한국초등수학교육학회지 21(2) 365-389. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 21(2) 365-389.
2017. 05. 31 May 31. 2017.

# 초등 영재학생들의 원순열 과제 해결 분석

박진형[1] · 김동원[2]

본 연구에서는 초등 영재학생들의 원순열 과제 해결 과정을 분석하여 교수학적 시사점을 도출하는 데 목적을 두었다. 구체적으로, 본 연구에서는 초등 영재학생들에게 원순열 과제를 제공하여 이 학생들의 해결 과정을 표현, 세기 과정, 결과 집합 구성 방식을 통하여 분석하였다. 연구 결과 원순열 과제를 해결하는 과정에서 일부 학생들이 유추를 활용하는 장면이 확인되었으며, 학생들은 가능한 결과들의 범주화와 재범주화 과정에서, 그리고 유추의 적절하지 않은 활용으로 인하여 원순열 과제 해결에 어려움을 겪는 것으로 확인되었다.

주제어: 조합론, 초등 영재, 유추

## Ⅰ. 들어가는 글

학교수학에서는 주로 유한 집합의 원소의 선택이나 배열 등에 대한 문제와 관련지어 조합론(combinatorics)을 다루며, 수학교육 연구 공동체에서는 학생들이 이러한 조합적 과제를 해결하는 과정에서 경험하는 사고를 조합적 사고라는 용어로 논의해왔다(Lockwood, 2013). 조합론은 한편으로 우리의 일상이나 다양한 학문 영역과 관련된다는 점에서, 다른 한편으로 학생들의 수학적 탐구를 촉진할 수 있다는 점에서 학교수학에서 강조되어 왔다(Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

선행 연구들에서는 순열과 조합 등을 포함하는 조합론이 학생들에게 까다롭고 어렵다는 점이 지적되어왔다(Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997; Eizenberg & Zaslavsky 2004; Lockwood, 2011, 2013). 특히, 학생들은 조합적 과제들을 해결할 때마다 늘 새로운 과제를 대면하는 것처럼 반응하는 경향이 있다는 점이 보고되어 왔다(English, 2005; Lockwood, 2011). 이에 학생들의 조합적 사고를 다룬 선행 연구들에서는 주로 조합적 과제들의 유형을 범주화하거나(Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997), 학생들에게 특정한 유형의 조합적 과제들을 제시하고 학생들이 이 유형의 과제들을 어떠한 방식으로 해결하는지 그리고 이 과제들 사이의 유사성을 어떤 방식으로 포착하는지에 대해 분석해왔다(English, 2005; Lockwood, 2011). 이를 통하여, 한편으로 특정 유형의 조합적 과제들에 대한 학생들의 탐구 방식을 확인하고, 다른 한편으로 학생들이 조합적 과제들의 유사점이나 차이점을 어떠한 방식으로 파악하는지 확인하여 조합론에 대한 교수학적 시사점을 얻고자 시도해왔다(Lockwood, 2011).

---

1) [제1저자] 명지대학교
2) [교신저자] 청주교육대학교 수학교육과

국내외 선행 연구들에서는 학생들이 조합적 과제들을 해결하는 과정에서 문제 상황에 따라 같은 경우로 고려되거나 혹은 다른 경우로 구분되기도 하는 결과들에 대해 학생들이 겪을 수 있는 어려움이 보고되어 있다. 예를 들어, 구나영과 이경화(2014)는 순열 과제를 해결할 때에는 순서에 따라 다른 경우로 고려되었던 결과들이 조합적 과제를 해결하는 과정에서는 하나의 경우로 고려되면서 겪는 학생들의 어려움을 소개한 바 있다. 이와 유사하게, Kapon, Ron, Hershkowitz, Dreyfus (2015)는 두 개의 동전 A, B를 동시에 던지는 시행에서, 동전 A, B가 각각 앞면과 뒷면이 나오는 결과와 뒷면과 앞면이 나오는 결과가 서로 같은 경우로 고려되어야 하는지, 아니면 다른 경우로 고려되어야 하는지에 대해 학생들이 어려움을 겪는 장면을 보고하였다. 구나영과 이경화(2014)에서 학생들은 순열 과제를 해결한 방식을 조합적 과제 해결에 활용하는 과정에서 중복되는 경우들을 처리하는데 어려움을 겪었다. 구나영과 이경화(2014)의 경우 순열로부터 조합을 유도하는 방식으로 학생들의 탐구를 설계하였음이 확인된다. 이처럼, 우리의 수학 교과서들에서는 순열로부터 조합을 유도하는 방식을 택하고 있다(김미정, 2010).

우리의 학교수학에서 이와 유사한 방식으로 도입하고 있는 조합론의 내용 가운데 하나는 원순열이다. 구체적으로, 원순열 역시 순열을 활용하여 센 여러 결과들 가운데 일부 결과들이 같은 경우로 고려됨을 학생들이 파악하도록 하여, 순열로부터 산출된 경우의 수를 중복된 개수만큼 나누는 방식으로 유도하고 있다(김미정, 2010). 이러한 점에서 원순열에 대한 학생들의 탐구에서도 조합적 과제를 해결하는 과정에서 학생들이 보인 어려움과 유사한 문제적 국면을 경험할 가능성이 있을 것으로 예상된다. 또한, 원순열 과제는 순열 · 조합 과제와는 구분하여 다루어지고 있는 내용인 바, 학생들은 순열 · 조합 과제를 해결하는 과정과는 다소 다른 어려움이나 탐구 상의 특징을 가지고 있을 것으로 예상된다.

그럼에도 불구하고, 국내 선행연구들은 주로 순열 · 조합 과제들을 소재로 학생들의 조합적 사고에 대한 연구를 수행해 왔으며(e.g., 구나영, 이경화, 2014; 김미정, 김용구, 정인철, 2009a, 2009b; 김원경, 홍갑룡, 이종학, 2011), 원순열 과제에 대한 학생들의 탐구가 어떻게 진전되는지를 확인하는 연구는 찾아보기 어려운 실정이다. 또한, 어린 아동들도 순열 · 조합뿐만 아니라 이들을 복합적으로 활용한 조합적 과제들에 대한 다각적인 탐구를 전개할 수 있다는 점이 알려져 있음에도 불구하고(English, 2005; Maher, Powell, Uptegrove, 2010), 조합론과 관련된 국내 선행 연구들은 주로 중등 이상의 학생들에 초점을 둔 경향이 있다. 특히 최근의 연구들은 어린 아동들에게도 다양한 유형의 조합적 과제 해결 경험을 제공하는 것이 필요함을 지적하고 있다는 점에서(Maher, Powerl, Uptegrove, 2010), 우리의 아동들은 조합적 과제들에 대해 어떠한 방식으로 탐구를 전개하는가에 대해 살펴보는 연구가 필요한 것으로 판단된다. 이처럼 학생들의 조합적 탐구를 다루어 온 기존 선행 연구들이 그동안 초점을 둔 내용과 학령에 비추어, 본 연구에서는 조합적 과제들 가운데 특히 원순열 과제에 대한 초등학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 이루어지는지를 분석하여 교수학적 시사점을 도출하는 데 목적을 둔다.

수학 영재학생들을 대상으로 한 연구는 연구 결과를 일반 학생들에게 곧바로 일반화하기는 어려운 면이 있지만, 보통의 학생들에 비하여 익숙하지 않은 과제에 대해서도 적극적이고 능동적인 연구 참여를 기대할 수 있다는 점에서, 연구자로 하여금 수학적 사고 과정을 비교적 섬세하게 분석할 수 있는 기회를 제공할 수 있다(방신영, 송상헌, 2013; 이진수, 송상헌, 2013; 황지남, 2015). 이에 본 연구는 수학 영재학생들이 원순열 과제를 어떠한 방식으로 탐구하는가에 대해 분석하여, 조합 영역의 지도를 위한 교육적 시사점을 도출하고자 한다. 구체적으로, Lockwood(2013)가 제안한 조합적 사고 모델을 활용하여, 수학 영

재학생들은 원순열 과제 탐구에서 어떠한 표현과 세기 과정을 활용하며, 이 학생들의 결과 집합 구성은 어떻게 이루어지는가에 대해 분석하고자 한다. 이상의 논의에 기반을 두고 도출한 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다: 초등 수학영재 학생들은 원순열 과제 탐구에서 어떠한 표현과 세기 과정을 활용하며, 어떠한 방식으로 결과 집합을 생성하는가?

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 조합적 사고 관련 선행 연구

학생들의 조합적 사고 혹은 조합 과제 해결과 관련하여 국내외에서 다양한 연구가 전개되어 왔으며, 이들 연구에서는 공통적으로 조합 영역이 교사들이 가르치고 학생들이 배우기에게 상당히 어렵다는 점이 지적되어 왔다(이지현, 이정연, 최영기, 2005; 김미정, 김용구, 정인철, 2009b; Lockwood, 2011, 2013). 구체적으로, 학생들은 앞서 해결하였던 조합적 문제해결 경험과 당면한 문제 상황 사이의 연관성을 찾는 데 어려움을 겪어서 매번 새로운 과제를 해결하는 것과 같이 느끼는 경향이 있으며(Lockwood, 2011), 조합적 과제를 해결하는 데 있어서 불안을 느끼기도 한다는 점이 지적되어 왔다(김미정, 김용구, 정인철, 2009a).

학생들의 조합적인 사고에 대한 국외 선행 연구들은 주로 조합적 과제의 유형을 범주화하거나, 학생들이 어떠한 방식으로 조합적 과제들 사이의 연관성을 도출하는지에 초점을 두는 경향이 있다. 특히, 조합적 사고에 대한 국외 연구들 상당수는 Batanero, Navarro-Pelayo & Godino(1997)가 제안한 조합적 과제 유형을 활용하여 수행되어 왔다. 이들은 조합적 과제들을 선택(selection), 분배(distribution), 분할(partition)로 범주화하여 각 과제 유형에 따른 학생들의 탐구 과정을 분석하였다(Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997).

그러나 Batanero, Navarro-Pelayo & Godino(1997)가 제안한 조합적 과제들의 유형은 우리의 교재 구성 방식이나 내용 전개 방식과는 다소 다르다는 점이 지적되었다(이지현, 이정연, 최영기, 2005). 오히려 국내 연구들은 주로 순열·조합을 소재로 연구를 수행해왔으며(구나영, 이경화, 2014; 김미정, 2010; 김서령, 박혜숙, 김완순, 2007), Batanero, Navarro-Pelayo & Godino (1997)가 제안한 틀을 보조적으로 활용해왔다. 학교수학에서의 조합적 사고에 대한 국내의 연구들은 주로 학생들의 오류 유형(이지현, 이정연, 최영기, 2005), 인지적 장애, 혹은 불안요인 등을 조사해왔다(김미정, 김용구, 정인철, 2009; 김서령, 박혜숙, 김완순, 2007).

이러한 선행 연구들에서는 공통적으로 학생들이 조합적 과제를 해결하는 과정에서 중복되는 결과들을 어떠한 방식으로 처리해야 하는가와 관련된 어려움들이 보고되었다(구나영, 이경화, 2014; Kapon, Ron, Hershkowitz, Dreyfus, 2015). 원순열 역시 우선은 순열을 활용하여 센 경우들 가운데 중복된 경우들을 줄여나가는 방식으로 도입하고 있다(김미정, 2010). 이러한 점에서 원순열에 대한 학생들의 탐구 과정에서도 앞서 이루어진 연구들에서 보고한 바와 유사하거나 혹은 다른 학생들의 어려움이 확인될 가능성이 높을 것으로 예상된다. 그럼에도 불구하고, 원순열에 대한 학생들의 탐구에 초점을 둔 연구는 부족한 실정인 바, 이 연구에서는 조합적 과제들 가운데 특히 원순열 과제에 대한 학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 이루어지는지에 주목하고자 한다.

## 2. 조합적 사고 모델

Lockwood(2013)에 따르면 조합적 과제 해결과 관련하여 학생들의 사고 수준이나 사고방식을 분석하기 위한 이론적인 틀은 부족한 실정이다. 이에 Lockwood(2013)는 조합적 사고와 관련된 선행 연구들과 학생들의 실제 사고 과정을 분석하여 조합적 사고 모델을 도출하여 제안하였다.

Lockwood가 제안한 조합적 사고 모델은 세 가지 요소로 이루어지며, 이는 표현(formulas/expressions), 세기 과정(counting process), 결과 집합(set of outcomes)이다. 표현은 경우의 수를 산출하는 데 활용된 수학적인 식이나 표현을 말한다. 예를 들어, ${}_5P_3$, ${}_4C_3$ 등과 같이 조합적인 의미를 갖는 특수한 식이나, $9\times13 + 3\times12$ 등과 같이 수의 연산을 조합한 식 등이 표현에 해당한다. 세기 과정은 말 그대로 학생이 주어진 상황에 대한 경우의 수를 실제로 세는 과정을 말한다. 학생이 주어진 상황에 대한 경우의 수를 세기 위하여 전체 상황을 몇 가지로 범주화하거나, 특정한 단계로 세는 과정을 거치게 되는데 이 과정을 세기 과정이라 하였다. 결과 집합은 학생이 경우의 수를 세면서 실제로 세고 있는 대상들의 집합을 말한다.

구체적으로, Lockwood(2013)에 따르면 A, B, C의 세 문자를 모두 한 번씩만 활용하여 만들 수 있는 단어의 수를 세는 문제에 대하여, 학생이 3!이나 $3\times2\times1$과 같은 수식을 활용하였다면 이러한 식들이 '표현'에 해당한다. 그리고 이 과정에서 적용한 순열이나 곱의 법칙 등이 '세기 과정'에 해당하고, 학생들이 6이라는 경우의 수를 구하기 위하여 ABC, ACB등과 같이 실제로 센 대상들의 모임이 '결과 집합'에 해당한다. 즉, 가능한 전체 경우들 가운데 학생들이 실제로 구한 경우들이 결과 집합을 이루며, 올바른 답을 도출하지 못한 경우에 학생들은 전체 경우들 가운데 일부 경우들만으로 이루어진 결과 집합을 생성할 수도 있다.

본 연구는 학생들의 원순열 과제 해결 과정을 분석하는 데 초점을 두고 있다. 연구진은 Lockwood(2013)가 제안한 조합적 사고 모델이 학생들의 조합적 과제 해결 과정을 부분적으로나마 파악하는 데 도움이 될 것으로 판단하고, 이 모델을 활용하여 학생들의 원순열 과제 해결 과정을 분석하고자 한다.

## 3. 수학 영재학생들의 특성

수학 영재학생들은 일반적으로 수학적 과제를 비교적 간결하고 명료하게 해결하며, 이러한 수학적 과제 해결 과정과 결과를 신속하게 일반화하는 것으로 알려져 있다(Kruteskii, 1976). 남승인(2000)에 따르면 수학 영재학생들은 주변의 환경에서 양과 양적 측면에 민감하며 관심과 호기심이 많고, 수학적 규칙성, 수학적 구조에 대한 지각력, 해석력이 민첩하다. 또한, 일반적 수준의 문제 해결에서 적용되는 알고리즘을 일반화하는 능력이 우수하며, 수학적 추론 과정을 단축할 수 있고, 예상하기 어려운 독특한 방식으로 과제를 해결하는 경향이 있다. 뿐만 아니라, 추상적인 방식으로 수학적 탐구를 전개하려는 경향이 있다.

특히, 송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원(2007)은 수학 영재학생들이 사고 과정을 문자로 표현하고 이를 활용하여 답안을 표현하는 데 비교적 능숙하다는 점을 보고하였다. 이들에 따르면, 영재학생들은 귀납적인 규칙을 찾기보다 다이어그램이나 관계식을 사용한 포괄적인 예를 통해 보다 일반적인 구조를 파악하려는 경향을 보였으며, 이는 영재학생들이 사고 과정을 문자로 나타내고 이를 활용하는 데 능숙하다는 점과 관련됨을 지적하였다. 또한, 수학 영재학생들은 비교적 유연하고 유창하게 유추를 활용할 수 있으며, 이러한

유추적 사고는 이미 알고 있던 개념을 재해석하고, 새로운 관점으로 변형하게 하는 역할을 하며, 새로운 지식의 발견에 도움을 주는 것으로 알려져 있다(이경화, 2009).

이와 같은 수학 영재학생들의 특성에 비추어볼 때, 수학 영재학생들은 조합적 과제에 대해서도 비교적 일반화를 손쉽게 달성하고, 분석적인 능력을 활용하여 세기 과정에 대한 알고리즘을 찾아 일반화 과정을 수식이나 문자로도 적절하게 나타낼 수 있을 것으로 판단된다.

## Ⅲ. 연구 방법

사례 연구는 연구자가 이해하고자 하는 사례나 현상을 심층적으로 분석하여 최대한의 논점과 시사점 도출에 초점을 둔다(Stake, 1995). 이러한 점에서 사례 연구 방법을 사용하는 것이 원순열 과제에 대한 학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 이루어지는지를 분석하는 이 연구의 목적을 달성하는 데 적합할 것으로 판단하였다. 구체적으로, 다음과 같은 절차로 연구 참여자를 선정하고, 사례에 대한 자료를 수집하여 분석하였다.

### 1. 연구 참여자

Stake(1995)에 의하면, 사례 연구는 단일한 사례로부터 최대한의 논점을 이끌어내는 데 목적을 둔다. 이러한 점에서 이 연구에서는 비교적 장시간의 탐구적인 활동에 익숙한 연구 참여자를 선정하는 것이 학생들의 원순열 과제 탐구에 대한 심층적인 이해를 시도하는 본 연구의 목적에 적합할 것으로 판단하였다.

이에 본 연구에서는 학교 정규과정 이외에 별도의 탐구 중심 수업에 참여하고 있는 학생들을 대상으로 수업을 실시하였다. 연구 참여자는 청주시에 소재한 대학부설 과학영재교육원에서 6개월간 한 학급에서 수업을 받아온 초등학교 6학년 학생 20명으로, 상위권의 수학적 성취를 보여주었으며 자신의 탐구 과정을 상세하게 표현하는 데 익숙한 학생들이었다. 본 연구의 목적은 원순열 과제에 대한 학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 이루어지는지를 분석하여 교수학적 시사점을 도출하는 데 있다. 이러한 탐색적인 연구에서는 수학적인 성취가 뛰어나고 자신의 풀이 과정을 섬세하게 기술할 수 있는 학생에 대해 연구를 수행함으로써 학생들의 탐구 과정과 그 특성에 대한 풍성한 논점들을 확보하는 것이 연구의 목적을 달성하는 데 도움이 된다는 점이 알려져 있다(Dreyfus & Tsamir, 2004). 이에 본 연구에서도 성취가 뛰어난 영재 학생들을 연구 참여자로 선정하여 원순열 과제에 대한 학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 진전되는가에 대한 시사점을 도출하고자 하였다.

또한, 앞서 서론에서 상술한 바와 같이 본 연구에서 소재로 삼고 있는 조합적 과제 해결의 경우에는 사전에 관련된 탐구에 참여해보지 않은 어린 아동들도 충분히 다양한 전략을 통해 참여할 수 있다는 점이 알려져 있으며(English, 1991, 2005), 어린 아동들을 대상으로 한 조합적 내용의 교수 학습 및 연구의 중요성이 강조되고 있음에도 불구하고(Maher, Powerl, Uptegrove, 2010) 우리의 아동들이 조합적 과제들에 대해 어떠한 방식으로 탐구를 전개하는지 살펴보는 연구는 부족한 실정이다. 이에 연구진은 이러한 선행 연구들에 비추어 초등 영재 학생들을 대상으로 연구를 수행하는 것이, 한편으로 어린 아동들을 대상으로 한 조합적 내용의 교수 학습 가능성을 확인하고, 다른 한편으로 이처럼 수학적 성취가 뛰어난 아동들의 조합적 과제해결 과정의 분석을 통해 교수학적 시사점을 도출하여 생산

적인 논점들을 산출하는 데 도움이 될 것으로 판단하였다. 이처럼 본 연구는 통상적인 학생들에 비해 우수한 연구 참여자를 대상으로 전개되므로, 본 연구의 결과들은 원순열 과제와 관련된 학생들의 탐구에 대한 부분적인 이론적인 논점들을 제공하는 것이지 그 자체로 일반화 가능하거나 완성된 이론을 제기하는 것은 아니다. 다만, 본 연구를 통하여 제안되는 논점들은 후속 연구들에서 학생들의 조합적 사고나 과제해결과 관련된 교육적인 이론 수립의 보조적인 수단이나 도구로 활용될 것으로 기대된다.

본 연구에서 학생들의 탐구 활동은 개별적으로 3시간 동안 이루어졌다. 이 연구에서는 연구에 참여한 학생들을 S1~S20으로 부르기로 하였다. 연구 참여자들은 과학영재교육원에서 다양한 형식과 내용의 수학 수업을 경험했기 때문에 새로운 내용을 다루는 수학수업에 거부감이 없었다.

### 2. 자료의 수집과 분석

본 연구에서는 학생들의 조합적 과제 해결을 분석하기 위하여 다음과 같은 절차로 연구를 수행하였다. 우선 조합적 과제들을 설계하고, 세 시간의 수업을 실시하였다. 연구진은 학생들의 조합적 사고와 학생들이 활동지에 기록한 다양한 표상 등과의 밀접한 관련성을 가정하고, 학생들의 활동지에 기록된 사항들을 중심으로 분석을 수행하였다. 이와 더불어, 연구진의 현장노트와 학생들의 탐구 과정을 기록한 영상 자료를 보조적으로 활용하여 활동지 기록에 대한 분석 결과의 적절성을 검토하는 데 보조적으로 활용하였다.

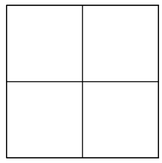
이어서 위와 같은 절차에 따라 수집한 자료들을 Lockwood(2013)에서 제안된 조합적 사고 모델로 분석하여, 학생들의 조합적 과제해결 과정에서 조합적 사고 모델을 이루는 표현, 세기 과정, 결과 집합을 확인하는데 초점을 두었다. 구체적으로, 연구진은 학생들이 활동지에 작성한 풀이에서 학생들이 제시한 답을 확인하였으며, 이러한 답을 산출하는 데 활용한 식이나 표현을 활동지에서 확인하였다. 이어서, 학생들의 풀이 과정에서 답을 산출하는 데 적용된 세기 과정을 확인하였으며, 각 학생들의 세기 과정을 모두 각기 기록한 후에 다시 전체 학생들의 세기 과정을 몇 가지 범주로 나누었다. 또한, 이 과정에서 학생들이 경우의 수를 구하기 위하여 실제로 세거나 구한 경우들을 확인하였으며, 학생들의 결과 집합 생성 방식 역시 각 학생들의 결과 집합을 모두 각기 기록한 후에 다시 전체 학생들의 결과 집합 생성 방식을 몇 가지 범주로 나누었다. 또한 학생들의 조합적 사고에 대한 연구자 해석의 내적 타당도와 신뢰도를 높이기 위하여 동료 점검(Creswell, 2009)을 활용하였다. 동료 점검은 조합적 사고 모델을 활용하여 분석한 결과에 대한 연구진의 해석을 확증하고, 동시에 부가적인 해석을 얻기 위하여 다른 연구자들에게 해석 결과에 대한 의견을 구하는 방식으로 이루어졌다.

### 3. 과제

학생들에게 주어진 과제는 도형을 서로 다른 여러 색으로 칠하는 경우의 수를 구하는 것이다. 통상적으로 원순열은 원의 외부에 대상을 배열하는 경우의 수를 구하는 과제를 활용하여 도입하고 있으나, 이는 원순열을 원 위에 대상을 배열하는 것으로 국한하여 생각하게 하는 오류를 야기할 가능성이 있다는 점이 논의되어 왔다(김미정, 2010). 뿐만 아니라, 원탁과 같은 원형의 대상에 사물을 배치하는 경우의 수를 구하는 맥락의 과제는 원탁 주변 역시 아무 것도 없는 이상적인 상황을 추가적으로 가정하도록 해야 하는 이상화를 필요로 한다. 이에 연구진은 이미 이상화되어 있는 도형에 서로 다른 색을 칠하도록 하는

과제 상황이 부가적인 오류의 가능성이나 추가적인 이상화의 문제를 피할 수 있을 것으로 판단하였다. 수업에서 사용한 과제는 다음과 같다.

1. 오른쪽 그림과 같이 사등분한 정사각형에 빨강, 주황, 노랑, 초록의 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법은 모두 몇 가지인지 구하고, 풀이가 성립하는 이유를 설명하시오.



2. 정사면체의 각 면을 빨강, 주황, 노랑, 초록의 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하고, 풀이가 성립하는 이유를 설명하시오.

3. 정육면체의 각 면을 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 보라의 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하고, 풀이가 성립하는 이유를 설명하시오.

앞서 이론적 배경에서 상술한 바와 같이, 학생들의 조합적 과제 해결과 사고를 분석한 연구들은 특정 유형의 조합적 과제들을 학생들에게 제시하고 이를 해결하는 방식을 분석한 경향이 있다. 특히, 선행 연구자들은 학생들에게 유사하면서도 점진적으로 구조가 확장되는 과제를 제공하여 학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 진전되는지를 분석하는 연구를 전개해왔다(English, 2005; Lockwood, 2011). 이에 본 연구에서도 위와 같이 기본적으로는 원순열 과제 구조를 공유하면서도 점진적으로 좀 더 확장된 과제들을 제시하였다. 우선 첫 번째 과제에서는 정사각형에 네 개의 색을 배열하는 경우를 질문하여, 원순열의 기본적인 아이디어를 파악할 기회를 제공하고자 하였다. 두 번째 과제에서는 평면도형의 색칠 과제를 입체도형 맥락으로 확장하여 학생들이 단순히 평면에서의 회전뿐만 아니라, 입체에서의 다각적인 회전을 고려한 원순열 과제해결을 경험하게 하고자 하였다. 다양한 입체도형들 가운데 특히 정다면체에 대한 색칠 과제를 제시한 것은 정다면체가 앞서 연구진이 색칠 과제를 도입한 의도와 일관되게 추가적인 이상화 없이도 원순열에 대해 다룰 수 있는 도형이기 때문이다. 다만, 연구진은 평면에서 입체로의 확장이 학생들에게 어려움을 야기할 수 있을 것이라는 점을 감안하여 정다면체 가운데 가장 간단한 정사면체에 대한 색칠 과제를 두 번째 과제에 제시하였다. 이어지는 세 번째 과제에서는 여전히 입체도형의 색칠이라는 맥락은 유지하되 좀 더 복잡한 도형인 정육면체에 대한 색칠을 다루도록 하여, 앞서 두 번째 과제에서 경험한 입체도형에 대한 원순열 과제해결 경험을 확장할 수 있도록 하였다.

이상의 과제들 가운데 특히 과제 2와 과제 3은 입체도형을 다룬다는 점에서 초등학생들에게 다소 어려울 수 있으므로, 위 과제와 함께 연구진은 추가로 교구를 제공하는 것이 과제를 해결하는 데 보조적인 도구로 도움을 제공할 수 있을 것으로 기대하였다. 이에 연구진은 1번 과제를 해결하는 과정에서는 네 영역으로 나누어진 정사각형 모양의 마분지를, 2번 과제와 3번 과제를 해결하는 국면에서는 투명한 정사면체와 정육면체 도형 교구를 학생들에게 제공하였으며, 색깔 스티커를 함께 제공하여 학생들이 도형에 직접 색칠해볼 수 있도록 하였다.

# Ⅳ. 연구 결과

## 1. 에피소드 1

첫 번째 과제를 해결하기 위하여 학생들은 각기 나름의 방식으로 주어진 과제의 상황을 파악하고 정사각형을 사등분한 영역에 서로 다른 네 가지 색을 칠하는 경우의 수를 세고자 시도하였다. 학생들이 가장 먼저 제기한 문제는 도형을 네 가지 색으로 칠하였을 때, 이 도형을 회전하여 도출된 색의 배열도 앞서 도출한 색의 배열과 같은 경우로 고려해야 하는지의 여부였다. 이에 대하여 학생들은 각자 교구를 직접 돌려보면서 이를 어떻게 판단해야 할 것인지에 대해 생각하였으며, 그 결과 특정한 색 배열을 회전하여도 같은 배열로 고려하는 것이 적절하다는 점에 대해 교실 내에 충분한 합의가 이루어졌다. 이러한 논의 이후에 학생들이 과제 1에 대해 작성한 답안의 유형은 다음 표와 같다.

<표 1> 과제 1에 대한 학생들의 답

| 답 | 6개 | 12개 | 24개 | 계 |
|---|---|---|---|---|
| 학생 수 | 11명 | 1명 | 8명 | 20명 |

구체적으로, 전체 학생들의 표현과 세기 과정, 결과 집합에 따라 다음과 같이 다섯 가지 유형으로 범주화할 수 있었다.

<표 2> 과제 1에 대한 반응 유형별 인원 수

| 유형 | 유형 1-1 | 유형 1-2 | 유형 1-3 | 유형 1-4 | 유형 1-5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 | 순열만 활용 | 전체 경우 찾기 | | |
| 표현 | $\frac{4\times3\times2\times1}{4}$ | $4\times3\times2\times1$ | $6\times4$ | $(3+2+1)\times2$ | - |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 | | 일부 경우만 구함 | | 전체 경우 모두 구함 |
| 인원 | 7명 | 7명 | 1명 | 1명 | 4명 |

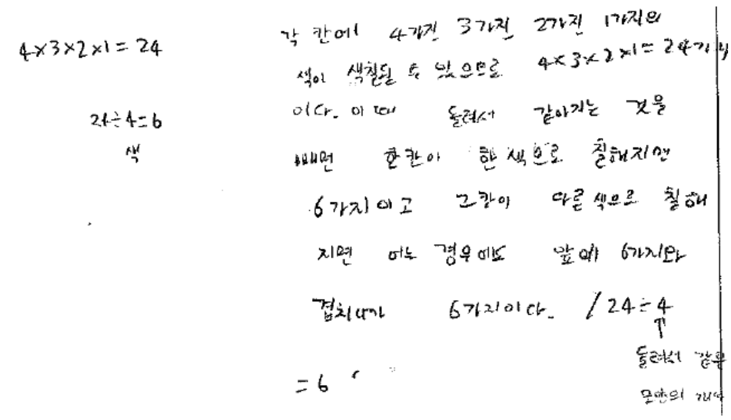
위 표와 같이 학생들의 반응은 크게 다섯 가지 유형으로 범주화되었으며, 이 가운데 유형 1-1, 1-2의 학생들은 순열의 아이디어를 활용한 반면, 유형 1-3, 1-4, 1-5의 학생들은 일어날 수 있는 경우를 모두 구하고자 시도하면서 전체 경우의 수를 구하고자 하였다.

유형 1-1의 학생들은 세기 과정을 $\frac{4\times3\times2\times1}{4}$로 표현하였으며, 이 학생들의 세기 과정은 모두 '순열 활용 후 중복 제거'에 해당하였다. 그리고 이 학생들은 모두 정답을 맞혔으며 전체 경우들을 전혀 구하지 않거나, 일부만 구하였다.

<표 3> 유형 1-1 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $\frac{4\times3\times2\times1}{4}$ |
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 |

구체적으로, 유형 1-1 학생들이 활용한 '순열 활용 후 중복 제거' 방식의 세기 과정은 우선 네 가지 색을 일렬로 배열하는 경우의 수인 24를 구하고 나서, 정사각형을 회전시켜도 동일한 색의 배열이라는 점으로부터 24를 4로 나누어 6을 구하는 것이었다([그림 1]).




[그림 1] 학생 S7의 활동지

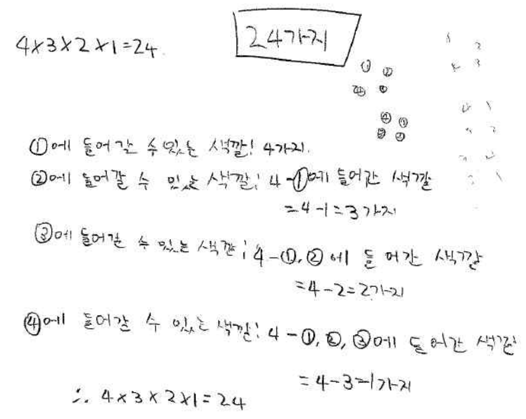
이처럼 유형1-1 학생들은 네 개의 서로 다른 수나 문자를 일렬로 배열하는 과제해결 경험을 과제1의 해결 과정으로 유추하여 활용하였다. 유형 1-1의 학생들은 주어진 색을 수 혹은 문자로 대체하여 과제를 해결하고자 하였으며, 우선 일렬로 배열하는 문제 상황에서는 $4\times3\times2\times1$개의 경우를 구할 수 있다는 점을 도출하였다. 그리고 이처럼 일렬로 수나 문자를 배열하는 문제 상황과는 달리 주어진 과제1에서는 정사각형이 회전될 수 있으므로 이로부터 $4\times3\times2\times1$을 4로 나누어야 한다는 점을 도출하였다.

유형 1-2의 학생들은 세기 과정을 $4\times3\times2\times1$로 표현하였으며, 이 학생들의 세기 과정은 모두 '순열만 활용'에 해당하였다. 그리고 이 학생들은 전체 경우들을 전혀 구하지 않거나, 일부만 구하였다.

<표 4> 유형 1-2 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $4\times3\times2\times1$ |
| 세기 과정 | 순열만 활용 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 |

구체적으로, 유형 1-2 학생들이 활용한 '순열만 활용' 방식의 세기 과정은 네 가지 색을 일렬로 배열하는 경우의 수인 24를 구하는 것과 같았다([그림 2]).




[그림 2] 학생 S3의 활동지

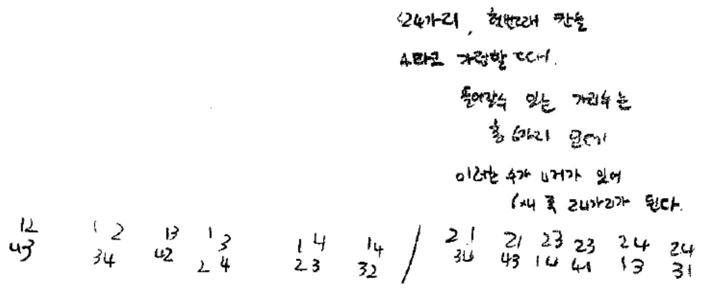
이처럼 유형 1-2 학생들은 유형 1-1 학생들과 유사하게 주어진 과제에 제시된 색을 수나 문자로 대체하여 정사각형의 각 영역에 수를 배치하는 경우의 수를 구하였다. 그러나 이 학생들의 경우 단순히 일렬로 배열하는 것과 동일한 방식으로 답을 산출하였으며, 정사각형을 회전하였을 때 중복되는 경우들이 있다는 점을 활용하지 못하였다

유형 1-3의 학생은 세기 과정을 $6\times4$로 표현하였으며, 이 학생의 세기 과정은 ‘전체 경우 찾기’에 해당하였다. 그리고 이 학생은 전체 경우를 일부만 구하였다.

<표 5> 유형1-3 학생의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $6\times4$ |
| 세기 과정 | 전체 경우 찾기 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구함 |

구체적으로, 유형 1-3 학생이 활용한 ‘전체 경우 찾기’는 주어진 영역을 서로 다른 네 가지 색으로 칠할 수 있는 모든 경우를 찾고자 시도하는 것이었다([그림 3]).



[그림 3] 학생 S17의 활동지

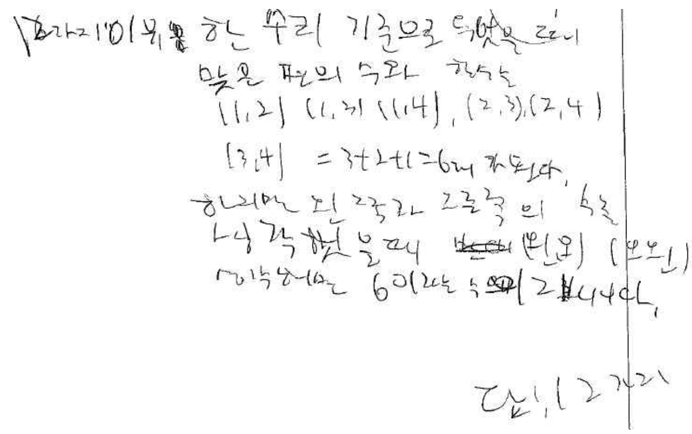
이 학생은 전체 경우를 탐색하는 과정에서 위 그림과 같이 1을 왼쪽 위에 고정하여 6개의 경우를 구하고, 이러한 방식으로 왼쪽 위에 2, 3, 4를 배치하면 총 24가지 경우가 있을 것으로 판단하였다.

유형 1-4의 학생은 세기 과정을 (3+2+1)×2로 표현하였으며, 이 학생의 세기 과정 역시 '전체 경우 찾기'에 해당하였다. 그리고 이 학생은 전체 경우 가운데 일부 경우만을 구하였다.

<표 6> 유형 1-4 학생의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | (3+2+1)×2 |
| 세기 과정 | 전체 경우 찾기 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구함 |

구체적으로, 유형 1-4 학생은 서로 대각선의 위치에 있는 수들의 순서쌍을 활용하여 전체 경우들을 모두 구하고자 시도하였다. 그러나 전체 경우를 적절하게 범주화하지 못하여 정답을 구하지 못하였다([그림 4]).



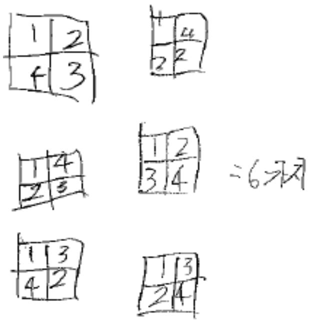
[그림 4] 학생 S11의 활동지

유형 1-5 학생들은 가능한 전체 경우들을 나열하는 방식으로 자신들의 세기 과정을 표현하였다. 이 학생들의 세기 과정은 '전체 경우 찾기'에 해당하였으며, 이들은 가능한 전체 경우들을 모두 구하였다.

<표 7> 유형 1-5 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | - |
| 세기 과정 | 전체 경우 찾기 |
| 결과 집합 | 전체 경우 모두 구함 |

구체적으로, 유형 1-5 학생들은 다음과 같이 네 개의 영역에 서로 다른 네 가지 색을 칠하는 경우를 모두 구하여 전체 경우의 수를 구하였다. 이 학생들은 전체 경우를 나열하는 방식으로만 세기 과정을 나타내었고, 별도의 식을 활용하지는 않았으며 가능한 전체 경우를 모두 구하였다([그림 5]).




[그림 5] 학생 S5 활동지

요약하면, 과제 1에 대한 학생들의 반응은 크게 다섯 가지 유형으로 범주화할 수 있다. 처음 두 가지 유형의 학생들은 공통적으로 수나 문자를 일렬로 배열하는 문제해결 경험을 과제 1의 해결 과정으로 유추하고자 시도하였다. 유형 1-1의 학생들은 한편으로 앞선 문제해결 경험을 과제 1의 해결 과정으로 유추하였고, 다른 한편으로 기존에 경험한 문제들과 과제 1 사이의 차이를 명확하게 파악하여 기존의 문제해결 경험을 과제 1의 상황에 비추어 올바르게 수정하여 활용하였다. 그러나 유형 1-2의 학생들은 일렬로 배열하는 문제 상황에 대한 해법을 주어진 과제 1을 해결하는 데 곧바로 적용하여 올바른 해답을 도출하지 못하였다.

유형 1-3, 1-4, 1-5의 학생들은 각기 다른 방식으로 자신들의 세기 과정을 표현하였으나, 공통적으로 주어진 정사각형의 네 영역을 칠하는 경우들을 모두 구하고자 시도하였다. 유형 1-3의 학생은 체계적으로 주어진 문제 상황에 대한 경우들을 잘 나열하였으나, 유형 1-2의 학생들과 유사하게 정사각형에 네 가지 색 배열이 회전되더라도 같은 경우로 고려된다는 점을 적절하게 활용하지 못하였다. 유형 1-4의 학생은 체계적으로 경우들을 나열하지 못하였으며, 유형1-5의 학생들은 올바르게 전체 경우들을 체계적으로 찾을 수 있었다.

앞서 연구방법에 상술된 바와 같이 과제 1을 제시한 직후에 학생들 사이의 논의를 통하여 색의 배열이 회전되더라도 같은 경우로 고려된다는 점이 분명하게 다루어졌고, 이에 대해 연구진이 제공한 구체물을 통한 확인도 함께 이루어졌음에도 불구하고 24를 최종적인 경우의 수로 제시한 학생이 많았다. 이 학생들의 경우에는 이와 같이 공동의 논의에서 이루어진 사항들에 대해 적절하게 해석하지 못하였거나, 혹은 이를 과제 1을 해결하는 데 적절하게 반영하지 못한 것으로 풀이된다.

### 2. 에피소드 2

두 번째 과제를 해결하기 위하여 학생들은 각기 나름의 방식으로 주어진 과제의 상황을 파악하고 정사면체의 네 면에 서로 다른 네 가지 색을 칠하는 경우의 수를 세고자 시도하였다. 우선 학생들이 과제 2에 대해 작성한 답안의 유형은 다음과 같다.

<표 8> 과제 2에 대한 학생들의 답

| 답 | 2개 | 6개 | 8개 | 24개 | 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 수 | 14명 | 4명 | 1명 | 1명 | 20명 |

구체적으로, 전체 학생들의 반응은 표현과 세기 과정, 결과 집합에 따라 다음과 같이 네 가지 유형으로 범주화할 수 있었다.

<표 9> 과제 2에 대한 반응 유형별 인원 수

| 유형 | 유형 2-1 | 유형 2-2 | 유형 2-3 | 유형 2-4 | 오답만 있음 |
|---|---|---|---|---|---|
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 | | 순열만 활용 | 경우들을 나열 | - |
| 표현 | $\frac{4\times3\times2\times1}{12}$ | $\frac{4\times3\times2\times1}{4}$ | $4\times3\times2\times1$ | - | - |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 | | 전혀 구하지 않음 | 전체 경우 모두 구함 | - |
| 인원 | 6명 | 4명 | 1명 | 8명 | 1명 |

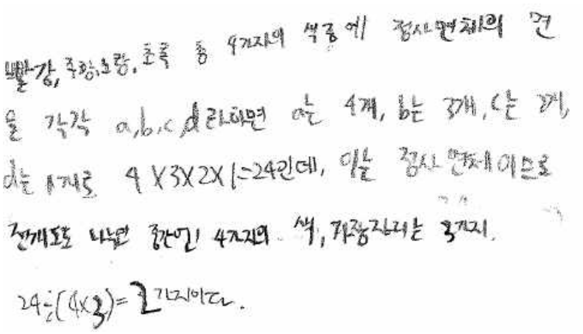
위 표와 같이 학생들의 반응은 크게 네 가지 유형으로 범주화되었으며, 한 학생은 아무런 풀이 과정 없이 경우의 수만을 제시하였으나 이는 올바르지 않아서 범주에 포함하지 않았다. 그리고 유형 2-1, 2-2, 2-3의 학생들은 순열의 아이디어를 활용한 반면, 유형 2-4의 학생들은 일어날 수 있는 경우를 모두 구하고자 시도하면서 전체 경우의 수를 구하고자 하였다.

유형 2-1의 학생들은 세기 과정을 $\frac{4\times3\times2\times1}{12}$로 표현하였으며, 이 학생들의 세기 과정은 모두 '순열 활용 후 중복 제거'에 해당하였다. 그리고 이 학생들은 모두 정답을 맞혔으며, 전체 경우들을 전혀 구하지 않거나, 일부만 구하였다.

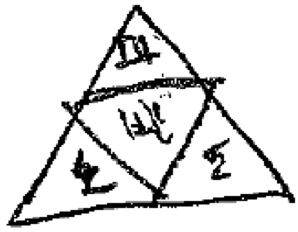
<표 10> 유형 2-1 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $\frac{4\times3\times2\times1}{12}$ |
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 |

구체적으로, 유형 2-1 학생들이 활용한 '순열 활용 후 중복 제거' 방식의 세기 과정은 우선 네 가지 색을 일렬로 배열하는 경우의 수인 24를 구하고 나서, 정사면체를 두 가지 방향으로 회전시켜도 동일한 색의 배열이라는 점으로부터 24를 12로 나누어 2를 구하는 것이었다([그림 6]).




[그림 6] 학생 S1 활동지




[그림 7] 학생 S2 활동지

구체적으로, 학생 S1은 활동지에서 중간에는 4가지가, 가장자리에는 3가지가 중복된다고 하였다. 이는 오른쪽 [그림 7]과 같이 정사면체의 전개도를 그렸을 때, 이 학생이 거칠게 구한 24가지 경우들 가운데, 동일한 색 배열에 대하여 사면체를 회전하여 밑면을 바꾸는 방식으로 4가지 경우들이 서로 쌍을 이루며 중복되며, 밑면의 색을 고정하였을 때 이를 둘러싼 가장자리 3가지 색을 회전한 경우들이 각기 중복된다는 점에서 24가지의 경우들 가운데 총 12가지 경우들은 서로 중복되는 경우라는 점을 도출하였다. 이에 학생 S1은 24를 12로 나누어 2를 구한 것이다.

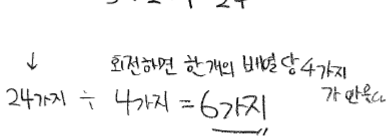
유형 2-1의 학생들은 과제 1의 해법을 과제 2의 해결 과정으로 유추하여 활용한 것으로 볼 수 있으며, 과제 1과 과제 2 사이의 차이를 적절하게 파악하여 과제 1의 해법을 과제 2에 알맞게 수정하여 적용하였다.

유형 2-2의 학생들은 세기 과정을 $\frac{4\times3\times2\times1}{4}$로 표현하였으며, 이 학생들의 세기 과정 역시 모두 '순열 활용 후 중복 제거'에 해당하였다. 이 학생들은 전체 경우들을 전혀 구하지 않거나, 일부만 구하였다.

<표 11> 유형 2-2 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $\frac{4\times3\times2\times1}{4}$ |
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 |

구체적으로, 유형 2-2 학생들이 활용한 '순열 활용 후 중복 제거' 방식의 세기 과정은 우선 네 가지 색을 일렬로 배열하는 경우의 수인 24를 구하고 나서, 정사면체를 회전시켜도 동일한 색의 배열이라는 점에서 24를 4로 나누어 6을 구하는 것이었다([그림 8]).




[그림 8] 학생 S6 활동지

유형 2-2의 학생들 역시 과제 1의 해법을 과제 2의 해결 과정으로 유추하여 활용하였으나, 과제 2에서도 색을 칠하는 면이 4개이고 도형을 회전하여도 색의 배열이 같은 것으로 고려된다는 점에서 단순히 24를 4로 나누는 방식을 활용하였다.

유형 2-3의 학생은 세기 과정을 4×3×2×1로 표현하였으며, 이 학생의 세기 과정은 순열만 활용에 해당하였다. 이 학생은 전체 경우들을 전혀 구하지 않았다.

<표 12> 유형 2-3 학생의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | 4×3×2×1 |
| 세기 과정 | 순열만 활용 |
| 결과 집합 | 전혀 구하지 않음 |

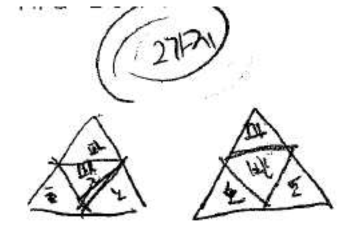
구체적으로, 유형 2-3 학생이 활용한 ‘순열만 활용’ 방식의 세기 과정은 네 가지 색을 일렬로 배열하는 경우의 수인 24를 구하는 것과 같았다. 이 학생은 앞선 과제 1에 대해서도 동일하게 4×3×2×1을 활용하여 24를 산출하였는데, 여전히 네 가지 색을 일렬로 배열하는 문제와 회전 가능한 도형에 색칠하는 문제를 분명하게 구분하지 못한 것으로 판단된다.

유형 2-4의 학생들은 가능한 전체 경우들을 나열하는 방식으로 자신들의 세기 과정을 표현하였다. 이 학생들의 세기 과정은 ‘전체 경우 찾기’에 해당하였으며, 이들은 가능한 전체 경우들을 모두 구하였다.

<표 13> 유형 2-4 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | - |
| 세기 과정 | 전체 경우 찾기 |
| 결과 집합 | 전체 경우 모두 구함 |

구체적으로, 유형 2-4 학생들은 다음 그림과 같이 정사면체의 네 면에 서로 다른 네 가지 색을 칠하는 경우를 모두 구하여 전체 경우의 수를 구하였다. 이 학생들은 전체 경우를 나열하는 방식으로만 세기 과정을 나타내었고, 별도의 식을 활용하지는 않았으며, 가능한 전체 경우를 모두 구하였다([그림 9]).




[그림 9] 학생 S2 활동지

요약하면 과제 2에 대한 학생들의 반응은 크게 네 가지 유형으로 범주화할 수 있다. 처음 두 가지 유형의 학생들은 공통적으로 과제 1의 해결 경험을 과제 2의 해결 과정으로 유추하고자 시도하였다. 이 가운데 유형 2-1의 학생들은 평면도형의 회전을 고려하여 중복되는 경우들을 단일한 경우로 범주화해야 하는 과제 1의 해결 경험을 입체도형의 회전

을 고려하여 중복된 경우들을 단일한 경우로 범주화해야 하는 과제 2의 해결 과정으로 적절하게 수정하여 적용한 반면, 유형 2-2의 학생들은 과제 1에 대한 해법을 과제 2를 해결하는 데 곧바로 적용하여 올바른 해답을 도출하지 못하였다. 이와 유사하게, 유형 2-3의 학생은 여전히 수나 문자를 일렬로 배열하는 문제해결 경험을 과제 2를 해결하는 데 곧바로 적용하고자 시도하였다.

구체적으로, 유형 2-2의 학생들은 주어진 과제 2가 앞서 해결한 과제 1과 유사하게, 단순히 4가지 색을 일렬로 배열하는 문제와는 다르며 이들 가운데 중복된 일부 경우들을 단일한 경우로 재범주화해야 한다는 점은 파악한 것으로 보인다. 이러한 점에서 유형 2-2의 학생들은 일단 통상적인 배열 과제와 원순열 과제 사이의 유사점과 차이점은 파악한 것으로 판단된다. 그러나 이 학생들은 과제 2가 과제 1과 동일하게 네 가지 색을 배열하는 과제이며, 도형이 네 개의 면을 갖는다는 점에서 $4\times3\times2\times1$을 4로 나눈 수를 답으로 제시한 것으로 보인다.

이러한 유형 2-2의 학생들 4명 가운데 2명의 학생은 결과 집합을 구성한 반면, 2명의 학생은 결과 집합을 전혀 구성하지 않았다. 결과 집합을 전혀 구하지 않은 학생들의 경우에는 실제로 어떤 결과들이 가능한지 도출하지 않고 사고 실험에 의존하여 앞서 과제 1의 해결 과정에서 산출된 알고리즘을 과제 2로 유추한 것으로 볼 수 있다. 이러한 점에서 이 학생들은 결과 집합을 직접 구성해보고 이 결과들을 바탕으로 주어진 상황에 대한 경우의 수가 얼마인지 검토해보도록 할 필요성이 제기된다. 다른 한편으로 결과 집합을 구한 학생들의 경우에는 실제 정답인 2가지 경우보다 좀 더 많은 결과들을 산출하였다. 이 학생들은 주어진 과제 2가 원순열 과제라는 점은 포착하였으나, 자신들이 산출한 결과들 가운데 어떤 결과들이 실제로 같은 경우로 고려되어야 하는지를 올바르게 판단하지 못한 것으로 보인다. 다시 말해서, 이 학생들은 우선 순열을 활용하여 거칠게 구한 24가지 결과들을 재조직하는 과정에서 어떤 결과들이 같은 경우로 고려되어야 하는지에 대해 올바르게 판단하지 못한 것으로 보인다.

유형 2-4의 학생들은 정사면체의 네 면을 칠하는 경우들을 모두 구하고자 시도하였으며, 올바르게 전체 경우들을 찾을 수 있었다. 앞서 과제 1에 대한 반응들과 비교하여 과제 2에 대한 탐구 과정에서 전체 경우를 나열하고자 시도한 학생의 수가 늘어났으며, 이 학생들 모두가 올바른 해답을 찾을 수 있었다. 이는 한편으로 이 학생들이 기본적으로 일렬로 배열하는 과제와 원순열 과제 사이의 차이는 올바르게 파악한 것을 보여준다. 다른 한편으로, 과제 2의 경우에는 실제로 전체 경우의 수가 2가지에 불과하였다는 점도, 과제 1에 비해 과제 2에서 더 많은 학생들이 전체 결과 집합 구성을 올바르게 달성한 것과 관련된 것으로 보인다.

### 3. 에피소드 3

세 번째 과제를 해결하기 위하여 학생들은 각기 나름의 방식으로 주어진 과제의 상황을 파악하고 정육면체의 여섯 면에 서로 다른 여섯 가지 색을 칠하는 경우의 수를 세고자 시도하였다. 우선 학생들이 과제3에 대해 작성한 답안의 유형은 다음과 같다.

<표 14> 과제 3에 대한 학생들의 답

| 답 | 4개 | 15개 | 20개 | 30개 | 45개 | 60개 | 120개 | 720개 | 무응답 | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 학생 수 | 1명 | 2명 | 2명 | 5명 | 1명 | 1명 | 2명 | 5명 | 2명 | 20명 |

구체적으로, 전체 학생들의 반응은 표현과 세기 과정, 결과 집합에 따라 다음과 같이 네 가지 유형으로 범주화할 수 있었다.

<표 15> 과제 3에 대한 반응 유형별 인원 수

| 유형 | 유형 3-1 | 유형 3-2 | 유형 3-3 | 유형 3-4 | 무응답 |
|---|---|---|---|---|---|
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 | | | 전체 경우 찾기 | - |
| 표현 | $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{24}$ | $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{k}$ $(k\neq24)$ | $6\times5\times4\times3\times2\times1$ | - | - |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 | | | 전체 경우를 구하고자 시도 | - |
| 인원 | 5명 | 4명 | 5명 | 4명 | 2명 |

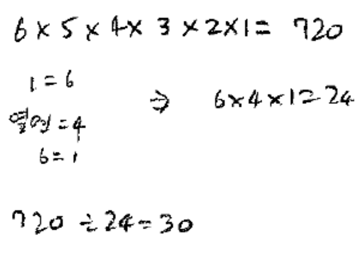
위 표와 같이 학생들의 반응은 크게 네 가지 유형으로 범주화되었으며, 이 가운데 두 학생은 아무런 풀이 과정도 제시하지 않아서 범주에 포함하지 않았다. 그리고 유형 3-1, 3-2, 3-3의 학생들은 순열의 아이디어를 활용한 반면, 유형 3-4의 학생들은 일어날 수 있는 경우를 모두 구하고자 시도하면서 전체 경우의 수를 구하고자 하였다.

유형 3-1의 학생들은 세기 과정을 $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{24}$로 표현하였으며, 이 학생들의 세기 과정은 모두 '순열 활용 후 중복 제거'에 해당하였다. 그리고 이 학생들은 모두 정답을 맞혔으며, 전체 경우들을 전혀 구하지 않거나, 일부만 구하였다.

<표 16> 유형 3-1 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{24}$ |
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 |

구체적으로, 유형 3-1 학생들이 활용한 '순열 활용 후 중복 제거' 방식의 세기 과정은 우선 여섯 가지 색을 일렬로 배열하는 경우의 수인 720을 구하고 나서, 정육면체를 회전시켜도 동일한 색의 배열이라는 점으로부터 720을 24로 나누어 30을 구하는 것이었다([그림 10]).




[그림 10] 학생 S7 활동지

구체적으로, 학생 S7은 활동지에서 옆면이 4가지, 밑면이 6가지 중복된다고 하였다. 이는 학생 S7이 거칠게 구한 720가지 경우들 가운데, 동일한 색 배열에 대하여 정육면체를 회전하여 밑면을 바꾸는 방식으로 6가지 경우들이 서로 쌍을 이루며 중복되며, 밑면의 색을 고정하였을 때 옆면의 4가지 색을 회전한 경우들이 각기 중복된다는 점에서 720가지의 경우들 가운데 총 24가지 경우들은 서로 중복되는 경우라는 점을 도출하였다. 이에 학생 S7은 720을 24로 나누어 30을 구한 것이다.

유형 3-1의 학생들은 기본적으로 주어진 과제 3이 원순열 과제 유형이라는 점을 파악하였으며, 동시에 단순히 모든 색을 일렬로 배열하거나, 일렬로 배열한 경우의 수를 색의 수로 나누어 전체 경우를 구할 수 없다는 점을 파악하였다. 이와 더불어, 주어진 정육면체는 정사면체와 달리 여섯 개의 면으로 이루어지며 동시에 옆면이 네 개로 이루어졌다는 점을 활용하여 $6\times5\times4\times3\times2\times1$을 24로 나누어 올바른 해답을 구하였다.

유형 3-2의 학생들은 세기 과정을 $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{180}$, $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{36}$, $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{20}$, $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{6}$ 등으로 표현하였으며, 이 학생들의 세기 과정 역시 모두 ‘순열 활용 후 중복 제거’에 해당하였다. 이 학생들은 전체 경우들을 전혀 구하지 않거나, 일부만 구하였다.

<표 17> 유형 3-2 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{k}$ $(k\neq24)$ |
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 |

구체적으로, 유형 3-2 학생들이 활용한 ‘순열 활용 후 중복 제거’ 방식의 세기 과정은 우선 여섯 가지 색을 일렬로 배열하는 경우의 수인 720을 구하고 나서, 정육면체를 회전시켜도 동일한 색의 배열이라는 점에서 720을 적당한 자연수로 나누는 것이었다. 이 학생들은 정육면체의 면이 여섯 개라는 점으로부터 720을 6으로 나누거나, 혹은 제시된 수들을 적당히 조합하여 720을 나누었다.

유형 3-3의 학생들은 세기 과정을 $6\times5\times4\times3\times2\times1$로 표현하였으며, 이 학생들의 세기 과정은 순열만 활용에 해당하였다. 이 학생들은 전체 경우들을 전혀 구하지 않거나, 일부만 구하였다.

<표 18> 유형 3-3 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | $6\times5\times4\times3\times2\times1$ |
| 세기 과정 | 순열 활용 후 중복 제거 |
| 결과 집합 | 일부 경우만 구하거나, 전혀 구하지 않음 |

이 학생들은 비록 전체 경우의 수를 720으로 답하였으나, 그 풀이 과정을 살펴보면 과제 3이 순열만을 적용하여 해결하는 것이 타당하다고 판단하지는 않은 것으로 확인되었다. 특히, 유형 3-3의 학생 5명 가운데 4명은 앞서 과제 2에서 정답을 올바르게 도출한 학

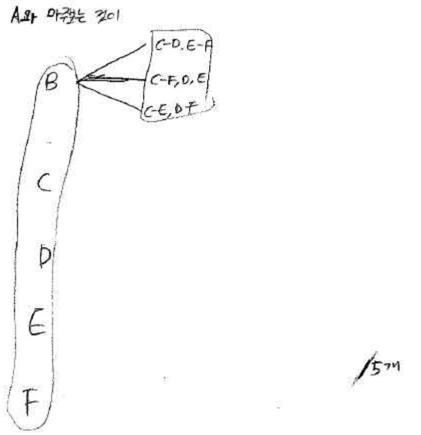
생들이었으며, 1명의 학생도 단순히 순열만을 적용하여 오답을 산출하지는 않은 학생이었다. 이러한 점에서 유형 3-3의 학생들은 과제를 올바르게 파악하고 앞선 문제해결 경험을 과제 3에 적절하게 활용하고자 시도하여 720개의 경우 가운데 중복되는 경우들의 수를 찾으려 하였으나 이 값을 도출하지 못하여 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$에서 문제해결이 마무리된 것이었다.

유형 3-4 학생들은 가능한 전체 경우들을 나열하는 방식으로 자신들의 세기 과정을 표현하였다. 이 학생들의 세기 과정은 '전체 경우 찾기'에 해당하였으며, 이들은 가능한 전체 경우들을 모두 구하였다.

<표 19> 유형 3-4 학생들의 표현, 세기 과정, 결과 집합

| | |
|---|---|
| 표현 | - |
| 세기 과정 | 전체 경우 찾기 |
| 결과 집합 | 전체 경우를 구하고자 시도 |

구체적으로, 유형 3-4 학생들은 다음과 같이 정육면체의 여섯 면에 서로 다른 여섯 가지 색을 칠하는 경우를 모두 구하여 전체 경우의 수를 구하고자 시도하였다. 이 학생들은 전체 경우를 나열하는 방식으로만 세기 과정을 나타내었고, 별도의 식을 활용하지는 않았으며, 가능한 전체 경우를 모두 구하고자 시도하였다. 그러나 이 유형의 학생들은 모두 정답을 도출하지 못하였다([그림 11]).




[그림 11] 학생 S13 활동지

요약하면 과제 3에 대한 학생들의 반응은 크게 네 가지 유형으로 범주화할 수 있다. 처음 세 유형의 학생들은 공통적으로 과제 1과 과제 2의 해결 경험을 과제 3의 해결 과정으로 유추하고자 시도하였다. 이 가운데 유형 3-1의 학생들은 과제 1과 과제 2의 해결 경험을 과제 3의 해결 과정으로 적절하게 수정하여 적용한 반면, 유형 3-2와 3-3의 학생들은 올바른 해답을 도출하지 못하였다.

특히, 유형 3-2와 3-3의 학생들은 앞서 과제 2에서 활용한 것과 같은 유사하게 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$을 적당한 자연수로 나누어 경우의 수를 구하고자 시도하였으며, 이 과

정에서 어떤 자연수로 나누는 것이 적절할 것인가에 대해 주로 탐구하였다. 앞서 두 번째 에피소드에서 확인한 것과 유사하게, 유형 3-2와 3-2의 학생들 가운데 일부 학생들은 결과 집합을 구하고자 시도하였다. 이 학생들은 주어진 과제 3이 과제 1과 과제 2와 유사하게 원순열 과제라는 점을 포착하고 $6\times5\times4\times3\times2\times1$을 적당한 자연수로 나누어 해답을 도출할 수 있을 것이라는 점을 파악하였으나, 자신들이 우선 순열을 활용하여 거칠게 구한 720가지 결과들을 재조직하는 과정에서 어떤 결과들이 같은 경우로 고려되어야 하는지에 대해 올바르게 판단하지 못하였다.

다른 한편으로, 유형 3-4의 학생들은 정육면체의 여섯 면을 색칠하는 경우들을 모두 구하고자 시도하였으나, 올바르게 전체 경우들을 찾은 학생은 없었다. 앞서 과제 2에 대한 탐구에서는 전체 결과 집합을 구성하고자 시도한 학생들이 모두 올바른 답안을 도출한 것과는 다소 대조적인 결과이다. 조합적 과제를 해결하는 데 있어서 결과 집합을 구성하는 것이 중요한 과정임이 알려져 있다(Lockwood, 2013). 그러나 수학적인 일반화를 달성하기 위해서는 수학적인 탐구의 과정을 알고리즘으로 발전시키는 것이 중요하다는 점이 지적되어 왔다(Sfard, 1991). 이러한 점에서, 가능한 여러 결과들을 나열하여 결과 집합을 구성하려는 시도 가운데에서도 앞서 활용한 탐구 과정을 알고리즘화하여 확장하고자 하는 시도가 필요하다는 점이 확인된다.

## Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구는 초등 수학 영재학생들의 원순열 과제 해결 과정을 분석하여, 원순열 과제에 대한 영재학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 진전되는가를 확인하는 데 목적을 두었다. 구체적으로, Lockwood(2013)가 제안한 조합적 사고 모델을 활용하여, 수학 영재학생들은 원순열 과제 탐구에서 어떠한 표현과 세기 과정을 활용하며 이들의 결과 집합 구성은 어떻게 이루어지는가에 대해 분석하였다. 연구 결과, 학생들의 세기 과정은 크게 순열을 활용한 학생들, 순열을 활용한 후에 중복을 제거한 학생들, 그리고 직접 전체 경우를 모두 찾고자 시도한 학생들로 범주화할 수 있었다. 이 가운데 순열을 직·간접적으로 활용한 학생들은 결과 집합 생성을 전혀 시도하지 않거나, 일부 경우만으로 이루어진 결과 집합을 부분적으로 생성한 반면, 전체 경우를 구하고자 시도한 학생들은 결과 집합을 완전하게 구하고자 시도하였다. 또한, 순열을 직·간접적으로 활용한 학생들뿐만 아니라 전체 경우를 모두 찾고자 시도한 학생들 역시 각자 나름의 방식으로 자신들의 세기 과정을 비교적 압축된 수식으로 간결하게 표현하였음이 확인되었다. 연구 결과들로부터 제기된 논점들은 다음과 같다.

첫째, 원순열 과제에 대한 수학 영재학생들의 접근 방식은 세 에피소드를 종합하여 크게 두 가지로 범주화할 수 있었다. 첫 번째 접근 방식은 유추를 활용하여 앞서 경험한 문제해결 방식을 새로운 원순열 과제 해결에 적용하고자 시도한 것이었다. Lockwood(2013)가 강조한 바와 같이 유추는 조합적 과제들을 효과적으로 해결하는 데 핵심적인 도구 가운데 하나이다. 유추를 활용한 학생들은 에피소드 1, 에피소드 2, 에피소드 3에서 모두 확인되었다. 에피소드 1에서는 학생들이 원순열 과제를 처음 접하면서, 일렬로 배열하는 과제에 대한 해법을 주어진 원순열 과제로 유추하여 적용하고자 하는 장면이 확인되었다. 에피소드 2에서는 학생들이 과제 1을 해결하는 데 활용한 접근 방식을 과제 2로 유추하고자 시

도하는 장면이 드러났으며, 에피소드 3에서도 과제 1과 과제 2를 해결하는 데 활용한 방식을 과제 3의 해결에 적용하고자 하는 장면이 확인되었다. 이처럼 유추를 활발하게 활용한 학생들은 자신들의 세기 과정을 대수적으로 요약하여 표현하였으며 결과 집합을 전혀 구하지 않거나 부분적으로만 구하는 것으로 확인되었다. 두 번째 접근 방식은 유추를 활용하기보다는 각각의 과제에 대하여 각기 적합한 방법으로 가능한 경우의 수를 모두 구하는 방식이었다. 이 학생들은 자신들의 세기 과정을 대수적으로 표현하기보다는 각 경우들을 체계적으로 세면서 이 결과들을 활동지에 배열하여 표현하였으며, 결과 집합을 완전하게 구성하고자 시도하였다.

둘째, 유추의 적절하지 않은 활용은 원순열 과제의 해결을 어렵게 하는 요인 가운데 하나로 확인되었다. 유추는 한편으로 의미를 생성하고 새로운 과제를 해결하는 유용한 도구이지만, 다른 한편으로 핵심적이지 않은 사항들만을 전이하는 데 사용될 수 있다는 점에서 양날의 검으로 은유되어 왔다(Guerra-Ramos, 2011). 구체적으로, 에피소드 2와 에피소드 3에서 각기 과제 1과 과제 2의 해결 경험을 곧바로 과제 2와 과제 3으로 적용하여 주어진 전체 색들을 일렬로 배열하는 경우의 수를 적당한 자연수로 나누고자 시도하는 학생들이 확인되었으며, 결과 집합을 구성해보지 않고 사고실험에만 의존하여 경우의 수를 도출하는 학생들도 있었다. 또한, 에피소드 2에서는 앞선 문제해결 경험을 과제 2를 해결하는 데 유추하고자 시도한 학생들 가운데 절반 정도가 올바르게 과제를 해결하지 못한 데 비하여, 체계적으로 결과 집합을 구성하고 이로부터 경우의 수를 구하고자 시도한 학생들은 모두 올바르게 과제를 해결하였음이 확인되었다. 이러한 점에서 유추가 조합적 사고의 효과적인 도구로 기능할 수 있을지라도, 체계적인 결과 집합 구성을 통한 세기 과정 역시 주요한 조합적 사고의 도구임을 간과하지 않아야 함을 살펴볼 수 있다.

셋째, 두 번째 논점에서 확인한 바와 같이 체계적인 결과 집합 구성이 매우 중요한 조합적 사고의 도구임이 확인되었으나, 에피소드 3에서는 결과 집합을 구성하는 방식으로 문제해결을 시도한 학생들이 모두 문제해결을 성공적으로 마무리하지 못하였음이 확인되었다. 오히려, 앞선 과제에 대한 해법을 알고리즘화하여 과제 3의 해결에 유추하고자 시도한 학생들만이 올바른 답안을 도출할 수 있었다. 구체적으로, 과제 3에 대한 해결 과정에서 비교적 많은 학생들이 $6\times5\times4\times3\times2\times1$을 적당한 자연수로 나누어 해답을 도출하고자 시도하는 장면이 확인되었는데, 이는 이 학생들이 과제 1 ~ 과제 3에 이르는 일련의 과제들이 공통적으로 일렬로 배열하는 과제의 해법에서 일부 경우들이 단일한 경우로 고려되는 과제임을 포착하여, $\frac{n!}{k}$와 같이 확장하고자 시도한 것으로 판단된다. 이러한 결과 집합 구성 방식이 과제 3에 대해서 비교적 성공적이지 못하였던 것은 과제 자체의 난도와도 관련될 것으로 판단된다. 즉, 과제 2에 비하여 과제 3에서 정육면체를 색칠하는 30가지의 경우들을 모두 찾는 것은 비교적 복잡하고 어렵기 때문이다.

그렇지만 Sfard(1991)가 일찍이 강조한 바와 같이 수학에서 알고리즘의 도입과 활용은 더 높은 수준으로의 성장에 핵심적으로 기여한다. 특히, 과제 2에 비하여 결과 집합의 구성이 현저하게 복잡해진 과제 3과 같은 조합적 과제의 경우에는 유추를 활용한 일반화가 문제해결의 핵심적인 도구로 기능한다. 이러한 점에서 결과 집합을 구성하는 과정에서도 앞서 경험한 문제해결 과정을 알고리즘화하여 확장된 맥락에서 활용할 필요성이 제기된다. 다만 앞서 두 번째 논점에서 확인한 바와 같이 유추는 적절하지 않은 방식으로 활용될 수 있는 바, Marton (2006)이 강조한 바와 같이 기존의 문제해결 경험과 주어진 과제 사이의 차이점이 무엇인지를 명료히 하고 이를 바탕으로 기존 경험을 새로운 과제를 해결하는

데 수정하여 활용하도록 할 필요성이 제기된다.

넷째, 수학 영재학생들의 원순열 탐구에서 가장 어려운 부분 가운데 하나는 거칠게 세어 도출한 결과들을 재조직하여 이들 가운데 어떤 결과들을 단일한 경우로 고려해야 하는가와 관련되었다. 구체적으로 에피소드 2와 에피소드 3에서 일부 학생들은 우선 거칠게 구한 여러 가능한 결과들 가운데 어떤 결과들을 단일한 범주로 고려해야 하는지 어려움을 겪었음이 확인되었다. Mason(2011)이 강조한 바와 같이, 가능한 여러 결과들을 다양한 기준을 바탕으로 범주화하고 재범주화해보는 경험을 학생들에게 제공하는 것이 주어진 상황에서 어떠한 결과들이 동일한 경우로 고려되어야 하는가에 대한 학생들의 탐구를 지원하는 데 도움이 될 것으로 판단된다.

다섯째, 조합적 사고의 맥락에서도 수학 영재학생들은 송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원(2007)이 보고한 것과 유사하게 자신들의 사고 과정을 식으로 표현하고 이를 활용하여 답안을 제시하는 데 비교적 능숙함이 확인되었다. 순열을 직 · 간접적으로 활용한 학생들은 자신들의 세기 과정을 식으로 표현하는 데에서 비교적 어려움을 겪지 않았으며, 전체 경우를 모두 찾는 방식으로 경우의 수를 구하고자 시도한 학생들 중에서도 자신들의 세기 과정을 나름의 압축된 수식으로 표현한 학생들이 일부 확인되었다.

본 연구에서는 원순열 과제에 대한 수학 영재학생들의 탐구가 어떠한 방식으로 이루어지는지에 대해 Lockwood(2013)가 제안한 조합적 사고 모델을 활용하여 분석하였다. 연구 결과, 수학 영재학생들이 각기 나름의 표현과 세기 과정, 결과 집합 구성을 통하여 원순열 과제를 해결하는 장면이 확인되었으며, 유추의 활용 및 결과 집합 구성과 관련하여 수학 영재학생들이 겪을 수 있는 어려움이 부분적으로 확인되었다. 본 연구는 뛰어난 수학적 성취를 보인 수학 영재 학생들을 대상으로 비교적 단시간의 탐구 과정을 기반으로 수행되었다는 점에서 한계를 갖는다. 이러한 점에서 다양한 수준의 수학적 성취를 기록한 학생들에 대해서도 후속 연구의 필요성이 제기된다. 국내에는 학생들의 조합적 사고에 대한 연구가 다른 내용 영역의 연구들에 비해 상대적으로 부족한 실정이므로, 이에 대한 이론적이고 실증적인 후속 연구가 활발히 이루어지기를 기대한다.

## 참 고 문 헌


구나영, 이경화 (2014). 중복 개념의 대상화 과정 분석. **수학교육학연구, 24**(1), 67-82.

김미정 (2010). **중등수학에서 발견을 통한 순열과 조합 지도방안 연구.** 전남대학교 박사학위논문.

김미정, 김용구, 정인철 (2009a). 고등학교 순열과 조합 단원의 불안요인 연구. **한국학교수학회논문집, 12**(2), 261-279.

김미정, 김용구, 정인철 (2009b). 발견을 통한 순열과 조합 지도방안 연구. **수학교육, 48**(2), 113-139.

김서령, 박혜숙, 김완순 (2007). 조합문제에서의 인식론적 장애. **수학교육, 46**(2), 193-205.

김원경, 홍갑룡, 이종학 (2011). 구조적 동형을 활용한 순열과 조합의 교수 학습 효과. **수학교육논문집, 25**(3), 607-627.

남승인 (2000). 초등학교 저학년 영재지도 방안. **수학교육 학술지, 5**, 21-37.

방신영, 송상헌 (2013). 스핑크스퍼즐로 모든 삼각형 해법 찾기 과제에서 나타나는 학생들의 수학적 사고 특성 분석, **한국초등수학교육학회지, 17**(1), 165-184.

송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원 (2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구, 17**(2), 163-177.

이경화 (2009). 영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결. **수학교육학연구, 19**(1), 45-61.

이지현, 이정연, 최영기 (2005). 순열 조합 문장제의 문제 변인과 오류 분석. **학교수학, 7**(2), 123-137.

이진수, 송상헌 (2013). 다면체의 쌍대 탐구 과정에서 초등수학영재들이 ㄹ보여주는 시각화 방법 분석. **한국초등수학교육학회지, 17**(2), 351-370.

황지남(2015). 초등수학영재의 수학적 정당화를 위한 칠교판 활용방안 연구, **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 589-608.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 181-199.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 271-300.

Eizenberg, M. M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(1), 15-36.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5), 451-474.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones(Ed), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Guerra-Ramos, M. T. (2011). Analogies as Tools for Meaning Making in Elementary Science Education: How Do They Work in Classroom Settings? *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology education, 7*(1), 29-39.

Kapon, S., Ron, G., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2015). Perceiving permutations as distinct outcomes: the accommodation of a complex knowledge system. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 43-64.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: The University of Chicago Press.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*(3), 307-322.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251-265.

Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (2010). *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying, and building isomorphisms.* New York: Springer.

Mason, J. (2011). Classifying and characterising: Provoking awareness of the use of a natural power in mathematics and in mathematical pedagogy. In O. Zaslavsky & P. Sullivan(Eds.) *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 39-56). New York: Springer.

Marton, F. (2006). Sameness and difference in transfer. *The Journal of the Learning Sciences, 15*(4), 499-535.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Stake, R. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks: Sage Publications.

<Abstract>

# Analysis on elementary gifted students' inquiries on combinatoric tasks

JinHyeong, Park[3]; & Dong-Won, Kim[4]

This study aims to analyze elementary gifted students' inquiries on combinatoric tasks. In particular, we designed circular permutation tasks and analyzed students' inquiries on these tasks. We especially analyzed students' expressions, counting processes, and their construction of set of outcomes. The findings showed that the students utilized analogy to resolve given tasks, and they had difficulties in categorizing and re-categorizing possible outcomes of given tasks. Their improper use of analogy also caused difficulties in resolving circular permutation tasks.

Key words: combinatorics, elementary gifted students, analogy

논문접수: 2017. 04. 04
논문심사: 2017. 05. 05
게재확정: 2017. 05. 22

3) demxas@mju.ac.kr
4) pourpeda@cje.ac.kr