

Enumerate tropical algebraic curves

열대곡선 헤아리기

KIM Young Rock 김영록 SHIN Yong-Su* 신용수

In tropical geometry, the sum of two numbers is defined as the minimum, and the multiplication as the sum. As a way to build tropical plane curves, we could use Newton polygons or amoebas. We study one method to convert the representation of an algebraic variety from an image of a rational map to the zero set of some multivariate polynomials. Mikhalkin proved that complex curves can be replaced by tropical curves, and induced a combination formula which counts the number of tropical curves in complex projective plane. In this paper, we present close examinations of this particular combination formula.

Keywords: tropical geometry, Newton polygon, amoeba, The number of tropical curves, Gromov-Witten invariants; 열대기하, 뉴턴 다각형, 아메바, 열대곡선의 개수, Gromov-Witten 불변량.

MSC: 97U00 ZDM: N7

1 아메바와 그의 측수

열대 대수기하학에 대한 가장 오래된 문헌 중 하나로 George Bergman [1]이 1971년에 대수곡선의 로그 극한에 대하여 낸 논문이 있다. 약간의 배경지식이 있다면, Bergman이 소개한 구조는 복소 대수적 토러스 $(\mathbb{C}^*)^n$ 안의 부분다양체로부터 생성되어지는 열대다양체와 같다는 것을 알 수 있다. 이러한 다양체의 아메바는 아베바 상의 임의의 점의 절댓값에 대한 좌표별 로그값을 취한 것의 상이다. 아메바라는 용어는 Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky가 그들의 책 *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants* [3]에서 처음 사용하였다. Bergman의 로그 극한은 측수들의 모든 방향을 원소로 하는 집

*Corresponding Author.

The second author was supported by a grant from Sungshin Women's University.

KIM Young Rock: Major in Mathematics Education, Graduate School of Education, Hankuk University of Foreign Studies E-mail: rocky777@hufs.ac.kr

SHIN Yong-Su: Dept. of Math., Sungshin Women's Univ. E-mail: ysshin@sungshin.ac.kr

Received on Jan. 7, 2017, revised on Mar. 20, 2017, accepted on Jun. 20, 2017.

합인 아메바로 나타난다. 이 논문에서 우리는 아메바와 관련된 문헌 자료를 살펴볼 것이다. 열대기하의 전문적인 용어들 중 설명 없이 사용된 부분은 다음 논문을 참조하면 된다 [7].

I 를 로랑 다항식환 $S = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ 에 있는 아이디얼이라고 하자. I 의 대수적 다양체는 I 에 속해 있는 모든 로랑 다항식의 공통 해집합이다:

$$V(I) = \{z \in (\mathbb{C}^*)^n : f(z) = 0, \forall f \in I\}.$$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 이므로, 위의 식은 매우 잘 정의되었음에 유의하자. 아이디얼 I 의 아메바는 좌표별 로그 절댓값 함수에 대한 상으로 정의된 \mathbb{R}^n 의 부분집합이다:

$$\mathcal{A}(I) = \{(\log |z_1|, \log |z_2|, \dots, \log |z_n|) \in \mathbb{R}^n : z = (z_1, \dots, z_n) \in V(I)\}.$$

만약 $n = 1$ 이고 I 가 $S = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 의 진부분 아이디얼이라면, I 는 \mathbb{C} 위에서 인수분해가 되는 하나의 다항식 $f(x)$ 에 의해 생성되는 주아이디얼이다:

$$f(x) = (u_1 + iv_1 - x)(u_2 + iv_2 - x) \cdots (u_m + iv_m - x).$$

여기서, $u_1, v_1, \dots, u_m, v_m \in \mathbb{R}$ 은 $f(x)$ 의 근들의 실수부와 허수부들이고, 아메바는 다음과 같은 m 개 이하의 실수들에 대하여 다음과 같이 주어지는 집합이다:

$$\mathcal{A}(I) = \mathcal{A}(f) = \{\log(\sqrt{u_1^2 + v_1^2}), \log(\sqrt{u_2^2 + v_2^2}), \dots, \log(\sqrt{u_m^2 + v_m^2})\}.$$

$n = 2$ 인 경우 아메바를 그려보면 아메바라는 이름을 더 잘 이해할 수 있게 된다. $I = \langle f(x_1, x_2) \rangle$ 가 $(\mathbb{C}^*)^2$ 에 있는 곡선 $\{f(x_1, x_2) = 0\}$ 의 주아이디얼이라 가정하자. 이 곡선의 아메바 $\mathcal{A}(f)$ 는 \mathbb{R}^2 의 닫힌 부분집합이고, 그 경계는 해석 함수들로 묘사된다 [11, 12]. 이 아메바는 무한에 접근하는 유한 개수의 축수들을 가지고 있고, 이 축수들의 방향은 뉴턴 다각형 $\text{Newt}(f)$ 의 모서리들과 정확히 수직이다. 아메바의 여집합 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(f)$ 는 평면 \mathbb{R}^2 의 열린 볼록 부분집합들의 유한 합집합이다. 곡선과 곡면들의 아메바들의 그림은 그들의 생물학적 생김새와 비슷하다는 것을 알 수 있다.

$(\mathbb{C}^*)^n$ 의 초곡면의 아메바에 대한 근본적인 결과들은 Passare와 그의 동료들의 결과 [11, 12]를 보면 알 수 있고, 아메바들을 헤아리고 그리는 방법에 대한 것은 Theobald의 논문 [16]을 참조하면 알 수 있다. 아메바의 해집합들에 대한 정리는 Purbhoo에 의해 정립되었다 [13].

예 1: Figure 1은 곡선

$$f(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

의 복소 아메바이다. 이 그림은 로그값들이 음수가 되는 최댓값을 사용한다. 따라서 Figure 1에 표현되어 있는 것은 다음 집합이다:

$$-\mathcal{A}(f) = \{(-\log(|z|), -\log(|w|)) \in (\mathbb{R})^2 : z, w \in \mathbb{C}^* \text{ \& } f(z, w) = 0\}.$$

여기에서 $\mathcal{A}(f)$ 대신 $-\mathcal{A}(f)$ 를 다룬 이유는 기존의 논문들 [11, 12]에는 우리가 주장하는 $\mathcal{A}(f)$ 대신에 $-\mathcal{A}(f)$ 를 다루고 있고, 많은 아메바에 대한 예제들이 있어서 아메바에 대한

기존의 결과들과 비교 가능하기 때문이다. 이제 $\mathcal{A}(f)$ 의 여집합에 있는 연결된 두 개의 유계인 볼록 성분들에 주목하자. 이들은 f 의 뉴턴 다각형에 있는 두 개의 내부 격자점들에 대응된다. 이 아메바의 축수들은 \mathbb{R}^2 에서 4개의 반직선으로 수렴하며, 이 반직선들의 합집합은 다음과 같은 열대다항식에 의해 정의되는 곡면 $V(p)$ 와 정확히 일치한다:

$$p = \text{trop}(f) = 0 \oplus u \odot v \oplus v^2 \oplus u^3 \oplus u^2 \odot v \oplus u^2 \odot v^2.$$

이 표현은 f 의 열대적 표현이다. p 의 모든 계수는 0인데, 이것은 f 의 계수들이 모두 실수이기 때문이다. 매개변수는 없다.

Figure 1의 아메바 안에, 우리는 0이 아닌 실계수 c_1, \dots, c_6 을 갖는 특정 열대다항식에 의해 정의되는 열대곡선 $V(q)$ 를 볼 수 있다.

$$q = c_1 \oplus c_2 \odot u \odot v \oplus c_3 \odot v^2 \oplus c_4 \odot u^3 \oplus c_5 \odot u^2 \odot v \oplus c_6 \odot u^2 \odot v^2$$

열대곡선 $V(q)$ 는 $\mathcal{A}(f)$ 의 전형적인 변형이다. 이것을 아메바의 척추(spine)이라고 부른다.

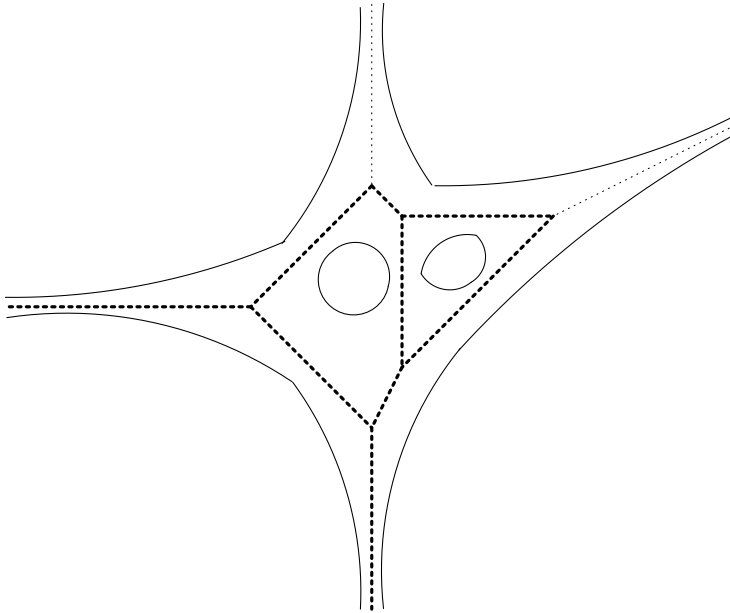


Figure 1. The amoeba of a plane curve and its spine; 평면곡선의 아메바와 이의 뼈대

아메바로부터 열대변수가 만들어지는 방법에는 3가지가 있다. 이들은 서로 다르며, 우리는 그 각각에 대해 수학자의 이름을 하나씩 붙여줄 것이다.

The Passare Construction: 모든 복소 초곡면 아메바 $\mathcal{A}(f)$ 는 그 척추가 $\mathcal{A}(f)$ 에 포함된 전형적인 열대초평면이다. $f = f(z, w)$ 가 2개의 변수를 갖는 다항식이라고 가정하자.

그렇다면 이 다항식의 *Ronkin* 함수는 다음과 같다:

$$N_f(u, v) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(u, v)} \log |f(z, w)| \frac{dz}{z} \wedge \frac{dw}{w}.$$

Passare와 Rullgard [11]는 이 함수가 오목하고, $\mathcal{A}(f)$ 의 여집합의 연결 성분들에 대해 선형이라는 것을 증명했다. $q(u, v)$ 는 아핀 선형 함수들의 최솟값을 나타내고, 아메바의 여집합에 있는 각각의 성분들에 대해서는 1이다. 그렇다면 $q(u, v)$ 는 모든 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 에 대해 $N_f(u, v) \leq q(u, v)$ 를 만족하는 부분마다 선형인 열대다항함수이다. 이것의 열대곡선 $V(q)$ 은 $-\mathcal{A}(f)$ 의 척추에 해당된다.

The Maslov Construction: 열대다양체는, 로그의 밑수를 매우 크게, 또는 매우 작게 변화시킬 때, 아메바의 극한으로써 생성되어진다. 이 극한 과정은 *Maslov dequantization*이라고도 알려져 있는데, 이는 다음과 같은 과정을 통해 정확하게 만들 수 있다. 주어진 $h > 0$ 에 대해, 우리는 산술 방법을 다음과 같이 다시 정의하고자 한다:

$$x \oplus_h y = h \cdot \log \left(\exp \left(\frac{x}{h} \right) + \exp \left(\frac{y}{h} \right) \right) \quad \text{이고} \quad x \odot_h y = x + y.$$

이것은 좌표변환 $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h \cdot \log(x)$ 에 의해서 양의 실수들 간의 연산 덧셈과 곱셈을 정의한 것으로 나타난다.

여기서 매개변수 h 에 대한 유리수 계수 다항식 $f_h(z, w)$ 를 생각해 보자. $h > 0$ 와 크기가 조정된 로그함수 $(z, w) \rightarrow h \cdot (\log |z|, \log |w|)$ 에 대해서 f_h 의 아메바 $\mathcal{A}_h(f_h)$ 를 선택하자. 집합 $-\mathcal{A}_h(f_h)$ 의 하우스도르프 위상의 $h \rightarrow 0_+$ 극한값은 열대초곡면 $V(q)$ 이다 [8]. 열대다항식 q 의 계수들은 $t = 0$ 일 때의 계수들의 승수와 같다. 이 과정은 아메바들이 자신들의 척추에 접근하게 되는 일련의 행위라고 생각될 수도 있지만, *Ronkin* 함수들을 이용하는 방법과는 상당한 차이가 있다.

The Bergman Construction: 아메바와 열대변수들의 세번째 연관성은 아메바들의 축수들을 관찰함으로써 부상하게 된다. 여기서 우리는 $\mathcal{A}(f)$ 의 내부구조는 생각하지 않고, 오직 점근선의 극한 방향에만 초점을 맞춘다. 이는 $(\mathbb{C}^*)^n$ 의 그 어떤 부분다양체에 적용하더라도 말이 되고, 따라서 우리가 입력하려는 값은 이제 S 의 아이디얼 I 이다.

이제 단위구를 $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ 이라고 하자. 다음으로 임의의 양의 실수 $M > 0$ 에 대해, 아메바의 척도가 조정된 부분집합을 고려하여 보자:

$$\mathcal{A}_M(I) = \frac{1}{M} \mathcal{A}(I) \cap \mathbb{S}^{n-1}.$$

로그 극한 집합 $\mathcal{A}_\infty(I)$ 는 구 \mathbb{S}^{n-1} 위의 점 v 들의 집합인데, 여기에서 $-v$ 로 수렴하는 실수점열 $v_M \in \mathcal{A}_M(I)$ 인 일련의 점들이 존재한다:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} v_M = -v.$$

다음의 결과는 I 와 열대다양체 $\text{trop}(I)$ 의 관계를 보여준다. $\text{trop}(I)$ 는 $p = \text{trop}(f)$ 가 임의의 다항식 $f \in I$ 의 열대화일 때 열대 초곡면 $V(p)$ 들의 교집합이라 정의된다.

정리 1.1: I 의 열대다양체는 로그 극한 집합 $\mathcal{A}_\infty(I)$ 위의 원뿔과 일치한다. 즉, 영벡터가 아닌 벡터 $w \in \mathbb{R}^n$ 가 $\text{trop}(I)$ 에 속할 필요충분조건은 단위벡터 $w/\|w\|$ 가 $\mathcal{A}_\infty(I)$ 에 속하는 것이다.

증명. 로그 극한 집합 $\mathcal{A}_\infty(I)$ 는 구 S^{n-1} 상의 모든 점들의 집합이다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} v_M = -v$$

예를 들어, 만약 $n = 2$ 라면, S^{n-1} 는 원이다. 이때, 단위벡터 $w/\|w\|$ 는 다음과 같이 나타내어질 수 있다:

$$\frac{1}{\|w\|}w = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} \quad \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1\right).$$

따라서, 단위벡터 $w/\|w\|$ 는 $\mathcal{A}_\infty(I)$ 상에 존재한다. 같은 방식으로, 영벡터가 아닌 벡터 $w \in \mathbb{R}^n$ 의 단위벡터는 다음과 같이 나타내어질 수 있다:

$$\frac{1}{\|w\|}w = a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + \dots + a_n\hat{x}_n \quad \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = 1\right).$$

따라서, 단위벡터 $w/\|w\|$ 는 \mathbb{R}^n 보다 한 차원 낮은 공간의 구인 S^{n-1} 를 포함하는 $\mathcal{A}_\infty(I)$ 에 속하게 된다. □

후속 연구에서 $V(I)$ 가 다면체 부채꼴이라는 것을 증명할 것이고, 이 부채꼴의 여러가지 구조적 성질들을 규명할 것이다. 정리 1.1과 $V(I)$ 의 부채꼴 특성들은 $\mathcal{A}_\infty(I)$ 가 구형 다면체 복합체(spherical polyhedral complex)임을 암시한다.

논문 [1]의 동기를 살펴보는 것은 상당히 흥미롭다. Bergman은 Laurent 다항식환 S 의 $GL(n, \mathbb{Z})$ 에 대한 곱셈동작을 고려하는 Zalesky의 추측을 증명하기 위해 열대변수를 도입했다. 여기서 가역 정수 행렬 $g = (g_{i,j})$ 은 S 에게 있어 각각의 변수 x_i 를 Laurent 단항식 $\prod_{j=1}^n x_j^{g_{i,j}}$ 에 대응시키는 환 준동형사상의 역할을 한다. I 가 S 의 진부분 아이디얼이라면, 우리는 이를 안정화시키는 부분그룹을 고려해 본다:

$$\text{Stab}(I) = \{g \in GL(n, \mathbb{Z}) : gI = I\}.$$

다음 결과는 Zalesky의 질문에 답을 제시한다. 이는 논문 [1]의 정리 1에 해당된다:

따름정리 1.2: 진부분 아이디얼 $I \in S$ 의 안정제 $\text{Stab}(I) \subset GL(n, \mathbb{Z})$ 는 \mathbb{Z}^n 의 자명하지 않은 부분 격자점들을 안정화하는 유한위수 부분군을 가진다.

증명. 열대다양체 $V(I)$ 는 \mathbb{R}^n 에서 정규 다면체 부채꼴(proper polyhedral fan)의 구조를 갖고 있다. \mathcal{U} 를 $V(I)$ 의 최대 원추(maximal cones)에 의해 생성되어지는 \mathbb{R}^n 의 선형 부분 공간들의 유한 집합이라고 하자. 팬 구조가 고유하지는 않지만 \mathbb{R}^n 의 선형 부분 공간의 집합 \mathcal{U} 는 I 에 의해 고유하게 결정된다. 집합 \mathcal{U} 는 $\text{trop}(V(I))$ 에서 팬 구조의 정교화(refinement) 또는 조약화(coarsement)에 의해서는 변경되지 않는다.

군 $\text{Stab}(I)$ 은 \mathbb{R}^n 에 대한 선형 변환으로 작용하고 I 의 열대 다양체를 불변으로 남겨둔다. 이것은 \mathbb{R}^n 의 부분 공간의 유한 집합 \mathcal{U} 에 대한 순열에 의해 작용한다는 것을 의미한다. 하나의 특정 부분 공간 $U \in \mathcal{U}$ 를 고정하고 G 를 U 를 고정하는 모든 원소 $g \in \text{Stab}(I)$ 의 부분군이라고 하자. 그러면 G 는 $\text{Stab}(I)$ 에서 유한 인덱스를 가지며 \mathbb{Z}^n 의 부분 격자 $U \cap \mathbb{Z}^n$ 을 안정화(stabilize)시킨다. \square

아메바 $\mathcal{A}(I)$ 에 대응하는 대상으로 코우 아메바(co-amoeba)를 생각할 수 있는데, 코우 아메바(co-amoeba)는 복소 다양체 $V(I)$ 의 모든 점들의 좌표의 위상을 나타낸다. 코우 아메바(co-amoeba)에 대한 Bergman의 대수 극한 집합은 $V(I)$ 의 위상 극한 집합(phase limit set)이라고 한다. 이 주제에 관한 최근 결과 및 참고 자료는 Nisse와 Sottile의 논문 [10]을 대표로 들 수 있다.

2 음함수화(Implicitization)

대수 다양체는 유리 함수의 상이나 다변수 다항식의 해집합으로 표현되어질 수 있다. 뒤의 표현은 모든 대수 다양체에 대하여 존재하지만 앞의 표현은 다양체가 unirational 일 때만 가능하다. Unirational이라는 개념은 대수기하에서 매우 특별한 성질이다. 이 두 표현들 간의 전환은 컴퓨터 대수(computer algebra)에서 하나의 기본적인 문제이다. 음함수화는 첫번째 표현을 두번째 표현으로 만드는 문제이다, 즉, 주어진 유리 함수 Φ 에 대하여 Φ 의 상에서 0이 되는 모든 다항식들의 소아이디얼을 결정하는 문제이다.

이번 절에서는 음함수화 과정의 간단한 예인 평면곡선에 대해 다룬다, 즉, 유리 매개화

$$\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, t \mapsto (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

로 주어지는 \mathbb{C}^2 에서의 평면곡선의 경우를 다룬다. 잘 정의되는 함수 Φ 를 만들기 위해서 우선 ϕ_1 과 ϕ_2 의 pole(분모를 0으로 만드는 값)들은 정의역 \mathbb{C} 에서 제거되어 있다고 하자. 음함수화 문제는 $\text{Image}(\Phi) = \{(\phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{C}\}$ 에서 0이 되는 유일한 기약 다항식 $f(x, y)$ 를 계산하는 문제이다.

예 2:
$$\Phi(t) = (x, y) = \left(\frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{t^2 - 1}, \frac{t^3 - t^2 - t + 1}{t^2} \right), t \in \mathbb{C} - \{0, \pm 1\}$$

에 의해 정의된 평면곡선을 생각하자. 이 곡선을 음함수꼴로 고친 것은 다음과 같다.

$$f(x, y) = x^3y^2 - x^2y^3 - 5x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2 - 33xy + 16y^2 + 72y + 81$$

이 기약다항식은 다음 점들에서 0이 된다: $(x, y) = \Phi(t), t \in \mathbb{C} - \{0, \pm 1\}$.

컴퓨터 대수에서 음함수화 문제를 푸는 2가지 표준적인 방법은 그뢰브너(Groebner) 기저를 사용하는 것이나 resultant를 사용하는 것이다. 이러한 방법들은 Cox, Little, O'Shea의 책에 설명되어 있다 [2]. 특별히, 우리가 구하고자 하는 다항식 $f(x, y)$ 은 매개변수 t 에

대하여 $x - \phi_1(t)$ 와 $y - \phi_2(t)$ 의 Sylvester resultant와 같다. 예를 들어 예제 2의 음함수 방정식은 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$f(x, y) = \text{resultant}_t(t^3 + 4t^2 + 4t - x(t^2 - 1), t^3 - t^2 - t + 1 - yt^2) \\ = x^3y^2 - x^2y^3 - 5x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2 - 33xy + 16y^2 + 72y + 81$$

그러나, 고차원의 많은 문제들에 대해서는 그뢰브너(Groebner) 기저를 사용하는 것이나 종결식(resultant)을 사용하는 것이 충분히 잘 적용되어 지지 않거나, 기하적인 직관을 제공해 주지 못한다. 여기에서 음함수화에 열대기하적인 접근을 하게 된다. 평면유리곡선의 경우에 이러한 접근 방식의 기본적인 아이디어를 설명할 것이다.

매개화 Φ 가 주어져 있을 때, 음함수 방정식 $f(x, y)$ 를 계산하고자 한다. 열대기하에서는 $f(x, y)$ 를 모르더라도 뉴턴다각형 $\text{Newt}(f)$ 을 매개화 Φ 로부터 직접 계산할 수 있다. 이것이 정리 2.1의 내용이다. 일단 뉴턴다각형 $\text{Newt}(f)$ 을 알면 선형 대수 계산법에 의하여 구하는 음함수 방정식 $f(x, y)$ 를 복원할 수 있다. 다음 문단에서 이 계산법을 설명하고자 한다.

$f(x, y)$ 의 뉴턴 다각형은 $f(x, y)$ 의 전개식의 각 항의 x 와 y 의 지수를 좌표로 갖는 실수 평면상의 격자점을 모두 내부와 경계상에 가지는 convex hull이다. 이렇게 우리는 음함수를 열대 기하적으로 표현할 수 있다.

즉, 평면곡선의 뉴턴 다각형과 convex hull을 그리는 방법은 다음과 같다.

- (1) $\Phi(t)$ 의 분자, 분모를 인수분해한다.
- (2) 매개변수 t 에 대해 다항식이 0이 되도록 양변에 분모를 곱하고 이항하여 정리한다. (이때 분모의 pole을 제거하는 것을 잊지 않는다.)
- (3) 두 다항식의 종결식(resultant)를 $f(x, y)$ (음함수)라고 한다.
- (4) 이 음함수에 대한 뉴턴 다각형과 convex hull을 그린다.

이 예시는 컴퓨터 대수학에서 그뢰브너 기저와 종결식(resultant)로 음함수화 문제들을 푸는 데 쓰였다. 특히, 요구된 다항식 $f(x, y)$ 는 $x - \phi_1(t)$ 의 계산자와 $y - \phi_2(t)$ 의 계산자의 실베스터 종결식(Sylvester resultant)이다.

예를 들어, 예제 2의 음함수 방정식은 위와 같이 쉽게 찾아진다. 하지만, 더 높은 차수의 문제에 대해서는 그뢰브너 기저와 종결식(resultant)가 대부분 성립하지 않으며 충분한 기하적 정보를 주지 않는다. 따라서 이때 열대기하적인 접근으로 음함수화를 해결한다.

음함수의 뉴턴 다각형과 convex hull은 정수 평면상의 모든 점에 대해 $\text{Newt}(f)$ 로 표기한다. 다음을 예시로 보자.

$$\text{Newt}(f) = \text{Conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

이 오각형은 경계를 포함한 안쪽에 4개의 추가 격자점을 가지고 있다. 따라서 $\text{Newt}(f)$ 는 정확히 9개의 격자점을 가지고 있으며 각각을 $f(x, y)$ 의 *term*이라고 부른다.

우리에게 매개화가 부여되어있고, 음함수방정식 $f(x, y)$ 가 구하기 매우 힘들다고 하자. 또한 뉴턴 다각형이 알려져 있다고 하면, 이로써 계수 c_1, c_2, \dots, c_9 를 모르는 매개변수들인 $f(x, y)$ 의 정보를 알 수 있다:

$$f(x, y) = c_1x^3y^2 + c_2x^2y^3 + c_3x^2y^2 + c_4x^2y + c_5xy^2 + c_6xy + c_7y^2 + c_8y + c_9$$

이 시점에서 다음과 같이 선형 방정식 시스템을 설정할 수 있다. 임의의 복소수 τ 에 대하여 방정식 $f(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) = 0$ 이 성립한다. 이 방정식은 9개의 모르는 값 c_i 에 대한 하나의 선형 방정식으로 변환이 될 수 있다. 그 중에서 8개의 선형 방정식은 계수들의 크기를 조정하면 유일하게 결정할 수 있다. 예를 들어, 우리가 $\tau = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ 라고 하면 열벡터 $(c_1, c_2, \dots, c_9)^T$ 가 다음 8×9 유리수 행렬의 핵에 있게 하는 8개의 선형 방정식을 얻게 된다. 이 행렬은 계수가 8이고, 핵은 1차원이다. 핵의 어떤 생성원도 다항식 $f(x, y)$ 의 스칼라 곱으로 변환된다. 여기서 우리는 음함수 방정식 $f(x, y)$ 가 선형대수를 이용하여 $\text{Newt}(f)$ 로부터 찾아내어 질 수 있음을 알 수 있다. 그렇지만, 또한 선형 방정식의 결과를 내는 과정에서 사용되는 행렬이 조밀하고 나쁜 조건인 경향이 있음을 알 수 있다. 이것은 곧 컴퓨터 문제가 $f(x, y)$ 가 수천개의 항을 가지고 있는 경우 풀이가 쉽지 않음을 의미한다.

$$\tau \begin{pmatrix} x^3y^2 & x^2y^3 & x^2y^2 & x^2y & xy^2 & xy & y^2 & y & 1 \\ -5 & \frac{2187}{80} & -\frac{419904}{1875} & \frac{2916}{25} & -\frac{81}{16} & -\frac{7776}{375} & \frac{54}{5} & \frac{20736}{5625} & -\frac{144}{75} & 1 \\ -4 & \frac{3}{2} & -\frac{16}{512} & \frac{16}{16} & -\frac{3}{1} & -\frac{16}{128} & \frac{5}{4} & \frac{256}{1024} & -\frac{16}{32} & 1 \\ -3 & -\frac{3}{3} & -\frac{16}{81} & \frac{16}{9} & -\frac{3}{2} & -\frac{16}{27} & \frac{4}{3} & \frac{81}{81} & -\frac{9}{9} & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 2 & \frac{2048}{3} & 48 & 64 & \frac{256}{3} & 6 & 8 & \frac{16}{16} & \frac{4}{4} & 1 \\ 3 & \frac{15625}{6} & 40000 & 2500 & \frac{625}{4} & 800 & 50 & \frac{256}{81} & \frac{16}{9} & 1 \\ 4 & \frac{34992}{5} & \frac{32805}{16} & 729 & \frac{1296}{5} & \frac{1215}{16} & 27 & \frac{2025}{256} & \frac{45}{16} & 1 \\ 5 & \frac{235298}{15} & \frac{3687936}{625} & 38416 & \frac{2401}{6} & \frac{18816}{125} & 196 & \frac{9216}{625} & \frac{96}{25} & 1 \end{pmatrix}$$

하지만, 기하학적인 관점에서는 뉴턴 다각형이 한번 찾아졌으며, 이것을 바탕으로 음함수화 문제를 푸는 것은 의미가 있다. 이제 다음과 같은 음함수화(*implicitization*)의 대안에 대하여 다룰 것이다.

열대 음함수화 문제: 주어진 두 개의 유리함수 $\phi_1(t), \phi_2(t)$ 에 대해 음함수 $f(x, y)$ 의 뉴턴 다각형 $\text{Newt}(f)$ 를 구하시오.

우리는 이 문제의 해답을 열대 음함수화 문제의 평면곡선으로 풀어 낼 것이다. 대수학의 기본에서 주어진 2개의 유리함수는

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= (t - \alpha_1)^{u_1} (t - \alpha_2)^{u_2} \cdots (t - \alpha_m)^{u_m} \\ \phi_2(t) &= (t - \alpha_1)^{v_1} (t - \alpha_2)^{v_2} \cdots (t - \alpha_m)^{v_m} \end{aligned} \tag{2}$$

의 선형 요소임을 알 수 있다. 여기서 α_i 는 ϕ_1 또는 ϕ_2 의 pole이 되거나 해가 된다. v_j 가 0이 아니고 u_i 가 0이거나 또는 v_j 가 0이고 u_i 가 0이 아닌 경우가 일어날 수 있다. 따라서, 우리는 대수적 수인 α_i 는 필요하지 않고 인수분해에서 나타나는 지수 u_i 와 v_j 만을 필요로 한다. 이 지수들은 유클리드 알고리즘과 같은 상징적(symbolic) 알고리즘을 사용하여 계산할 수 있고, 정수 u_i, v_j 를 알기 위해서 체의 확장 개념이나, 부동소수점(floating points)을 계산하는 것은 필요없다.

이제 $u_0 = -u_1 - u_2 - \cdots - u_m, v_0 = -v_1 - v_2 - \cdots - v_m$ 이라 하고 평면 상의 $m + 1$ 개의 정수 벡터들의 모임

$$\left(\begin{matrix} u_0 \\ v_0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} u_m \\ v_m \end{matrix} \right) \tag{3}$$

을 생각해 보자. 반직선들은 $m + 1$ 개의 벡터들에 의해 생성된다. 각각의 반직선들은 반직선 위에 있는 모든 벡터 $(u_i, v_i)^T$ 들의 격자 길이들의 합인 자연스러운 중복도를 가진다. 식 (3)에 있는 벡터들의 합은 0이므로, 반직선들의 배열은 평형조건을 만족한다: 이 반직선들의 배열은 실평면에 있는 열대곡선이 된다.

정리 2.1: 모르는 다항식 f 에 의하여 정의되는 열대곡선 $V(\text{trop}(f))$ 는 식 (3)에 있는 벡터들에 의하여 결정되는 열대곡선과 같다.

증명. 열대대수의 기본 정리로부터 이 정리를 증명할 수 있다. □

뉴턴 다각형 $\text{Newt}(f)$ 는 열대다양체 $V(\text{trop}(f))$ 로부터 다음과 같이 복원될 수 있다. 우선 다음과 같이 벡터를 90° 회전한다.

$$\left(\begin{matrix} v_0 \\ -u_0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} v_1 \\ -u_1 \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} v_m \\ -u_m \end{matrix} \right) \tag{4}$$

이 벡터들의 합이 0이므로 이 벡터들의 변환들이 모서리가 되는 볼록 다각형 P 가 유일하게 존재한다. 그러므로 이 벡터들의 기울기를 증가시키고 결합을 하여 분류함으로서 P 를 만들 수 있다. 따라서 다각형 P 는 변환을 고려하면 유일하다. 따라서 P 의 변환 P^+ 가 유일하게 존재하며, P^+ 는 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 인 평면상에 놓여있고 x 축과 y 축과의 교집합이 공집합이 아니다. 뒤의 조건은 볼록 다각형이 $\mathbb{C}[x, y]$ 에 있는 기약 다항식의 뉴턴 다각형으로 되기 위한 필요충분조건이다.

따름정리 2.2: 매개화된 곡선 $\text{Image}(\Phi)$ 을 정의하는 기약 다항식의 뉴턴 다각형 $\text{Newt}(f)$ 과 P^+ 는 동일하다.

복소평면곡선에 대한 열대 음함수화 문제를 이 따름정리를 사용하면 해결할 수 있다. 우리의 예제에 대해 이러한 해법을 소개할 것이다.

예 3: 예제 2의 사상을 인수분해된 형식 (2)으로 적어보자.

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= (t-1)^{-1}t^1(t+1)^{-1}(t+2)^2, \\ \phi_2(t) &= (t-1)^2t^{-2}(t+1)^1(t+2)^0\end{aligned}$$

(3)의 다섯 벡터들의 배열은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4)와 같이 이 벡터들의 회전들을 구하고, 기울기가 증가하는 순서대로 이 벡터들을 정렬하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

만약 우리가 이 벡터들을 원점을 시점으로 하여 정렬하면 결과적으로 나타나는 변들은 모두 1사분면에 있게 된다. 그 결과는 따름정리 2.2의 볼록 오각형 P^+ 과 같다. 우리가 예측한 것처럼 이것은 (1)의 오각형과 일치한다.

열대 매개화 기법은 원칙적으로 매개변수를 사용하여 표현된 대수 변수의 열대화를 계산하는 데 사용할 수 있다. 세부 사항은 여기서 설명한 간단한 곡선의 경우보다 복잡하다. 적절한 매개화를 위해서는 토릭 기하학과 특이점의 해소에 대한 개념들이 필요하다. 열대 매개화에 대한 더 자세한 내용은 [14, 15]을 참조하자.

3 곡선 헤아리기

기하학자들이 열대적 방법들에 관심을 가지게 된 요인 중 하나는 Mikhalkin의 평면의 Gromov-Witten 불변량에 대한 작업이었다. 이런 불변량들은 주어진 점들을 지나는 특정 차수와 종수를 지닌 복소 대수 곡선의 개수를 나타낸다. Mikhalkin은 복소곡선들이 열대곡선들로 대체될 수 있다는 것을 증명하였고 열대곡선의 개수를 헤아리는 조합 공식을 유도해 냈다. 이번 절의 목표는 기본 아이디어들과 주요 결과들을 제시하는 것이다.

본격적으로 주제에 들어가기에 앞서, 평면 상의 네 개의 점들을 모두 지나는 특이 열대 2차 곡선은 몇개나 될까? 이 질문의 답은 3이다. 특이 2차 곡선은 두 개의 직선들의 합집합이고, 평면 상의 네 개의 점들은 일반적인 위치에 있으며, 정확히 직선들의 3개의 쌍들이 네 개의 점들을 지난다. 이 사실은 기존 대수 기하학과 열대 기하학 분야에서 모두 참이고, 각자의 경우에 대하여 3이라는 똑 같은 결과가 산출된다.

일반적인 문제를 기술하기 전에, 우리는 복소사영평면 \mathbb{P}^2 의 곡선들에 대한 몇 가지 고전적인 사실들에 대해 되돌아보자. C 가 차수가 d 인 \mathbb{P}^2 위의 매끈한 곡선이라고 가정하자. 그리고 곡선의 종수를 C 의 손잡이의 개수라고 하자. 이때 C 는 실수 위에서 정의된 이차원 리만 곡면으로 간주하자. 그러면 종수는 다음과 같다.

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

또한, 이 수는 차수가 d 인 일반적인 열대곡선의 뉴턴 다각형 내부의 격자점의 수와 같다. 이 뉴턴 다각형은 $(0, 0, d)$, $(0, d, 0)$, $(d, 0, 0)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형이다. 이를 기호로 표현하면 다음과 같다.

$$g(C) = \#(\text{int}(\text{Newt}(C)) \cap \mathbb{Z}^3).$$

차수가 d 인 모든 곡선들의 집합은 차원이 다음과 같은 사영공간을 이룬다.

$$\binom{d+2}{2} - 1 = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 3d - 1. \tag{5}$$

곡선을 정의하는 다항식의 $\binom{d+2}{2}$ 개의 계수가 변함에 따라, 곡선 C 가 한 개나 그 이상의 특이점을 가질 수도 있다. 가장 단순한 형태의 특이점은 *node*(마디)이다. 곡선이 하나의 마디를 가질 때마다, 종수가 1씩 줄어든다. 그러므로 마디를 v 개 가지고 다른 특이점은 갖고 있지 않는 특이곡선 C_{sing} 에 대해서, 종수는 다음과 같은 값을 가진다.

$$g(C_{\text{sing}}) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - v. \tag{6}$$

다음과 같은 흥미로운 계산기하학 문제를 생각해보자: “종수가 g 이고 차수가 d 인 기약곡선들이 복소사영평면 \mathbb{P}^2 위의 $g + 3d - 1$ 개의 일반적인 위치에 있는 점을 지날 때, 이러한 곡선들의 개수인 $N_{g,d}$ 는 얼마인가?”

식 (5)와 (6)에 의하여 차수가 d 이고 종수가 g 인 곡선들로 이루어진 다양체는 차원이 $g + 3d - 1$ 이어야 하고, 이 곡선의 점들 하나하나가 독립인 조건을 부가하기 때문에 이러한 질문은 의미가 있다. 따라서 우리는 모든 제한 조건을 만족하는 곡선의 개수 $N_{g,d}$ 가 유한하다는 것을 기대한다. Gromov-Witten 이론이 우리에게 이것을 증명할 수 있는 방법을 제공한다.

단지 기약인 곡선이 아니라 모든 곡선들이 허용되는 곳에는 아주 긴밀히 연관된 헤아리기 문제가 있다. 우리가 이 절의 첫 부분에서 말한 기약인 이차 곡선의 개수 $N_{g,d}^{\text{red}}$ 값은 다음과 같다.

$$N_{-1,2}^{\text{red}} = 3.$$

다음의 내용에 의거하여 우리는 기약곡선의 경우에 대해서만 생각하도록 하자. $N_{g,d}$ 는 평면 \mathbb{P}^2 의 ‘Gromov-Witten 불변량’이라고 불린다. 이 연구는 기하학자들 사이에서 흥미로운 주제로 고려된다. 이것은 열대기하적인 방법을 사용하면서 얻어진 부수적인 것이다.

예 4: 평면 \mathbb{P}^2 위의 가장 단순한 *Gromov-Witten* 불변량 값은 $N_{0,1} = 1$ 과 $N_{0,2} = 1$ 이다. 이는 두 개의 점을 지나는 직선이 유일하다는 것과 다섯 개의 점을 지나는 이차 곡선(원뿔곡선)이 유일하다는 것을 의미한다. 또한, $N_{1,3} = 1$ 이란 사실도 알 수 있다. 이는 아홉 개의 점을 지나는 삼차곡선이 유일하다는 것을 의미한다.

예 5: 자명하지 않은 첫번째 불변량은 $N_{0,3} = 12$ 이다. 이 사실에 대해 설명해 보자. 이는 다음과 같이 정의되는 삼차다항식의 관계된 곡선이다.

$$f = c_0x^3 + c_1x^2y + c_2x^2z + c_3xy^2 + c_4xyz + c_5xz^2 + c_6y^3 + c_7y^2z + c_8yz^2 + c_9z^3.$$

c_0, \dots, c_9 가 종수가 1인 매끄러운 곡선 $\{f = 0\}$ 의 계수들이라고 하면, 곡선은 유리곡선이 된다. 즉, 이 곡선이 특이점을 갖게 되면 종수가 0으로 떨어지는 것이다. 그리고 이는 f 의 판별식이 0이 될 때만 성립한다. 판별식 $\Delta(f)$ 는 c_0, c_1, \dots, c_9 를 계수로 하는 12차 동차 다항식이다. 이는 2,040개의 단항식의 합으로 이루어져 있다 [3].

$$\Delta(f) = 19683c_0^4c_6^4c_9^4 - 26244c_0^4c_6^3c_7c_8c_9^3 + 5832c_0^4c_6^3c_8^3c_9^2 + \dots - c_2^2c_3c_4^4c_5^3c_6^2 \quad (7)$$

판별식과 종결식(*resultants*)에 대한 연구는 *Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky* [3]가 저술한 책의 주제이다. 그 책에서는 판별식과 종결식의 값을 계산하는 여러 가지 공식들을 소개하고 있다. 간단한 판별식 공식이 (7)에 소개되어 있다. 2차 곡선 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ 의 'Hessian'은 3차 다항식이다. 6개의 2차곡선 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$ 의 계수들을 성분으로 가지는 6×6 행렬을 $M(f)$ 라고 정의하자. 그러면 $\Delta(f) = \det(M(f))$ 라는 식이 성립한다.

이제, \mathbb{P}^2 위에 주어진 8개의 점이 있다고 가정하자. 그리고 그 8개의 점을 모두 지나는 3차 곡선 $\{f = 0\}$ 을 찾아보자. 이 문제는 c_0, c_1, \dots, c_9 를 계수로 하는 8개의 일차 방정식을 푸는 것과 같다. 12차 방정식인 $\Delta(f) = 0$ 과 8개의 일차 방정식을 통해, 우리는 12개의 해를 \mathbb{P}^9 에서 찾아낼 수 있다. 이 해들은 우리가 찾던 12개의 유리 3차 곡선의 계수 벡터들임을 알 수 있다.

예 6: 평면 \mathbb{P}^2 위의 사차 곡선은 3, 2, 1, 0을 종수로 가질 수 있다. *Gromov-Witten* 불변량은 각각의 경우에 대해 다음과 같은 값을 갖는다.

$$N_{3,4} = 1, \quad N_{2,4} = 27, \quad N_{1,4} = 225, \quad N_{0,4} = 620.$$

위의 27이라는 숫자는 변수가 3개인 4차 곡선의 판별식의 차수이다. 마지막 문장은 11개의 일반적인 점을 지나는 사차 유리 곡선이 620개 존재한다는 뜻이다.

Mikhalkin [9]의 결과는 다음과 같다.

정리 3.1: *Gromov-Witten* 불변량 $N_{g,d}$ 는 열대적으로도 계산할 수 있다.

다음의 토의는 이 정리가 주장하는 바가 무엇인지 설명해 줄 것이다. 우리는 차수가 d 인 \mathbb{R}^2 위의 열대곡선에 대해 고려할 것이다. 각각의 곡선 C 는 $(0, 0), (0, d), (d, 0)$ 를 꼭짓

점으로 하는 삼각형의 정칙세분의 평면 쌍대 그래프이다. 이 세분이 넓이가 $1/2$ 인 삼각형 d^2 개로 이루어져 있을 때 곡선 C 가 ‘매끄럽다’고 정의하자. 다르게 말하자면, 세분이 d^2 개의 정점을 갖고 있을 때, 곡선 C 는 ‘매끄럽다’. 이 정점들은 필연적으로 선분이 세 개 연결되어 있다.

열대곡선 C 의 모든 정점들에 선분 세 개가 연결되어 있거나 국소적으로 두 선분의 교집합일 때, 이 곡선을 ‘간단하다’고 정의하자. 다르게 표현하자면, C 에 대응되는 세분이 삼각형이나 평행사변형으로만 이루어져 있을 때, 이 곡선은 ‘간단하다’라고 정의한다. 여기에서 삼각형들은 넓이가 넓은 것이 허용된다고 하자. 이때 $t(C)$ 는 삼가 정점 (trivalent vertices)의 개수라고 정의하고, $r(C)$ 는 유계가 아닌 변의 개수라고 정의하자.

‘간단한’ 열대곡선의 ‘종수’를 다음과 같은 공식으로 정의하자.

$$g(C) = \frac{1}{2}t(C) - \frac{1}{2}r(C) + 1. \quad (8)$$

이 정의는 ‘매끄러운’ 열대곡선에 대하여 의미있다는 것을 확인해보는 것도 교육적이다. 실제로, 만약 C 가 ‘매끄럽다’면, $t(C) = d^2$ 이고 $r(C) = 3d$ 이다. 그리고, 우리는 ‘매끄러운’ 고전적인 복소 곡선에 대한 종수 공식을 복원할 수 있다.

$$g(C) = \frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{2}d + 1 = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

마지막으로, 곡선에 대응되는 세분에 속하는 모든 삼각형의 정규화된 넓이의 곱으로 간단한 곡선의 ‘참여도 (contribution)’를 정의할 수 있다. 이런 식으로 C 의 참여도를 계산할 때, 우리는 사가 횡단 (4-valent crossings)에 대응하는 ‘마디 특이점 (nodal singularities)’을 무시하고, 그저 삼가의 정점들에 부여된 양의 정수들을 곱하면 된다. 삼가 정점의 참여도는 w_1, w_2, w_3 이 이웃하는 변들의 가중값이고, u_1, u_2, u_3 가 그들의 원시적인 변의 방향일 때, $w_1 w_2 |\det(u_1, u_2)|$ 으로 계산될 수 있다. 이 공식은 balancing condition이 $w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3 = 0$ 이기 때문에 선택과는 관계 없다. ‘매끄러운’ 곡선의 참여도는 1이다.

정리 3.1가 의미하는 바가 무엇인지에 대한 명확한 진술이 아래에 나타나 있다.

정리 3.2 (Mikhalkin's Correspondence Principle): \mathbb{R}^2 위의 일반적인 위치에 있는 $g + 3d - 1$ 개의 점을 지나는 차수가 d 이고 종수가 g 인 간단한 열대곡선들의 개수는 복소 사영 평면 \mathbb{P}^2 의 Gromov-Witten 수인 $N_{g,d}$ 와 일치한다. 여기에서 각 곡선은 참여도에 따라 헤아려야만 한다.

정리 3.2의 증명은 Mikhalkin [9]에 의해 이루어졌는데 그는 복소기하학의 방법을 이용했다. 특히, J -복소해석적 곡선의 변형을 이용했다. 계속해서, Gathmann과 Markwig [4, 5]는 많은 대수적 접근 방법을 개발했고, 이는 열대 moduli 공간과 열대공간의 교집합 이론의 체계적인 발전을 이끌었다.

계산 기하에서 열대곡선으로 할 수 있는 것의 예를 들자면, 종수가 0인 유리곡선들의 Gromov-Witten 불변량 $N_{0,d}$ 은 다음과 같은 획기적인 순환식을 만족한다:

$$N_{0,d} = \sum_{d_1+d_2=d, d_1, d_2 > 0} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right) N_{0,d_1} N_{0,d_2}. \quad (9)$$

Kontsevich는 \mathbb{P}^2 의 quantum 코호몰로지의 결합률을 나타내는 WDVV(Witten, Dijkgraaf, Verlinde, Verlinde의 약어)식으로부터 이 식을 유도해냈다.

Mikhalkin's Correspondence Principle을 이용해, Gathmann, Markwig [6]은 이 공식을 열대적 방법을 이용해서 증명하였다. 다시 말하자면, 그들은 차수가 d 이고 종수가 0이며 $3d - 1$ 개의 점을 지나는 간단한 열대곡선은 Kontsevich 관계식 (9)을 만족한다는 조합적 결과를 얻었다.

감사의 글 보다 좋은 논문을 위해 성심어린 가르침과 충고를 해주신 심사위원들께 감사의 마음을 전합니다.

References

1. George M. BERGMAN, The logarithmic limit-set of an algebraic variety, *Trans. Amer. Math. Soc.* 157 (1971), 459–469.
2. David A. COX, John B. LITTLE, Henry K. SCHENCK, Toric varieties, *Graduate Studies in Mathematics* 124 (2011), American Mathematical Society, Providence, RI, 267, 269, 273, 288, 289, 293, 311, 322.
3. I. M. GELFAND, M. M. KAPRANOV, A. V. ZELEVINSKY, *Discriminants, Resultants and multidimensional determinants. Modern Birkhäuser Classics*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008, Reprint of the 1994 edition.
4. Andreas GATHMANN, Hannah MARKWIG, The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry, *Math. Ann.* 338(4) (2007), 845–868.
5. Andreas GATHMANN, Hannah MARKWIG, The numbers of tropical plane curves through points in general position, *J. Reine Angew. Math.* 602 (2007), 155–177.
6. Andreas GATHMANN, Hannah MARKWIG, Kontsevich's formula and the WDVV equations in tropical geometry, *Adv. Math.* 217(2) (2008), 537–560.
7. Young Rock KIM, Yong-Su SHIN, A Study on Various Properties of Tropical Plane Curves. *The Korean Journal for History of Mathematics* 29(5) (2016), 295–314.
8. Grigory MIKHALKIN, Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces, *Topology* 43(5) (2004), 1035–1065.
9. Grigory MIKHALKIN, Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2 , *J. Amer. Math. Soc.* 18(2) (2005), 313–377.
10. Mounir NISSE, Frank SOTTILE, The phase limit set of a variety, *Algebra Number Theory* 7(2) (2013), 339–352.

11. Mikael PASSARE, Hans RULLGÅRD, Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope, *Duke Math. J.* 121(3) (2004), 481–507.
12. Mikael PASSARE, August TSIKH, Amoebas: their spines and their contours, In Idempotent mathematics and mathematical physics, volume 377 of *Contemp. Math.*, 275–288. *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 2005.
13. Kevin PURBHOO, A Nullstellensatz for amoebas, *Duke Math. J.* 141(3) (2008), 407–445.
14. Bernd STURMFELS, Jenia TEVELEV, Josephine YU, The Newton polytope of the implicit equation, *Mosc. Math. J.* 7(2) (2007), 327–346, 29, 109, 116, 306, 309.
15. Bernd STURMFELS, Josephine YU, *Tropical implicitization and mixed fiber polytopes*, *Software for algebraic geometry*, IMA Vol. *Math. Appl.* 148 (2008), 114–131, Springer, New York, 29, 109, 116.
16. Thorsten THEOBALD, Computing amoebas, *Experiment. Math.* 11(4) (2002), 513–526.