [그림 17]과 같이 분배법칙에 기초한 부분곱의 합을 제시했던 반면, 2009 개정 교과서에서는 [그림 4]와 같이 알고리즘적 접근이 강하다. 또한 몇 십과 몇 십의 곱셈 후 두 자리 수끼리의 곱셈을 하기에 앞서 (한 자리 수)×(두 자리 수)를 별도의 차시로 다루는 것도 곱셈의 교환법칙의 적용을 저해하여 연산법칙에 대한 약화로 해석된다.



[그림 4] 2009 개정 3-2 (16쪽)

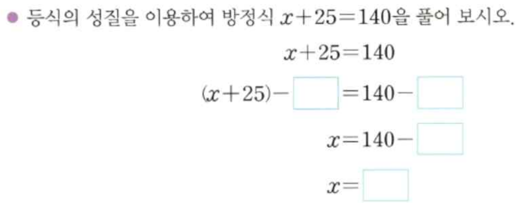
전체적으로 연산법칙에 대한 강조의 스펙트럼을 가정한다면, 양극단에 3차와 2009 개정을 놓을 수 있을 것이다. 이는 연산법칙에 대한 당시의 수학교육 풍토와 집필진의 입장을 반영한 것으로, 후속 내용 전개에도 그대로 나타난다는 사실이 흥미롭다. [그림 5]의 몇 백과 몇 십의 곱을 다루는 방식에서 연산법칙을 적용한 절차와 알고리즘적 접근의 대조는 그 예가 될 수 있다.



3차 4-1 (47쪽) 2009 개정 4-1 (43쪽)

[그림 5] 몇 백과 몇 십의 곱셈 비교

마지막으로, 방정식의 지도 유무와 관련한 변화가 컸던 6차, 7차, 2007 개정, 2009 개정만 비교한다면 방정식을 다루는 교육과정기에 연산법칙이 비교적 상세하고 명시적으로 다루어진 것으로 나타난다. Kaput(2008)에서 대수를 유형화한 세 갈래 중 하나가 방정식과 관련된 모델링이듯, 방정식은 대수의 대표적 주제이며 방정식 풀이시 연산법칙뿐만 아니라 항등원과 역원 등이 밀접히 관련된다. 예를 들어 2007 개정 교과서에서는 [그림 6]과 같이 계산한다. 요컨대 방정식을 성취기준으로 포함하는 교육과정기에는 연산법칙에 대한 내용이 좀 더 강조될 것으로 기대된다.



[그림 6] 2007 개정 6-2 (93쪽)

2. 연산법칙의 지도 방법 비교

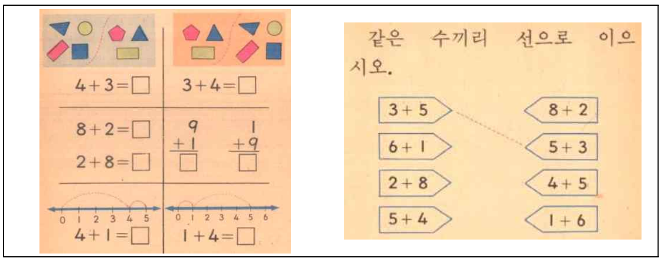
연산법칙은 계산 방법의 차이에 따른 결과의 동일함을 보여주므로 식의 계산 및 등식을 이용한 표현이 기본 요소가 된다. 그러나 초등학교 수준에서는 문자를 이용할 수 없고 사례를 통한 귀납에 의해 일반성을 파악하도록 이끌어야 한다. 교과서 분석을 통해 연산법칙 지도를 위한 다양한 교수 맥락과 표현 방법을 확인해 볼 것이다.

가. 덧셈의 교환법칙

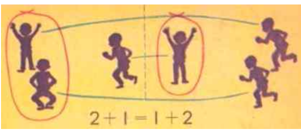
교과서에서 덧셈의 교환법칙을 다루면서 이용하는 방법은 3차 1-2(38-39쪽)에서 다양하게 나타난다([그림 7]). 그림, 가로셈, 세로셈, 수직선, 선긋기 등이다. 이외에 3차 2-1(3쪽)

에서와 같이 '9에 6을 더한 합과 6에 9를 더한 합은 같습니다.' 나 더 일반화하여 '덧셈에서는 두 수를 서로 바꾸어 더하여도 그 합은 같습니다.' 와 같은 언어적 표현도 사용된다. 이 법칙을 다루는 초등 저학년에서는 구별되는 덧셈식이 동치임을 파악하도록 하기 위해 그림 등의 시각적 표현이 유효할 것으로 생각되는데, 동일하게 그림을 이용했더라도 그에 대한 덧셈식이 어떻게 표현되어 있는지를 주목할 필요가 있다. [그림 7]의 □가 있는 식은 각각의 덧셈식에 대한 합을 구하여 크기를 비교할 것을 요구하는 반면, [그림 8]에서는 2+1=3라는 합을 구하지 않고 일대일 대응을 통해 2+1=1+2라는 교환법칙을 그대로 파악할 것을 요구한다. 후자는 등호에 대한 의미 충실한 이해를 요구하므로 학생들에게는 난이도가 더 높을 것으로 예상된다. 수직선의 사용에 있어서도 두 개의 수직선에 각각 나타내어 도착점을 비교하는 경우([그림 7])와 두 덧셈식에 해당하는 이동을 동일한 수직선의 상하에 나타내어 값 자체보다 양의 동일함에 주목하게 하는 경우([그림 9])가 구별된다. 그 외에 화폐모형을 이용한 방법([그림 10])도 있다.

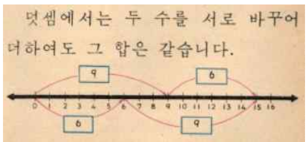
3차 교과서에서 이용된 표현의 다양성에 비해 4~6차 교과서에서는 주로 그림을 이용하여 수를 확인하게 하며, 7차와 2007 개정 교과서에서는 바둑돌 스티커 붙이기, 2009 개정에서는 수만큼 ○ 그리기를 이용하여 학생 스스로 붙이거나 그리는 활동 위주의 교수 방법을 택하고 있음이 주목된다.



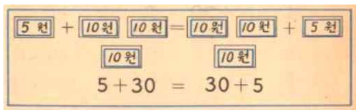
[그림 7] 3차 1-2 (38-39쪽)



[그림 8] 2차 1-2 (25쪽)



[그림 9] 3차 2-1 (3쪽)



[그림 10] 2차 1-2 (63쪽)

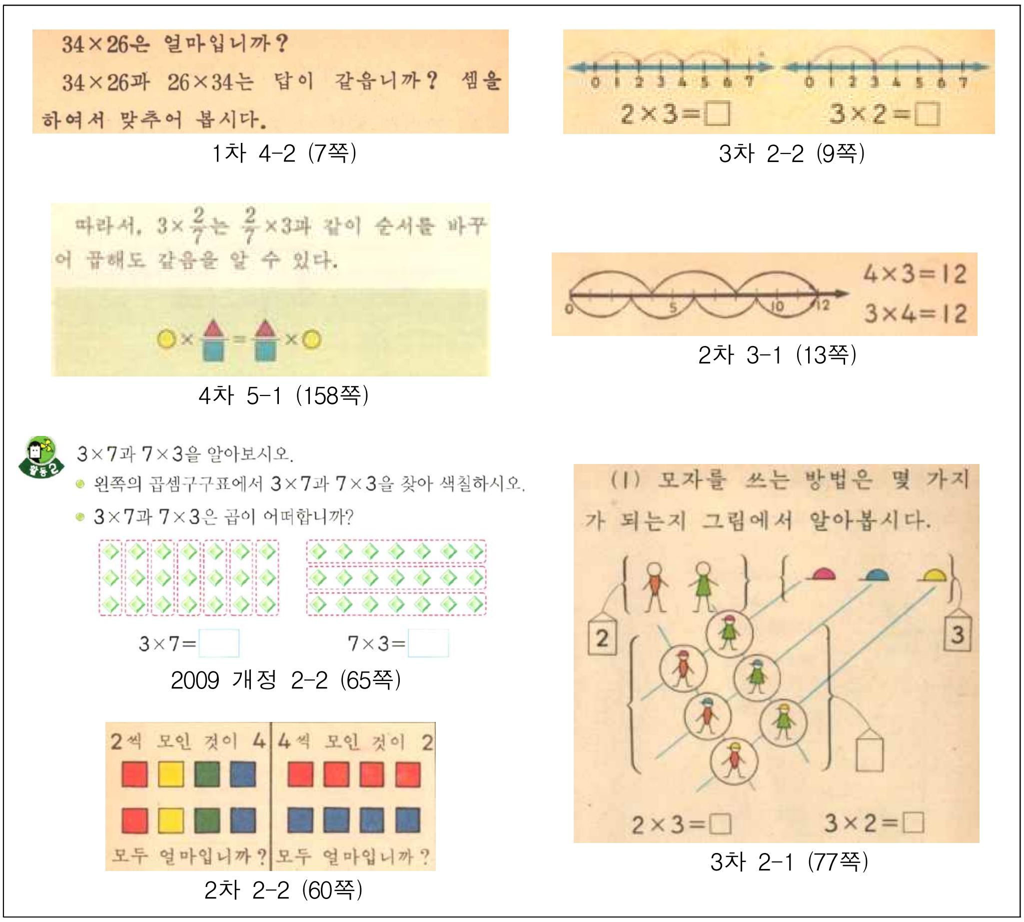
나. 곱셈의 교환법칙

교과서에서 곱셈의 교환법칙을 다루면서 이용하는 방법은 [그림 11]이 대표적이다. 두 곱셈식의 동치 비교, 곱셈식의 계산을 통해 확인한 다음 곱셈식의 기호화, 사각 배열에서 묶음을 행과 열로 바꾸어 비교, 수직선의 이용, 곱셈구구표에서 확인 등 비교적 다양하게 다루어진다. 3차 교과서는 역시 다양한 표현 방법을 이용하는데, 특히 모자를 쓰는 경우의 수를 이용한 조합적 접근을 이용한 것은 이 시기가 유일하다.

같은 표현 양식이라 할지라도 세부적인 사용 방법에는 차이가 있다. 예를 들어 배열의 행과 열 표현에 있어 2차 2-2는 배열의 행과 열을 묶어 세는 활동을 강조한다는 점에서 그림으로 완성된 묶음 표현을 제시한 2009 개정 교과서나 묶은 결과는 제시하지 않고 하

나의 배열에 행과 열만 제시하여 머릿속 묶음을 하도록 하는 3차 교과서와 구별된다. 덧셈의 교환법칙과 마찬가지로, 수직선 표현도 두 곱셈식을 각각 나타내는 경우(3차 2-2)와 함께 나타내는 경우(2차 3-1)가 구별된다. 한편 1차 3-2(80쪽)에서는 나눗셈 도입에 앞서 다루어지는 내용으로 묶음의 수와 묶음을 이루는 수 사이의 역할 교환을 통해 시각적으로 확인하게 한다. 또한 곱셈구구표 사용시 7차 2-나(18쪽)에서는 곱셈표를 채우고 직접 '6×5는 5×6과 같습니까?' 라고 발문하지만, 2007 개정과 2009 개정 교과서에서는 이에 덧붙여 곱셈표를 대각선 방향으로 접었을 때 만나는 수들의 관계를 발문하여 일반화시키려는 의도를 보여준다.

이와 같이 다양한 표현 중 곱셈의 교환법칙을 위해서는 사각 배열 모델이 가장 빈번하게 사용됨이 확인된다. 특히 7차 2-나(16쪽)에서는 모눈종이의 칸을 두 칸씩 세줄, 세 칸씩 두 줄 색칠하여 비교하게 하여 활동에 대한 반성을 의도한 것으로 해석된다. 곱셈식의 계산 결과 비교에 비해 사각 배열 모델의 강점은 한 가지 구체적인 예시가 아니라 행과 열의 역할 변화가 전체 개수에 영향을 주지 않는다는 사실의 관찰을 통해 일반성을 인식하게 할 가능성이 높다는 점이다. 임재훈(2014)은 이에 대해 곱셈의 교환법칙의 선험성을 드러낼 수 있는 가능성을 지닌 모델이라고 하였다.

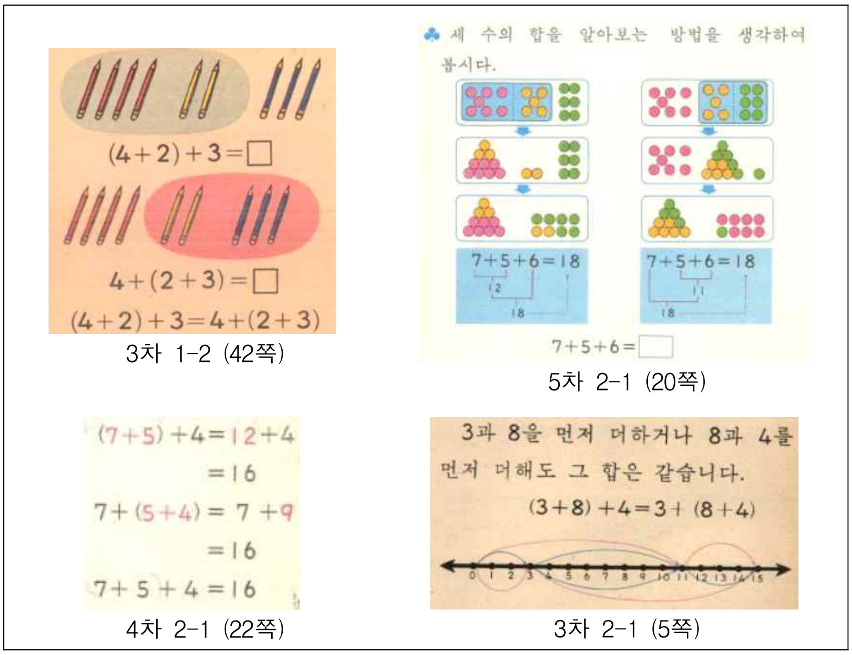


[그림 11] 곱셈의 교환법칙 지도 방법

다. 덧셈의 결합법칙

덧셈의 결합법칙은 세 수의 합을 구하는 전략 개발이나 십 몇이 되는 덧셈 구구 원리 파악에 필요하다. 따라서 덧셈 학습 초기에 다루어지는 것이 위계상 바람직하나 명시적으로 지도되는 교환법칙에 비해 결합법칙은 명시적으로 다루어지지 않고 후속 학습에서 그냥 사용하는 경우가 다수 발견된다.

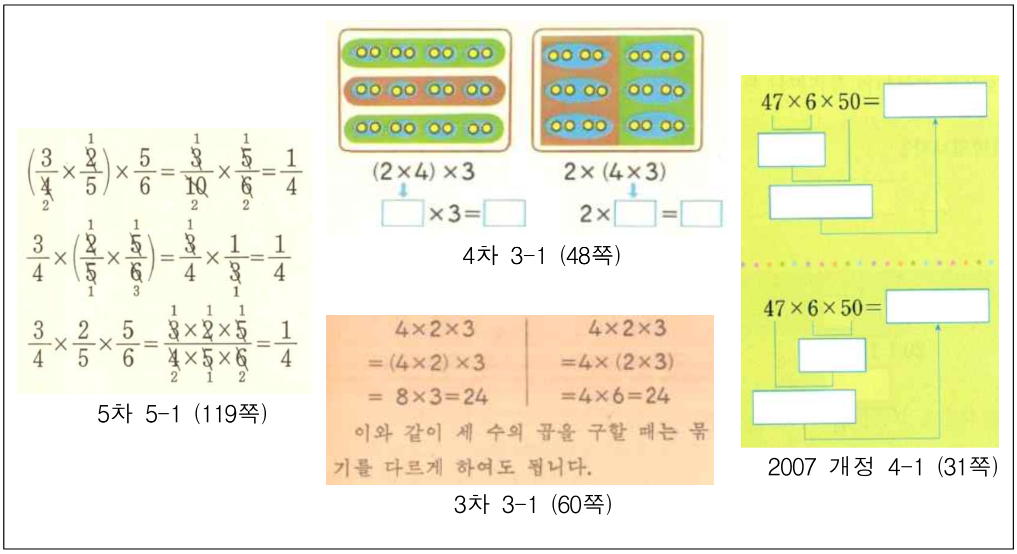
덧셈의 결합법칙을 지도하기 위해 그림, 두 덧셈식의 동치 비교, 말로 더하는 순서를 정해주거나 법칙을 설명하는 방법, 수직선, 계산 순서의 도식화 등이 이용된다([그림 12]). 특히 2007 개정 3-2(16쪽)에서는 탐구활동 주제로 세 수의 덧셈과 뺄셈에서 계산 순서에 따른 결과의 예상, 확인, 이유를 다루는 것이 특징적이다.



[그림 12] 덧셈의 결합법칙 지도 방법

라. 곱셈의 결합법칙

덧셈과 마찬가지로 곱셈의 결합법칙 역시 세 수의 곱을 구하는 맥락에서 주로 다루어진다. 특히 세 분수의 곱셈에서 셋을 한꺼번에 약분하고 곱해도 되는 근거가 된다. 곱셈의 결합법칙 지도에 이용되는 방법은 다른 법칙에 비해 단조로운 편이다. 계산 순서에 대한 설명, 괄호가 있는 식, 그림이나 도식의 이용 등이다. 이때, [그림 13]에서 보듯이 시각적 표현의 고유 특성인 직관적 파악이 결합법칙에서는 잘 드러나지 않는다는 점에 주의할 필요가 있다. 연산의 순서에서 비롯되는 차이를 하나의 동일한 표현에 드러내기 어렵다는 한계가 있기 때문이다. 3차 3-1(62쪽)에서는 곱셈의 결합법칙을 다룬 다음, 교환법칙과 함께 일반화하여 '곱에 있어서는 곱하는 수를 서로 바꾸거나, 묶기를 다르게 하여도 됩니다.'라고 진술한다.



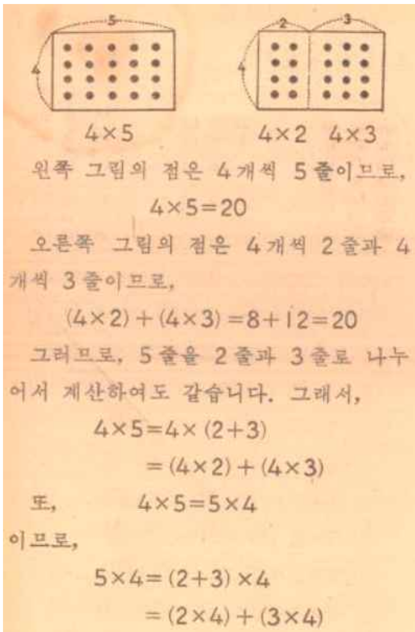
[그림 13] 곱셈의 결합법칙 지도 방법

마. 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙

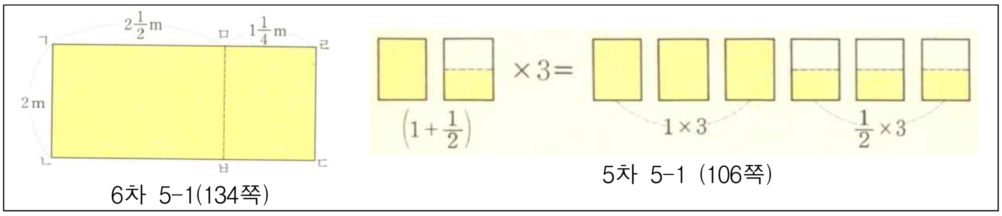
분배법칙이 가장 명확하게 지도된 시기는 역시 3차이다([그림 14]). 사각 배열을 이용하여 5줄 전체를 2줄과 3줄로 나누어 생각하여 분배법칙을 설명한다. 곱셈의 교환법칙의 선험성을 위한 사각 배열 모델의 가치가 분배법칙에도 확장 가능함을 보여준다. 여기서는 행과 열의 역할 변화가 아니라 행 또는 열의 분할에 기인한다.

또한 교환법칙에 의존하여 피승수가 합의 꼴인 $(b+c)\times a$도 설명한다.

그 외에는 혼합계산 맥락 또는 대분수와 자연수의 곱셈에서 두 가지 방법으로 계산하여 그 결과를 비교한다. 예를 들어, 5차 5-1(121쪽)에서는 $(\frac{2}{5}+\frac{1}{3})\times 9$와 $(\frac{2}{5}\times 9)+(\frac{1}{3}\times 9)$를 계산하여 비교하게 하고, 2007 개정 5-1(54쪽)에서는 '$3\times 2\frac{1}{4}$의 값은 3×2와 $3\times\frac{1}{4}$의 합이라고 말할 수 있습니까?' 라고 발문하는데, 비교할 두 대상의 덧셈 기호가 가시적이지 않다는 점에서 후자가 덜 형식적이라 할 수 있다. 한편 분배법칙을 설명하기 위해 [그림 15]와 같이 직사각형의 넓이나 시각적 표현을 이용하여 두 방법의 결과가 같음을 보이기도 한다. 뺄셈에 대한 곱셈의 분배법칙도 유사하게 직사각형 또는 사각 배열에서 일부를 구하는 것으로 다루어진다.



[그림 14] 3차 3-1 (64쪽)



[그림 15] 분배법칙의 설명을 위한 시각적 표현

3. 연산법칙이 이용되는 내용 전개 사례

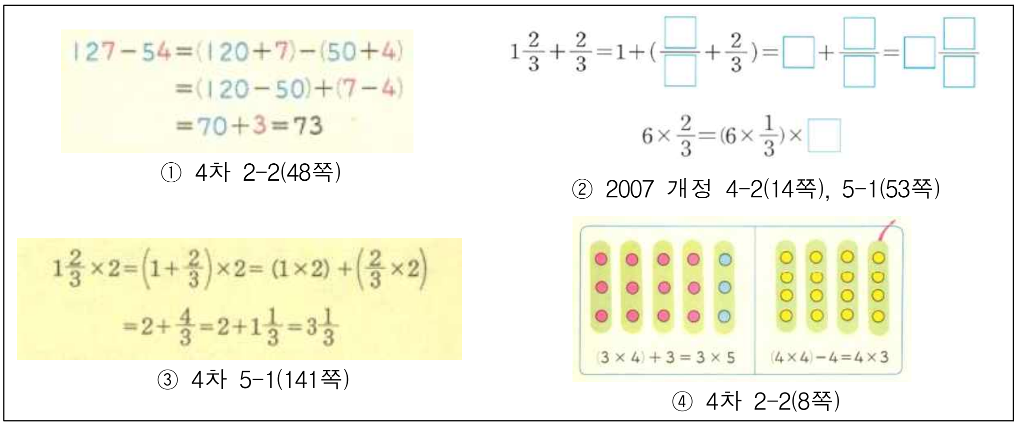
연산법칙은 후속 학습의 내용 이해에 필수 요소이고, 따라서 교과서에서 내용 전개에 연산법칙이 이용되는 사례가 다수 있다. 이는 초등학교 수학에도 해당되는 사실이지만, <표 2>에서 일부 연산법칙이 지도되지 않는다는 결과는 실제로 명시적인 지도 없이 사용되었음을 함의한다. 교육과정기에 따라 같은 내용이라 할지라도 이용된 연산법칙이 사전에 명시적으로 지도된 경우도 있고, 지도되지 않았다면 암묵적으로 파악될 것을 기대한 경우에 해당한다. 후자의 경우에는 이 절에서 검토되는 사항이 사실상 비판적 고찰에 해당한다. 예를 들어, 곱셈구구의 학습 후 두 자리 수 이상의 곱셈 원리를 위해 필요한 것이 바로 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이다. 정연준, 조영미(2012)는 자연수의 곱셈 계산에서 연산법칙이 곱셈 계산법을 지탱하는 수학적 원리이지만 교과서에서 명시적으로 다루어지지 않으며, 따라서 사전 준비 과정 없이 큰 수의 곱셈을 다루므로 계산 과정의 원리를 쉽게 설명하기 어려운 구조임을 지적하였다. 변희현(2011)에서도 2009 개정 교과서 분석을 통해, 두 자리 이상의 수의 곱셈 원리와 자연수와 대분수의 곱셈 원리는 기본적으로 분배법칙이 가정되지만, 그에 앞선 분배법칙에 대한 지도는 없음을 지적하였다.

본 연구의 교과서 분석에서 추출된 연산법칙의 적용 사례를 살펴보자. 덧셈의 결합법칙은 덧셈구구 학습에 유용하다. $8+7=8+(2+5)=(8+2)+5=15$와 같이 10 만들기를 이용하여 효과적인 계산 전략을 의도하고, 이 때 세 수의 덧셈에서 어느 덧셈을 먼저 해도 합이 같다는 것을 파악할 필요가 있다. 덧셈의 결합법칙이 아니라면 세 수는 원칙대로 앞에서부터 차례로 더해야 한다. 2009 개정 교과서에서는 1-1에서 세 수를 덧셈을 원칙대로 차례대로 더하는 것으로 다루고 1-2에서 세 수를 더할 때 10이 되는 두 수를 먼저 더하는 효율성을 경험시키면서 뒤의 두 수를 먼저 더하는 활동, 첫째 수와 셋째 수를 먼저 더하는 활동이 나온다. 뒤의 두 수를 먼저 더해도 된다는 것에 대한 이해가 빠져 있다. 이는 덧셈의 결합법칙을 다루지 않은 상태에서 암묵적으로 취급되므로 결합법칙이 성립하지 않는 뺄셈으로 확장되는 오개념을 유발할 위험에 주의해야 한다.

이외에도 연산법칙은 계산 절차를 설명할 때 필수적이다. [그림 16]의 몇 가지 사례로부터 계산 원리 및 계산 전략 지도시 다양한 연산법칙에 의존하는 것이 필수적임을 알 수 있다. 사례①에 대한 이해를 위해서는 정수의 집합에서 분배법칙, 교환법칙, 결합법칙이 모두 적용되어야 한다. 초등 저학년이 수학적으로 의미 있게 이해하기에는 무리가 있는 식의 표현이라 할 수 있다. 사례②는 각각 덧셈과 곱셈의 결합법칙을 이용한다. 대분수끼리의 덧셈일 때는 교환법칙과 결합법칙이 중복 적용된다. 사례③은 대분수와 자연수의 곱에 분배법칙이 이용됨을 보여 준다[4]. 사례④는 곱을 부분 묶음으로 쪼개어 생각하는 계산

4) 대분수끼리의 곱셈은 $(a+b)\times(c+d)$꼴의 곱셈공식이 필요하므로 분배법칙의 이중 적용 맥락이 된다. 따라서 2009 개정에서처럼 가분수로 고쳐서 계산하거나 7차 5-가(124쪽)에서는 가분수 계산에 덧붙여 분수의 곱이 이루는 모눈의 칸 수로 접근하는 방식이 부가되어 있다.

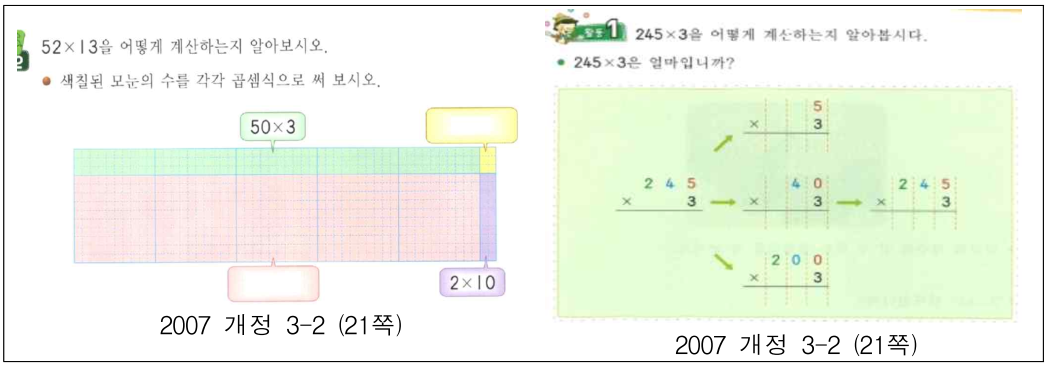
전략이며 분배법칙을 근거로 한다. 이는 2009 개정 2-2에서 곱셈구구를 다루면서 다양한 계산 전략을 격려하는 것과 같은 맥락이다. 예를 들어, 3×4를 다루면서 ‘나는 3×2와 3×2를 더해서 알았어.’로 제시된 방법이다. 이와 같은 경험은 수와 연산 감각 신장에 효과적이다(Caldwell et al., 2011).



[그림 16] 연산법칙을 이용한 계산 절차

또한 [그림 5]의 3차 교과서 사례는 몇 십 또는 몇 백의 곱셈에서 몇을 곱한 다음 10 또는 100을 곱하는 방법이 결합법칙과 교환법칙을 요구함을 보여준다. 세 분수의 곱셈에서 차례대로 안하고 한꺼번에 분자, 분모를 상호 약분하여 곱하는 것은 곱셈의 결합법칙을 가정하는 대표적인 사례이다. 대분수의 합에서 자연수끼리 진분수끼리 각각 계산하는 것은 교환법칙과 결합법칙을 동시에 가정하며, 대분수의 차에서 자연수끼리 진분수끼리 계산하는 것은 [그림 16]의 사례①과 마찬가지로 음수를 포함한 정수의 범위로 연산법칙의 확대를 의미한다.

연산법칙에 대한 명시적인 지도가 없었기 때문에 식이 아닌 시각적 표현이나 도식을 이용하여 암묵적으로 처리한 접근 방법으로 [그림 17]과 같은 분배법칙의 적용이 있다. 곱셈식에 두 자리 수가 포함되면 그 원리는 부분곱의 합이므로 자연스럽게 분배법칙이 요구되고, 따라서 식은 아니지만 시각적 표현이나 세로셈 도식을 이용하여 암묵적으로 분배법칙을 가정한 것이다.



[그림 17] 분배법칙의 암묵적 활용

마지막으로, 수와 연산 영역이 아닌 측정 영역에서 각기둥의 부피 공식을 도출하기 위해 식이 나타내는 의미의 변화에 따라 곱셈의 결합법칙과 교환법칙이 이용되는 활용 사례도 있다([그림 18]).

직육면체의 부피는

$$10\times 6\times 12=\square\,(\text{cm}^3)$$

삼각기둥의 부피는

$$(10\times 6\times 12)\times \frac{1}{2}=\underbrace{\left(10\times 6\times \frac{1}{2}\right)}_{\text{삼각기둥의 밑넓이}}\times \underbrace{12}_{\text{삼각기둥의 높이}}$$

$$=\square\,(\text{cm}^3)$$

[그림 18] 7차 6-가 (97쪽)

Ⅴ. 논 의

교과서 분석 결과는 교육과정에 따라 교과서에서 다루어진 연산법칙의 지도 여부, 지도 시기, 지도 방법에 차이가 있음을 보여준다. 특히 현행 교과서는 7차 교과서와 함께 연산법칙의 명시적 지도뿐만 아니라 그 적용에 있어서도 약한 것으로 나타난다. 연산법칙이 후속 산술 학습 및 융통성 있는 계산 전략을 위한 필수 요소라는 점에서 향후 교과서 집필시 관련 내용의 후속 학습 이전에 명시적으로 다루어질 필요가 있다. 유진호(2006)에 따르면, 우리나라 교사들은 연산법칙의 지도 및 활용에 대한 긍정적 견해를 표명하며, 초등학생 역시 단계별로 연산법칙의 개념에 대한 이해 및 활용 능력을 지니고 있는 것으로 나타난다. 이와 같은 지도 필요성 및 가능성에 근거하여 연산법칙을 어떻게 지도하는 것이 바람직한가에 대해 교과서 분석 결과에 기초한 시사점을 제공하고자 한다.

첫째, 교과서 분석 결과는 많은 경우에 연산법칙의 암묵적 취급을 보여주지만, 연산법칙은 초등학교에서도 명시적으로 지도될 필요가 있다. 이는 연산법칙 자체에 대한 탐구를 의미한다. 체의 공리로서 대수 구조나 형식화, 기호화된 식과 명칭의 지도가 아니라 법칙을 이해하고 적용하는 경험 및 반성하는 기회를 제공해야 한다. 물론 초기 수세기를 경험하는 유아가 두 수의 덧셈에 대해 모두 세기 전략 후 이어 세기 전략을 사용하는데, 이어 셀 때 피가수를 출발 수로 택하여 가수만큼 세어 나가지만, 얼마간 경험이 축적되면 큰 수를 출발 수로 하여 작은 수만큼 이어 세는 것이 더 편리하다는 것을 스스로 깨닫게 되는 것은 덧셈의 교환법칙에 대한 파악을 의미하며, 암묵적이고 자발적인 이해 사례를 보여준다. 또는 두 자리 수의 곱셈을 배우는 학생들은 모눈 그림을 통해 암묵적으로 분배법칙을 사용하게 된다. 그러나 NCTM(2000)은 문제 해결을 위한 도구로서 뿐만 아니라 연산법칙 자체에 대해 논의하는 것이 중요하다고 하였다. 학생들이 자신의 직관적 관념에 위력을 부여하고 연산 구조에 대한 이해를 강화할 수 있기 때문이다. 연산법칙에 대해 암묵적 이해를 가정하여 반성 없이 후속 학습에서 마구 사용하는 것은 적용이 불가한 맥락까지 확장할 위험이 내재되어 있다. $2+6+4$에서 덧셈의 결합법칙에 대한 지도 없이 10 만들기 전략을 이용한 효과적인 계산을 위해 뒤의 덧셈을 먼저 하는 것은 앞서 배운 세 수의 덧셈은 순서대로 한다는 원칙과 논리적 충돌이 발생한다.

또한 연산법칙을 명시적으로 의식하지 못한다면 법칙을 적용하여 계산이 편리하게 되는 맥락이 주어져도 자발적 적용이 어려울 것이다. 수업에서 다룰 개념과 원리에 대한 설명 없이 발견에 필요한 활동과 간접적이고 암묵적인 방식으로 제시된 계산 원리는 자칫 학생 스스로 탐구하기 어렵다는 점(변희현, 2011)도 명시적인 지도의 타당성을 옹호해준다. 뺄셈의 경우 교환법칙이 성립하지 않음을 통해 덧셈과 뺄셈을 대조시킴으로써 교환법칙에 대한 이해를 깊게 하는 것이나(Caldwell et al., 2011), 세 수의 덧셈과 뺄셈에서 계산 순서에 따른 결과를 예상, 수행하고 그 이유를 생각하게 하는 활동(2007 개정 3-2, 16쪽)은 연산법칙 자체에 대한 탐구를 보여주는 의미 있는 사례이다.

둘째, 교과서의 내용 전개는 수요자인 초등학생의 관점에 적합하게 구성되는 것이 바람직하므로, 연산법칙의 지도는 구체적 사례를 통해 귀납적으로 접근하여 법칙의 내용을 이해시키는 방식을 따른다. 수학적 지식이 선험적이라는 특성에도 불구하고 어느 시점에서는 아동의 발달 및 이해 수준을 고려하여 선험적 지식을 경험적 지식인 양 다루는 것이 용인될 수 있으므로(임재훈, 2014), 초등학교에서는 수학 명제를 선험적 지식으로서 다루는데 한계가 있음을 인정해야 한다. 학생들에게는 사례를 통해 귀납적으로 규칙성을 찾는 경험적 지식으로 수학을 경험하는 것이 자연스럽고 그 사례 수의 증가가 명제의 타당성 제고에 기여하지 못함에도 불구하고 초등학교 수준에서 특정 사례의 경험은 후속 학습에서 선험적 수준의 지식 수용을 돕는다고 볼 수 있다. 실제로 연산법칙을 보여주는 적절한 시각적 표현은 한 두 개의 사례만으로도 법칙의 파악에 충분할 수 있다. 따라서 초등학교 수학 내에서의 후속 학습은 말할 것도 없고 중학교에서 일반화된 맥락에서 대수적 구조로서 연산법칙을 다루기에 앞서 구체화된 상황 속에서 특정수를 이용한 연산법칙에 대한 경험과 이해가 필요하다.

셋째, 연산법칙 지도시 초등학교에서 언어적 표현 또는 중학교에서 문자를 이용한 형식화 이전에 다양한 경험을 제공할 필요가 있고, 이를 위한 교수 전략으로 표현의 다양성을 이용할 수 있다. 교과서 분석 결과에서 나타난 연산법칙과 관련한 표현으로 구체물 그림, 사각 배열, 직사각형의 넓이, 수식, 수직선, 화폐모형, 도식 등이 있었다. 덧셈의 교환법칙을 위한 구체물 그림이나 곱셈의 결합법칙을 위한 사각 배열처럼 특정 연산에 대해 더 효과적인 표현 양식도 있고, 수직선이나 화폐모형과 같이 오늘날 우리나라 초등학교 수학에서 사용이 약화된 표현도 있다. 구체적인 덧셈식이나 곱셈식에서 동치임을 확인하는 것은 귀납의 특성이 강하고 구조를 보여주지 못하여 정당화로서의 한계가 두드러지지만 가장 일반적인 표현이기도 하다. 그 외의 다른 표현은 주로 수식 표현을 위한 보완적 역할로 제공되어 있다. 또한 표현의 선택은 연산법칙이 지도되는 시기에도 의존한다. 초기에 다루어지는 교환법칙의 경우에는 구체물 그림이 선호된다. 이와 같은 표현의 이용은 법칙의 직관적 파악을 위한 비형식적 맥락뿐만 아니라 귀납에 의해 이해된 성질의 정당화 맥락에서도 유용하다. Schifter et al.(2008)은 초등학교 저학년에게 일반화된 연산법칙의 정당화를 위한 기초를 제공하기 위해 그림이나 구체물을 이용한 시각적 표현의 유용성을 주장한다. 다만 [그림 13]에서 보았듯이, 결합법칙은 연산의 순서와 관련되므로 변화를 나타내지 못하는 하나의 그림 표현으로는 부족함에 주의할 필요가 있다.

이상과 같은 특성을 고려할 때, 덧셈에 있어 교환법칙은 구체물 그림, 결합법칙은 계산 순서의 도식화, 곱셈에 있어 교환법칙은 사각 배열, 결합법칙은 계산 순서의 도식화, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙은 사각 배열이나 직사각형 넓이의 분할로 시작할 것을 제안한다. 이와 함께 구체적인 수식의 동치를 경험하는 반성의 단계가 필요하다. 이때, 두 식을 각각 계산해보는 것에 그치지 않고 등호를 이용하여 하나의 식으로 표현해보는 것이 권장

된다. $(2\times3)\times4$와 $2\times(3\times4)$의 결과가 같음을 인식하는 것이 $(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$에 대한 이해를 보장하지는 않기 때문이다(최지영, 방정숙, 2011b). 극단적으로, 각각의 계산 결과를 얻지 못하는 경우라 할지라도 그림이나 수직선 등을 통해 연산 결과가 같다는 사실을 인식한다면 연산법칙에 대한 의미 충실한 이해라 할 수 있다. 이를 위해 연산법칙과 관련하여 등식의 표현과 분석을 통해 수학적 상황과 구조에 대한 다양한 경험을 주장하는 것(Taylor-Cox, 2003)도 같은 맥락에 있다. 좀 더 일반화를 추구한다면 시각적으로 구조 파악을 돕는 식 $(\bigcirc\times\square)\times\triangle=\bigcirc\times(\square\times\triangle)$의 지도 가능성도 고려할 만하다.

마지막으로, 연산법칙에 대한 명시적인 지도가 있더라도 체계적이고 지속적인 이해를 뒷받침하기 위해서는 이후 의미 있게 경험할 수 있는 활용 맥락이 뒤따라야 한다. 구조적 인식이 어려운 초등학교 수준에서 활용 없는 학습은 연산법칙의 가치를 간과하게 할 것이다. 굳이 법칙의 이름이 거론될 필요도 없고 중요한 것은 그러한 법칙을 왜 배워야 하는지, 어디에서 유용하게 적용되는지를 경험하게 해야 하는 것이다. 연산법칙은 계산 원리 이해 및 계산의 효율성 제고에 기여하므로, 각 연산법칙이 활용되는 계산 방법과 함께 지도되는 것도 바람직할 것이다. 그러나 교과서 분석 결과는 연산법칙의 적용을 경험할 기회를 제공하는 데 한계가 있는 것으로 확인된다. 교과서의 내용 전개상 연산법칙이 계산 원리에 필수 요소로 적용되는 다수의 사례가 있지만, 의식적인 반성 없이 가정된 연산법칙은 수학을 아는 사람에게는 보이지만 수학을 학습하는 초보자인 초등학생에게는 계산 알고리즘 습득에 가려져 그에 대한 인식을 기대하는 것이 무리일 수 있다. 곱셈의 교환법칙을 배우고 나서 담화 ‘영숙이는, 120×126은 126×120과 같으므로, 126×120으로 셈을 하면 더 간단하다고 말하였습니다(1차 5-1, 38쪽).’를 통해 용례를 제시한 경우나 $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ 꼴의 분배법칙을 다룬 후 곧이어 세 자리 수와 한 자리 수의 곱셈에 명시적으로 적용한 경우(3차 4-1, 46쪽)는 학생들이 연산법칙의 적용을 경험할 수 있는 적절한 사례이다.

초등학교 수학 교육과정 및 교과서 집필이 쉽지 않은 이유는 교과 내용 이외에 아동의 수학적 사고 발달에 기초하여 내용을 선택하고 전개해야 하기 때문이다. 본 연구의 시사점이 초등학생의 연산법칙에 대한 이해 조사 연구와 더불어 연산법칙 지도를 위한 실제적인 도움이 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부 (2015). **2015 개정 수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8]

방정숙, 최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석 -일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로-. **수학교육, 50**(1), 41-59

변희현 (2011). 한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교 분석. **한국초등수학교육학회지**, **15**(1), 39-56

유진호 (2006). **초등학교 수학에서 연산지도에 관한 연구**. 단국대학교 박사학위논문

임재훈 (2014). 선험적 지식으로서 곱셈의 교환법칙 교육의 문제. **한국초등수학교육학회지**, **18**(1), 1-17

정연준, 조영미 (2012). 자연수 곱셈 계산 지도에 관한 초등학교 수학교과서 비교 분석 연구. **수학교육학연구**, **22**(2), 293-309

최지영, 방정숙 (2011a). 초등학생들의 범자연수 연산의 성질에 대한 이해 분석. **수학교육학연구, 21**(3), 239-259

최지영, 방정숙 (2011b). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색: 곱셈의 결합법칙 탐구에 관한 수업 사례 연구. **학교수학, 13**(4), 581-598

Brown, S. I. (2013). *Insights into mathematical thought: Excursions with distributivity*. Reston, VA: NCTM

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165-184). New York: Lawrence Erlbaum.

Caldwell, J. H., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2011). *Developing essential understanding of addition and subtraction for teaching mathematics in prekindergarten-grade 2*. 장혜원, 이화영, 임미인(역). **덧셈과 뺄셈의 필수 이해**. 서울: 교우사

Common Core State Standards Initiative (CCSSI, 2010). *Common core state standards for mathematics*. http://www.corestandards.org/Math/

Frege, G. (1884). *Die grundlagen der arithmetik*. 박준용, 최원배 (역). **산수의 기초**. 대우고전총서 8. 서울: 아카넷

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?, In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the new math*. New York: St. Martin's press

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2006). *Curriculum focal points for* *prekindergarten through grade 8 mathematics: a quest for coherence*. Reston, VA: NCTM

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lamdin, D. V., & Smith, N. L. (1998). *Helping children learn mathematics*. 강문봉 외(역, 1999). **초등 수학 학습지도의 이해**. 서울: 양문사

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J., & Bastable, V. (2008). Early algebra: what does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades?, In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 413-447). New York: Lawrence Erlbaum.

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? yes. *Young Children*, January, 14-21

Tent, M. W. (2006). Understanding the properties of arithmetic: A prerequisite for success in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(1), 22-25.

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Pearson, Inc.

* 이외에 본 연구의 분석 대상인 1차~2009 개정 교육과정기의 산수 또는 수학 교과서 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2를 포함함을 밝힘.

<Abstract>

Research on Teaching Method for the Properties of Arithmetic Based on Analysis of Elementary School Mathematics Textbooks

Chang, Hyewon[5)]

The properties of arithmetic are considered as essential to understand the principles of calculation and develop effective strategies for calculation in the elementary school level, thanks to agreement on early algebra. Therefore elementary students' misunderstanding of the properties of arithmetic might cause learning difficulties as well as misconcepts in their following learning processes.

This study aims to provide elementary teachers a part of pedagogical content knowledge about the properties of arithmetic and to induce some didactical implications for teaching the properties of arithmetic in the elementary school level.

To do this, elementary school mathematics textbooks since the period of the first curriculum were analyzed. These results from analysis show which properties of arithmetic have been taught, when they were taught, and how they were taught. Based on them, some didactical implications were suggested for desirable teaching of the properties of arithmetic.

Key words: the properties of arithmetic, commutative law, associative law, distributive law, textbook analysis, the principles of calculation, effective strategies for calculation

논문접수: 2017. 01. 15
논문심사: 2017. 02. 20
게재확정: 2017. 02. 23

5) hwchang@snue.ac.kr