한국학교수학회논문집 제 20 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 20, Number 2, 141-161, June 2017

자연수의 혼합계산에 대한 초등학생들과 예비교사들의 오류 분석

이대현[1)]

초등학교에서 자연수의 혼합계산은 사칙계산이 섞여 있는 수식의 계산 순서를 알고 해결할 수 있는 능력을 길러 주는데 초점을 두고 있다. 이런 목표에 비추어 본 연구에서는 초등학생 67명과 예비교사 57명을 대상으로 수식과 문장제로 이루어진 검사지를 이용하여 혼합계산에 대한 해결 정도와 오류 유형을 분석하였다. 검사 결과, 초등학생들은 수식과 문장제로 된 혼합계산에서 86.2%와 73.5%의 정답률과 수식에서 계산 순서의 오류, 문장제에서 수식을 구성하지 못하는 오류를 나타내었다. 예비교사들의 경우에 나타난 몇 개의 오류와 해결 과정에 비추어 혼합계산이 이루어지는 식의 계산 원리와 규약을 이해할 수 있도록 교과 교육 내용을 유의해서 지도할 필요를 제시하였다. 또한 검사 결과를 통해 혼합계산 시 괄호 사용의 유무와 적절성, 등호 개념의 사용 방법에서 문제점을 확인할 수 있었다.

주요용어 : 자연수, 혼합계산, 초등학생, 예비교사, 계산 순서

Ⅰ. 서론

초등학교 수학에서 사칙계산의 이해와 숙달은 수 개념 이해와 더불어 중요한 부분을 차지하고 있다. 이것은 그 자체의 중요성뿐만이 아니라, 다른 수학 영역을 배우고 응용해 가며 실생활 문제를 해결해 가는 데에도 필요하기 때문이다. 특히 계산이 필요한 맥락에서는 주어진 상황에 적합한 계산 유형을 찾고 이를 적용하여 문제를 해결해야 한다. 생활 속에서 이루어지는 여러 가지 계산중에서 혼합계산은 '여러 개의 물건을 함께 사고 난후에 물건 값을 지불하고 거스름돈을 받아야 하는 상황'이나, '여러 모둠에 똑같은 개수로 물건을 나누어 주고 남은 개수를 구하는 상황'과 같이 일상생활에서 자주 부딪히는 혼합계산이 필요한 실생활 맥락의 문제를 해결하는데 필요한 지식이다.

혼합계산과 관련하여 우리나라 교육과정의 내용을 살펴보면, 제1차 교육과정에는 3학년 과정에 가감의 혼합계산, 4학년 과정에 가감 혼합계산의 숙달, 5학년 과정에 괄호가 있는 식의 계산으로 제시되어 있고, 제2차 교육과정에는 4학년 과정에 혼합계산의 숙달, 5학년 과정에 ( )의 사용, 6학년 과정에 { } [ ]의 사용을 제시하고 있다. 제1차 교육과정과 제2차 교육

---

* MSC2010분류 : 97C30

1) 광주교육대학교 (leedh@gnue.ac.kr)

과정에서는 특정 학년에 하나의 단원으로 혼합계산을 제시하지 않고, 여러 학년에 걸쳐 그 내용을 다루고 있음을 알 수 있다. 그리고 제3차 교육과정에서는 혼합계산에 대한 내용을 명시적으로 제시하지 않고 있다는 특징이 있다(교육부, 2000). 제4차 교육과정에서는 5학년 과정에 '혼합계산'을 제시하면서 그에 따른 교과서에서도 5-1학기에 '자연수의 계산'을 제시하면서 혼합계산 내용이 교과서에서 특정 학년에 하나의 단원으로 제시되기 시작하였다(문교부, 1983). 이어진 제5차 교육과정부터는 '자연수의 혼합계산'으로 단원명이 '혼합계산'으로 다루어지면서 여러 가지 계산이 섞여 있는 혼합계산을 현재까지 다루어 오고 있다. 또한 자연수의 혼합계산과는 별도로 분수와 소수의 혼합계산을 다루기도 하였다[2).

자연수의 혼합계산은 자연수 위의 사칙연산인 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 괄호를 포함하는 식에서의 계산을 의미하며, 값을 구하는 것보다 계산하는 순서에 관심을 두어야 한다(배종수, 2011). 따라서 혼합계산 지도가 알고리즘을 단순히 수행하는 기능 위주의 학습으로 흐르는 것을 막기 위하여 이 내용에 대한 지도는 이미 학습한 자연수의 사칙계산을 바탕으로 여러 가지 계산 기호가 섞여 있는 계산식의 순서를 알고 해결할 수 있는 능력을 길러 주는 데 초점을 두어야 한다. 이것은 교사용 지도서에서도 강조하고 있는 내용이기도 하다(교육부, 2014b).

혼합계산에서 중요한 계산 순서는 수학적인 규약으로 정해져 있음에도 불구하고, 여전히 그 순서에 있어서는 논란의 여지가 있다(Peterson, 2000). 예를 들어 $\frac{a}{2b}$의 경우에는 $a \div (2b)$로 해석되지만, $a \div 2b$인 경우와 같이 제수 부분에 ( )가 없는 경우에는 $\frac{a}{2} \times b$와 $a \div (2b)$와 같은 두 가지 해석이 가능하다. 이것은 $a \div (2b)$와 $a \div 2 \times b$와 같은 두 식에서 곱셈 기호를 생략함으로써 발생하는 문제이지만, 실생활 맥락에서 구성된 혼합계산식의 계산 순서에 관한 문제가 수학적 개념이나 진리의 문제와 같이 논리적으로 유도되는 산물이기보다 표기의 문제이자 규약의 문제라는 것을 보여 주는 것이다(고정화, 2012; Peterson, 1998, 1999). 결국 혼합계산에서는 '계산 순서'가 핵심이 되고, 학생들은 계산 규약에 맞도록 계산 순서를 알고 계산을 수행할 수 있어야 한다.

그렇지만 학생들을 대상으로 실시한 혼합계산에 관한 연구들은 그 결과가 만족스럽지 못하며, 특히 보통 학력 학생들이 우수 학력 학생들보다 더욱 취약하다는 것을 보여준다(백선수, 김원경, 문승호, 2008; 조영미, 이대현, 이봉주, 2004). 초등학생을 대상으로 2012년도에 마지막으로 실시한 국가수준 학업성취도평가에서는 아래 문제와 같이 혼합계산에서 괄호의 유무가 계산 결과에 어떤 영향을 끼치는가를 묻는 문항이 출제되었다(김동영, 조윤동, 이광상, 전영주, 2013, p. 39).

[문제] ( )가 없어도 계산 결과가 변하지 않는 식은 어느 것입니까?

① 32÷(4×2)
② (45-9)×4
③ (54+6)÷3
④ 80÷(8-4)
⑤ 71+(6×5)

2) 2015개정 교육과정에서 '분수와 소수의 혼합계산'은 초등학교 성취기준에서 삭제되었다(교육부, 2015).

이 문항은 괄호가 있는 식의 계산에서 사칙계산의 계산 순서를 알고, 이를 이용하여 바르게 계산할 수 있는지를 알아보기 위해 출제된 것이었다. 이 문항에 대한 전체 정답률은 64.23%로, 다른 문항들의 정답률에 비해 보통 정도로 나타났다. 성취수준별 정답률에서는 우수학력 88.08%, 보통학력 58.84%, 기초학력 29.22%, 기초학력 미달 18.74%로 나타났다. 이 연구에서도 우수학력 수준의 집단과 보통학력 수준의 집단의 퍼센트의 차이가 29.24%p, 보통학력 수준의 집단과 기초학력 수준의 집단의 퍼센트의 차이가 29.62%p를 보인 것으로 볼 때 혼합계산에 대한 문제해결은 성취수준별로 차이가 심하게 나타나는 내용임을 확인할 수 있다.

혼합계산에 대한 문제해결을 분석한 연구에서는 연산의 위계에 무관하게 앞에서부터 계산을 한 경우, 괄호의 우선 순서를 무시하고 계산하는 경우, 연산 구조와 무관하게 인접한 연산을 먼저 수행하는 경우와 같이 계산 순서를 잘못 적용한 결과로 나타나는 오류를 제시하고 있다. 또 연산자를 잘못 인식하는 경우, 수 구구를 잘못 회상한 경우, 실생활 문장제를 수식으로 나타내지 못하는 경우 등과 같이 다양한 원인을 보여준다(고정화, 2012; 백선수, 김원경, 문승호, 2008). 그런데 혼합계산에 대해 선행된 연구가 교과서에 제시된 다양한 유형의 혼합계산 문제를 아우르지 못하고 있다는 것과 초등학교에서 다루어지는 혼합계산이 분수와 소수 및 정수와 유리수의 혼합계산에 영향을 끼친다는 면에서 학생들의 혼합계산 결과에 대해 좀 더 상세한 분석이 필요하다. 이것은 혼합계산의 여러 가지 유형별로 학생들의 해결 정도에 대한 정보를 얻기 위함이다. 또 학생들이 단순히 연산 순서를 기억하지 못해서라는 이유로 단순히 그 순서를 주지시키는데 치중해 온 교수 방법에서 벗어나 혼합계산 지도에 대한 새로운 대안을 제시할 수 있는 정보를 추출할 수 있기 때문이다.

혼합계산이 학생들의 성취수준별로 차이가 많이 나타나는 학습내용임을 고려할 때 하위수준 학생들의 학습 부진을 예방하기 위하여 오류의 양상을 파악하는 것도 필요하다. 그리고 종전의 혼합계산에 대한 연구가 수식에 한정되었던 것에 비추어, 혼합계산이 일상생활에서 부딪히는 여러 단계의 문제를 해결하는데 필요한 능력과 관련되므로 이를 위해 문장제로 구성된 혼합계산 문제에서 수식을 구성하고 이를 해결할 수 있는가를 살펴볼 필요가 있다. 더불어 수식과 문장제 간의 문제해결 정도의 관계도 살펴볼 필요가 있다.

따라서 이 연구에서는 수학 교과서에서 다루어지는 여러 가지 수식으로 된, 그리고 문장제로 된 혼합계산 유형에 대해 학생들의 해결 결과를 분석하고자 한다. 여러 가지 수식으로 된 혼합계산에서는 식의 계산 순서를 알고 혼합계산을 할 수 있는지(교육부, 2015), 그리고 문장제 해결에서는 실생활 문제 상황을 식으로 간결하게 표현하여 구하려는 값을 효율적으로 구할 수 있는가를 파악하고자 한다. 또한 두 가지 유형의 혼합계산 해결에 나타난 오류를 살펴보고자 한다. 초등수학에서 자연수의 혼합계산에 대한 학생들의 이해 정도와 오류 유형을 파악함으로써 혼합계산 지도에 중점을 두어야 할 사항과 학생들의 이해를 촉진시키고 효율적인 학습지도를 위한 교과서 차시별 내용의 재구성 과정에 대한 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

한편으로 초등학생들을 지도하게 될 예비교사들의 경우에도 초등학생들을 대상으로 실시한 동일한 검사지를 활용하여 검사를 실시하고 그 결과를 분석할 것이다. 예비교사들의 검사 결과는 혼합계산과 관련된 내용이나 규약의 이해 및 해결 정도를 파악하여 예비교사 교육에 활용할 뿐만 아니라, 혼합계산의 지도에서 주의해야 할 내용과 방법을 예비교사 스스로 숙고할 수 있는 기회를 제공하고자 하는 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

혼합계산에서는 자연수의 사칙계산에 대한 이해를 바탕으로 여러 단계로 나타나는 상황 문제를 식으로 표현하고, 식의 계산 순서에 따라 문제를 해결할 수 있는 능력을 길러 주는 데 초점을 두어야 한다(교육부, 2014b). 따라서 학생들은 무엇보다도 혼합계산을 이루는 각 연산 개념을 알아야 하고, 실생활 문제 상황을 수식으로 적절하게 표현할 수 있어야 하며, 계산 순서를 이해해야 한다.

그런데 혼합계산 지도와 관련하여 몇 가지 내용에 대해 논의가 필요하다. 첫째, 혼합계산 식의 계산 순서가 어떤 근거로 정해졌는가의 문제이다(Breitenbath, 2000). 만약 계산 순서가 정해지지 않았다면 하나의 식에 대해 서로 다른 답이 산출될 수 있으며, 이것은 수학의 논리에 맞지 않게 된다. 따라서 계산 결과를 일의적으로 결정하기 위해 계산 순서가 정해졌을 것이다. 지금과 같은 계산 순서가 정해진 것에 대한 근거가 역사 자료에 의해서는 명확하게 확인되지 않으며, 대수적 성질과 대수 전개의 편의성을 도모하기 위하여 정해진 것으로 볼 수 있다(Peterson, 2000). 이것은 혼합계산의 순서가 수학적 진리나 논리의 문제라기보다는 표기에 관한 관습의 문제로 보는 이유이다(고정화, 2012). 이런 면에서 학생의 입장에서는 사건의 진행 과정에 따라 문제 상황에 적합하도록 식을 구성하고, 식의 계산 규약에 따라 문제를 해결할 수 있어야 한다. 또한 교사의 입장에서는 계산 순서를 정해야 하는 수학적 필요성과 그런 규약을 따르는 수학 체계를 숙지하고 지도 관점으로 삼는 것이 필요하다.

두 번째, 우리나라 교육과정의 흐름에 따라 제시된 혼합계산에 대한 교과서 내용을 분석해 보면 괄호 제시 순서의 문제를 고려할 필요가 있다. 학생들은 계산을 먼저 수행하는 과정을 나타내기 위하여 괄호를 무조건 이용하는 경향이 있기도 하다. 괄호가 없어도 계산식의 순서에 따라 계산을 할 수 있음에도 불구하고, Ⅰ장에서 예시한 것과 같이 학생들은 우선 수행할 부분을 나타내기 위하여 식에 괄호를 사용하기도 한다. 사실 괄호 사용의 문제는 괄호가 없을 때와 있을 때의 식의 차이를 비교하고, 그 결과가 다르다는 것을 이해할 수 있도록 해야 한다. 따라서 교과서 전개에서는 괄호가 있는 상황과 없는 상황을 각각 식으로 표현하고 두 식의 계산 결과가 다르다는 것을 비교해 보도록 전개하는 것이 적절하다.

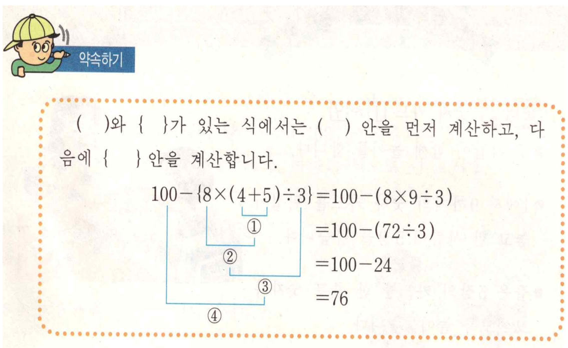
<표 Ⅱ-1> 교과서에 제시된 혼합계산 유형별 제시 순서

교육과정	차시별 혼합계산 유형별 제시 순서
7차	$\boxed{+}, \boxed{-} \,/\, \boxed{+}, \boxed{-}, (\ ) \Rightarrow \times, \div \,/\, \times, \div, (\ ) \Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \times \,/\, \boxed{+}, \boxed{-}, \div$ $\Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \times, \div \,/\, (\ ), \{\ \}$
2007개정	$\boxed{+}, \boxed{-} \Rightarrow \times, \div \Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \times \Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \div \Rightarrow (\ ) \Rightarrow (\ ), \{\ \}$ $\Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \times, \div, (\ ), \{\ \}$
2009개정	$\boxed{+}, \boxed{-} \,/\, (\ ) \Rightarrow \times, \div \,/\, (\ ) \Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \times/\ (\ ) \Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \div$ $\Rightarrow \boxed{+}, \boxed{-}, \times, \div \Rightarrow (\ ), \{\ \}$

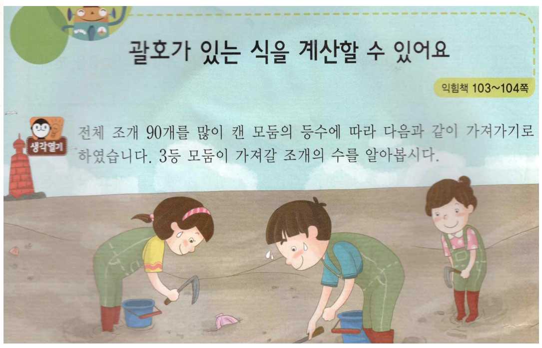
그렇지만 우리나라의 2007개정 교육과정에 의한 교과서에서는 사칙계산이 혼합된 식을 다룬 후에 괄호가 있는 식을 마지막으로 제시한 사례가 있기도 하다(교육과학기술부, 2010).

또한 제7차 교육과정에 의한 교과서에서는 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식에서 괄호가 있는 경우와 없는 경우를 구분하여 식의 계산 순서를 알아보고 있고(교육인적자원부, 2003), 현행 2009개정 교육과정에 의한 교과서에서는 괄호가 있는 식과 없는 식을 각각 제시하지는 않고 동일 차시에서 계산 순서로만 약속으로 제시하고 있다(교육부, 2014a). 전체적으로 각 교육과정에 따른 교과서마다 괄호 사용의 제시 방법에서 차이를 나타내고 있지만, 괄호 사용의 의미에 비추어 볼 때 여러 가지 계산식의 유형에 따라 괄호가 포함된 식과 없는 식의 차이를 비교해 보도록 교과서를 기술하는 것이 적절할 것이다.

셋째, 중괄호와 대괄호 사용의 문제이다. 우리나라 교육과정에서에서는 괄호의 사용에 대해 제1, 2차 교육과정에서는 구체적으로 괄호의 사용을 제시하였지만, 그 이후로는 제시하지 않고 있다. 그렇지만 혼합계산에서 계산하는 순서를 알고 혼합계산을 할 수 있도록 하기 위하여 교과서에 소괄호( )와 중괄호{ }를 꾸준히 제시해 오고 있다. 종전 교육과정에 의한 몇 가지 교과서를 살펴보면, 4차 교육과정에 의한 교과서에서 7차 교육과정에 의한 교과서까지는 [그림 Ⅱ-1]과 같이 식에서 약속하기를 통해 직접 그 계산 순서를 제시하고 있고, 2007과 2011개정 교육과정에 의한 교과서에서는 [그림 Ⅱ-2]와 같이 실생활 문제 상황에서 소괄호( )와 중괄호{ }를 사용하여 식으로 표현하고 식을 계산하는 순서를 탐구하는 과정으로 제시하고 있다.



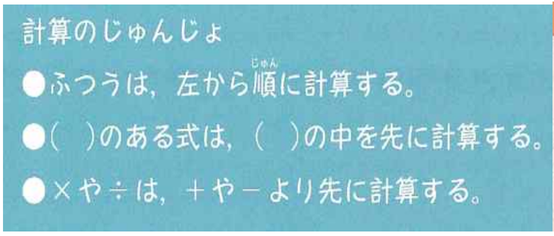
[그림 Ⅱ-1] 괄호가 있는 식의 계산 1
(교육인적자원부, 2003, p. 83)



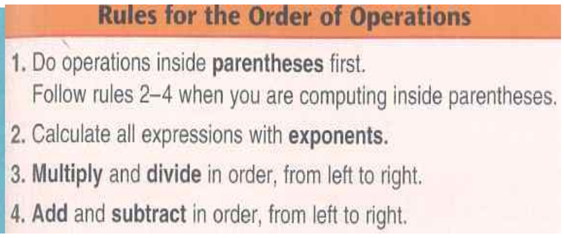
[그림 Ⅱ-2] 괄호가 있는 식의 계산 2
(교육부, 2014a, p. 161)

그런데 중괄호{ }를 사용하는 실생활 맥락은 2009개정 교육과정에 의한 교과서에 제시된 문제와 같이 중괄호 사용을 위해 인위적으로 만들어진 상황이 대부분이다. 따라서 [그림 Ⅱ-1]과 같이 우리나라 과거의 많은 교과서에서는 실세계 상황을 제시하기 보다는 하나의 약속으로 정하고, 계산 기능을 익히는데 초점을 두었을 것이다. 혼합계산식에서 괄호의 사용은 동일한 조건을 갖는 여러 상황을 하나의 범주로 묶어 해결함으로써 빠르고 간결하게 식을 처리하고자 하는 것이다. 그렇지만 중괄호 사용을 위해 인위적으로 만들어진 실생활 문제 상황에서 중괄호{ }를 제시하는 것은 재고할 필요가 있다. 이것은 2015개정 교육과정 마련을 위한 논의 과정에서도 초등학교 교사들이 분수와 소수의 혼합계산에 관한 설문 내용에서 중괄호와 대괄호 사용에 부정적인 생각을 가지고 있는 것으로 나타난 것과 맥을 같이 한다(박경미 외, 2015). 또한 초등학교 수학에서 중괄호와 대괄호 사용을 보류할 수 있다는 논지는 중학교 수학(신항균 외 6인, 2013)에서 유리수의 계산에서 중괄호{ }와 대괄호 [ ]를

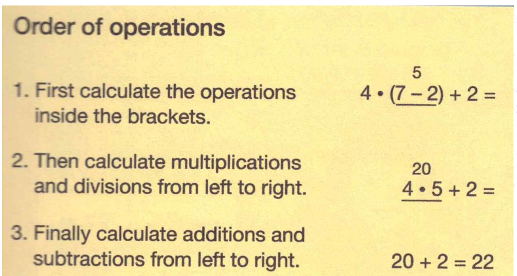
이용한 복잡한 식의 계산을 다루고 있기 때문이기도 하다. 그리고 일본 미국, 핀란드, 싱가폴의 교과서와 같은 외국 교과서의 사례에서도 다음 그림의 4가지 예와 같이 두 가지 이상의 괄호를 다루고 있는 교과서는 없었으며, 한 가지 괄호만으로 혼합계산 식을 다루고 있는 이유이기도 하다.



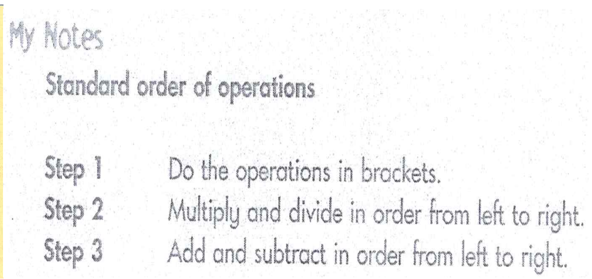
[그림 Ⅱ-3] 혼합계산 순서 1
(藤井斉亮 ほか 41, 2013, p. 12)



[그림 Ⅱ-4] 혼합계산 순서 2
(Bell at al, 2007, p. 151)



[그림 Ⅱ-5] 혼합계산 순서 3
(Sintonnen, Uus-Leponiemi, Ilmavirta & Rikala, 2009, p. 56)



[그림 Ⅱ-6] 혼합계산 순서 4
(Edge, Lee & Hoe, 2014. p. 61)

혼합계산에 대한 선행연구들은 실생활 문제 상황을 토대로 괄호나 계산 순서를 정할 필요성을 제시하고, 혼합계산이 실생활에서 부딪치는 문제를 해결하는데 효율적이라는 것을 학생들이 인식할 수 있도록 해야 한다고 한다(고정화 2012; 백선수, 김원경, 문승호, 2008; 정기근, 김민정, 노은환, 2007). 또한 학생들에게 혼합계산의 순서를 달리하여 계산해 보게 함으로써 결과가 달라지는 상황을 통해 인지적 갈등을 유발할 필요가 있다고 한다. 이것은 계산 순서의 규약의 성격을 어떻게 전달할 것인가의 문제인데, 괄호를 포함한 계산 순서에 관한 규칙이 약속에 의해 정립된 것이라면 그런 측면을 직접적으로 제시할 필요도 있다는 것을 의미한다.

마지막으로 학생들의 혼합계산에 대한 해결 양상을 살펴보면, 학업 성취 수준이 낮을수록 정답률이 낮으며, 그 이유로 연산 순서에 대한 규칙을 적용하지 않고 앞에서부터 차례로 계산하려는 경향을 보인다는 것을 알 수 있다(고정화, 2012). 예를 들어 2003년 국가 수준 학업성취도 평가 문항 '4+3×12-8÷2'에서 정답률 46.3%에 비해 44.6%의 오답은 앞에서부터 차례로 계산한 결과였으며, 우수학력 학생들의 정답률이 86.5%인 반면, 보통학력 학생들의 정답률은 47.0%를 나타내었다(조영미, 이대현, 이봉주, 2004). 또한 2005년도에 실시한 국가 수

준 학업성취도 평가 문항 '5+3×2'의 경우에도 40.9%의 정답률에 비해 55.6%의 오답도 앞에서부터 차례로 계산한 결과로 나타난 오류였다. 이 경우에 우수 학력의 오답률이 21.4%인 반면, 보통학력의 오답률은 59.6%로 나타났다(김선희 외 6인, 2006). 이것은 수학 학습 내용에 따라 전체 학생들의 정답률보다는 성취수준별로 나타나는 오답률과 그 유형에 관심을 둘 필요성을 제기한다.

한편, 학생들은 혼합계산식의 풀이에서 여러 유형의 오류를 보이기도 한다(김화수, 2013). 일반적으로 오류란 단지 부주의한 결과가 아닌, 불완전하게 수행하는 알고리즘의 결과와 같이 체계적이고 반복적으로 나타나는 실수이거나, 이전 경험으로 형성된 고착화된 현상의 결과일 수도 있다(Brousseau, 1997). 계산 영역에서 학생들이 보이는 오류를 분석한 Robert의 연구에서는 오류 유형을 문제해결에 필요한 연산과는 다른 연산을 사용해서 발생하는 '잘못된 연산', 기본적인 수 구구를 기억하는데서 발생하는 '명백한 계산적 오류', 받아올림을 안 하거나 체계적이고 잘못된 절차를 수행하는 '결함 있는 알고리즘', 대답을 식별할 수 없는 '임의의 대답'을 들고 있다(백선수, 김원경, 문승호, 2008에서 재인용). Robert의 분류에서 결함 있는 알고리즘의 오류의 경우에는 한 문제에 나타난 결과로는 원인으로 확정하기가 어려우며, 여러 개의 유사한 계산 문제의 수행 결과로만 확인할 수 있을 것이다.

혼합계산과 관련해서는 혼합계산을 적용하는 문제 만들기에서 잘못된 연산 순서를 적용한 경우, 1, 2단계 연산 개념의 오류와 더불어 질문 제시의 오류, 불합리한 상황 적용 등의 오류로 분석하기도 하였다(구미애, 1999). 또한 수식 혼합계산 문제로 구성된 검사지를 이용한 연구에서는 계산 순서를 잘못 적용한 경우, 계산에 있어서 실수를 한 경우(수구구를 잘못 회상한 경우, 연산자를 잘못 인식한 경우, 정답을 옮겨 적을 때의 실수, 전체적인 계산 순서의 망각), 수식 표현의 어려움으로 인한 오류, 계산이 미완성 및 무응답으로 구분하기도 하였다(백선수, 김원경, 문승호, 2008). 이러한 선행연구에서 제시한 오류 분석 틀은 본 연구에서 혼합계산에 대한 수식 문제와 문장제의 해결에서 나타나는 오류 유형의 추출하는데 기초가 될 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방법 및 대상

본 연구에서는 초등학생들과 초등 예비교사들을 대상으로 자연수의 혼합계산에 대한 해결 정도와 오류를 분석하였다. 연구 방법으로는 현행 초등학교 교과서와 익힘책 내용을 바탕으로 본 연구에서 개발한 검사 도구를 활용하여 조사연구를 실시하였다. 연구 대상인 예비교사들은 수학 교과교육 강좌의 하나인 '수학과 교육 1, 2'를 수강한 학생들이었다. 또한 초등학생들은 2009개정 교육과정에 자연수의 혼합계산이 제시되어 있는 4학년 학생들로, 혼합계산 과정을 마친 시기인 4학기 2학기 말 과정에 있는 학생들이었다. 연구를 위해 G교육대학교의 3학년 12개 심화 과정 중 수학 심화 과정이 아닌 11개 심화 과정 중에서 단순무작위 표집(simple random sampling)으로 채택된 2개 심화 과정에 속한 학생들을 연구대상자로 선정하였다. 또한 초등학생 선정을 위해 군집표집(cluster sampling) 방법을 이용하여 G광역시에서 단순무작위 표집으로 2개 학교를 추출하고, 그 중에서 단순무작위 표집으로 4학년 학급이 3학급인 학교에서 1학급, 6학급인 학교에서 2학급에 속한 학생들을 연구 대상자로

선정하였다. 이러한 과정으로 예비교사는 57명, 초등학생은 67명이 본 연구에 참여하였다.

2. 검사도구 및 연구 절차

연구를 위한 검사도구 제작을 위해 우리나라 제7차 교육과정부터 2011개정 교육과정에 의한 교과서에 제시된 자연수의 혼합계산 내용을 분석하였다. 그 결과를 바탕으로 교과서에 제시된 문제 유형에서 수치를 바꾸는 재구성 과정을 통해 자연수의 혼합계산에 대한 해결 정도를 파악할 수 있는 검사지를 제작하였다(부록 참고). 검사 문항의 내용으로는 괄호 유무에 따라 '덧셈과 뺄셈으로 구성된 식, 곱셈과 나눗셈으로 구성된 식, 덧셈과 뺄셈 및 곱셈으로 구성된 식, 덧셈과 뺄셈 및 나눗셈으로 구성된 식' 등이었다.

검사 도구는 혼합계산 식을 옳게 해결할 수 있는가와 실생활 맥락에서 혼합계산 식을 바르게 구성해 낼 수 있는가를 알아보기 위하여 '식으로 된 문제'와 '실생활 문제 상황이 내재된 문장제' 유형으로 구성하였다. 문항의 적합성을 판단하기 위하여 5명의 초등학교 교사들을 대상으로 문항 점검을 실시하였고, 본 검사 대상이 아닌 초등학교 4학년 한 학급의 학생들을 대상으로 예비검사를 실시하여 사건의 순서가 명확하도록 문장제 5번과 8번의 2문항에 대해 윤문을 하였다. 최종으로 완성된 검사문항에 대한 신뢰도는 Cronbach의 α계수가 식으로 된 문제에서는 .682, 문장제에서는 .646으로 높게 나타났다. 한편, 예비교사의 경우에는 정답률이 높을 것으로 판단하여 신뢰도 산출과 같은 문항의 적합성 분석을 생략하였다.

연구 절차로는 제작된 검사지를 활용하여 예비교사와 초등학생 두 집단에 대해 각각 검사를 실시하였다. 그리고 식으로 구성된 문제와 문장제의 계산식이 유사하기 때문에 두 검사(testing)에 의한 내적 타당도에 대한 위협(threat)을 최소화 하고자 두 집단 모두 먼저 수식으로 된 문제를 해결하도록 하였고, 일주일의 시간 차이를 두고 문장제로 된 문제를 해결하도록 하였다. 그런 후에 다음 3절의 분석 방법에 따라 그 결과를 정답 정도와 문제해결 오류 유형으로 구분하여 분석하였다.

3. 분석 방법

결과 분석에서는 수식과 문장제로 된 혼합계산 문항에 대하여 초등학생들과 예비교사들의 해결 정도와 오류 유형을 분석하였다. 해결 정도에서는 수식과 문장제 각각 8문항에 대하여 spss 22를 이용하여 기술통계 분석을 통해 평균과 표준편차 및 정답률을 산출하였다. 또한 각 문항별 정답률과 개인별 득점 분포도를 제시하였다.

<표 Ⅲ-1> 오류 유형 분석 틀

오류 유형		대표적인 예
연산 순서의 오류		70+20÷2-10=90÷2-10=45-10=35
계산 과정의 오류(실수)	연산자 선택의 오류	14-(4+2)=14-8=6
	기본 수 구구의 오류	14-4+2=12+2=14
	표기의 오류	18÷(3×2), 3×2=6, 18÷3=6(표기 과정에서 실수)
수식 구성의 오류		수식 구성을 옳지 않게 구성
무응답		반응 없음

또한 오류 분석에서는 선행연구와 본 연구에 나타난 경향에 비추어 <표 Ⅲ-1>과 같은 분석틀을 활용하여 분석하였다. Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이, 연산에 대한 오류 분석에서는 기본적인 수 구구를 기억하는데서 발생하는 오류와 계산 과정에서 반복적이고 체계적으로 잘못된 절차를 수행하는 알고리즘의 오류를 구분하는 것이 보편적이다. 그렇지만 알고리즘 적용의 오류는 한 문제에 나타난 결과로는 원인을 확정하기가 어려우며, 여러 개의 유사한 문제의 수행 결과로만 확인할 수 있다는 특징이 있다. 특히 본 연구에서와 같이 문제에 포함된 수치가 적으며 문항 유형이 상이한 경우에는 알고리즘 적용의 오류와 기본 수구구의 오류를 구분 짓기가 어렵기 때문에 기본 수구구의 오류와 알고리즘 적용의 오류를 같은 범주에서 다루는 것이 합리적이라고 판단된다. 따라서 본 연구에서는 오류의 유형을 크게 연산 순서의 오류, 계산 과정의 오류, 수식 구성의 오류와 무응답으로 구분하였다. 그리고 계산 과정의 오류에서는 연산자 선택의 오류, 기본 수 구구의 오류, 표기의 오류로 나누어 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 해결 정도 분석 결과

이 절에서는 자연수의 혼합계산에 대한 초등학생들과 예비교사들의 해결 정도를 제시하였다. 먼저 수식으로 이루어진 혼합계산 문항에 대한 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다. 수식으로 이루어진 혼합계산 8문항 각각에 대하여 정답에는 1점, 오답에는 0점을 부과한 결과, 초등학생 67명의 정답률은 86.2%로 나타났다. 이 결과는 문제의 난이도 면에서는 본 검사보다는 쉬운 혼합계산에 대해 분석한 연구(백선수, 김원경, 문승호, 2008) 결과인 85.25%보다는 약간 높게 나타났다[3]. 예비교사 57명의 경우에는 456개의 응답 중에서 오답이 6개가 나타나 98.7%의 정답률을 보였다. 예비교사의 경우 수식으로 된 혼합계산 문제에 6개의 오답이 나타난 것은 낮은 비율이기는 하지만, 계산 기능을 요구하는 문항에서의 오답이기 때문에 유의할 필요가 있다.

<표 Ⅳ-1> 수식으로 된 혼합계산에 대한 결과

구 분	인원 수	정답수(오답수)	평균	표준편차	정답률(%)
초등학생	67	462(74)	6.90	1.499	86.2
예비교사	57	450(6)	7.89	0.409	98.7

다음으로 본 검사지의 문항 구성이 우리나라 교과서에 제시된 차시별 내용에 맞춰 구성되었기 때문에 <표 Ⅳ-2>에서는 문항별 해결 정도를 분석하였다. 8문항 중에서 덧셈과 뺄셈으로 이루어지거나 곱셈과 나눗셈으로 이루어진 1-4번 문항에 대한 학생들의 정답률은 90%

3) 이 연구에서는 A+B+C, A-B+C, A×B+C, A÷B+C와 같이 연산자를 2개만 포함하는 16개의 문항으로 구성되어 있다(백선수, 김원경, 문승호, 2008).

이상이었지만, 3가지 이상의 연산이 혼합된 문항인 5-8번의 경우에는 상대적으로 정답률이 낮게 나타났다. 특히 앞에서부터 순차적으로 계산을 한 경우에 오류가 발생하는 6번 문항(70+20÷2-10)과 빼기 기호를 중심으로 앞부분(30)과 뒷부분((2+3)×4+5)으로 나누어 계산을 수행함으로써 오류가 발생하는 8번 문항(30-(2+3)×4+5)의 경우에 오답자가 많이 나타났다. 한편, 예비교사들의 경우에는 오답률이 낮아서 문항별로 특이사항을 분석하기는 어렵다고 판단하였다.

<표 Ⅳ-2> 수식으로 된 혼합계산에 대한 문항별 정답률

문　　항	1	2	3	4	5	6	7	8
초등학생	62 (0.93)	63 (0.94)	62 (0.93)	61 (0.91)	59 (0.88)	52 (0.78)	58 (0.87)	45 (0.67)
예비교사	57 (1.00)	55 (0.96)	57 (1.00)	57 (1.00)	57 (1.00)	56 (0.98)	56 (0.98)	55 (0.96)

<표 Ⅳ-3>은 수식 혼합계산 문항에 대한 개인별 득점을 나타낸 것이다. 학생들의 경우에 8문항을 모두 정답을 한 비율이 52.2%였으며, 가장 낮은 결과를 보인 학생은 3문항에 정답을 한 학생들로 모두 4명이었다. 예비교사들의 경우에는 2문항을 오답한 경우가 2명, 1문항을 오답한 경우가 2명이었다.

<표 Ⅳ-3> 수식으로 된 혼합계산에 대한 개인별 득점 분포표

문항	0	1	2	3	4	5	6	7	8
초등 학생	0	0	0	4 (6.0)	2 (3.0)	6 (9.0)	8 (11.9)	12 (17.9)	35 (52.2)
예비 교사	0	0	0	0	0	0	2 (3.5)	2 (3.5)	53 (93.0)

다음으로 문장제로 제시된 혼합계산 문항에 대한 검사 결과는 <표 Ⅳ-4>와 같다. 문장제로 이루어진 혼합계산 8문항 각각에 대하여 정답에는 1점, 오답에는 0점을 부과한 결과, 초등학생 67명의 정답률은 73.5%로 나타났다. 예비교사 57명의 정답률은 98.2%로 나타났으며, 수식으로 제시된 혼합계산 문항보다 낮게 나타났는데, 전체 456개 응답 중에서 오답은 8개가 나타났다.

<표 Ⅳ-4> 문장제로 된 혼합계산에 대한 결과

구　분	인원 수	정답수(오답수)	평균	표준편차	정답률(%)
초등학생	67	394(142)	5.88	1.78	73.5
예비교사	57	448(8)	7.86	0.35	98.2

문장제로 제시된 혼합계산 검사지도 우리나라 교과서에 제시된 차시별 내용에 맞춰 구성되었기 때문에 <표 Ⅳ-5>에서는 문항별 해결 정도를 분석하였다. 8문항 중에서 문장에 제시된 정보와 수식의 구성에 차이가 있어 괄호를 사용해야 하는 4번 문항의 정답률과 세 명이 각각 하루에 모은 구슬의 수를 먼저 구해야 하는 것과 같이 문항에 제시된 정보를 분석하여 식을 구성해야 하는 6번 문항, 여러 가지 연산 기호가 포함된 식을 구성해야 하는 8번 문항에서 정답률이 낮게 나타났다. 또한 순차적으로 수식 구성이 가능하면서 문항 구조가 간단한 1-3번 문항의 정답률이 상대적으로 높게 나타났다. 예비교사들의 경우에는 오답률이 낮아서 문항별로 특이사항을 분석하기는 어렵다고 판단하였다.

<표 Ⅳ-5> 문장제로 된 혼합계산에 대한 문항별 정답률

문 항	1	2	3	4	5	6	7	8
초등학생	60 (0.90)	63 (0.94)	61 (0.91)	39 (0.58)	49 (0.73)	37 (0.55)	50 (0.75)	35 (0.52)
예비교사	56 (0.98)	57 (1.00)	57 (1.00)	56 (0.98)	57 (1.00)	54 (0.95)	57 (1.00)	54 (0.95)

<표 Ⅳ-6>은 문장제 혼합계산 문항에 대한 개인별 득점을 나타낸 것이다. 학생들은 8문항에 모두 정답을 한 비율이 16.4%로 낮게 나타났으며, 가장 낮은 결과를 보인 1명의 학생은 1문항에 정답을 하였다. 예비교사들의 경우에는 1문항을 오답한 경우가 8명이었다.

<표 Ⅳ-6> 문장제로 된 혼합계산에 대한 개인별 득점 분포표

문항	0	1	2	3	4	5	6	7	8
초등학생	0	1 (1.5)	5 (7.5)	2 (3.0)	4 (6.0)	9 (13.4)	17 (25.4)	18 (26.9)	11 (16.4)
예비교사	0	0	0	0	0	0	0	8 (14.0)	49 (86.0)

2. 오류 유형 분석 결과

이 절에서는 혼합계산 해결에 나타난 오류 유형을 본 연구에서 제시한 분석틀에 따라 분석하였다. 먼저 <표 Ⅳ-7>은 수식으로 된 혼합계산에 나타난 오류 유형을 분석한 것이다. 수식으로 된 혼합계산에 나타난 오류 중에서 학생들이 가장 많은 빈도수를 보인 것은 [그림 Ⅳ-1]의 예시와 같이 연산 순서의 오류였다. 연산 순서의 오류의 경우에 괄호가 없는 2, 4번 문항에서는 연산 순서의 오류가 나타나지 않은 반면, 순차적으로 왼쪽에서부터 계산을 하면 정답을 할 수 있는 1, 3번 문항에서는 뺄셈이나 나눗셈보다 덧셈과 곱셈을 먼저 수행한 결과로 오류가 발생하였다[4]. 이러한 오류는 괄호가 있는 경우에는 특징적인 요소인 괄호에 주

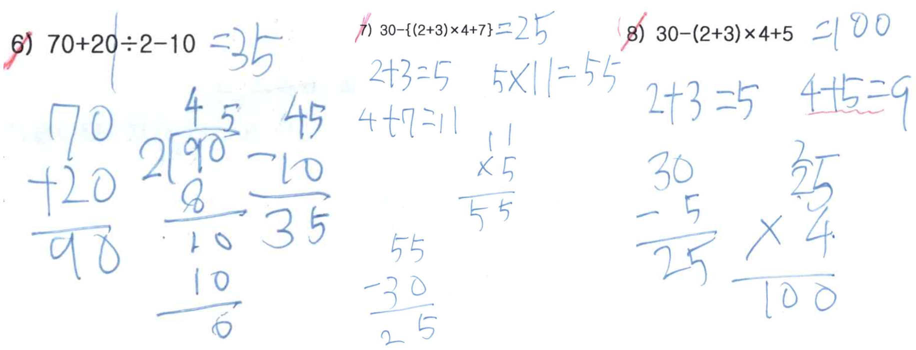
4) 14-4+2=14-6=8, 18÷3×2=18÷6=3과 같은 오류를 의미한다.

목하여 먼저 계산을 수행하지만, 괄호가 없는 경우에는 [그림 Ⅳ-1]의 두 번째와 세 번째 예시와 같이 계산하기 쉬운 인접한 수를 먼저 계산하는 오류와 유사하다.

특히, 3가지 이상의 연산이 혼합된 혼합계산 해결에서는 식의 왼쪽에서 오른쪽으로 해결하려는 일반적인 오류와는 달리, 식을 구성하고 있는 특징적인 연산 기호에 집중하여 문제를 해결함으로써 나타나는 오류에 주목할 필요가 있다. 따라서 혼합계산의 지도에서는 식을 구성하는 특징적인 요소에 초점을 두기보다는 연산 기호 간의 위계에 따른 계산 순서가 중요한 약속이라는 것을 강조할 필요가 있다.

<표 Ⅳ-7> 수식으로 된 혼합계산에 나타난 오류 유형 결과

문항 번호	대상	오류 유형(빈도수)						계
		연산 순서	연산자 선택	기본 수 구구	표기	수식 구성	무응답	
1	학생	2	1	2	·	·	·	5
	예교	·	·	·	·	·	·	0
2	학생	·	3	1	·	·	·	4
	예교	·	2	·	·	·	·	2
3	학생	3	·	1	1	·	·	5
	예교	·	·	·	·	·		0
4	학생	·	·	4	1	·	1	6
	예교	·	·	·	·	·		0
5	학생	2	3	2	·	·	1	8
	예교	·	·		·	·		0
6	학생	8	2	2	1	·	2	15
	예교	1	·	·		·		1
7	학생	3	3	·	2	·	1	9
	예교	1	·	·		·		1
8	학생	14	5	1	1	·	1	22
	예교	·	2	·	·	·		2
계	학생	32	17	14	6	0	5	74
	예교	2	4	0	0	0	0	6



[그림 Ⅳ-1] 수식으로 된 혼합계산에 나타난 한 학생의 오류 예

수식으로 된 혼합계산에서 다음으로 나타난 오류 유형은 부주의한 실수에 의한 오류인 연산자 선택의 오류와 기본 수구구의 오류 및 표기 과정에서 발생하는 오류였다. 이런 3가지 오류 유형은 전형적인 오류라기보다는 부주의한 실수로 보이지만, 학생들의 응답에서 같은 현상이 반복적으로 나타나는 상황이라는 것에서 관심을 가져야 할 필요가 있다.

한편, 예비교사들이 수식으로 된 혼합계산에 나타낸 오류는 단순 실수로 보이는 연산자 선택의 오류가 4개, 연산 순서에 의한 오류가 2개 나타났다. 빈도만으로는 중대한 문제 상황이 아니지만, 학생을 지도하게 될 예비교사라는 입장에서는 혼합계산 지도에 주의할 필요가 있음을 알 수 있다.

문장제로 제시된 혼합계산에 나타난 오류 유형을 분석한 것이 <표 Ⅳ-8>이다. 문장제로 된 혼합계산에 나타난 오류 중에서 학생들이 가장 많은 빈도수를 보인 것은 수식 구성의 오류였다. 오류의 특징으로는 문장제에 기술된 순서대로 수식이 연결되지 않거나, 괄호를 사용해야 하는 문항에서 오류가 많이 발생하였다. 문장제로 된 혼합계산에 다음으로 나타난 오류 유형은 무응답이었으며, 이는 수식을 구성하기 어렵기 때문인 것으로 판단된다. 그런데 수식을 옳게 작성하고서도 연산 순서를 틀리거나 연산자 선택이나 수 구구 및 표기 과정에서 실수와 같은 결과로 인해 오류가 나타난 것도 있었다.

<표 Ⅳ-8> 문장제로 된 혼합계산에 나타난 오류 유형 결과

문항 번호	대상	오류 유형(빈도수)						계
		연산 순서	연산자 선택	기본 수 구구	표기	수식 구성	무응답	
1	학생	2	·	·	1	4	·	7
	예교	·	·	·	·	1	·	1
2	학생	·	·	·	1	3	·	4
	예교	·	·	·	·	·	·	0
3	학생	·	2	·	·	4	·	6
	예교	·	·	·	·	·	·	0
4	학생	1	·	1	·	18	8	28
	예교	·	·	1	·	·	·	1
5	학생	·	·	·	1	14	3	18
	예교	·	·	·	·	·	·	0
6	학생	·	1	1	·	26	2	30
	예교	·	·		·	3	·	3
7	학생	1	·	1	·	9	6	17
	예교	·	·	·	·	·	·	0
8	학생	·	1	2	2	20	7	32
	예교	·	·	·	·	2	1	3
계	학생	4	4	5	5	98	26	142
	예교	0	0	1	0	6	1	8

한편, 예비교사들이 나타낸 오류 유형 중에 수식 구성의 오류가 6개나 나타난 것에 유의할 필요가 있다. 이것은 빈도 면에서 심각한 수준은 아니지만, 초등 예비교사 교육에 활용되는 많은 교과 교육용 각론서에서도 특별히 혼합계산에 대한 내용을 다루지 않는 것에 주목할 필요가 있으며(예: Baroody & Coslick, 1998; Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009; Van De Walle, Karp & Bay-Williams, 2004), 이러한 현상들이 한 원인이 되어 학교 현장에서 교과 지도에 결함이 발생하지 않도록 주의할 필요가 있다. 이것은 배종수(2011)에서 초등 예비교사를 위한 혼합계산의 지도 방안으로 제시하듯이, 실생활 맥락에서 사칙계산 외에 몇 개의 계산이 함께 이루어지는 경우가 많이 있고, 다양한 계산을 쉽고, 간단하고, 편리하고, 빨리 계산하여 해결할 필요가 있으며, 혼합계산의 순서는 상황에 따라 순차적으로, 또는 계산 규약에 맞게 약속을 할 수 있도록 지도해야 한다는 권고와도 맥을 같이 한다.

3. 논의

이 절에서는 혼합계산에 대한 초등학생들과 예비교사들을 대상으로 실시한 검사 결과를 바탕으로 논점을 제시하고자 한다. 먼저, 초등학생들의 혼합계산에 대한 검사 결과, 수식으로 된 문항에서는 86.2%와 문장제로 된 문항에서는 73.5%의 해결 정도를 나타내었다. 각 문항에 나타난 오류 유형에서도 수식으로 된 문항에서는 연산 순서를 잘못 적용한 비율이 높았고, 문장제로 된 문항에서는 수식을 구성하지 못하여 해결하지 못한 비율이 높게 나타났다. 수식에서 정답 정도는 선행 연구 결과와 비슷한 수준이었다(백선수, 김원경, 문승호, 2008). 그렇지만 초등학교에서 혼합계산을 지도하는 목표인 이미 학습한 자연수의 사칙계산을 바탕으로 이들이 혼합되어 있는 계산식의 규약을 알고 해결할 수 있도록 해야 한다는 목표(교육부, 2014b)와 일상생활에서 혼합계산이 필요한 상황에서 적절한 계산식을 구성하여 해결할 수 있도록 지도해야 한다는 두 가지 목표에 비추어 해결 정도와 오류 유형에 대해 혼합계산 지도 시 관심을 기울여서 지도할 사항을 도출하고 확인한 것이다. 이러한 목표 달성을 위해 교과서에 제시할 문제 상황은 혼합계산을 위한 인위적인 상황보다는 학생들의 관점에서 혼합계산이 요구되는 현실 맥락의 문제를 제시할 필요가 있다. 또한 차후 교과서 집필이나 교실 현장에서 혼합계산 문제를 제시할 경우에 식을 구성하는 숫자의 경우에도 계산 자체에 부담이 되지 않고 계산 순서에 초점을 둘 수 있도록 간단한 수를 사용하는 방안을 고려할 필요가 있다. 특히 2015개정 수학과 교육과정에서는 혼합계산이 5-6학년군에서 다루어짐으로써 이전 교육과정을 이수한 학생들보다 학습 부담이 적을 것으로 판단되기 때문에 식의 규약적인 면에서 좀 더 의미 있게 다룰 필요가 있다.

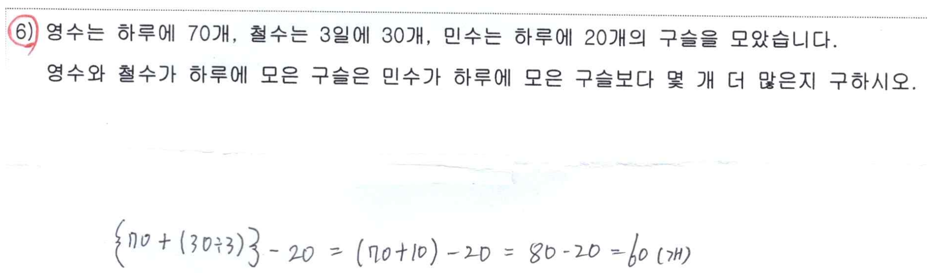
둘째, 예비교사들의 혼합계산에 대한 해결 결과, 수식으로 된 문항에서는 98.7%와 문장제로 된 문항에서는 98.2%의 해결 정도를 나타내었다. 예비교사들의 경우에 나타난 오류에서 연산 순서 오류와 식 구성의 오류와 같은 사례도 나타났으나, 부주의한 결과에 의한 것임이 추후 면담 과정을 통해 알 수 있었다[5]. 그렇지만 문제해결 과정에서 나타날 수 있는 부주의한 실수가 발생되지 않도록 예비교사 교육기간 동안 수학 문제해결에 대한 충분한 경험을 할 수 있는 여건을 조성할 필요가 있다. 또한 예비교사들이 혼합계산이 이루어지는 식의 계산 원리와 규약을 명확히 이해할 수 있도록 교과 교육 내용도 고려되어야 할 것이다.

셋째, 혼합계산에 대한 문제해결 과정을 살펴본 결과, 괄호 사용의 규약 지도에 관심을 둘

5) 예비교사의 경우에 오답의 원인을 파악하기 위하여 오답자를 대상으로 추후 면담을 통한 확인 과정을 거쳤다.

필요가 대두되었다. 혼합계산식에서 괄호는 나중에 발생하는 상황을 먼저 해결해야 하거나, 동시에 이루어지는 상황을 처리하기 위하여 필요하다. 본 검사지의 문장제 2번 문항의 예를 들면 빨간 구슬 3개와 파란 구슬 4개를 주었기 때문에 문장에서 요구하는 바람직한 수식은 14-(3+4)이다. 이것은 시간 차이를 두고 발생하는 상황과는 다르게, 같은 상황에서 일어나기 때문에 그 상황을 괄호로 처리하는 것이 수학적 규약에 맞는 것이다. 그렇지만 답지에서 괄호를 사용하지 않고 14-3-4로 처리한 경우가 학생들은 21명(정답자의 33%), 예비교사들은 30명(정답자의 53%)이나 나타났다. 특히 예비교사들의 경우에 혼합계산에서 괄호의 중요성에 비추어 학생들보다 낮은 반응률은 괄호 사용의 규약보다는 정답 산출에 초점을 두고 응답했다는 면에서 예비교사 교육 시 고려할 점으로 대두되었다.

넷째, 혼합계산에서 괄호 이용과 관련하여, 문제해결 과정을 순차적으로 표현하기 위하여 불필요하게 괄호를 사용한 경우도 나타났다. 이러한 경향은 초등학생들과 예비교사들에게서도 유사하게 나타났다. 예를 들면 [그림 Ⅳ-2]와 같이, 문제해결 과정에서 먼저 해결해 가는 과정을 괄호를 써서 나타내고, 그런 순서로 계산을 했음을 알 수 있다. 이런 예시는 식에서 우선해서 해결해야 할 단계를 나타내는 것으로 괄호를 인식하고 있다는 긍정적 측면과 더불어, 수학식의 계산 순서에 대한 규약으로도 충분한 것 외에 불필요하게 괄호를 사용하려는 경향이 있다는 부정적 측면을 제시해 주고 있다. 따라서 세 번째 논점에서 제시한 괄호 사용의 규약에 대한 내용과 마찬가지로, 혼합계산 식에서 괄호의 이용에 주의를 기울이도록 지도할 필요가 있다.


6) 영수는 하루에 70개, 철수는 3일에 30개, 민수는 하루에 20개의 구슬을 모았습니다.
영수와 철수가 하루에 모은 구슬은 민수가 하루에 모은 구슬보다 몇 개 더 많은지 구하시오.

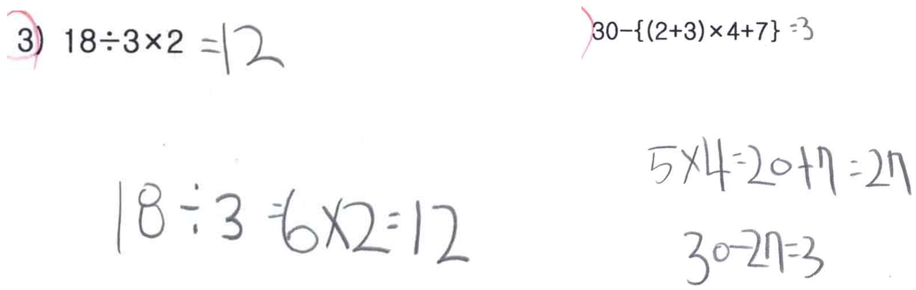
$\{70+(30\div3)\}-20=(70+10)-20=80-20=60$(개)

[그림 Ⅳ-2] 문장제 6번의 불필요한 괄호 사용 예

다섯째, 괄호 사용과 관련하여 앞에서 제시한 두 가지의 사례 외에도 초등학교 자연수의 혼합계산에서 중괄호{ }와 대괄호[ ] 사용의 문제를 고려할 필요가 있다. Ⅱ장의 이론적 배경에서 살펴본 바와 같이, 중괄호와 대괄호는 실생활 맥락에서 사용 가능성이 많지 않으며, 계산 기능을 높이거나 확인하기 위한 수식 문제해결에 사용되는 경우가 대부분이다. 본 연구에서도 중괄호가 필요한 7번 문장제의 경우에 학생들은 소괄호를 두 번 사용하여 문제를 해결하거나, 중괄호를 사용하지 않고 순차적으로 식을 구성하여 해결한 경우가 나타났다. 특별히 소괄호, 중괄호, 대괄호 구분의 필요에 대한 합리적 근거를 도출하기가 어려운 상황에서 교과서에 중괄호와 대괄호 사용은 재고할 필요가 있다. 이것은 차후 교과서 개발 과정에서도 고려할 사항으로 제안한다. 또한 중괄호와 대괄호는 교육과정에서도 명시적으로 제시하지 않는 사항이기도 하다.

여섯째, 등호 사용의 문제이다. 수학에서 등호는 서로 값이 같다는 ‘동치(equivalence)’의

의미를 가지고 있다. 그렇지만 많은 선행연구에서 학생들은 문제해결 과정에서 동치의 의미보다는 문제해결 단계의 '입력-출력'의 과정을 표현하는 신호(signal)로 인식하는 경향이 있다(Chapin, O'Connor & Anderson, 2013). 이러한 신호의 의미로 등호를 사용하면 14-4-3의 경우에 14-4=10-3=7과 같이 문제를 해결하게 되는 것이다.



[그림 Ⅳ-3] 등호의 잘못 사용된 예

본 연구에서도 검사 대상들 중에는 [그림 Ⅳ-3]과 같이 등호를 부적절하게 사용한 경우가 나타났다. 따라서 혼합계산 식의 계산 순서에 대한 규약과 마찬가지로 등호와 같은 수학 기호의 분명한 의미 이해가 수학 수업을 통해 이루어지도록 주의를 기울일 필요가 있다.

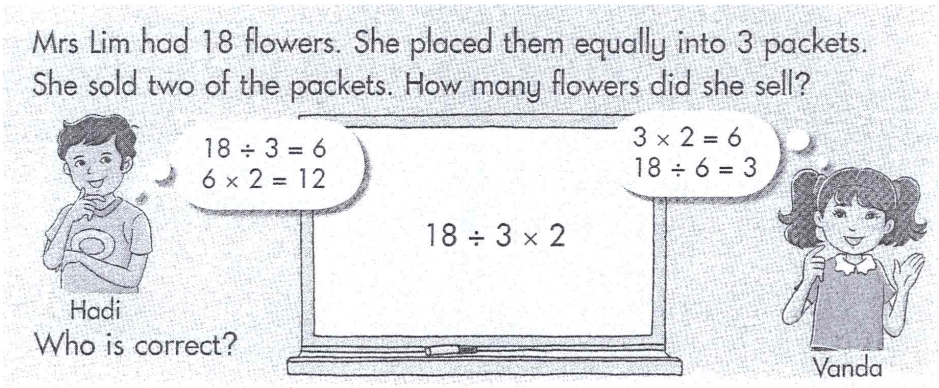
Ⅴ. 결론

초등학교 수학에서 다루는 혼합계산은 수학의 역사를 통해 만들어진 계산 규약을 다루는 대표적인 학습 내용 중의 하나이다. 현재 다루고 있는 혼합계산 규약이 언제 형성되었는가와 왜 그러한 규약으로 나타났는가에 대해서는 명확하지 않지만, 대수적 성질과 대수식을 전개하는데 편의성을 도모하기 위하여 그 규약이 만들어지게 되었을 것으로 판단되고 있다(고정화, 2012; Peterson, 2000). 따라서 현재 받아들여지는 그 규약에 맞도록 학생들은 계산을 수행할 수 있는 능력을 갖추는 것이 필요하다.

초등학교 교육과정에서 자연수의 혼합계산은 2009개정 수학과 교육과정에서는 3-4학년군에서 다루도록 되어 있고(교육과학기술부, 2011), 교과서에서는 4학년 과정에서 다루고 있다(교육부, 2014a). 그렇지만 현행 2015개정 교육과정에서는 5-6학년 군에서 다루게 된다(교육부, 2015). 교육과정에 따라 다루는 학년군은 다를지라도 자연수의 혼합계산에서 학생들은 이미 학습한 사칙계산의 원리를 바탕으로 여러 개의 연산 기호가 섞인 혼합계산 식의 계산 원리를 이해하여 문제를 해결하도록 해야 한다. 이것은 이후에 중학교 과정에서 다루는 정수와 유리수의 혼합계산으로 이어지기 때문에 계산의 규약과 원리를 파악하는 것은 더욱 중요하다.

본 논문에서는 67명의 초등학생들과 57명의 예비교사들을 대상으로 수식과 문장제로 이루어진 자연수의 혼합계산에 대한 해결 정도와 오류를 분석하였다. 해결 정도에서는 정답과 오답으로 구분하였고, 각 문항별, 득점별로 제시하였다. 오류 분석에서는 본 연구에서 만든 분석틀에 따라 수식과 문장제에 나타난 오류 유형을 분석하였다.

분석 결과, 다음을 알 수 있었다. 첫째, 초등학생들은 수식과 문장제로 된 문항에서 86.2%와 73.5%의 해결 정도를 나타내었다. 이러한 결과는 유사한 내용으로 실시된 국가 수준의 학업 성취도 결과나 혼합계산에 대한 선행연구와 유사한 결과이다. 그렇지만 학생들이 보인 오류에서는 혼합계산에서 나타나는 전형적인 오류인 계산 순서의 오류, 문장제에서 수식을 구성하지 못하는 오류 등을 보여 혼합계산 지도의 취지에 맞는 교수 방안을 모색할 필요가 있다. 이를 위해 연산의 위계를 직관적으로 파악할 수 있는 도표 제시 방법이나 [그림 Ⅴ-1]과 같이 하나의 상황을 다르게 표현한 식의 계산 과정을 이용하여 학생 상호간에 옳은 식을 찾고 토론하는 방식의 교과서 내용 구성이나 학습 자료 제시 및 수업 운영 방안을 모색할 필요가 있다. 이를 통해 계산 순서를 정해야 하는 이유를 학생 스스로 깨닫도록 이끌어 주는 수업을 구성해야 할 것이다. 즉 혼합계산 지도에서는 학생들이 계산 순서가 다르면 결과가 다르게 나올 수 있음을 발견하고, 계산 순서를 정해야 할 필요성을 인식하도록 해야 한다. 더불어 실생활 상황에서 혼합계산 식을 구성하고 문제를 해결할 수 있도록 지도해야 한다.



[그림 Ⅴ-1] 옳은 혼합계산식을 찾는 예(Edge, Lee & Hoe, 2014. p. 58)

둘째, 예비교사들의 경우에 적은 수의 연산 순서 오류와 식 구성의 오류와 같은 오류도 나타났으나, 면담 확인을 통해 부주의에 의한 결과로 확인되었다. 그렇지만 문제해결 과정에 실수가 발생하지 않게 하는 방안의 하나로 예비교사 교육 기간에 다양한 문제해결을 경험할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있으며, 혼합계산과 관련하여 식의 계산 원리와 규약을 명확히 이해할 수 있도록 교과 교육 내용의 구성에서도 세심한 주의가 필요하다. 예비교사 교육과정에서는 미래에 가르칠 내용에 대한 이해(내용적 지식; Subject Matter Knowledge)만이 아니라, 가르칠 지식과 관련된 다양한 유형의 지식(Pedagogical Contents Knowledge)을 익히는 것이 필요하다(강정기, 김민정, 정상태, 노은환, 2014). 이런 면에서 예비교사들은 혼합계산을 지도할 때 정해진 순서대로 계산해야 하는 이유가 '수학적인 약속'이기 때문에 지켜야 한다고 지도하기보다, 계산 순서가 다르면 발생하는 문제 상황을 구성하여 식의 계산 순서를 정해야 할 필요성을 학생들이 스스로 깨닫도록 이끌어 주는 교수 방법의 필요성을 인식해야 할 것이다.

셋째, 수학 학습에서 나타나는 오류와 관련하여 오류 발생의 원인을 학생의 탓으로 돌리는 것은 교육 현장에서 초임교사나 가르칠 지식과 방법에 대한 이해가 부족한 교사에게서

나타나기가 쉽다(송영근, 방정숙, 2012). 혼합계산과 관련하여 교육 경험이 부족한 예비교사들은 단지 ‘약속’이기 때문에 계산 순서에 맞게 계산하도록 지도하고, 기억하기 쉽도록 수시로 연습을 시켜야 한다는 생각하기 쉽다. 교사들은 학생들이 학습할 내용에 대해 어떤 방식으로 생각하고 수행하는가에 대한 이해와 문제해결의 어려움의 원인이 무엇인가를 파악하는 것이 중요하다. 학생들이 보이는 오류는 피해야 할 대상이 아니라, 학생들의 사고를 이해하고 새로운 교수 방법을 적용할 기회를 얻는 정보로 생각해야 한다. 혼합계산과 관련하여 계산 순서에 대한 규약을 설정한 배경과 이유, 학생들이 보이는 오류의 원인 분석과 같은 실제적 지식만이 아니라, 학생들이 그 이유를 탐구할 수 있도록 수업 환경을 구성해 줄 수 있는 지식을 갖추도록 예비교사 교육을 할 필요가 있다.

마지막으로 본 연구에서는 혼합계산 문제해결 과정에서 괄호 사용의 유무와 적절성, 등호를 동치 개념보다는 입출력 과정을 나타내는 신호로 이용하는 것과 같은 문제가 확인되었다. 따라서 수학에서 이용되는 규약과 기호의 의미와 같은 형식적인 면에서의 관심도 필요하다고 판단된다.

국가 수준의 학업 성취도 평가 결과에서 알 수 있듯이 학생들의 학업 성취 수준별로 차이가 많이 나타나는 내용이 혼합계산이기도 하다(김동영, 조윤동, 이광상, 전영주, 2013). 본 연구에서도 결과에 제시하지는 않았지만, 검사에 참여한 두 초등학교 학생들의 정답률에서 차이가 나타났다. 따라서 중하위권 학생들의 이 영역에 대한 지도에 관심을 가질 필요가 있다. 또한 자연수의 사칙연산에서 부진이 이후 중학교 과정으로 연결되는 정수와 유리수의 혼합계산에 영향을 끼칠 수 있기 때문에 이에 대한 종단적 분석과 관심이 요구된다.

참고 문헌

강정기, 김민정, 정상태, 노은환(2014). 예비 교사들의 도형 문제에 대한 SMK와 PCK 강화를 위한 DGE 활용. **한국학교수학회논문집, 17**(2), 139-166.

고정화(2012). 초등학교 4학년 혼합계산 지도에 대한 고찰. **수학교육학연구, 22**(4), 477-494.

구미애(1999). **초등 수학 교과의 혼합 연산을 적용하는 문제 만들기에서 나타난 오류 연구**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

교육과학기술부(2010). **수학 4-1**. 서울: ㈜두산동아.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호[별책 8].

교육부(2000). **초・중・고등학교 수학과 교육과정 기준**. 교육부.

교육부(2014a). **수학 4-1**. 서울: ㈜천재교육.

교육부(2014b). **수학 4-1 교사용지도서**. 서울: ㈜천재교육.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호[별책 8].

교육인적자원부(2003). **수학 4-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

김동영, 조윤동, 이광상, 전영주(2013). **2012년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석-수학-**. 한국교육과정평가원 연구보고 ORM 2013-37-3.

김선희, 권점례, 고정화, 김경리, 조지민, 박정, 김수진(2006). **2005년 국가수준 학업성취도 평가 연구-수학-**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2006-1-3.

김화수(2013). 사칙연산의 1차적 개념을 학습한 학습자의 Schema가 거듭제곱과 혼합계산의 관계적 이해에 미치는 영향에 대한 사례연구. **초등수학교육, 16**(3), 251-266.

문교부(1983) **산수 5-1**. 문교부.

박경미 외 35(2015). **2015 수학과 교육과정 개정을 위한 시안 개발 정책 연구**. 한국과학창의재단.

배종수(2011). **초등수학교육 지도법**. 도서출판 JB Math.

백선수, 김원경, 문승호(2008). 초등학교 5학년 학생의 자연수 혼합계산에서 나타난 오류에 관한 연구. **East Asian Math. J. 24**(5), 547-564.

송영근, 방정숙(2012). 평면도형에 관한 학생들의 오류에 대한 초임 초등 교사들의 교수학적 내용 지식 분석. **한국학교수학회논문집, 15**(3), 429-451.

신항균, 황혜정, 이광연, 김화영, 조준모, 최화정, 윤기원(2013). **중학교 수학 1**. 서울: 지학사.

정기근, 김민정, 노은환(2007). 자연수 혼합계산에서 처방 프로그램의 개발 적용에 대한 효과 분석. **한국학교수학회논문집, 10**(4), 471-485.

조영미, 이대현, 이봉주(20004). **2003년 국가수준 학업 성취도 평가 연구: 수학**. 한국교육과정평가원 연구보고RRE 2004-1-4.

藤井齊亮 ほか 41(2013). **新しい算數 4下**. 東京書籍.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1989). *Fostering Children's Mathematics Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Bell, M., Bell, J., Bretzlauf, J., Dillard, A. Flanders, J., Hartfield, R., Isaacs, A., Leslie, D. A., McBride, J., Pitvorce, K., & Saecker, P.(2007). *Everyday Mathematics-The University of Chicago School Mathematics Project-Student reference book*. IL: McGraw Hill.

Breitenbath, J.(2000). Order of Arithemetic Operations. http://mathforum.org/library/view/57021.html.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2013). *Classroom Discussions in Math: A Teacher's Guide for Using Talk Moves to Support the Common Core and More* (3rd ed.). Ca: Scholastic Inc.

Edge, D., Lee, K. P., & Hoe, L. N. (2014). *Maths Works! 5A course book*, 2nd Edition. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Peterson(1998). Ordering the Operations. http://mathforum.org/library/ view/58237.html.

Peterson(1999). Algebric expressions and Order of Operation. http://mathforum.org/library/view/54341.html.

Peterson(2000). History of of Operation. http://mathforum.org/library/view/52582.html.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009) *Helping Children Learn Mathematics, 9th Edition*. John Wiley & Sions.

Sintonnen, A, Uus-Leponiemi, T., Ilmavirta, R, & Rikala, S.(2009). *Laskutaito in English 4A*. WSOYpro OY.

Van De Walle, J. A., Karp K. S., & Bay-Williams, J. M. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York: Allyn & Bacon.

An Analysis on the Error Types of Elementary Students and Pre-service Teachers in Mixed Calculations of Natural Number

Lee, Daehyun[6)]

Abstract

As it's important to understand the order of operation in the mixed calculation of natural number and perform it, mathematics curriculums and textbooks focus ed that students can calculate with understanding the order of operation and its principles. For attaining the implications of teaching about the mixed calculation s, this study analyzed the problem solving abilities and error types of 67 elemen tary students and 57 pre-service teachers using questionnaire which was develo ped in this study and composed of numeric expressions and word problems.

The conclusions drawn from this study were as follows: Students were reveal ed the correct rates(86.2% and 73.5%) in numeric expressions and word proble ms, but they were showed the paradigmatic error types-the errors of the order of operation and the composition of numeric expression from word problems. Ev en though the correct rates of the preservice teachers were extremely high, the result of problem solving processes required that it's needed to be interested in teaching the principles of the order of operation in the mixed calculations. In ad dition, subjects were revealed the problems about using parentheses and equal s ign.

Key Words : Natural number, Mixed calculation, Preservice teacher, Elementar y students, Order of Operation

Received March 16, 2017
Revised June 26, 2017
Accepted June 26, 2017

* 2010 Mathematics Subject Clasification : 97C30
6) Gwangju National University of Education (leedh@gnue.ac.kr)

<부록> 검사지

□ 본 검사는 여러분이 수학 문제를 어떻게 해결하는가를 파악하기 위한 것입니다. 주어진 문제를 읽고, '답'과 '풀이과정'을 적어 주시기 바랍니다. 본 검사 결과는 연구 자료로만 활용됩니다. 검사에 응해 주셔서 감사합니다.

□ 다음을 계산하시오.

1) 14-4+2
2) 14-(4+2)
3) 18÷3×2
4) 18÷(3×2)
5) (70-20)÷2+10
6) 70+20÷2-10
7) 30-{(2+3)×4+7}
8) 30-(2+3)×4+5

□ 다음 문제 상황에 알맞은 식과 답을 쓰시오.

1) 버스에 15명이 타고 있습니다. 첫 번째 정류장에서 3명이 내리고 탄 사람은 없었습니다. 두 번째 정류장에서 내리는 사람이 없고 5명이 탔습니다. 지금 버스에 타고 있는 사람은 몇 명인지 구하시오.
2) 영수는 철수에게 빨간 구슬 3개와 파란 구슬 4개를 주었습니다. 영수가 처음 가지고 있던 구슬이 14개일 때 남은 구슬의 개수를 구하시오.
3) 학생 16명이 한 보트에 4명씩 나누어 탔습니다. 각 보트에 노를 3개씩 주려고 할 때 필요한 노의 개수를 구하시오.
4) 한 명이 종이꽃을 한 시간에 4개씩 만들 수 있다고 합니다. 6명이 종이꽃을 72개를 만들려면 몇 시간이 걸리는지 구하시오.
5) 영수는 60개의 파란색 구슬에서 30개를 동생에게 주고, 남은 구슬을 3명의 친구에게 똑같이 나누어 주었습니다. 그리고 3명의 친구에게 노란색 구슬을 10개씩 더 주었습니다. 한 명의 친구가 받은 구슬의 개수를 구하시오.
6) 영수는 하루에 70개, 철수는 3일에 30개, 민수는 하루에 20개의 구슬을 모았습니다. 영수와 철수가 하루에 모은 구슬은 민수가 하루에 모은 구슬보다 몇 개 더 많은지 구하시오.
7) 사탕이 30개 있습니다. 남학생 3명과 여학생 2명으로 이루어진 한 모둠에 한 사람 당 4개씩 사탕을 주고, 선생님께는 7개를 드렸습니다. 남은 사탕은 몇 개인지 구하시오.
8) 구슬이 40개 있습니다. 남학생 2명과 여학생 3명으로 이루어진 모둠에 한 사람 당 한 개씩 모두 5모둠에 구슬을 주었습니다. 그런 다음에 선생님한테 5개의 구슬을 받았습니다. 남은 구슬은 몇 개인지 구하시오.