

수학 교과 역량 관점에서의 수학적 모델링에 관한 선행 연구 탐색

최경아¹⁾

2015 개정 수학과 교육과정에서 문제해결능력 함양을 위한 교수·학습 방법으로 수학적 모델링이 제시되면서, 국내에서 1990년 이래로 꾸준히 연구되어 온 수학적 모델링에 관한 논의가 더욱 활발해지고 있다. 이에 본 연구는 수학적 모델링의 교육적 가치와 현장 적용의 필요성을 재음미해보고자, 수학 교과 역량의 관점에서 수학적 모델링에 관한 선행 연구를 고찰하였다. 그 결과, 수학적 모델링은 수학 교과 역량 중 문제해결의 하위 요소로 제시되고는 있지만, 문제해결 뿐만 아니라 추론, 의사소통, 창의·융합, 정보 처리, 태도 및 실천을 지지하는 교수·학습 방법임을 확인할 수 있었다. 이러한 측면에서, 수학 교과 역량에서의 수학적 모델링의 위치에 대한 논의의 필요성과 학교 현장 적용을 위한 방안으로 수학적 모델링에 대한 교사 교육 및 수학 교과서와 수업에서 수학적 모델링 과제의 적극적인 활용을 제안하였다.

주요용어 : 수학적 모델링, 수학 교과 역량, 문제해결, 추론, 의사소통, 창의·융합, 정보처리, 태도 및 실천

I. 서론

2015년에 발표된 제2차 수학교육 종합 계획(교육부, 2015b)에서는 배움을 즐기는 수학교육을 위하여 수학의 실용성을 느낄 수 있는 실생활 관련 내용을 강조하고 있다. 이에 따라, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 실생활 관련 내용을 교육 목표, 내용 체계, 교수·학습 방법 및 평가 방향 등에서 언급하고 있다.

또한 2015 개정 교육과정은 역량 중심으로 교육과정을 설계하는 세계적인 흐름에 따라(박경미 외, 2015), 총론과 각 교과 교육과정에서 핵심역량을 언급하고 있다. 핵심역량이란, “미래사회에 성공적인 삶을 살아가는데 학습자에게 요구되는 지식, 기능, 태도의 총체로서 학교 교육을 통해 누구나 길러야 할 기본적이고 보편적이며 중요한 성격의 것(김해윤, 2014, p. 7)”으로 수학 교과 역량은 수학과에서 기를 수 있는 역량이라고 할 수 있다. 이에 2015 개정 수학과 교육과정에서는 문제해결, 추론, 의사소통, 창의·융합, 정보 처리, 태도 및 실천을 수학 교과 역량으로 제시하고 있다.

* MSC2010분류 : 97D30, 97M10

1) 안산서초등학교 (kachoi@ginue.ac.kr)

2015 개정 수학과 교육과정의 ‘실생활 관련 내용’ 과 ‘수학 교과 역량’ 이라는 큰 흐름 속에 2015 개정 수학과 교육과정에서 문제해결능력 신장 방법과 관련하여 새롭게 추가된 교수·학습 방법이 수학적 모델링이다. 수학적 모델링이란, 실세계 문제를 수학과 연결 지어 해결하는 일련의 과정을 의미한다. 수학적 모델링은 Freudenthal의 실세계 문제를 이용한 수학과 Pollak의 응용 수학에서 시작된 것(Huson, 2016)으로, 1983년에 ICTMA(The international Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications) 이후, 국제적으로 논의되어 왔다. 또한 미국의 CCSSM(Common Core State Standards for mathematics)(NGA Center & CCSSO, 2010)의 수학적 실천 기준(standards for mathematical practice)과 수학적 내용 기준(standards for mathematical content)에 모델링 관련 내용이 포함되고, PISA(Programme for International Student Assessment) 2012에서 수학적 모델링에서 파생된 수학적 소양(Mathematical literacy)의 세 가지 과정(formulating, employing, interpreting)이 평가틀에 제시되면서(OECD, 2013), 수학적 모델링에 대한 국제적 관심이 지속되고 있다.

국내에서도 1990년대부터 본격적으로 연구가 이루어져왔으며(황혜정, 2007), 2015 개정 수학과 교육과정에서 수학적 모델링이 언급되면서, 수학적 모델링에 대한 관심이 높아지고 있다. 수학적 모델링의 학교 현장 적용의 필요성은 다양한 측면에서 논의되어 왔다. 구체적으로는 반성적 사고, 추론 등과 같은 수학적 사고를 할 수 있다는 점(김선희, 김기연, 2004; 손홍찬, 2006; Fey et al. 2014)과 타 교과 소재로 인한 수학의 유용성과 가치를 인식시키고 흥미를 유발할 수 있다는 점(고창수, 오영열, 2015; 서지희, 윤종국, 이광호, 2013; 이지영, 김민경, 2016;) 등이다.

이러한 선행 연구를 보았을 때, 수학적 모델링을 문제해결능력 신장 방안으로만 보기에는 수학적 모델링의 교육적 가치와 현장 적용의 필요성을 충분히 설명하지 못하고 있다. 또한 정승요, 박만구(2016)는 정보 처리, 태도 및 실천, 창의·융합 등과 연계한 적용 방안에 대한 연구의 필요성을 언급한 바 있고, Swan, Turner, Yoon & Muller(2007)는 수학적 모델링은 수학적 역량 중 하나이면서 다른 역량의 발달을 촉진한다고 언급한 바 있다.

이에 본 연구는 수학적 모델링에 관한 선행 연구를 2015 개정 수학과 교육과정에서 제시한 문제해결, 추론, 의사소통, 창의·융합, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량의 관점에서 고찰해보고, 이를 통해 수학적 모델링의 교육적 가치와 교육 현장 적용의 필요성을 재음미해보고자 한다.

II. 수학적 모델링의 의미와 과정에서의 수학 교과 역량

본 장에서는 수학적 모델링과 수학 교과 역량에 대한 의미를 살펴보고, 수학적 모델링 의미와 과정 속에서 수학 교과 역량 요소를 확인하였다.

1. 수학적 모델링의 의미와 과정

수학적 모델링의 의미와 과정은 학자마다 다양하기 때문에, 이 절에서 이를 모두 다루는 것은 불가능하다. 따라서 수학적 모델링의 의미와 과정에 대한 관점을 유형화한 선행 연구

를 살펴보고, 그 유형에 따른 대표적인 연구에서의 수학적 모델링의 의미와 과정을 확인하였다.

1) 수학적 모델링 관점에 대한 유형화

수학적 모델링 관점은 모델링의 활용 목적, 모델링의 특징 등에 따라 다양하다. 이러한 수학적 모델링 관점을 유형화한 선행 연구 내용을 정리하면 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> 수학적 모델링 관점의 유형

연구자	Julie & Mudaly (2007)	Cirillo et al. (2016)	신은주 (2005)	박진형 (2015)	유형별 관련 연구
수학적 모델링 유형	- 내용으로서의 모델링(Modelling as a content)	- 수학적 모델링 (Mathematical modeling)	- 실세계에서 수학모델로 번역하는 과정	- 응용 관점의 모델링	CCSSM(2010), Bliss & Libertini(2016)
	- 수단으로서의 모델링(Modeling as a vehicle)	- 수학을 모델로 만들기(Modeling mathematics)	- 일반화 가능한 체계를 개발하는 과정 - 비형식적인 상황모델을 개발하는 과정	- 진정성 있는 문제해결의 관점에서의 모델링 - 현실적 수학 교육 실현을 위한 모델링	Lesh & Doerr (2003) Doorman & Gravemeijer (2009)

Julie & Mudaly(2007)는 수학적 모델링의 활용 목적에 따라, 수학적 모델링 과정 그 자체를 목적으로 하는 내용으로서의 모델링(modeling as a content)과 수학적 개념, 절차 지도를 목적으로 하는 수단으로서의 모델링(Modeling as a vehicle)으로 구분하였다. Cirillo, Pelesko, Felton-Koestler & Rubel(2016)은 수학을 모델로 만들기(Modeling mathematics)와 수학적 모델링(mathematical modeling)으로 구분하고, 그 의미의 차이를 밝히고 있다. 수학을 모델로 만들기는 수학적 개념과 아이디어를 의사소통하기 위해 수학적 표현을 사용하는 것이고, 수학적 모델링은 진정한 실세계 문제와 수학을 연결하는 것이다. 신은주(2005)는 모델링 과정에서 핵심적인 과정이 무엇인가에 따라 실세계에서 수학 모델로 번역하는 것을 핵심 과정으로 고려하는 연구, 일반화 가능한 체계 개발하는 것을 핵심 과정으로 고려하는 연구, 비형식적인 상황모델을 개발하는 것을 핵심 과정으로 고려하는 연구로 유형화하였다. 박진형(2015)은 실세계 현상에 비추어 모델을 개선하고 수정하는 것에 집중하는 수학의 응용 관점을 강조하는 모델링, 진정성 있는 문제해결로 수학적 사고의 개선을 추구하는 모델링, RME 관점에 따라 수학적 개념이나 구조의 핵심을 나타내는 모델을 model of에서 model for의 형태로 변화시키고자 하는 모델링으로 구분하였다. 이들 유형화는 용어의 차이는 있지만, <표 II-1>과 같이 연결된다. 하지만 Julie & Mudaly의 내용으로서의 모델링과 수단으로서의 모델링은 모델링 활동에서 명확하게 구분되기 보다는 정도의 차이에 따라 모두 포함될 가능성이 있기 때문에(Galbraith, 2007), 신은주와 박진형의 유형과 대응시키는 것에 무리가 있어 점선으로 구분하였다.

수학적 모델링의 유형별 관련 연구는 신은주와 박진형이 그들의 유형화에서 제시한 연구

자가 참여한 연구들 가운데 선정하였다. 그 결과, 내용으로서의 모델링에 관한 연구로는 실세계 현상에서 수학의 사용을 강조하는, 즉 응용과 수학적 모델링 과정을 강조하는 Pollak의 영향을 받은 GAIMME(Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education) 보고서의 Bliss & Libertini(2016)의 연구와 Blum, Niss의 영향을 받은 CCSSM(2010)이 선정되었고, 수단으로서의 모델링과 관련된 연구로는 진정성 있는 문제로 개념적 시스템을 강조하는 Lesh & Doerr(2003)의 연구와, RME의 관점에서 모델의 발현을 강조하는 Gravemeijer가 참여한 연구가 선정되었다.

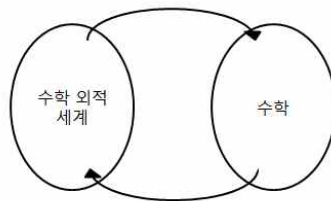
2) 수학적 모델링의 의미와 과정

수학적 모델링의 의미는 대부분 <표 II-2>와 같이 수학적 모델링의 과정을 설명하는 형태로 정의된다. 우선 CCSSM(2010)과 Bliss & Libertini(2016)는 실세계 상황을 분석하고 해석하기 위해 수학을 사용하는 과정으로 수학적 모델링을 보고 있다는 점에서 유사하다. 다음으로 Lesh & Doerr(2003)는 수학적으로 중요한 시스템을 구성하고 조작한다는 것과 개념적 도구인 모델을 만든다는 점에서 수학적 모델링 활동이 수학적 개념 형성과 관계된 것임을 설명하고 있다. 마지막으로 Doorman & Gravemeijer(2009)는 모델링 활동을 통해 모델과 상황이 함께 발달하면서, 추상적 지식이 발달되어 가는 과정으로 보고 있다.

<표 II-2> 수학적 모델링의 의미

연구자	모델링의 의미
CCSSM (NGA Center & CCSSQ, 2010, p. 72)	모델링은 경험적 상황을 분석하고, 그것들을 더 잘 이해하고, 결론을 개선하기 위한 적절한 수학과 통계를 선택하고 사용하는 과정
Bliss & Libertini (2016, p. 8)	수학적 모델링은 실세계 현상 속에서 표현, 분석, 예측을 만들기 위해 수학을 사용하고, 또는 그 반대로 통찰을 제공하는 과정
Lesh & Doerr (2003, p. 3)	수학적으로 중요한 시스템을 구성, 묘사, 설명, 조작, 예측 또는 통제를 위한 공유할 수 있고, 조작할 수 있고, 개선할 수 있고, 재사용할 수 있는 개념적 도구(모델)를 생산하는 것
Doorman & Gravemeijer (2009, p. 138)	모델링 과정은 ‘추상’으로 설명되며, 더 추상적 수학 지식을 발전시키는 장기간의 과정

수학적 모델링의 의미에서 CCSSM(2010)과 Bliss & Libertini(2016)는 수학을 사용한다는 측면이 강조되지만, Lesh & Doerr(2003)와 Doorman & Gravemeijer(2009)는 수학을 만든다는 측면이 강조됨을 알 수 있다. 하지만 이들 모두 Niss, Blum & Galbraith(2007)의 수학 외적 세계와 수학과와의 관계 도식([그림 II-1])과 같이 수학과 실세계를 연결 짓는다는 공통점이 있다.



[그림 II-1] 수학과 수학 외적 세계(Niss, Blum & Galbraith, 2007, p. 3)

각각의 연구에서는 <표 II-3>과 같이 수학적 모델링 과정을 제시하고 있다. CCSSM (2010)와 Bliss & Libertini(2016)의 수학적 모델링 과정은 매우 유사한 것을 확인할 수 있다. 이 중에서 Bliss & Libertini(2016)가 제시한 수학적 모델링 과정이 CCSSM(2010)의 모델링 과정보다 구체적이고 설명적이기 때문에, Bliss & Libertini(2016)의 수학적 모델링 과정을 상세하게 살펴보면, 다음과 같다.

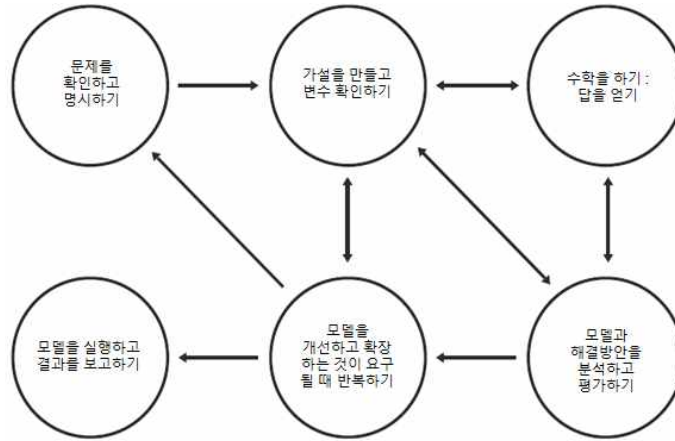
(1)단계는 문제를 확인하기(Identify the problem)로 모델러가 알고, 하고, 이해하기 원하는 실세계 안의 것을 명확하게 하는 것으로, 그 결과는 종종 실세계에서 제한을 두지 않고 혼란스러운 질문이다. (2)단계는 가설을 만들고 변수를 확인하기(Make Assumption and Identify Variable)로 모델러가 실세계 질문으로부터 중요한 ‘대상’을 선택하고 그들 사이의 관계를 명확하게 한다. 원문제의 이상화된 버전으로 기인하는 모델러는 무시할 것과 문제에 중요한 정보로 유지할 것을 결정한다. (3)단계는 수학을 하기(Do the math)로 모델러는 수학적 용어로 이상화된 버전을 해석하고 이상화된 질문의 수학적 공식을 획득한다. 이 공식이 모델이다. 모델러는 통찰과 결과를 얻기 위해 수학을 한다. (4)단계는 해결 방안을 분석하고 평가하기(Analyze and Assess the Solution)로 모델러는 모델이 문제를 설명하는가, 실세계로 되돌아 해석했을 때 이해가 되는가, 그 결과가 실질적이고, 그 답은 타당한지, 그 결과가 받아들여질 수 있는가를 고려한다. (5)단계는 반복하기(Iterate)로 모델러가 모델을 개선하거나 확장하는 것이 필요하다면 그 과정을 반복한다. (6)단계는 모델을 실행하기(Implement the model)로 실세계와 실질적 응용을 위해서 모델러는 결과를 기록하고, 해결 방안을 실행한다.(Bliss & Libertini, 2016, pp. 12-13)

<표 II-3> 수학적 모델링 과정

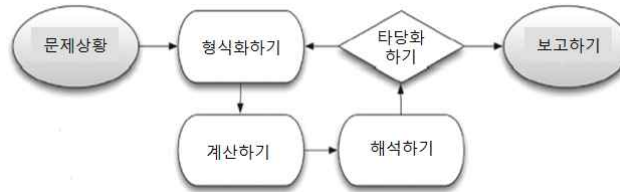
	CCSSM (NGA Center & CCSSO, 2010, p. 72)	Bliss & Libertini (2016, p. 8)	Lesh & Doerr (2003, p. 17)	Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack (2009)
모델링 과정	-문제상황	-문제를 확인하고 명시하기	-기술	-상황의 모델(model of a situation) -추론을 위한 모델(model for reasoning)
	-형식화하기	-가설을 만들고 변수를 확인하기		
	-계산하기	-수학을 하기 : 답을 얻기	-조작	
	-해석하기	-모델과 해결방안을 분석하고 평가하기 -모델을 개선하고 확장하는 것이 요구될 때 반복하기	-번역 또는 예측	
	-타당화하기		-타당화	
	-보고하기	-모델을 실행하고 결과를 보고하기		

Bliss & Libertini(2016)의 GAIMME와 CCSSM의 수학적 모델링 과정에 관한 도식([그림 II-2])에서도 알 수 있듯이, 두 연구 모두 수학적 모델링 과정을 순환적으로 보고 있다. 하지만 GAIMME의 경우, 수학적 모델링 과정에 ‘반복하기’를 포함시키고, 화살표를 이용하

여 다양한 측면에서 수학적 모델링 과정이 개선되고 수정된다는 것을 부각시키고 있다. 또한 CCSSM에서는 해석하기와 타당화하기의 과정으로 구분하여 제시된 것을 ‘모델과 해결 방안을 분석하고 평가하기’로 통합하여 제시하고 있다.



GAIMME(Bliss & Libertini, 2016, p. 13)



CCSSM(NGA Center & CCSSO, 2010, p. 72)

[그림 II-2] GAIMME(2016)와 CCSSM(2010)의 수학적 모델링 과정

다음으로 Lesh & Doerr(2003)는 4단계로 모델링 과정을 설명하는데, 실세계로부터 모델 세계로 사상을 형성하는 기술 단계, 원래의 문제 상황과 관련한 예측과 행동을 생성하기 위한 모델을 조작하는 단계, 실세계로 되돌아가서 관련된 결과에 따른 번역과 예측을 하는 단계, 행동과 예측의 유용성에 관한 타당화 단계이다. [그림 II-3]의 Lesh & Doerr의 모델링 과정 도식에서는 실세계와 수학 세계(모델) 사이에서 기술, 조작, 번역(예측), 타당화가 어떻게 순환적으로 관여하는지를 보이고 있다.

마지막으로 Gravemeijer et al.(2009)은 모델의 발현이 상황의 모델(model of a situation)에서 추론을 위한 모델(model for reasoning)로 이동하며, 이러한 발달 과정은 상황 수준(상황에 의존하는 이해와 해결하는 수준), 참조 수준(설정된 과제에서 학생의 이해에 근거한 수준), 일반화 수준(수학적 관계와 전략으로 특수한 상황에 독립하여 활동하고 추론을 가능하게 만드는 수준), 형식 수준(수학적 활동을 위한 모델에 의존하지 않는 수준)으로 이루어진다고 하였다.



[그림 II-3] Lesh & Doerr의 수학적 모델링 과정(Lesh & Doerr, 2003, p. 112)

앞에서 살펴본 수학적 모델링 과정은 실세계를 분석하여 형성된 모델이 타당화되고 형식화되면서 성장한다는 점에서 공통적이다. 하지만 CCSSM(2010), Bliss & Libertini(2016), Lesh & Doerr(2003)는 수학적 모델링 과정이 순환적임을 명시적으로 드러내고 있는 반면에, Gravemeijer et al.(2009)은 수학적 모델링 과정의 순환성을 드러내고 있지는 않다(박진형, 2015). 하지만 상황의 모델이 추론을 위한 모델로 발달하면서 수학적 모델링 과정이 반복적으로 발생할 수 있다는 것을 짐작할 수 있다.

2. 수학 교과 역량

1) 역량의 의미

역량(力量)을 나타내는 단어에는 ability, capability, competence 등이 있고, 교육학에서 역량을 논의할 때에 주로 사용되는 용어는 ‘competence(competency²⁾)’이다.

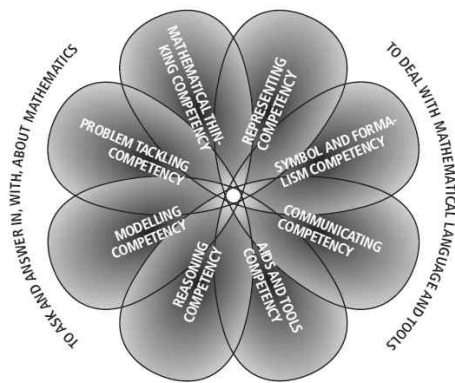
Competence의 의미는 다양하다. 옥스포드 교육 사전(Wallace, 2009)에서는 ‘competence’를 “the ability to perform to a specified standard(특정한 기준에서 실행하기 위한 능력)”이라고 설명하고 있다. 또한 Blomhøj & Jensen(2003)은 Jørgensen의 “주어진 상황의 도전에 접했을 때 행동할 수 있는 통찰적인 준비”라는 역량의 의미로부터 행동을 향하고 있는 점, 노력의 영역을 가지고 있는 점, 주관적이고 사회·문화적 사이의 내재하는 이중성을 지닌 분석적 개념이라는 점의 세 가지 특징을 Wedege의 글을 참고하여 설명하고 있다. 마지막으로 Niss, Blum & Galbraith(2007)는 역량은 그러한 행동이 요구되고 바람직한 문제 상황에서 어떤 적절한 행동을 실행하는 개인의 능력을 의미한다고 하였다. 이러한 의미에서 역량은 ‘무언가를 행하는 것과 관련된 능력’으로 행동을 포함하는 것임을 알 수 있다.

2) 수학 교과 역량

수학 교과 역량은 수학 교과에 특정된 역량이라고 할 수 있다. Niss & Højgaard(2011)는 수학적 역량을 “특정 형태의 수학적 상황에서 적절하게 행동하기 위한 잘 알고 있는 준비성”이라고 하였다.

2) 옥스포드 온라인 영어 사전(<https://en.oxforddictionaries.com>)에서 competence와 competency는 “The ability to do something successfully or efficiently(어떤 것을 성공적이고 효과적으로 하기 위한 능력)”이라는 뜻으로 동일하게 설명되고 있다. 따라서 본 논문에서는 competence와 competency를 같은 의미로 다룬다.

한편, 수학 교과 역량을 구성하는 하위 요소를 구체적으로 밝히고자 한 연구가 있다. 우선 Niss & Højgaard(2011)는 수학적 역량을 수학 속에서, 수학과 함께, 수학에 대하여 질문하고 답하는(to ask and answer in, with, about mathematics) 능력과 수학적 언어와 도구를 다루는(to deal with mathematical language and tools) 능력으로 크게 구분하고, 각각에 4개의 하위 역량을 제시하였다. 전자의 역량에는 수학적 사고 역량(mathematical thinking competency), 문제 다루기 역량(problem tackling competency), 모델링 역량(modelling competency), 추론적 역량(reasoning competency)이 있고, 후자의 역량에는 표현하기 역량(representing competency), 기호와 형식주의 역량(symbol and formalism competency), 의사소통 역량(communicating competency), 교구와 도구 역량(aids and tools competency)이 있다. Niss & Højgaard의 수학적 역량 도식인 [그림 II-4]에서 짐작할 수 있듯이, Niss & Højgaard(2011)는 각각의 역량이 서로 분리된 것이 아니라, 서로 관련되어 있다고 보고 있다.



[그림 II-4] Niss & Højgaard의 수학적 역량(Niss & Højgaard, 2011, p. 51)

또한 김해윤(2014)은 선행 연구와 설문 조사를 바탕으로 수학적 내용과 수학적 과정에 따른 수학과 핵심역량의 구성 요소를 정리하였다. 수학적 내용의 요소에는 수와 연산, 함수, 기하, 측정, 통계와 확률, 의사결정과 최적화가 있고, 수학적 과정에는 표현, 문제해결, 추론, 의사소통, 모델링, ICT 활용, 연결 등이 있다.

마지막으로 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015a)은 문제 해결, 추론, 의사소통, 창의·융합, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지를 수학 교과 역량으로 제시하고, 각각의 의미를 밝히고 있다. 또한, 박경미 외(2015)는 2015 개정 수학과 교육과정 개발에 바탕이 된 ‘2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 II’에서 이들 수학 교과 역량의 하위 요소의 의미와 기능을 상세하게 제시하고 있다.

김해윤, 박경미 외, Niss & Højgaard가 설명한 수학 교과 역량의 구성 요소는 일치하는 부분이 상당히 많이 존재하면서도 차이점이 있다. 김해윤(2014)의 경우에는 수학적 내용을 포함하고 있다는 점이 특징적이고, 박경미 외(2015)는 태도 및 실천이라는 정의적 측면을 포함하고 있다는 점에서 차이를 보인다. 또한 김해윤과 Niss & Højgaard(2011)의 수학적 역량에서는 수학적 모델링을 하나의 구성 요소로 구분지어 제시하고 있어, 수학적 모델링을 문제 해결 역량의 하위 요소로 취급한 박경미 외(2015)와는 차이점을 보인다.

서론에서 언급한 바와 같이 본 연구에서는 수학적 모델링의 현장 적용의 필요성을 수학

교과 역량과 연결 지어 찾아보고자 한 것이므로, 새롭게 적용되기 시작한 2015 개정 수학과 교육과정의 수학 교과 역량 관점에서 수학적 모델링에 관한 선행 연구를 살펴보고자 한다. 2015 개정 수학과 교육과정에서의 수학 교과 역량의 의미와 하위 요소는 <표 II-4>와 같다.

<표 II-4> 수학 교과 역량 의미와 하위 요소(박경미 외, 2015, pp. 39-43)

수학 교과 역량	의미	하위 요소
문제해결	해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력	문제 이해 및 전략 탐색, 계획 실행 및 반성, 협력적 문제해결, 수학적 모델링, 문제 만들기
추론	수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력	관찰과 추측, 논리적 절차 수행, 수학적 사실 분석, 정당화, 추론 과정의 반성
의사소통	수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제해결과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력	수학적 표현의 이해, 수학적 표현의 개발 및 변환, 자신의 생각 표현, 타인의 생각 이해
창의·융합	수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 수학과 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 연결·융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력	독창성, 유창성, 융통성, 정교성, 수학 내적 연결, 수학 외적 연결 및 융합
정보처리	다양한 자료와 정보를 수집·정리·분석·활용하고 적절한 공학적 도구와 교구를 선택·이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력	자료와 정보 수집, 자료와 정보 정리 및 분석, 정보 해석 및 활용, 공학적 도구 및 교구 활용
태도 및 실천	수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민의식을 갖추어 실천하는 능력	가치 인식, 자주적 학습 태도, 시민 의식

3. 수학적 모델링의 의미와 과정에서 본 수학 교과 역량

수학적 모델링은 실세계 상황에서 수학적 모델을 이끌어 내고 그것의 타당성과 일반화를 추구하는 과정이다. 이러한 수학적 모델링의 의미와 과정 속에는 어떠한 수학 교과 역량이 내재하고 있는지를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 문제해결 역량과 관련하여, 수학적 모델링은 실생활 상황이 문제의 형태로 제시되며 그 안에서 타당한 수학적 모델을 이끌어 낸다는 의미에서 문제해결과 관련이 깊다. 예를 들어 CCSSM(2010)의 문제 상황, 형식화하기, 계산하기, 해석하기, 타당화하기, 보고하기 등의 수학적 모델링 과정은 문제이해-문제 상황, 계획-형식화하기, 실행-계산하기, 반성-해석하기와 타당화하기 등과 같이 Polya의 문제해결과정과 연결 지을 수 있다.

둘째, 추론 역량과 관련하여, CCSSM(2010), Bliss & Libertini(2016), Lesh & Doerr(2003)의 수학적 모델링 과정에는 상황의 확인, 기술, 가설 설정, 타당화 등의 과정이 포함된다. 이

러한 수학적 모델링 과정 속에서 추론의 하위 요소인 관찰과 추측, 수학적 사실 분석, 정당화, 추론 과정의 반성 등이 나타날 수 있다.

셋째, 의사소통 역량과 관련하여, 수학적 모델링은 실세계 상황을 수학적으로 표현한다는 의미에서 수학적 의사소통과 관련이 깊다. 특히 Gravemeijer et al.(2009)이 모델링 과정을 상황의 모델에서 추론을 위한 모델로 발달하는 과정으로 설명하는 것은 수학적 표현의 개발과 변환에 해당하는 의사소통 역량의 하위 요소를 잘 드러낸다.

넷째, 창의·융합 역량과 관련하여, 수학적 모델링의 의미 자체가 실세계 상황과 수학을 연결 짓고 있다는 점에서 수학 외적 연결의 의미를 내포하고 있다.

다섯째, 정보 처리 역량과 관련하여, CCSSM(2010)의 ‘적절한 수학과 통계를 선택하고 사용하는 과정’이라는 수학적 모델링에 대한 설명에서 정보 처리 역량의 하위 요소인 정보 해석 및 정보 활용의 측면을 확인할 수 있다. 또한 실세계 현상을 분석, 조작, 예측하는 등의 과정은 정보 처리 역량과 무관하지 않을 것이다.

마지막으로, 태도 및 실천과 관련하여, 실세계 상황에 적절한 수학을 찾아 활용할 수 있다는 응용적 관점에서의 수학적 모델링의 의미는 학생들로 하여금 수학에 대한 실용적 가치를 인식할 수 있도록 한다. 또한 타당성을 검토하여 문제해결방안을 찾는 수학적 모델링 과정은 합리적인 의사결정이 요구되는 시민 의식과 관련된다.

수학적 모델링의 의미와 과정에서 문제해결, 추론, 의사소통, 창의·융합, 정보 처리, 태도 및 실천의 수학 교과 역량을 모두 확인할 수 있었으나, 그 내용이 대략적이기 때문에 상세한 탐색이 필요하다. 따라서 다음 장에서는 선행 연구의 구체적인 결과를 바탕으로 각각의 수학 교과 역량을 확인하고자 한다.

Ⅲ. 수학 교과 역량 관점에서의 수학적 모델링에 관한 선행 연구 탐색

1. 탐색 방법

본 장에서는 수학 교과 역량의 관점에서 수학적 모델링에 관한 선행 연구를 탐색하고자, 우선 수학 교과 역량과 관련된 제목이 포함된 수학적 모델링 또는 모델링에 관한 선행 연구를 선정하고 그 내용을 확인하였다. 다음으로 수학적 모델링에 관한 다양한 선행 연구를 조사하면서 수학적 모델링 활동의 설계와 실행 과정에서 수학 교과 역량이나 수학 교과 역량 하위 요소와 관련된 내용을 언급한 선행 연구를 추출하였다.

이렇게 선정된 선행 연구는 ‘2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 II(박경미 외, 2015)’에 제시된 수학 교육 역량별 의미와 하위 요소를 중심으로 탐색하였고, 그 결과는 수학 교과 역량별로 정리하였다.

2. 탐색 결과

1) 문제해결

수학적 모델링에서의 문제해결 역량을 확인하고자, 문제해결의 하위 요소인 문제 이해 및

전략 탐색, 계획 실행 및 반성, 협력적 문제해결, 수학적 모델링, 문제 만들기 중에서 수학적 모델링을 제외한 4가지의 하위 요소에 대한 수학적 모델링 선행 연구를 탐색하였다.

우선, 문제 이해 및 전략 탐색, 계획 실행 및 반성은 Polya의 문제해결과정인 문제이해, 계획, 실행, 반성과 유사하다. 따라서 수학적 모델링과 Polya의 문제해결과정과의 관련성을 살펴보면, 수학적 모델링은 실세계 문제를 다루고 결과에 대한 타당성을 검토하는 순환성이 있다는 점에서 Polya로 대표되는 전통적 문제해결과는 차이가 있다(김인경, 2012; 오영열, 2013; Pollak, 2012). 하지만 수학적 모델링 과정은 문제해결과정과 나란히 할 수도 있다(김인경, 2012; 황혜정, 2007; Blum & Ferri, 2009, 2016). 앞 장에서 언급한 바와 같이, CCSSM(2010)의 수학적 모델링 과정은 Polya의 문제해결과정과 연결 가능하므로, 수학적 모델링은 문제 이해 및 전략 탐색, 계획 실행 및 반성에 관한 문제해결역량의 하위 요소를 포함하고 있음을 알 수 있다.

다음으로 나머지 두 가지 하위 요소인 협력적 문제해결과 문제 만들기에 관한 선행 연구를 정리하면 <표 III-1>과 같다. 수학적 모델링 과정은 문제를 확인한 후, 수학적 모델을 만들고 그 타당성을 검토하는 과정에서 소집단 또는 전체 학급에서 교사-학생, 학생-학생 사이의 논의가 발생하게 되어 협력적 문제해결이 가능하다. 또한 English, Fox & Watters(2005)의 연구에서처럼 학생들은 수학적 모델링 과제를 해결하는 동안에 다양한 문제를 제기하거나 의문을 가지게 되며, Borba, villarreal & Soares(2016)와 같이 학생 스스로 관심 있는 주제에 대한 모델링 문제를 제기하고 해결하도록 지도하는 것도 가능하다.

<표 III-1> 수학적 모델링에서의 문제해결 역량 요소

하위 요소	의미 (박경미 외, 2015 pp.39-40)	연구자	역량 하위 요소와 관련된 연구 내용
협력적 문제해결	균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통한 집단적으로 문제해결을 수행하는 능력	김민경 (2010)	수학적 모델링 교수·학습 활동은 준비활동, 모델 유도 활동, 모델탐색활동, 모델적용 등으로 구성되며, 이때 소그룹활동, 학급전체토의 등의 방법을 활용할 수 있음.
		정인수 (2011)	초등학교 5학년을 대상으로 사칙연산이 활용되는 과제를 통한 수학적 모델링 학습에서 소집단 활동과 학급 전체 논의를 통하여 협동적 문제해결이 가능하도록 함.
		Bliss & Libertini (2016)	수학적 모델링 과정을 상세하게 설명하면서 가정을 세우고 변수를 정하는 과정으로 팀 구성원 사이의 논의가 활발해지면서 해결 방안을 찾는 것을 예로 제시함.
문제 만들기	주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하는 능력	English, Fox, & Watters (2005)	4학년(9살) 아동을 대상으로 사이클론(열대성 폭풍)에 관한 정보(경로, 세기)를 사용하여, 리조트의 가장 적합한 위치를 결정하는 문제를 제시함. 수학적 모델링 문제 해결과정에서 학생들은 문제의 풍부한 맥락으로 인해 다양한 문제와 질문을 만들게 됨.
		Borba, villarreal & Soares(2016)	중학생(12-13세)을 대상으로 수학적 모델링 과정을 학습한 후, 자신에게 흥미 있는 주제를 선정하고, 수학 수업과 관련된 문제를 제기하여 해결하도록 함.

2) 추론

수학적 추론은 추측하고, 일반화하고, 왜 그런지 조사하고, 논증을 개발하고 평가하는 점진적으로 발달하는 과정(NCTM, 2011)으로, 박경미 외(2015)는 추론 역량의 하위 요소로 관찰과 추측, 논리적 절차 수행, 수학적 사실 분석, 정당화, 추론 과정의 반성을 제시하고 있다.

수학적 모델링에 관한 선행 연구에서 추론과 연결 지어 설명하는 경우(김선희, 김기연, 2004; 박진형, 2015; Doerr & English, 2003, Kehle & Lester, 2013)는 다수 확인할 수 있었다. 하지만 이러한 연구는 추론 역량의 특정 하위 요소와 연결 짓기보다는 포괄적 의미의 추론에 관한 것이거나, 연역, 귀납, 가추 등의 추론 유형과 연결 지어 설명하는 경우가 대부분이었다. 다음 <표 III-2>는 추론의 하위 요소별로 관련된 수학적 모델링에 대한 선행 연구를 정리한 것으로, 수학적 모델링이 다양한 추론 역량 요소와 관련되고 있음을 확인할 수 있다.

<표 III-2> 수학적 모델링에서의 추론 역량 요소

하위 요소	의미 (박경미 외, 2015, p. 40)	연구자	역량 하위 요소와 관련된 연구 내용
관찰과 추측	관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등 개연적 추론을 사용하여 수학적 사실을 추측하는 능력	김선희, 김기연 (2004)	중학교 1학년을 대상으로 비와 비율과 관련된 big foot 문제 ³⁾ 를 제시하고, 그 과정에서 학생들에게 나타나는 연역, 귀납, 가추의 추론 유형과 그 역할에 대해 분석함.
논리적 절차 수행	수학적 절차와 수학적 사실 도출 과정을 논리적으로 수행하는 능력	김수미 (1993)	중학교 3학년을 대상으로 한 정원사의 보너스 정책에 따른 수입에 관한 모델링 문제를 통해 방정식과 함수 그래프를 통한 문제해결과정을 제시함.
수학적 사실 분석	수학적 개념, 원리, 법칙을 분석하는 능력	Usiskin (2007)	실세계에서 발견된 상황에서 사칙 연산의 산술 연산의 모델 형성에 관한 논의를 통해 상황을 통한 연산 이해의 필요성을 설명함.
정당화	수학적 사실이 참임을 보이기 위해 증거를 제시하고 이유를 설명하는 능력	손홍찬 (2006)	고등학교 1학년을 대상으로 스포레트시트를 활용하는 5가지의 수학적 모델링 탐구 문제를 제시하고, 그 과정에서 수학적 발견과 정당화를 분석함.
		이지영 (2013)	초등학교 5학년을 대상으로 수와 연산 영역에 관한 수학적 모델링 수업을 실시하면서 정당화 수준을 확인함.
추론 과정의 반성	자신의 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 되돌아보는 능력	신은주 (2005)	중학교 2학년 3명을 대상으로 실세계 맥락을 통한 함수 그래프 작성 및 해석과 관련된 모델링 과제를 제시하고, 그 과정에서 모델을 모니터링하고 평가하는 메타인지적 사고 과정을 확인함.

3) Big foot문제는 Lesh & Doerr(2003, p. 6)가 제안한 수학적 모델링 문제로 주어진 발자국을 보고, 발자국 주인의 키를 추측할 수 있는 도구(모델)를 만드는 문제이다.

3) 의사소통

수학적 모델링은 그 과정에서 수학적 모델이 발현되고, 협력적 문제해결이 이루어진다는 점에서 의사소통 영역과 밀접하게 관련된다. 이와 관련된 구체적 논의는 의사소통 역량의 하위 요소를 크게 수학적 표현과 관련된 것과 다른 사람과 생각을 주고받는 것과 관련된 것으로 구분하여 탐색하였다. 그 이유는 수학적 표현에서의 이해-개발-변환의 과정과 다른 사람과의 생각을 주고받는 과정에서의 자신의 생각 표현과 타인의 생각 이해는 분리되어 발생하기 보다는 연속적으로 발생하기 때문이다.

다음 <표 III-3>의 탐색 결과에서 보이듯이, 수학적 모델링 활동에서는 다양한 의사소통 하위 역량이 발현된다. 그러므로 수학적 모델링 활동에서 이러한 의사소통이 잘 일어나기 위해서는 담화 지향적 수업이 강조된다(김민경, 2010; Blomhøj & Jensen, 2003; Zbiek & Conner, 2006).

<표 III-3> 수학적 모델링에서의 의사소통 역량 요소

하위 요소	의미 (박경미 외, 2015, p. 42)	연구자	역량 하위 요소와 관련된 연구 내용
수학적 표현 (이해, 개발, 변환)	수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력 / 자신의 아이디어를 나타내는 표현을 만들고 수학적 표현들끼리 변환하는 능력	Arzarello, Pezzi & Robutti (2007)	학생 경험과 관련한 함수 상황이 언어, 그래프, 대수 표현으로 변형되는 모델링 과정에서 의미 있는 내면화가 가능해짐을 설명함.
		박진형 (2015)	영재 교육에 참여하는 중학교 2학년을 대상으로 미적분 관련 탐구 과제를 제시하고, ‘모델 변이’의 교수·학습 원리에 따라 모델을 점진적으로 수정, 개선하도록 하면서, 그 과정을 확인함.
자신의 생각 표현, 타인의 생각 이해	수학 학습 활동 과정과 결과를 다른 사람에게 표현하는 능력 / 다른 사람의 생각을 이해하고 평가하는 능력	English & Watters (2004)	초등학교 3학년을 대상으로 흰 강낭콩 성장 문제와 종이비행기 문제를 제시하여, 그룹 활동에서의 의사소통을 확인하면서 아이디어가 발달하는 과정을 설명함.
		이지영, 김민경 (2016)	초등학교 5학년을 대상으로 실시한 수와 연산 관련 수학적 모델링 활동에서 학생들이 말하기, 듣기, 읽기, 쓰기에 해당하는 의사소통 양상에 변화가 생김을 확인함.

4) 창의 · 융합

박경미 외(2015)는 창의 · 융합의 하위요소로 창의 측면에서 독창성, 유창성, 융통성, 정교성을 제시하고 있고, 융합 측면에서 수학 내적 연결성과 수학 외적 연결 및 융합을 제시하고 있다. 창의성의 구성 요소에는 독창성, 유창성, 융통성, 정교성 등이 있기 때문에(박만구, 2009), ‘창의’와 관련된 수학적 모델링 선행 연구는 통합하여 분석하고, 수학 내적 연결과 수학 외적 연결 및 융합을 구분하여 탐색하였다.

그 결과, 수학적 모델링이 창의 · 융합과 관련되어 있음을 <표 III-4>와 같이 확인할 수 있었다. 수학적 모델링은 실생활 상황을 다루고 다양한 답이 열려 있다는 점에서 간학문적, 응용적 특징(Borba & Villarreal, 2005; Maiorca & Stohlmann, 2016)과 창의적 특징(Bliss & Libertini, 2016)을 지니고 있다.

<표 III-4> 수학적 모델링에서의 창의·융합 역량 요소

하위 요소	의미 (박경미 외, 2015, p. 41)	연구자	역량 하위 요소와 관련된 연구 내용
창의 (독창성, 유창성, 융통성, 정교성)	문제 상황에서 새로운 아이디어, 해결전략, 해결 방법을 찾아내거나 새로운 관점에서 문제를 제기하는 능력(독창성) / 문제 상황에서 많은 아이디어나 해결 방법, 해답을 산출하는 능력(유창성) / 고정된 사고방식에서 벗어나 다양한 관점에서 해결 방법이나 전략, 아이디어를 찾아내거나 문제를 제기하는 능력(융통성) / 기존의 수학적 아이디어를 찾아내거나 문제를 제기하는 능력(정교성)	강옥기 (2010)	수학적 모델링을 단순화와 정교화 과정의 순환으로 본 Dossey 외(2002)를 변형하여 수학적 모델링의 정교화 모델을 제시함.
		박슬희, 신재홍, 이수진(2014)	중학교 1학년을 대상으로 강옥기의 수학적 정교화 모델을 적용하여 수학적 모델링 과정을 확인하여 수학적 모델을 수정하고 정교화하는 것을 확인함.
		Wessels (2014)	예비 교사를 대상으로 실시한 모델링 활동에서 창의성 요소인 유창성, 융통성, 독창성, 유용성을 확인함.
		박진형 (2017)	대학부설 영재교육원 프로그램에 참여하는 중학교 2학년 학생을 대상으로 커피용액의 온도 변화를 함수로 표현하는 과제를 제시하였고, 다양한 수학적 표현을 생성, 검토, 변환하는 과정에서 유창성, 독창성, 유연성, 정교성 등을 확인함.
수학 내적 연결	여러 수학적 지식, 기능, 경험 등을 연결하여 새로운 수학적 지식, 기능, 경험 등을 생성하고 수학 문제를 해결하는 능력	강향임 (2013)	역사적 개념 발생 맥락에 따른 발생적 모델링을 제시하고, 고등학교 2학년을 대상으로 기존 개념을 적용하여 새로운 개념이 구성되는 과정을 분석함.
수학 외적 연결 및 융합	수학과 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험 등을 연결·융합하여 새로운 지식, 기능, 경험 등을 생성하고 문제를 해결하는 능력	주미경 (1991)	타 교과(특히 과학)와 연계된 수학교육과 수학의 응용 교육의 필요성을 제안하면서, 수학적 모델링을 통해 수학의 응용과 지식 획득이 가능함을 언급함.
		김수미 (1993)	수학적 모델링은 실생활과 연관시킬 뿐만 아니라, 수학을 학습하는 것과 타 교과에 수학을 사용하는 것 사이의 차이를 줄이고 서로 연관시키는 기술이라고 함.
		Mathews (2004)	예비 교사를 대상으로 1차 세계 대전을 배경으로 상선의 후송에 관한 모델링 과제를 제시함. 이는 사회과학과의 연결성을 드러낸 활동임.
		Kertil & Gurel (2016)	과학과 수학 전공 학생들을 대상으로 수학적 모델링 학습과 프로젝트 학습을 적용한 통합적 STEM 교육을 실시한 결과, 교육과정을 유지하면서 쉽게 변형할 수 있는 것은 수학적 모델링 학습을 적용한 경우임을 제시함.
		Stohlmann, Moore & Cramer(2012)	big foot 문제를 예비 초등 교사에게 제시하여, 이 과정에서 나타난 활동 내용과 수학적 표현을 STEM과 연결 지음.

5) 정보 처리

박경미 외(2015)는 정보 처리 역량의 하위 요소로 자료와 정보의 수집, 자료와 정보 정리 및 분석, 정보의 해석 및 활용, 공학적 도구 및 교구 활용을 제시하였다. 자료와 정보의 수집, 자료와 정보 정리 및 분석, 정보의 해석 및 활용은 2015 개정 수학과 교육과정에서 ‘자료와 가능성’ 내용 영역 중 ‘자료’에 해당하는 ‘자료의 수집, 분류, 정리, 해석’과 관련된다. 따라서 이를 통합하여 정리하였고, 공학적 도구 및 교구 활용은 별도로 탐색하였다. 그 내용은 <표 III-5>와 같다.

수학적 모델링 활동에 참여한 학생들은 주어진 정보뿐만 아니라 주어지지 않은 정보를 수집하고, 이를 GeoGebra, 스프레드시트 등의 공학적 도구와 교구로 정리, 분석하여 수학적 모델을 만들거나, 또는 발현된 수학적 모델을 공학적 도구와 교구로 실험하는 등의 정보 처리 역량과 관련된 다양한 경험을 할 수 있게 된다. 이는 수학적 모델링 발달이 컴퓨터 기술, 정보의 다양화와 관련이 깊다는 Borba & Villarreal(2005), Lesh & Doerr(2003)의 논의와 일치하는 부분이다.

<표 III-5> 수학적 모델링에서의 정보 처리 역량 요소

하위 요소	의미 (박경미 외, 2015, p42)	연구자	역량 하위 요소와 관련된 연구 내용
자료와 정보 수집, 자료와 정보 정리 및 분석, 정보 해석 및 활용	실생활 및 수학적 문제 상황에서 적절한 자료와 정보를 탐색 및 생성하여 수집하는 능력/ 수집한 자료와 정보를 목적에 맞게 분류, 정리, 분석, 평가하는 능력/ 분석한 정보에 내재된 의미를 올바르게 파악하여 해석, 종합, 활용하는 능력	Doerr & English (2003)	오스트레일리아의 10-11세 학생을 대상으로, 식당과 여행 장소 선택 등 주어진 자료를 분석하여 선택을 정하는 모델링 문제를 제시한 후, 이를 해결하는 학생 활동을 통해 자료를 바탕으로 새로운 양을 만들거나 조작하는 학생 활동을 관찰함.
		Weber, Fortune, Williams & Whitehead (2016)	MyMaps 앱을 활용하여 최적화된 시간과 비용으로 물건을 수송하는 수학적 모델링 문제를 제시함. 이 과정에서 학생들은 정보를 조직화하고 분석하여 과제를 해결함.
공학적 도구 및 교구 활용	분석한 정보에 내재된 의미를 올바르게 파악하여 해석, 종합, 활용하는 능력 / 수학적 아이디어와 개념을 탐구하고 문제를 해결하는 데 적합한 공학적 도구 및 교구를 선택하고 이용하는 능력	손홍찬 (2006)	고등학교 1학년을 대상으로 스프레드시트를 활용하여 수학적 모델링 문제를 해결하도록 하도록 함. 이때 스프레드시트가 문제해결, 개념의 획득과 확장, 수학적 발견 등에 영향을 미치고 있음을 보임.
		강향임 (2013)	고등학교 2학년을 대상으로 GeoGebra를 이용하여 발생적 모델링 과제를 수행하도록 함.
		Borba, villarreal & Soares(2016)	학생(12-13세)이 생성한 문제인 빙하의 변화를 수학적 으로 표현하고 이를 통해 앞으로의 변화를 예측하도록 하는 수학적 모델링 활동에서 GeoGebra를 이용함.
		Wickstrom, Carr & Lackey(2017)	Yellowstone 국립공원의 크기를 측정하는 모델링 과제를 해결하기 위하여, 모델링 도구(점토), 그래프용 지, 타일, 줄 등을 선택하여 활용함.

6) 태도 및 실천

태도 및 실천 역량의 하위요소에는 가치 인식, 자주적 학습 태도, 시민의식이 포함되는데 (박경미 외, 2015), 이는 태도 및 실천 역량이 수학에 대한 관심과 흥미, 수학에 대한 가치 인식과 학습 태도, 시민의식의 성장 등과 관련된 역량임을 의미한다. 이와 관련한 수학적 모델링 선행 연구를 정리하면 <표 III-6>과 같다.

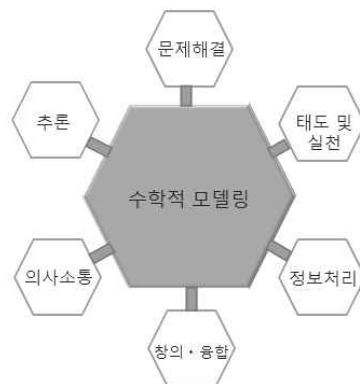
<표 III-6> 수학적 모델링에서의 태도 및 실천 역량 요소

하위 요소	의미 (박경미 외, 2015, p. 43)	연구자	역량 하위 요소와 관련된 연구 내용
가치 인식	수학에 대해 관심과 흥미를 갖고, 수학의 실용적, 도야적, 심미적, 문화적 가치를 인식하는 것	Pollak (1969)	학생들은 모델 생성 활동에 참여함으로써 수학에 대한 진정한 응용을 가져오도록 함.
		Zbiek & Conner (2006)	예비 교사를 대상으로 한 수학적 모델링 활동을 도식화하고, 수학적 모델링이 수학을 학습할 수 있는 동기를 제공함을 설명함.
		안중수 (2012)	고등학교 1학년을 대상으로 한 실험연구에서 수학적 모델링 수업을 적용한 수업 후에 학생들의 수학 학습에 대한 흥미와 동기가 향상되고, 수학 불안 해소와 자신감을 갖는 데 긍정적이었음을 확인함.
		고창수, 오영열(2015)	초등학교 5학년을 대상으로 한 실험 연구에서 수학적 모델링을 적용한 실험 집단이 수학적 자신감, 호기심, 수학적 가치에 대한 수학적 성향이 향상되었음을 확인함.
자주적 학습 태도	수학 학습 의지와 자신감, 끈기를 갖고 자신 스스로 목표를 설정하여 자율적으로 학습을 수행하여 학습 결과를 평가하는 태도	Blum & Ferri (2009)	DISUM에서 개발된 수학적 모델링 과제 해결 계획은 학생들이 계획을 독립적으로 사용하는 것을 배우고 적절하게 사용하는 것을 돕기 위한 것이라고 언급함. 이를 통해 수학적 모델링이 학생 스스로 행하는 자주적인 활동인 것을 의미함을 알 수 있음.
		Tran & Dougherty(2014)	진정성 있는 수학적 모델링 과제는 학생들에게 적극적인 자세로 활동에 참여할 수 있도록 함.
시민 의식	수학적 활동을 통하여 정직하고 공정하며 책임감 있게 행동하고 어려움을 극복하기 위해 도전하는 용기 있는 태도, 타인을 배려하고 존중하며 협력하는 태도, 논리적 근거를 토대로 의견을 제시하고 합리적으로 의사 결정하는 태도를 갖고 이를 실천하는 능력	Yansik & Meise (2014)	단열재에 관한 수학적 모델링 활동을 통해 에너지 비용을 줄이는 방법을 찾는 의사결정 활동에 수학을 활용할 수 있는 기회를 제공하고, 이는 환경오염과 관련된 문제를 제기하기도 함.
		Cirillo, Bartell, Wager (2016)	사회적 정의를 위한 수학 교육과 관련하여 패스트푸드점에서의 음료 가격 정책에 관한 모델링 문제 제시를 통해 실세계 상황 문제에서 비판적 토론에 참여하는 학생의 모습을 확인할 수 있었음.

수학적 모델링은 학생 주변의 실세계 문제 상황을 다루기 때문에, 학생에게 동기 유발과 호기심 등을 유발할 수 있고, 적극적인 참여도 가능하게 한다. 또한 실세계 상황에서의 문제해결활동은 학생이 경험했거나, 경험하게 될 상황에 대한 비판적 검토를 가능하게 하여 의사결정을 연습할 수 있는 기회를 준다.

IV. 요약 및 시사점

본 연구에서는 수학적 모델링이 2015 개정 수학과 교육과정에서 요구하는 수학 교과 역량 요소와 관련되는가를 수학적 모델링의 의미와 과정 및 선행 연구를 통해 탐색해보았다. 그 결과, [그림 IV-1]과 같이 수학적 모델링은 문제해결, 추론, 의사소통, 창의·융합, 태도 및 실천, 정보처리와 연결되는 교수·학습 방법임을 확인할 수 있었다. 이는 수학적 모델링이 문제해결역량에 하위 요소이기는 하지만, 다른 역량과 관계되고 있음을 의미하며, Niss & Højgaard(2011)의 수학 역량 도식([그림 II-4])에서 역량 사이의 교집합 부분이 존재하는 것과 일치한다.



[그림 IV-1] 수학적 모델링과 수학 교과 역량의 관계

지금까지 탐색한 결과를 통해, 수학적 모델링 적용과 관련하여 몇 가지 시사점을 제시하고자 한다.

첫째는, 수학적 모델링을 문제해결역량의 하위 요소로 두는 것에 대한 논의가 필요하다는 것이다. Artigue & Blomhøj(2013)는 수학적 모델링이 다른 역량과 연결되지만 그것 자체도 하나의 역량을 구성한다고 하였고, 김해운(2014)과 Niss & Højgaard(2011)는 수학 역량 중에 수학적 모델링을 별도로 구분하고 있다. 반면에, 김인경(2012)은 수학적 모델링과 문제해결을 비교한 연구에서 문제해결과 수학적 모델링을 지나치게 구분하려는 태도에 문제점을 제기하기도 하였다. 따라서 수학 교과 역량에서 수학적 모델링의 위치에 대한 깊은 논의가 필요하다.

둘째는, 수학적 모델링의 학교 현장 적용의 활성화 방안이다. 본 연구에서 살펴보았듯이 수학적 모델링은 여러 수학 교과 역량과 연결 지을 수 있기 때문에 현장 적용의 가치가 있

다. 따라서 구체적인 현장 적용 방안에 대한 고민이 필요하다.

Freudenthal(2008)은 특정 교수·학습 방법이 변화하기 위해서는 많은 시간이 요구되고 교육 개발자, 교사, 예비교사, 교과서 저자 등의 변화가 필요하다고 하였다. 그러므로 수학적 모델링이 학교 현장에 적용되기 위해서는 다양한 노력이 필요할 것이다. 우선 교육 개발자의 입장에서, 수학적 모델링은 2015 개정 수학과 교육과정에서 교수·학습으로 언급되고 있기 때문에 교육과정 개발자들에 의해 변화가 시도된 것으로 보인다. 따라서 교육 개발자들은 현장 적용에 적합한 수학적 모델링 활동을 제안하기 위해 다양한 개발 연구를 진행해야 할 것이다. 다음으로 교사 및 예비교사의 측면에서, 수학적 모델링이 적용되기 위해서는 교사의 경험과 지식이 필요하지만(Bleiler-Baxter, Barlow & Stephens, 2016; Blum & Ferri, 2009; Pollak, 1968), 교사들의 수학적 모델링에 관한 인식은 부족하다(김민경, 민선희, 강선미, 2009). 그렇기 때문에 수학적 모델링을 현장에 적용시키기 위해서는 예비교사와 교사 교육이 필요하다(오영열, 2013; 정승요, 박만구, 2016; English, Fox & James, 2005, Fey et al, 2014), 교사 스스로도 수업 시간에 수학적 모델링 과제를 적극적으로 활용해야 한다. 마지막으로 교과서 저자의 측면에서 수학적 모델링 문제를 교과서에 제시하는 것이 필요하다. 2015 개정 수학과 교육과정이 역량 중심으로 구성됨에 따라, 수학 교과서에서는 ‘탐구 수학, 놀이 수학’ 등에서 활동에 관련된 수학 교과 역량을 밝히고 있고, 교사용 지도서에서도 각 차시마다 지도 가능한 수학 교과 역량을 제시하고 있다(교육부, 2015c). 그러므로 다양한 수학 교과 역량과 관련된 수학적 모델링 과제를 교과서에서 다루는 것은 타당해 보인다. 앞으로 수학적 모델링 활성화 방안에 대한 지속적인 논의가 필요하며, 이를 실현할 수 있는 다양한 시도가 요구된다.

참고 문헌

- 강옥기 (2010). 수학적 모델링의 정교화 과정 연구. **수학교육학 연구**, 20(1), 73-84.
- 강향임 (2013). **발생적 모델링을 활용한 미적분 개념의 구성**. 박사학위 논문. 한국교원대학교: 청주.
- 고창수, 오영열 (2015). 수학적 모델링 활동이 수학적 문제해결력 및 수학적 성향에 미치는 영향. **한국초등수학교육학회지**, 19(3), 347-370.
- 교육부 (2015a). **2015 개정 수학과 교육과정**. 교육부.
- 교육부 (2015b). **제2차 수학교육 종합 계획**. 교육부 융합교육지원팀(<http://www.moe.go.kr/web/106888/ko/board/view.do?bbsId=339&boardSeq=58707>.)
- 교육부 (2015c). **수학 1-1 교사용 지도서**. 서울: 천재교육.
- 김민경 (2010). **수학적 모델링-초등수학 중심으로**. 서울:교우사
- 김민경, 민선희, 강선미 (2009). 초등교사들의 수학적 모델링에 대한 인식 조사 연구. **한국학 교수학회논문집**, 12(4), 411-431.
- 김선희, 김기연 (2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. **학교수학**, 6(3), 283-199.
- 김수미 (2009). **중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰**. 석사학위 논문. 서울대학교: 서울

- 김인경 (2012). 수학적 모델링과 수학적 화 및 문제해결 비교 분석. **한국수학사학회지**, 25(2), 71-95.
- 김해운 (2014). **수학과 핵심역량에 관한 연구-중학교 수학을 중심으로-**. 박사학위 논문. 성균관대학교: 서울.
- 박경미 외 42명 (2015). **2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 II**. 서울: 연구보고서 BD15110002.
- 박만구 (2009). 수학교육에서 창의성의 개념 및 신장 방안. **수학교육 논문집**, 23(3), 803-822.
- 박슬희, 신재홍, 이수진 (2014). 중학생의 수학적 모델링 정교화 과정에 관한 사례 연구. **한국학교수학회논문집**, 17(4), 657-677.
- 박진형 (2015). **다면적 모델링 기반한 수학 교수 학습 연구**. 박사학위 논문. 서울대학교: 서울.
- 박진형 (2017). 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진 사례 연구. **수학교육학 연구**, 27(1), 69-88.
- 서지희, 윤중국, 이광호 (2013). 중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교수·학습 자료의 개발 및 적용: 쓰나미를 소재로, **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 15(4), 785-799.
- 손홍찬 (2006). **스프레드시트를 활용한 수학적 모델링 활동에서의 수학적 발견과 정당화**. 박사학위 논문. 한국교원대학교: 청주.
- 신은주 (2005). **모델링 활동 사례분석 연구-중학교 수학을 중심으로**. 박사학위 논문. 이화여자대학교: 서울.
- 안중수 (2012). 함수 단원의 수학적 모델링 자료를 활용한 수업이 학생들의 학습 능력의 향상에 미치는 영향. **한국학교수학회논문집**, 15(4), 747-770.
- 오영열 (2013). 초등수학에서의 수학적 모델링 적용 필요성에 대한 연구. **한국초등수학교육학회지**, 17(3), 483-501.
- 이지영 (2013). **초등학생의 수학적 모델링 적용과정에서 나타나는 정당화와 의사소통에 관한 연구 : 5학년 수와 연산을 중심으로**. 석사학위 논문. 이화여자대학교: 서울.
- 이지영, 김민경 (2016). 초등학생의 수학적 모델링 적용과정에서 나타나는 의사소통에 관한 연구: 5학년 수와 연산을 중심으로. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 55(1), 41-71.
- 정승요, 박만구 (2016). 수학과 교육과정의 변화에 따른 초등학교 3, 4학년 교과서 수학적 모델링 관련 과제 제시 방법 분석. **한국학교수학회논문집**, 19(1), 103-122.
- 정인수 (2011). **수학적 모델링 학습이 문장제 해결 능력 및 모델링 과정에 미치는 효과**. 박사학위 논문. 한국교원대학교: 청주.
- 주미경 (1991). **학교수학에서의 응용과 모델링 지도에 관한 고찰**. 석사학위 논문. 서울대학교: 서울.
- 황혜정 (2007). 수학적 모델링 이해-국내 연구 결과 분석을 중심으로-. **학교수학**, 9(1), 65-97.
- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM mathematics education*, 45(6), 797-810.
- Arzarello, F., Pezzi, G. & Robutti, O. (2007). Modelling body motion: an approach to functions using measuring instruments. In Blum, W., Galbraith, P. & Niss, M. (Eds).

- Modelling and applications in mathematics education-14th ICMI study* (pp. 129-136). NY: Springer.
- Bleiler-Baxter, A. K., Barlow, A. T. & Stephens, D. C. (2016). Moving beyond context: challenges in modeling instruction, In Hirsch, C. R. & McDuffic, A. R. (Eds). *Mathematical modeling and Modeling Mathematics* (pp. 53-64). Reston, VA: National council of teachers of mathematics(NCTM).
- Bliss, K. & Libertini, J. (2016). What is mathematical modeling? In Garfunkel, S., & Montgomery, M. (Eds). *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education(GAIMME)* (pp. 7-21), Bedford/Philadelphia: Consortium for Mathematics and Its Applications(COMAP)/Society for Industrial and applied Mathematics(SIAM)(<http://www.siam.org/reports/gaimme.php>).
- Blomhøj, M & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139.
- Blum, W & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modeling: Can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W & Ferri, R. B. (2016). Advancing the teaching of mathematical modeling: research-based concepts and example. In Hirsch, C. R. & McDuffic, A. R. (Eds). *Mathematical modeling and Modeling Mathematics* (pp. 143-152), Reston, VA: National council of teachers of mathematics(NCTM).
- Borba, M. C. & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Springer Science+Business media, Inc.
- Borba, M. C., Villarreal, M. E., & Soares, D. S. (2016). Modeling using data available on the internet. In Hirsch, C. R. & McDuffic, A. R. (Eds). *Mathematical modeling and Modeling Mathematics* (pp. 143-152), Reston, VA: National council of teachers of mathematics(NCTM).
- Cirillo, M., Bartell, T. G & Wager. A. A. (2016). Teaching mathematics for social justice through mathematical modeling. In Hirsch, C. R. & McDuffic, A. R. (Eds). *Mathematical modeling and Modeling Mathematics* (pp. 87-94), Reston, VA: National council of teachers of mathematics(NCTM).
- Cirillo, M., Pelesko, J. A, Felton-Koesler, M. D. & Rubrl, L. (2016). Perspectives on modeling on school mathematics. In Hirsch, C. R. & McDuffic, A. R. (Eds). *Mathematical modeling and Modeling Mathematics* (pp. 3-16), Reston, VA: National council of teachers of mathematics(NCTM).
- Doerr, H. M. & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for research in mathematics education*, 34(2), 110-136.
- Doorman, L. M. & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education*, 41(1), 199-211.
- English., L. D., Fox, J. L. & James, J. W(2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics*, October 2005, 156-163.

- English, L. D. & Watters, J. J. (2004). Mathematical modeling with young children. *proceedings of the 28th conference of the international group the psychology of mathematics education*, 2, 335-342.
- Fey, J., Garfunkel, S., Briars, D., Isaacs, A., Pollak, H., Robinson, E., Scheaffer, R., Schoenfeld, A., Seeley, C., Teague, D. & Usiskin, Z. (2014). The future of high school mathematics. *Mathematics Teacher*, 107(7), 488-490.
- Freudenthal. H. (1968). Why to teach mathematics so as to be usual. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1), 3-8.
- Freudenthal. H. (2008). **프로이덴탈의 수학교육론** (우정호 외 역). 서울: 경문사. (원저 1991년 출판)
- Galbraith, P. (2007). Authenticity and goal-overview. In Blum, W., Galbraith, P. & Niss, M. (Eds). *Modelling and applications in mathematics education-14th ICMI study* (pp. 181-184). NY: Springer.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J & Whitenack, J. (2009). Symbolizing, Modeling, and instructional design. In Cobb, P., Yackel, E & McClain, K. (Eds). *Symbolizing and communicating in mathematics classroom-perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Taylor & Francis e-Library.
- Huson, C. J. (2016). *Mathematical Modeling from the Teacher's Perspective*. The Thesis for the degree of doctor of Philosophy of The Graduate School of Columbia University.
- Julia, C. & Mudaly (2007). mathematical modeling of social issues in school mathematics in south africa. Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, Hans-Wolfgang & Niss, M. (Eds). *Modelling and applications in mathematics education-the 14th ICMI Study* (pp. 503-510). NY: Springer.
- Kehle, P. E. & Lester, F. K. (2013). A semiotic look at modeling behavior. In Lesh. R. & Doerr, H, M (eds), *Beyond constructivism: models and modeling perspective in mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 97-122). NJ: Routledge.
- Kertil, M. & Gurel, C. (2016). Mathematical modeling: a bridge to STEM education. International journal of education in mathematics. *Science and technology*, 4(1), 44-55.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In Lesh. R. & Doerr, H, M (eds), *Beyond constructivism: models and modeling perspective in mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.
- Maiorca, C. & Stohlmann, M. (2016). Inspiring students in intergrated STEM education through modeling activities. In Hirsch, C. R. & McDuffic, A. R. (Eds). *Mathematical modeling and Modeling Mathematics* (pp. 143-161), Reston, VA: National council of teachers of mathematics(NCTM).
- Mathews, S. M. (2004). Mathematical modeling: convoying merchant ships. *Mathematical teaching in the middle school*, 9(7), 382-391.

- National council of teachers of mathematics(NCTM). (2000). *The principles and standards for school mathematics*. National council of teachers of mathematics. Reston, Reston, VA: NCTM.
- National council of teachers of mathematics(NCTM) (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten–grade 8*, Reston, VA: NCTM.
- National governors association center for best practices(NGA Center) & Council of chief state school officers(CCSSO). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, D.C: the Council of Chief State School Officers and the National Governors Association Center(http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf).
- Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction, in modeling and applications in mathematics education, Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, Hans-Wolfgang & Niss, M. (Eds). *Modelling and applications in mathematics education—the 14th ICMI Study* (pp. 3–32). NY: Springer.
- Niss, M. & Højgaard, T. (Eds.). (2011). *Competencies and Mathematical learning: ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde universitet (IMFUTA tekst).
- Organisation for Economic Co-operation and Development(OECD) (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.
- Oxford university press(2017). ‘competency’, ‘competence’ in *English Oxford living dictionary*. <https://en.oxforddictionaries.com/definition/us/competence>.
- Pollak. H. O. (1968). On some of the problems of teaching application of mathematics. *Educational studies in mathematics, 1*, 24–30.
- Pollak. H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational studies in mathematics, 2*, 393–404.
- Pollak. H. O. (2012). Introduction: What is mathematical modeling?, In Gould, H., Murray, D. R. & Sanfratello, A. (Eds). *Mathematical modeling handbook* (pp. viii–xi). Bedford: Consortium for Mathematics and Its Applications(COMAP).
- Stohlmann, M., Moore, T. J. & Cramer, k. (2013). Preservice elementary teachers’ mathematical knowledge from an integrated STEM modelling activity. *Journal of mathematical modelling and application, 1*(8), 18–31.
- Swan, M., Turner, R., Yoon, C. & Muller, E. (2007). The modelling on learning mathematics. Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds). *Modelling and applications in mathematics education – the 14th ICMI study* (pp. 275–284). NY: Springer.
- Tran, D. & Dougherty, B. J. (2014). Authenticity of mathematical modeling. *Mathematics teacher, 107*(9), 673–678.

- Usiskin, Z. (2007). The arithmetic operations as mathematical models. Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, Hans-Wolfgang & Niss, M. (Eds). *Modelling and applications in mathematics education-the 14th ICMI Study* (pp. 257-264). NY: Springer.
- Wallace, S. (2009). A dictionary of education. NY: Oxford university press.
- Weber, V., Fortunem N., Williams, D. & Whitehead, A. (2016). Mathematical modeling with Mymaps and spreadsheets. *Mathematics teacher*, 110(2), 147-150.
- Wessls, H. (Eds.). (2004). Levels of mathematical creativity on model-eliciting activities. *Journal of mathematical modeling and application*, 1(9), 22-40.
- Wickstrom, M. H., Carr, R. & Lackey, D. (2017). Exploring yellowstone national park with mathematical modeling. *Mathematics teaching in the middle school*, 22(8), 462-470.
- Yansik, H. B. & Meise, Y. (2014). Making insulation decisions through mathematical modeling. *Teaching children mathematics*, 21(5), 314-319.
- Zbiek, R. & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as context for deepening students' understandings of curricular *Mathematics*. *Educational studies in mathematics*, 63, 89-112.

A study on literature review of mathematical modeling in mathematical competencies perspective

Choi, Kyounga⁴⁾

Abstract

The animated discussion about mathematical modeling that had studied consistently in Korea since 1990s has flourished, because mathematical modeling was involved in the teaching-learning method to improve problem solving competency on 2015 reformed mathematics curriculum.

In an attempt to re-examine the educational value and necessity of application to school education field, this study was to review the literature of mathematical modeling in mathematical competencies perspective.

As a result, mathematical modeling could not only be involved the components of problem solving competency, but also support other competencies; reasoning, creativity-amalgamation, data-processing, communication, and attitude-practice. In this regard, This paper suggested the necessity of the discussion about the position of mathematical modeling in mathematical competencies and the active use of mathematical modeling tasks in mathematics textbook or school classes.

Key Words : Mathematical modeling, Mathematical competencies, problem solving, reasoning, communication, creativity-amalgamation, data-processing, attitude-practice

Received May 29, 2017

Revised June 22, 2017

Accepted June 27, 2017

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97D30, 97M10

4) Ansanseo Elementary School (kachoi@ginue.ac.kr)