한국학교수학회논문집 제 20 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 20, Number 2, 91-117, June 2017

발생적 모델링을 활용한 로그 단원 교수·학습 자료 개발 및 적용 사례[1]

오장록[2] · 강성모[3]

본 논문에서는 수학적 지식을 스스로 구성하여 개념적으로 이해할 수 있도록 개발된 발생적 모델링을 활용하여 로그 단원에 대한 교수·학습 자료를 개발하고 발생적 모델링 활동을 통해 학생들이 로그 개념을 이해해 나가는 과정을 분석하고자 한다. 이를 위해 로그 단원을 3가지 소주제로 나누고 각각의 소주제별로 발생적 모델링의 교수학적 4단계인 적용, 추출, 압축, 구성 틀에 맞추어 발생적 근원 맥락을 담고 학생 스스로 개념을 구성해 나갈 수 있는 교수·학습 자료를 개발하였다. 개발된 자료를 이용하여 중하 수준 학생 2명과 중상 수준 학생 2명을 대상으로 수업을 진행하였다. 이를 통해 발생적 모델링의 교수학적 4단계를 따르는 로그 단원에 대한 개념 구성 과정을 살펴보고 van Hiele이 제시한 일반적인 수학학습수준을 바탕으로 학생들의 로그 단원에 대한 이해정도를 분석하여 몇 가지 교수학적 시사점을 제안하였다.

주요용어 : 발생적 모델링, 로그, 수학학습수준

Ⅰ. 서론

개념은 수학적 사고의 기본 단위로써 그 능력을 향상시키는데 중요한 역할을 한다. 예정아(1992)는 수학적 개념의 이해 정도가 문제 해결의 성취도에 긍정적인 영향을 끼친다고 하였고 Schoenfeld(1988)는 수학적 사고는 다양한 사실과 절차를 아는 것뿐만 아니라 그들 사이의 연결성을 이해하는 것이라고 하였다. 특히, Hiebert & LeFevre(1986)는 '개념적 지식'은 수학적 개념을 이해하고 그 개념들 사이의 관련성을 이해하는 능력으로써 이러한 '개념적 지식'을 풍부하게 만들기 위해서는 '절차적 지식'이 필요하며 '개념적 지식'과 '절차적 지식'이 적절한 균형을 이룰 수 있도록 지도하여야 한다고 하였다.

하지만 학교 현장에서 다루어지고 있는 수학적 개념 중 많은 부분이 개념들 사이의 연결성을 만들지 못하고 무의미한 공식들을 이용해 단순히 계산을 수행하고 '절차적 지식'에만 초점을 맞춰 문제를 해결하는 결과론적 측면만을 강조하고 있어 그 문제가 심각하다. 로그 개념 역시 일반적으로 학교에서 이루어지는 교수·학습 방법을 살펴보면, 로그의 본질적인 의미는

* MSC2010분류 : 97C70, 97D60
1) 이 논문은 제1저자의 2016년 석사학위 논문 일부를 재구성한 것임.
2) 신용중학교 (roksno2@naver.com)
3) 전남대학교 (skang4450@chonnam.ac.kr), 교신저자

내포하지 않은 채 지수의 역으로서 로그를 형식적으로 정의하고 이를 통해 성질을 제시한 후 단순히 로그 계산을 수행하는 무의미한 기계적 학습이 이루어지도록 지도되고 있어 학생들이 로그를 이해하는데 많은 어려움을 겪고 있다는 여러 가지 논의가 진행되어 오고 있다(민세영, 1997; 이경숙, 2002; 이정아, 지혜정, 2005; 이현미, 2006; Tabaghi, 2007; 조정수, 2011; 조현경, 2014).

이러한 상황을 개선하기 위해 고안된 로그 개념의 교수·학습을 위한 대안적인 접근 방법을 살펴보면, 로그 개념의 역사-발생적 원리를 활용하자는 측면과 지수·로그 개념이 완전히 분리될 수 없는 개념이므로 지수·로그의 상호보완적인 유기적 측면을 활용하자는 주장이 제기되어 왔다. 그러나 로그 개념의 역사-발생적 측면의 접근은 2009 개정 교육과정 전에는 수열이 로그 단원보다 나중에 배열되어 학교 현장에서 적용하는데 한계가 있었고, 로그의 본질적인 이해에만 초점을 맞추다보니 시간적으로나 내용적으로 학생들에게 학습 부담을 가중시켰고 그에 따른 개선의 필요성이 야기되었다(민세영, 1997; 이정아, 2005). 또한, 지수·로그 개념의 상호 보완적인 유기적 측면의 접근은 지수, 로그, 지수함수, 로그함수들 사이의 관계망을 형성할 수 있다는 장점은 있었지만 2009 개정 수학과 교육과정에서 지수·로그와 지수·로그함수가 다른 두 과목으로 편성되어 학교 현장에서 적용하기가 어려워졌고 지수함수의 역으로 압축된 기호적 형태로 로그를 바로 정의해야하기 때문에 실질적으로 학생들이 그 의미를 파악하는 것이 쉽지만은 않다는 점이 드러났다(조현경, 2014).

강향임(2013)은 역사적으로 필요에 의해 새롭게 정의된 개념에 대한 본질적 이해를 돕기 위해서는 역사적 발달 과정에서 나타나는 근원적인 아이디어를 포함하는 발생 맥락을 활용한 수학적 활동을 통해 학생들이 스스로 그 개념을 구성할 수 있도록 도와야 한다고 주장하였다.

이에 본 연구에서는 학생들이 로그 개념의 본질적 의미를 파악할 수 있고 학교 현장의 시간적 제약 및 학생들의 학습 부담을 최소화할 수 있도록 로그의 발생적 근원 맥락을 포함하고 학생 수준에 맞게 재구성된 수학적 모델링을 접목한 ‘발생적 모델링’(강향임, 2013)을 활용한 로그 단원의 교수·학습 자료를 개발하고자 한다. 더 나아가 개발된 교수·학습 자료를 활용하여 실험 수업을 진행하고 발생적 모델링의 교수학적 4단계인 적용, 추출, 압축, 구성의 틀을 바탕으로 학생들의 로그 단원에 대한 개념 구성 과정을 살펴본 후, van Hiele이 제시한 ‘일반적인 수학 학습에 대한 수준’(우정호, 2000)을 바탕으로 로그 개념에 대한 학생들의 사고 및 이해수준을 분석하여 교수학적 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 로그 단원 교수·학습 방법에 관한 선행연구 분석

로그는 지수의 역함수로 정의되기 때문에 학생들이 이해하기 어려워하는 개념 중 하나이다. 이와 같은 로그를 어떻게 가르칠 것인가에 대한 다양한 견해들이 있었지만, 과거에는 지수 개념과 로그 개념의 역사-발생적 과정을 강조하였고 최근에는 두 개념이 완전히 분리될 수 없는 개념이기 때문에 상호보완이 되도록 두 개념의 측면을 유기적으로 가르칠 필요가 있다는 주장이 제기되어 오고 있다. 지수·로그 단원의 대안적 교수·학습 방법에 관한 선행연구를 살펴보면 다음과 같다.

민세영(1997)은 현재 교과서에 나오는 로그의 정의나 로그표는 그 의미나 만들어진 과정에 대해 알지 못한 상태에서 계산문제를 풀 것을 요구하기 때문에 진정한 의미를 이해시킬 수 없다고 하였다. 따라서 로그의 역사발생에 대한 분석을 통하여 로그는 큰 수의 계산과 관련된 문제 상황에서 도입되었고 이러한 문제 상황을 통해 로그를 도입해서 동기를 부여하고 의미 있는 학습을 해야 한다고 주장하였다.

이정아(2005)는 로그에 대한 역사-발생적 전개를 바탕으로 학습지도 자료를 개발하고 실험수업을 실시한 후 그 효과를 비교 분석하였다. 그 결과 학생들의 계산 능력에는 차이가 없었지만 로그의 뜻, 상용로그표의 구성 원리 등 로그에 대한 이해도는 높은 것으로 나타났다고 주장하였다. 하지만 로그개념을 역사적 발달 순으로 이끌어내는 시간이 부가되어야 하므로 제한된 시간으로 인해 어려움이 있었고 그로 인해 학생들은 수업시간 부족과 내용이해의 어려움에 대해 언급하였다.

김부미, 정은선, 안연진(2009)은 민세영(1997)의 연구와 같이 수학사를 수업에 적용하는 것은 의미 있는 일이지만, 교육과정의 순서에 맞지 않는 부분이 있어 수업 시간에 직접 활용하기에는 현실적으로 힘들다고 하였다. 따라서 역사-발생적 원리를 따르면서 학교 현장에 직접적으로 활용할 수 있도록 교수·학습 모듈을 제작하고 수행평가로 실시하여 오류 개선 효과는 보았으나 실제 수업에 대한 적용 결과는 보여주지 못하였다고 하였다.

Tabaghi(2007)는 로그를 산술적 측면과 함수적 측면에서 이해해야 한다고 주장하였다. 이때, 함수적 측면에서 로그를 이해하는 것이 중요하며 지수와 지수의 값이 일대일대응임을 파악하고 그 역의 과정으로 지수의 값에 대응하는 지수를 찾는 과정을 거쳐 새로운 함수인 로그를 파악하여야 한다고 주장하였다.

조정수(2011)는 로그의 교수・학습 방법에 대한 새로운 관점과 방법을 고찰하였다. 로그의 함수개념을 이용한 도입, 상용로그표와 그래프를 통해 역대응을 이용하여 해석하는 활동, 상용로그표와 지수함수와 로그함수와의 관계에 대한 활동, 밑 변환 공식에 대한 활동 등을 제시하며 관계성이 풍부한 개념적 지식의 습득 과정을 제시하였으나 실제 현장에 적용하지 않고 가능성만을 제시하였다.

조현경(2014)은 로그를 지수로 인식할 수 있도록 $a^{\log_a b} = b$와 같은 지수표현을 활용하여 로그를 지수로 인식하게 함으로써 로그의 필요성과 유용함을 느끼게 해야 한다고 주장하였다. 이는 로그의 정의, 성질 등을 이해시키기에는 효과적이었으나 압축된 형태의 기호로 로그를 이해해야 하므로 지수표현에 익숙해지지 않은 학생들은 오히려 어려움을 호소하였다는 아쉬움을 드러냈다.

이와 같은 로그 단원의 교수・학습 방법에 대한 연구들은 학생들의 로그와 그 성질에 대한 이해를 목표로 하고 있었다. 역사-발생적 원리를 적용한 연구는 학생들의 로그에 대한 이해측면에는 부합하나 수업 시간에 직접 적용하기에는 학습 부담 및 시간의 제약으로 인해 어려움이 많음을 드러냈다. 또한 지수・로그와 지수함수・로그함수의 유기적 측면을 활용한 교수・학습 방법은 2009 개정 수학과 교육과정의 흐름상 학교 현장에 직접 적용하는데 한계가 있었다.

따라서 본 연구에서는 로그의 본질적 이해를 돕기 위한 방안으로 발생적 맥락을 포함하고 학습 부담 및 시간을 줄이기 위해 학생 수준에 맞게 재구성된 발생적 모델링을 활용한 교수・학습 자료를 개발하고자 한다. 더 나아가 발생적 모델링을 활용한 교수・학습 방법이 실제 수업에 적용 가능한지 그리고 의미 있는 학습이 이루어지는지 분석함으로써 선행연구의 한계점을 극복하고자 한다.

2. 발생적 모델링

역사적으로 필요에 의해 새롭게 정의된 개념에 대한 이해를 돕기 위해서는 개념의 역사적 발달 과정에서 나타나는 근원적인 아이디어를 포함하는 발생 맥락을 활용한 수학적 활동을 통해 학생들이 스스로 개념을 구성할 수 있는 기회를 제공해 주어야 한다. 이를 바탕으로 강향임(2013)은 미적분 개념을 학생 스스로 구성할 수 있도록 돕기 위해 역사적 발생 맥락을 활용한 발생적 모델링을 개발하여 교수·학습에 적용하였다. 학생들이 수학적 지식을 스스로 구성하여 개념적으로 이해할 수 있도록 개발된 발생적 모델링은 개념의 역사적 발생 맥락을 활용한다는 내용적인 특징과 개념의 점진적 구조의 발생 맥락을 해결하기 위해 적용, 추출, 압축, 구성 단계를 거친다는 구조적인 특징을 가지고 있다(강향임, 2013). 이때, 점진적 구조의 발생 맥락이란 학생들이 직관적으로 해결할 수 있는 맥락(상황) 속에서 점차 높은 수준의 사고 과정을 통해 개념의 발생 맥락을 이해하고 해석할 수 있도록 학생들의 수준에 맞게 개념의 역사발생 과정을 재구성하고 재해석하여 개발한 과제를 의미한다. 발생적 모델링의 구조적 특징과 흐름을 살펴보면 다음과 같다.

발생 맥락의 문제 상황을 해결하기 위해 기존지식을 이용하여 상황을 파악하는 적용 단계, 주어진 상황의 구체적 추론을 통해 해결의 아이디어를 생성하는 추출 단계, 생성된 아이디어를 수학적 개념을 이용하여 해석함으로써 정교화 하는 압축 단계, 정교화 된 아이디어를 확장하여 형식화된 수학적 기호를 이용하여 표현하는 구성 단계로 진행된다.

본 연구에서는 복잡한 계산의 간소화라는 시대적 상황의 필요성에 의해 발명된 로그 개념의 본질적 이해를 바탕으로 학생들이 스스로 로그 개념을 구성해 나갈 수 있도록 다음과 같은 흐름을 따르는 발생적 모델링 활동을 통한 로그 단원의 교수·학습 방법을 제안하고자 한다.

Ⅰ 단계 (적용-상황적 추론 단계): 기존 지식을 이용한 상황 파악
Ⅱ 단계 (추출-구체적 추론 단계): 주어진 상황의 추론을 통한 아이디어를 생성
Ⅲ 단계 (압축-수학적 추론 단계): 생성된 아이디어의 정교화
Ⅳ 단계 (구성-대수적 기호화 단계): 정교화 된 아이디어를 형식화된 기호모델로 표현

3. van Hiele의 ‘일반적인 수학학습에 대한 수준’

Freudenthal(1991)은 수학적 사고활동의 본질을 수학화라고 하였으며, 수학 학습-지도는 기성 수학을 부과하는 것이어서는 안 되며 수학의 발생과정을 고려하여 학습자의 현재의 상황(학습수준)에 맞게 현실적인 상황을 고려한 활동을 통해 학생 스스로 재발명하도록 지도해야 한다고 주장하였다. 이와 같은 Freudenthal의 학습수준이론은 학습 수준이 여러 단계로 존재하기 때문에 학생들마다 수학 학습을 위한 수준이 다르며 수준에 맞는 학습을 실시해야 한다는 것을 강조하였으며 이는 제자인 van Hiele(1986)의 기하학습수준 이론을 통해 입증되고 구체화 되었다.

van Hiele이 제시하는 기하적 사고 수준은 5단계로 설명되는데, 제 0수준은 주변 대상물의 외관에서 도형을 시각적인 방법으로 판별하는 단계로서 도형의 성질들을 구체적으로 설명할 수 없는 단계이다. 제 1수준은 주변 대상의 정리 수단이었던 도형이 연구의 대상이 되어, 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악하는 단계이다. 제 2수준은 도형의 성질과 도형 사이의 관계를 연구하기 위해 명제를 그 수단으로 사용하는

단계이다. 제 3수준은 명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단으로 사용되는 단계로서 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하고 전체 기하의 연역체계를 이해할 수 있는 단계이다. 마지막으로 제 4수준은 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있고, Hilbert류 기하의 형식적 엄밀성을 파악할 수 있는 단계이다(<표 Ⅱ-1>).

<표 Ⅱ-1> van Hiele의 기하학습수준

수준 / 고찰	0수준	1수준	2수준	3수준	4수준
대상	주변의 사물, 구체물	도형	성질	명제	논리
수단	도형	성질	명제	논리	

그 후 van Hiele은 자신의 기하학습수준이론을 일반화하여 모든 수학적 개념의 이해에 적용할 수 있다고 주장하면서 수학적 사고수준을 크게 시각적 수준, 기술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역체계를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 통찰하는 수준으로 구분하여 '일반적인 수학학습에 대한 수준'을 제시였다(<표 Ⅱ-2>). 이는 학교수학에서 기술적 수준부터 형식적 논리를 파악하는 수준까지 다루어야 한다고 말하였으며 특히 시각적 수준의 중요성도 강조하였다. 더 나아가 학생들의 사고수준을 파악하여 그에 따른 사고 교육이 이루어지기 위해서는 각 수준으로의 이행 과정을 잘 살펴야 한다고 주장하였다(정영옥, 1997; 우정호, 2000). 이 van Hiele의 기하학습수준이론은 상당히 중요하여 이 이론을 이용한 연구는 최근까지도 진행되어지고 있다(황석윤, 김익표, 2015).

본 연구에서는 로그 개념에 대한 학생들의 사고(이해) 수준을 파악하기 위한 방안으로 '일반적인 수학학습에 대한 수준'을 활용하여 학생들의 로그 개념의 이해정도를 분석하고자 한다.

<표 Ⅱ-2> van Hiele의 일반적인 수학학습에 대한 수준

수준 / 고찰	시각적 수준	기술적 수준	이론적 수준	형식적 수준	논리형식적 수준
대상	구체적 맥락(상황)	수학적 개념	개념의 정의	성질	명제
수단	수학적 개념	개념의 정의	성질	명제	

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 발생적 모델링 활동을 통한 학생들의 로그 개념 구성 과정을 살펴보고자 함에 있다. 무엇보다 새로운 개념에 대한 의미 있는 학습이 이루어지는지 살펴보는 것이 중요하므로 연구 대상을 선정하는데 있어서 로그 개념에 대한 선행 학습 경험이 없고, 스스로 개념을

구성해 나갈 수 있는 기본적인 능력은 가지고 있는 학생들을 대상으로 생각하였다. 따라서 기존에 배운 기초적인 수학적 지식은 이해하고 있어야 하므로 하위권 학생들은 제외하였고, 상위권 학생들은 평소 수학에 대한 흥미나 관심이 높기 때문에 개념의 이해 측면에서 뛰어날 것이라 생각하여 본 연구 목적에 맞지 않아 제외하였다. 더 나아가 실험 수업 중 학업성취수준이 미흡한 학생들도 발생적 모델링 활동을 통해 스스로 개념을 구성해 나갈 수 있는지, 교사의 적절한 안내가 주어지면 학생들 사이에서도 서로 조력자의 역할을 하며 의미 있는 의사소통이 이루어지는지를 살펴보고자 학업성취수준이 다른 학생들로 선정하였다. 이러한 기준에 의거하여 광역시 소재 인문계 고등학교 1학년 중하위권 학생 2명(학생1, 학생2), 중상위권 학생 2명(학생3, 학생4)을 선정하였다.

2. 연구 방법

본 연구는 발생적 모델링을 활용한 교수·학습 상황 속에서 학생들이 로그의 발생적 근원 맥락을 바탕으로 스스로 개념을 구성해 나갈 수 있는지, 로그 개념에 대한 이해수준은 어느 정도인지를 분석하는데 목적이 있다. 이는 수업의 역동성을 고려한 실제 수업 상황 속에서 학생들의 반응을 관찰할 때 그들의 사고과정을 주의 깊게 살펴볼 수 있을 것이다. 즉, 결과 지향적인 연구보다는 과정 지향적인 연구를 수행하는 것이 바람직하므로 정성적 사례연구를 실시하였다.

Stake는 사례연구로부터 얻은 지식은 다음 네 가지 중요한 측면에서 다른 연구로부터 얻은 지식과 다르다는 것을 주장하였다. 첫째, 사례연구는 추상적이기보다는 더 생생하고 더 구체적이고 더 감각적이기 때문에 우리 자신의 경험에 영향을 미친다. 둘째, 우리의 경험은 맥락에 근거하고 사례연구 지식도 맥락에 근거하므로 다른 연구 설계에서 나온 추상적이고, 형식적인 지식과 구별된다. 셋째, 사례연구는 독자들이 사례에 대한 새로운 자료를 이전 자료에 추가할 때, 그들 자신의 경험과 이해로 사례연구에 접근함으로써 일반화를 이끄는 지식을 얻게 되므로 독자의 해석에 의해서 더욱 발전한다. 넷째, 사례연구는 독자들에 의해서 결정된 관련 집단에 좀 더 근거를 둠으로 전통적인 연구와는 다르게 관련 집단에 일반화를 확대시킬 수 있다(Merriam, 2005 재인용).

또한, 정성적 사례연구는 실제 수업 상황과 현상에 대하여 풍부하고, 전체적인 설명을 이끌어 낼 수 있고, 결과 분석을 위한 현장 연구적인 성향을 갖기 때문에 현장과 실제 상황 속에서 활동하고 상호작용 하는 인간을 이해하는 데 도움이 되는 등 많은 장점을 갖고 있다(김윤옥 외, 2001).

이상에서 살펴본 바와 같이 발생적 모델링 활동을 통한 학생들의 개념 구성과정 및 사고(이해) 수준을 분석하기 위해서는 실제 교수·학습 상황을 깊이 있게 들여다보고 연구해야 하므로 정성적 사례 연구가 적절하다고 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 정성적 사례연구를 통해 수업 장면의 상세한 기술과 설명을 제시함으로써, 현상을 이해하는데 도움이 되도록 하였다.

3. 연구 절차

본 연구는 [그림 Ⅲ-1]과 같이 발생적 모델링을 활용한 로그 단원 교수·학습 자료 개발, 수학학습수준 분석틀 개발, 실험 수업, 정성적 사례연구를 바탕으로 한 자료 수집 및 분석으로 추진하였다.

▷ 발생적 모델링을 활용한 교수·학습 자료 개발 ▷ 수학학습수준 분석틀 개발	⇨	실험 수업	⇨	자료 수집 및 분석

[그림 Ⅲ-1] 본 연구의 연구 절차

1) 발생적 모델링을 활용한 교수·학습 자료 개발

본 연구에서는 수학적 개념의 발생적 근원 맥락을 활용하면 학생들이 스스로 의미를 부여하여 이해를 바탕으로 한 개념의 구성이 이루어지는지 살펴보고자 하였다. 이에 세 가지 세부관점을 바탕으로 발생적 모델링을 활용한 로그 단원의 교수·학습 자료를 개발하였다.

첫째, 수학적 개념은 시대적 필요에 의해 발명되고 체계화 되었다. 로그 개념 역시 16~17세기 항해술과 천문학 등의 발전으로 '어떻게 하면 조금이라도 쉽게 계산이 가능할까?'라는 큰 수의 복잡한 계산을 단순화할 절박한 필요성으로 인해 발명된 개념 중 하나이다. 이와 같이 필요에 의해 발명된 수학적 개념의 본질적 의미를 이해하기 위해서는 학생들 또한 수학자들이 고민했던 사고과정을 간접적으로 남아 체험할 필요가 있다. 이에 본 연구자는 두 수열 사이의 관계성을 분석하여 복잡한 수 계산의 간소화 가능성을 인식하고 로그를 정의하게 된 로그의 역사-발생적 과정을 학생들이 체험할 수 있도록 하기 위해 로그 개념 도입 초기에 Toumasis(1993)가 연구 제시한 예를 참고하였다.

둘째, 학교 현장에서 실질적으로 적용가능하고 학생들의 학습 부담을 최소화하기 위해 로그 단원을 현재 교과서 흐름과 비슷하게 로그의 정의, 로그의 성질, 밑 변환 공식으로 재구성하여 개발하였고 본 연구목적에 부합할 수 있도록 각각의 소주제에 대한 개념 도입 초기에 로그의 발생 맥락을 활용하여 형식화된 개념 정립이 이루어질 수 있도록 모델링하여 학습 체계를 구성하였다.

셋째, 발생적 모델링 활동을 통한 학생들의 로그 개념 구성 과정을 살펴보고자 발생적 모델링의 교수학적 4단계의 흐름에 따라 개발하였다. 이를 위해 개념의 발생 맥락이나 기존 지식을 이용해 주어진 상황을 파악할 수 있는 활동(적용), 파악된 상황을 추론을 통해 해결해 나가면서 아이디어를 생성하는 활동(추출), 생성된 아이디어를 수학적 개념을 이용해 정교화 하는 활동(압축), 정교화 된 추론 모델을 형식화된 대수적 기호모델로 표현하는 활동(구성)이 이루어질 수 있도록 교수·학습 자료를 개발하였다.

2) 수학학습수준 분석틀 개발

본 연구에서는 발생적 모델링을 적용한 로그 단원 지도 시 학생들이 로그에 대한 개념을 어느 정도 수준까지 이해할 수 있는지를 분석하고자 van Hiele이 제시한 '일반적인 수학학습에 대한 수준'(우정호, 2000)을 바탕으로 로그 개념의 학습 수준을 나누고자 한다. 이를 통해 개발한 로그 개념의 학습 수준은 다음과 같다.

제 1수준은 시각적 수준으로, 구체적인 맥락을 통해 주어진 수들에 대응하는 지수를 이용하면 복잡한 수들의 계산을 간소화할 수 있다는 것을 인식하는 수준이다. 여기서 구체적인

맥락이란 이미 알고 있는 수열이라는 수학적 지식을 통해 등차수열과 등비수열의 각 항이 서로 대응된다는 관계를 말한다. 즉, 복잡한 계산의 간소화를 위해 각각의 수에 대응하는 지수를 찾을 필요성을 느끼는 단계로서 로그의 관한 아이디어를 암묵적으로 인식하게 되는 수준이라 볼 수 있다.

제 2수준은 기술적 수준으로, 복잡한 수들의 계산의 간소화를 위해 모든 수들에 대응되는 지수를 찾을 필요성을 인식하고 지수개념을 이용하여 로그를 정의하는 수준이다. 로그의 정의를 도입하고 기호화할 때는 '등차수열의 각 항을 이에 대응하는 등비수열의 항의 로그'라고 정의한 로그의 발생 맥락을 활용하여 학생들이 로그를 표현할 수 있는지를 살펴보고 그 이후에 Euler가 정의한 지수를 이용한 현대적인 로그의 정의를 이해하고 표현할 수 있는지가 기술적 수준의 척도라 볼 수 있다.

제 3수준은 이론적 수준으로, 정의된 로그가 탐구 대상이 되어 로그를 능숙하게 다루기 위해 등차수열과 등비수열의 관계 속에서 로그의 성질을 추론할 수 있는 수준이다. 더 나아가 주어진 로그표를 이용해 다른 수많은 로그표를 구성할 필요성을 인식하고 로그표 변환(밑 변환 공식)의 아이디어를 추론할 수 있는 단계이다.

제 4수준은 형식적 수준으로, 로그의 성질 및 로그표 변환의 아이디어(밑 변환 공식)가 탐구 대상이 되어 이를 일반화하고 참임을 보이기 위해 지수를 이용한 로그의 정의를 활용하여 연역적인 방법을 통해 논리적으로 증명할 수 있는 수준이다.

제 5수준은 논리・형식적 수준으로, 로그라는 학문 자체가 연구 대상이 되어 다른 수학 체계 속에서 로그의 역할 및 활용도를 탐구하는 단계이다. 즉 적분을 통해 로그 함수를 정의하고 그 역함수로서 지수함수를 정의하게 되며 그들 사이의 관계를 밝히고 확장하여 수학적 이론으로 체계화할 수 있는 수준이다.

본 연구는 고등학교 1학년 로그 단원에 관한 개념의 이해 정도를 분석하고자 하므로 제 1수준에서 제 4수준까지의 학습을 기대하고 학생들의 수준을 파악하고자 하였고 <표 Ⅲ-1>과 같이 로그 개념에 관한 수학학습수준의 분석틀을 개발하였다.

<표 Ⅲ-1> 로그 개념에 관한 수학학습수준 분석틀

수준	수준의 의미	로그 개념의 수준별 분석의 관점
시각적 수준	구체적 맥락(상황)속에서 막연하게 **수학적 개념의 필요성을 인식**	구체적인 맥락을 통해 복잡한 수에 대한 계산의 간소화를 위해 각각의 수에 대응하는 **지수를 찾을 필요성을 인식**
기술적 수준	수학적 개념의 필요성이 연구의 대상이 되어 이를 **정의**하고 표현	지수를 표현하기 위한 도구의 필요성을 인식하고 지수개념을 이용하여 **로그를 정의**
이론적 수준	정의된 수학적 개념을 정리하기 위해 추론을 통해 **성질**을 파악	정의된 로그를 이용해 복잡한 수에 대한 계산의 간소화 과정을 표현해보고 **로그의 성질 및 밑 변환 공식을 추론**
형식적 수준	성질이 연구의 대상이 되어 그 성질이 참임을 **증명**	로그의 성질 및 밑 변환 공식을 연역적인 방법을 통해 논리적으로 **증명**

3) 실험 수업

실험 수업은 발생적 모델링을 활용하여 개발한 교수·학습 자료를 이용하였고, 본 연구 목적에 맞게 선정된 4명의 학생을 대상으로 야간 자기 주도적 학습시간을 활용하여 총 5차시 분량으로 실제 수업을 진행하였다.

4. 자료 수집 및 분석

본 연구는 정성 연구이므로 연구의 특성상 사례를 깊게 이해하고 동시에 전체적으로 이해할 수 있도록 전반적인 것에 대해서 묘사해야 하고 분석해야 한다(Merriam, 2005). 따라서 자료 수집은 전체적인 실험 수업 장면의 묘사와 분석이 가능하도록 기록 자료와 관찰 자료로 나누어 수집하였다. 기록 자료는 본 실험 수업에서 학생들이 개별로 작성한 활동지 및 연구자가 실험 수업을 진행하는 동안 기록한 교수·학습 자료와 관찰 메모지이다. 관찰 자료는 실험 수업 과정의 전체적인 장면을 파악하고 흐름을 분석하기 위해 녹화한 동영상 및 음성 녹음 파일이다.

실험 수업을 통해 수집된 기록 자료 및 관찰 자료는 발생적 모델링 활동을 통한 학생들의 로그 개념 구성 과정과 로그 개념에 대한 수학학습수준의 변화를 분석하기 위한 자료로 활용되었다. 우선 로그 개념 구성 과정은 발생적 모델링의 교수학적 4단계(적용, 추출, 압축, 구성)별 학습 목표가 설정된 교수·학습 자료를 바탕으로 학생들이 스스로 개념을 점진적으로 구성해 나가고 있는지를 교사와 학생, 학생 상호간의 의사소통 과정 및 활동지를 통해 분석하였다. 또한 학생들의 로그 개념에 대한 이해수준(수학학습수준)은 van Hiele이 제시한 수학학습수준 이론을 참고하여 개발한 분석틀을 이용하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 발생적 모델링을 활용한 로그 단원 교수·학습 자료 개발

본 연구는 발생적 모델링 활동을 통한 학생들의 로그 개념 구성 과정을 살펴보고자 발생적 모델링의 교수학적 4단계를 따르는 각각의 소주제별로 발생적 근원 맥락이 담긴 내용으로 구성하였다. 이를 구체화하면 각각의 소주제별로 적용(상황적 추론) 단계에서는 개념의 발생 맥락이나 기존 지식을 이용해 주어진 상황을 파악할 수 있는 활동, 추출(구체적 추론) 단계에서는 파악된 상황을 추론을 통해 해결해 나갈 수 있는 아이디어를 생성할 수 있는 활동, 압축(수학적 추론) 단계에서는 생성된 아이디어를 수학적 개념을 이용해 정교화 할 수 있는 활동, 구성(대수적 기호화) 단계에서는 정교화 된 추론 모델을 형식화된 대수적 기호모델로 표현하고 엄밀한 수학적 개념으로 구성할 수 있는 활동이 이루어지도록 5차시 분량으로 개발하였다.

<표 Ⅳ-1>은 각 차시별 주제와 발생적 모델링의 교수학적 4단계를 따르는 로그 단원 교수·학습 내용을 구체화한 것이다.

<표 Ⅳ-1> 발생적 모델링의 교수학적 4단계를 따르는 로그 단원 교수 · 학습 내용 체계

주제	차시	발생적 모델링 교수학적 4단계	단계별 교수 · 학습 내용
로그의 정의	1~2	적용	등차수열과 등비수열의 규칙성 찾기
		추출	지수를 이용한 복잡한 수 계산의 간소화 가능성 인식
		압축	지수의 표현 도구로 새로운 개념(로그) 도입의 필요성 인식
		구성	지수의 표현 도구로 로그 정의하기
로그의 성질	3~4	적용	로그의 정의를 이용한 복잡한 로그 계산
		추출	로그의 정의를 이용한 복잡한 로그 계산의 번거로움 인식
		압축	수 표(등차, 등비수열)를 이용한 로그의 성질 추론
		구성	추론된 로그 성질 증명 후 기호화
밑 변환 공식	5	적용	등비수열의 각 항 이외의 수들에 대한 로그를 이용한 복잡한 연산의 가능성 고려
		추출	비(공비)가 한없이 1에 가까운 등비수열을 생각하면 빈틈없이 조밀한 수가 형성되어 로그를 이용한 실제적인 계산이 가능하다는 것을 인식
		압축	주어진 로그표를 이용해 밑이 다른 로그표의 구성 원리에 대해 추론
		구성	밑 변환 공식 증명

1) '로그의 정의'에 대한 교수 · 학습 자료 개발 과정 (1～2차시)

역사-발생적 원리에 따라 로그(logarithm)의 어원을 이해할 수 있도록 하기 위해 Toumasis(1993)가 연구 제시한 예제를 참고하여 다음과 같은 흐름에 따라 '로그의 정의'에 대한 교수 · 학습 자료를 개발하였다.

먼저 다음과 같은 수 표를 학생들에게 제시하고 규칙을 발견하게 한다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	⋯
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	⋯

학생들은 1행[4]의 수들은 2행[5]의 수들을 거듭제곱 꼴로 나타내었을 때 그 지수가 됨을 알게 된다([그림 Ⅳ-1]).

4) 등차수열을 의미함.
5) 등비수열을 의미함.

■다음 수표를 보고 물음에 답하여라.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	··
B	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323	··

<물음1>

(1) A행의 숫자들은 어떤 규칙을 가지고 있는가?

(2) B행의 숫자들은 어떤 규칙을 가지고 있는가?

(3) A행과 B행의 각각의 대응하는 수들 사이에는 어떠한 관계가 있는지 식으로 나타내어 보아라. (참고: 문자 A, B에 관한 식으로 나타내어라.)

[그림 Ⅳ-1] 등차수열과 등비수열의 규칙성 찾기(적용단계)

이때 2행의 두 수를 곱하거나 나누어보게 한 후 그 결과를 각각의 수에 대응하는 1행의 수들과 연관 지어 생각해보게 하면 다음과 같은 규칙이 있음을 알게 된다.

$$\begin{array}{ccccc} 64 & \times & 128 & = & 8192 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 6 & + & 7 & = & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 8192 & \div & 512 & = & 16 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 13 & - & 9 & = & 4 \end{array}$$

다시 말해서, 2행의 두 수를 곱하거나 나눌 때 각각의 수에 대응되는 1행의 수를 더하거나 빼서 그 결과에 대응되는 2행의 수를 찾으면 더 쉽게 두 수를 곱하거나 나눈 결과를 알 수 있다는 것을 발견하게 된다([그림 Ⅳ-2]). 또한 2행의 수들의 거듭제곱과 거듭제곱근에 대해서도 그 결과를 계산해보게 한 후 그 결과를 각각의 수에 대응하는 1행의 수들과 연관 지어 생각해보게 하면 다음과 같은 규칙이 있음을 알게 된다.

$$\begin{array}{ccccc} 16^3 & & & = & 4096 \\ \downarrow & \searrow & & & \downarrow \\ 4 & \times & 3 & = & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \sqrt[4]{4096} & & & = & 8 \\ \downarrow & \searrow & & & \downarrow \\ 12 & \div & 4 & = & 3 \end{array}$$

즉, 2행의 수들의 n제곱이나 n제곱근을 구할 때 그에 대응되는 1행의 수들에 n을 곱하거나 나누어 그 결과 값에 대응되는 2행의 수를 찾으면 쉽게 거듭제곱과 거듭제곱근의 결과를 알 수 있다는 것을 발견하게 된다.

<물음2> B의 두 수의 **곱의 계산**을 생각해 보자.

(1) 729×2187을 직접 계산하여라.

(2) B의 729, 2187과 (1)의 결과값에 대응하는 A의 수 들 사이의 관계를 설명하여라.

$$\begin{array}{ccccc} 729 & \times & 2187 & = & \boxed{} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{} & ? & \boxed{} & = & \boxed{} \end{array}$$

(3) B의 두 수의 **곱**을 그에 대응하는 A의 수를 이용해 계산하는 방법을 설명하여라.

[그림 Ⅳ-2] 지수를 이용한 복잡한 수 계산의 간소화 가능성 인식(추출단계)

이와 같은 활동을 통해 학생들은 등비수열(2행)의 각 항에 대응되는 지수(1행)를 이용하면 복잡한 수들의 계산을 간단하게 해결할 수 있음을 발견하게 된다. 이때 학생들이 어떤 수에 대응되는 지수를 구할 수 있다면 복잡한 수의 계산의 간소화가 가능함을 인식할 수 있도록 활동을 제시하고 그 필요성으로 인해 지수의 표현 도구로 로그가 발명되었음을 이해할 수 있도록 로그(logarithm)의 어원을 소개해 준다([그림 Ⅳ-3]).

■로가리즘(logarithm)■

Napier는 등비수열에 대응하는 지수를 표현하는 방법에 대해 연구하였고, 등차수열의 각 항을 등비수열의 로가리즘[logrithm, 그리스어 '비(logos)'와 '수(arithmos)'의 합성어]이라 불렀다. 즉, 로가리즘은 '비를 계산한 수'라 할 수 있다.

Napier : 64가 되려면 $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\frac{64}{32}$이니까 비2를6번 곱하면 되네~
'비를 계산한 수'라는 뜻을 가진 로가리즘(logarithm)을 이용해
모든 수에 대응되는 지수를 정의하면 좋겠군~~
즉, 64의 로가리즘을 6이라 하고 간단하게 $\log 64=6$이라 표현하자.

Napier : 생각해보니 <표1>에서 $\log 64=6$이고 <표2>에서 $\log 729=6$ 이잖아~~
$\log 64$와 $\log 729$는 같을 수가 없는데 어떻게 구별하지ㅠㅠ 64는 비 2를
6번 곱한 값이고, 729는 비 3을 6번 곱한 값이니
어떤 수를 비로 하여 계산하였는지를 표현해 주면 되겠군^^
$2^6=64$이고 2는 지수의 밑이므로 log의 밑에 2를 붙여
$\log_2 64=6$이라 하자.
즉, $\log_2 64$는 **'2를 밑으로 하는 64의 로그'** 또는
'2를 밑으로 하여 64가 되는 지수'라 하면 되겠네~~

[그림 Ⅳ-3] 로그(logarithm)의 어원 소개(압축단계)

역사-발생적 과정에 의하면 로그를 지수로 인식하고 지수를 이용한 로그의 정의는 Napier가 로그를 발명한 후 한 참이 지난 후 Euler에 의해 완성되었다. 그 기나긴 로그의 변천 과정을 교수・학습 과정 속에 포함시키는 것은 비효율적이고 학생들에게 학습 부담을 과중시킬 수 있다. 2009 개정 수학과 교육과정에서는 학생들이 로그를 배우기 전 수열과 지수를 배웠기 때문에 등차수열과 등비수열의 수 표를 이용한 복잡한 수의 계산의 간소화 과정 속에서 지수가 이용되고 있음을 인식할 수 있을 것이다. 발생적 맥락을 통한 로그의 본질을 이해한 후 로그를 정의하는 과정에서는 개념 전개의 논리성과 엄밀성 그리고 체계성을 위해 형식화된 기호체계를 이용한 지수로 로그를 정의하는 것이 바람직하다고 본다. 따라서 몇 가지 지수 방정식에서 지수를 로그로 표현해 보는 활동을 제시하고 이를 일반화한 후 지수 단원에서 배운 조건들을 바탕으로 로그가 정의되기 위한 조건을 찾아 학생들이 엄밀하게 지수를 로그로 정의할 수 있도록 개발하였다([그림 Ⅳ-4]).

<물음7> 다음 표의 빈칸을 채우고 이를 log로 표현하시오.

$2^{(\ \ )}=1$ $2^{(\ \ )}=2$ $2^{(\ \ )}=32$ $2^{(\ \ )}=128$ $2^{(\ \ )}=1024$ $\vdots$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$(\ \ \ )=\log_{(\ \ )}(\ \ \ )$ $(\ \ \ )=\log_{(\ \ )}(\ \ \ )$ $(\ \ \ )=\log_{(\ \ )}(\ \ \ )$ $(\ \ \ )=\log_{(\ \ )}(\ \ \ )$ $(\ \ \ )=\log_{(\ \ )}(\ \ \ )$ $\vdots$

위 표를 일반화하여 다음 빈칸을 채우시오.

$a^x=b$	$\Leftrightarrow$	$x=\log_{(\ \ )}(\ \ \ )$

<물음8>다음의 로그 값을 생각해보고 그 값이 정의되기 위한 조건을 생각해보자.

(1) $\log_{(-2)}8$의 값은 존재하는가? 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하시오.

(2) $\log_1 8$의 값은 존재하는가? 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하시오.

(3) $\log_2(-8)$의 값은 존재하는가? 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하시오.

<물음9-로그가 정의되기 위한 조건>

<물음8>의 (1), (2), (3)을 참고하여 $a^x=b$에서 이끌어낸 $x=\log_a b$가 값을 갖기 위해서는 상수 a와 b가 어떤 조건을 만족해야 하는지 생각해보시오.

(Hint. $a^x=b \Leftrightarrow \log_a b$이므로 $a^x=b$에서 상수a, b의 조건을 생각해보자.)

[그림 Ⅳ-4] 지수의 표현 도구로 로그의 정의(구성단계)

2) '로그의 성질'에 대한 교수·학습 자료 개발 과정 (3~4차시)

역사적으로 복잡한 수 계산의 간소화 과정 속에서 로그의 성질을 발견한 후 이를 체계화하기 위해서 로그가 정의되었다. 어떤 수학적 개념에 대한 성질을 아는 것은 그 개념을 더 깊이 이해하고 새로 도입된 개념을 잘 이용하는데 필수적이다. 이런 측면에서 개념을 정의한 후 그 개념의 의미를 확장하기 위하여 성질을 밝히고 내용을 전개해 나가는 현재의 수학 교과서의 흐름이 논리적이고 체계적인 전개 과정을 갖추고 있다고 볼 수 있다. 이에 본 연구에서는 '로그의 성질'을 발생적 맥락을 활용하여 학생들이 의미 있게 받아들일 수 있도록 구성하기 위해 다음과 같은 흐름을 바탕으로 교수·학습 자료를 개발하였다.

여러 가지 로그 값을 제시하고 그 결과를 로그의 정의를 이용해 구해보는 활동을 한다. 이때 밑과 진수가 복잡한 로그의 경우 정의를 이용하여 그 값을 추론하는 것이 어렵다는 것을 알게 되고 복잡한 형태의 로그 값을 어떻게 하면 더 쉽게 구할 수 있을까를 생각해 보게 함으로서 로그의 성질을 밝힐 필요가 있다는 것을 학생들 스스로 느끼게 해준다([그림 Ⅳ-5]).

<문제1>

다음 값을 구하여라.

(1) $\log_2 16$ (2) $\log_3 81$ (3) $\log_{\frac{1}{3}} 243$

(4) $\log_{16} 128$ (5) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

교사 : $\log_{32}128$은 얼마지? 승철이가 말해볼까?

승철 : (32를 몇 번 곱해야 128이 되지? 계산이 너무 복잡해 ㅠㅠ)
선생님! 잘 모르겠어요

교사 : $\log_{32}128 = x$라 두고 저번시간에 배운 로그의 정의를 이용해 지수 방정식으로 바꾼 후 생각해 볼까?

주원 : $32^x = 128$이고 지수끼리 비교하기 위해 지수법칙을 이용해 밑을 2로 같게 하면 $2^{5x} = 2^7$이 되어 $x = \frac{7}{5}$입니다.

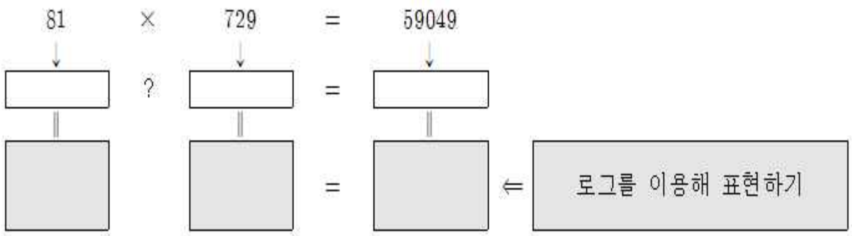
교사 : 그런데 이처럼 복잡한 로그 값이 주어지면 로그의 정의를 이용하여 매번 지수 방정식식으로 바꿔야 할까요? 여러분의 생각을 말해보세요~~

[그림 Ⅳ-5] 로그의 정의를 이용한 복잡한 로그 계산(적용) 및 번거로움 인식(추출)

이때 일반적인 교과서 흐름처럼 로그의 성질을 제시한 후 바로 증명을 하게 되면 그 과정이 높은 사고를 요구하기 때문에 학생들이 이해하기 힘들게 된다. 이는 학생들에게 수학적 개념(성질)들을 무의미한 공식들로 인식하게 만들어주어 결국, 개념들 사이의 의미 있는 관계망을 형성하는데 장애요소를 제공해 주게 된다. 따라서 로그의 성질을 학생들이 스스로 발견하고 추론을 통해 일반화할 수 있는 방법으로 로그의 발생적 맥락을 활용하여 [그림 Ⅳ-6]과 같은 활동을 제시하였다.

<물음1>

(1) $81 \times 729 = 59049$이다. 아래 표를 참고하여 로그를 이용하여 표현해보아라.



(2) $M = 81$, $N = 729$일 때, $M \times N = MN$의 식을 로그를 이용하여 일반화하여라.

[그림 Ⅳ-6] 발생적 맥락을 활용한 로그의 성질 추론 과정(압축단계)

로그의 발생적 맥락에 의하면 [그림 Ⅳ-6]과 같이 등차수열과 등비수열의 관계 속에서 등차수열의 각 항은 대응하는 등비수열의 항의 로그로 정의되므로 등차수열의 항들 사이의 연산을 로그로 표현해 보게 하면, 학생들이 로그의 성질을 스스로 발견하고 추론할 수 있게 된다. 더 나아가 등비수열의 항들을 문자로 치환하여 표현하게 하면 일반화된 로그의 성질을 이끌어 낼 수 있게 된다. 이러한 활동은 학생들이 직관적으로 로그의 성질에 대한 의미를 파악하는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

이제 추론을 통해 이끌어 낸 로그의 성질이 참임을 보장하기 위해 형식적인 증명과정이 필요하다. 일반적으로 교과서에 제시된 어떤 명제에 대한 증명은 수학자들의 사고과정을 추론할 수 없는 연역적인 전개방식에 의해 전개되어 있다. 엄밀한 증명과정을 이해하기는 쉽지 않기 때문에 학생들이 증명의 사고 과정을 이해하기 위해서는 교사의 적절한 안내가 필요하다. 이를 위해 본 연구자는 수학의 문제해결방법 중 하나인 '거꾸로 생각하기'의 아이디어를 활용하여 증명순서를 제시함으로써 학생들도 증명을 의미 있게 이해하며 구성해 나갈 수 있는 활동을 [그림 Ⅳ-7]과 같이 제시하였다.

<문제2>

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$이고 k가 임의의 실수일 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

증명순서	
①	$\log_a M=x,\ \log_a N=y$라 하자.
④	
⑤	
③	
②	$\log_a MN=x+y$

[그림 Ⅳ-7] 로그의 성질 증명 후 기호화(구성단계)

3) '밑 변환 공식'에 대한 교수·학습 자료 개발 과정 (5차시)

로그의 역사 발생 과정을 살펴보면 로그의 발명자 Napier는 모든 수들에 대해서 로그를 써서 계산을 간소화하기 위해서는 로그표가 필요함을 느끼게 되고 자신의 이론을 세우기 위해 직접 로그 값을 계산하여 방대한 로그표를 작성하는데 자신의 일생을 바치게 된다. 그 과정 속에서 '어떻게 하면 모든 수에 대한 로그 값을 좀 더 쉽게 계산할 수 있을까?'를 고민하면서 로그의 기본 성질들을 정립해 나가게 된다. 그러한 로그 값 계산 과정 속에서 Napier는 수많은 기계적인 계산을 대체할 아이디어(로그표 변환)를 찾게 된다. 로그가 발명될 당시에는 로그의 밑이라는 개념이 없었지만 밑이라는 개념을 사용하여 해석하면 오늘날의 밑 변환 공식이라는 것을 알 수 있다. 즉, 오늘날의 밑 변환 공식은 단순히 로그의 성질 중 하나로서 해석될 수 없는 수많은 로그표 구성을 위한 필요성으로 인해 등장한 로그의 중요한 성질인 것이다.

본 연구에서는 로그표 변환의 필요성으로 인해 발명된 밑 변환 공식의 역사-발생적 의미를 학생 수준에서 이해할 수 있도록 만들기 위해 다음과 같이 밑 변환 공식의 필요성을 재구성하여 교수 · 학습 자료를 개발하였다.

우선, [그림 Ⅳ-8]과 같이 밑이 2인 로그표에 제시된 수들 이외의 값에 대해서는 로그를 이용한 계산의 효율성을 적용할 수 없음을 학생들이 인지할 수 있도록 상황을 제시한다.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	…

Napier : 드디어 등차, 등비수열의 규칙을 통해 복잡한 수를 쉽게 계산할 수 있는
마법 같은 비밀을 찾아냈군^^

Briggs : 그런데... 27×81의 값을 위 표로 구할 수 있나요?

Napier : 둘 다 3의 거듭제곱이니 3을 밑으로 하는 로그표에서 생각해 보죠.

Briggs : 그럼 49×2401의 값을 구하려면 둘 다 7의 거듭제곱이니
7을 밑으로 하는 로그표에서 생각해야 하나요?
그렇게 되면 주어진 로그표에 없는 수들에 대한 계산은
그에 맞는 새로운 로그표를 만들어야 되는데...
그럴 때 마다 너무 번거롭고 오히려 더 복잡하지 않을까요?

Napier : 으~~음~~ 생각해 보죠.........

[그림 Ⅳ-8] 실질적인 로그 계산의 가능성에 관한 상황 제시(적용단계)

이때 실질적으로 모든 수들을 대상으로 하여 로그를 이용한 계산이 가능하려면 등비수열의 각 항들 사이의 간격이 아주 조밀해야 함을 느낄 수 있는 활동을 제시한다([그림 Ⅳ-9]).

(1) 아래 표를 통해 밑이 얼마인 로그 값을 알 수 있는가?

①

0	1	2	3	4	5	6	7	…
1	3	9	27	81	243	729	2187	…

②

0	1	2	3	4	5	6	7	…
1	2	4	8	16	32	64	128	…

③

0	1	2	3	4	5	…
1	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375	…

④

0	1	2	3	4	5	…
1	1.2	1.44	1.728	2.0736	2.48832	…

(2) (1)을 참고하여 어떤 로그표를 만들면 모든 복잡한 수들에 대한 계산을 자유롭게 할 수 있을지 자신의 생각을 적으시오.

[그림 Ⅳ-9] 조밀한 등비수열로 이루어진 로그표 구성의 필요성 인식(추출단계)

상황을 인지한 학생들은 모든 수들에 대한 로그를 이용한 실질적인 계산이 가능하려면 조밀한 등비수열로 이루어진 로그표를 구성할 필요성을 느낄 것이고 주어진 로그표를 통해 밑이 다른 로그표를 구성하는 활동을 제시하여 밑 변환 공식을 이끌어 낸다([그림 Ⅳ-10]). 이러한 활동은 학생들이 로그표 변환의 필요성으로 인해 발명된 밑 변환 공식의 역사-발생적 의미와 그 중요성을 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

〈물음2〉

3을 밑으로 하는 로그표가 아래와 같이 주어져 있다.

⋯	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	⋯
⋯	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81	243	⋯

밑이 3인 로그 값을 **'이용'**해 밑이 2인 로그 값을 구하는 방법을 생각해보자.

[증명]

$\log_2 M = x$ 라 하고 x를 밑이 3인 로그 값으로 구하면 된다.

로그의 정의에 의해 $2^x = M$ 이다.

이때, $\boxed{\quad}$을 밑으로 하는 로그표가 주어졌으므로 양변에 밑이 $\boxed{\quad}$인 로그를 취하면

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ 이므로 $x = \dfrac{\log_3 M}{\log_3 2}$이다. 따라서 $\log_2 M = \dfrac{\log_3 M}{\log_3 2}$ 이다.

[그림 Ⅳ-10] 추론을 통한 밑 변환 공식 유도 과정(압축단계)

그 후, 지수를 이용한 로그의 성질 증명 아이디어와 동일하게 학생들이 교과서에 제시된 밑 변환 공식을 지수를 이용해 엄밀하게 증명할 수 있도록 증명순서가 적힌 문제를 통해 이해할 수 있는 활동을 제시한다([그림 Ⅳ-11]).

〈문제1〉

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1$일 때, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$임을 증명하시오.

증명순서	
①	$\log_c a = x,\ \log_c b = y$라 하자.
④	
⑤	
③	
②	$\log_a b = \dfrac{y}{x}$

[그림 Ⅳ-11] 밑 변환 공식 증명 후 기호화(구성단계)

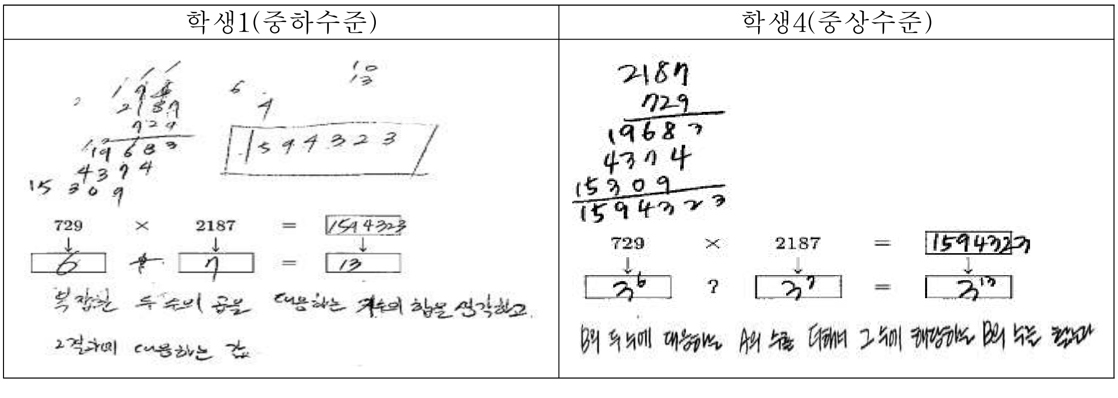
2. 발생적 모델링 활동을 통한 로그 개념 구성 과정

이 절에서는 각각의 소주제별로 학생들이 발생적 모델링의 교수학적 4단계(적용, 추출, 압축, 구성)에 의해 미리 설정된 목표에 도달하는 정도를 바탕으로 로그 개념을 구성해 나가는 과정을 살펴보고, 개발된 로그 단원의 수학학습수준 분석틀을 바탕으로 학생들의 로그 개념에 대한 이해 정도를 분석하였다.

1) 로그의 정의 (1～2차시)

연구자는 학생들이 등차수열과 등비수열의 관계를 파악(적용단계)하여 등비수열의 항들 사이의 큰 수의 복잡한 연산 결과를 대응하는 등차수열의 항(지수)들을 이용해 쉽게 해결할 수 있다는 것을 추론(추출단계)해 낼 수 있기를 요구하였다. 학생들은 교수·학습 자료에 제시된 수 표를 분석하여 등비수열의 각 항을 지수 꼴로 나타내었을 때 각 항의 지수가 대응하는 등차수열임을 알 수 있었다. 다음은 학생들이 등비수열의 복잡한 계산 결과를 대응하는 등차수열을 이용해 쉽게 계산하는 방법을 이끌어내는 과정을 보여준다([그림 Ⅳ-12]).

학생1 : 샘. 진짜 729×2187을 계산해요? 귀찮은데...
교사 : 귀찮아도 직접 계산해봐야 나중에 어떤 규칙을 발견하고 더 신기할건데...
학생1 : 물음표6)가 뭐에요? 6, 7, 13이니까 더하란 소린가요?
교사 : 어때? 계산하기 싫어하더니 복잡한 계산 결과를 대응하는 수를 이용해 생각해보니 훨씬 간단하지 않니?
학생1 : 그렇긴 하네요. 근데 (3)은 어떻게 설명하라는 소린지 모르겠어요.
학생4 : 샘. 729하고 2187을 3의 거듭제곱으로 바꾸니까 지수의 곱인 것 같아요. 밑이 같은 지수에 곱은 지수끼리 더하면 되니까 당연히 그렇게 되는 것 아닌가요?
교사 : 맞아. 그럼 지수법칙을 가지고 (3)번을 해결해봐.
학생3 : 밑이 같은 두 수의 곱은 지수끼리 더하면 되잖아요. ..(생략).. 아! 두 수를 곱할 때 대응하는 지수를 더해서 그 결과에 대한 값을 찾으면 됩니다.



[그림 Ⅳ-12] 지수를 이용한 복잡한 연산의 간소화 가능성 추론

6) [그림 Ⅳ-12]의 교수·학습 자료에 제시된 물음표를 의미함.

위의 발췌문에서 학생4(중상 수준)는 등차수열의 각 항이 대응하는 등비수열의 항의 지수라는 대응 규칙을 통해 복잡한 연산의 간소화 가능성에 대한 아이디어를 이끌어 낼 수 있었다. 반면에 학생1(중하 수준)은 복잡한 수 계산을 대응하는 수(지수)를 이용해 쉽게 해결할 수 있다는 결과에 대해 흥미를 느끼긴 하였지만 지수와의 연관성을 찾아내는데 교사의 적절한 안내를 필요로 하였다. 이는 학업 성취도가 높은 학생들이 수학적 사고과정 중 개념들 사이의 관계적 이해를 이끌어 내어 그 결과를 추론해 내는데 더 수월함을 보인다는 것을 알 수 있다.

다음으로 모든 수에 대응하는 지수만 찾아낼 수 있다면 복잡한 연산을 간단하게 해결할 수 있을 거라는 추론을 바탕으로 지수의 표현 도구로서 로그가 정의되었음을 로그(logarithm)의 어원을 소개함으로써 학생들을 이해시켜 주고자 하였고 그 결과 $\log_a b$를 'a를 거듭제곱하여 b가 되는 지수'로 의미 있게 해석함을 확인할 수 있었다([그림 Ⅳ-13]).

1. $\log_2 512$의 값을 구하고 그 의미를 설명하시오.

9, 2를 9번 곱한것이 512이다

2. $\log_2 8192$의 값을 구하고 그 의미를 설명하시오.

13, 2를 13번 곱한것이 8192이다

[그림 Ⅳ-13] 로그의 어원을 통한 로그 값의 의미 해석(학생1)

이때 교과서에 제시된 지수를 이용한 로그의 정의 방법은 역사적으로 오랜 기간이 걸렸고 그 과정을 학생들이 이해하기에는 무리가 있으므로 아래와 같은 활동지를 통해 로그의 정의를 직관적으로 받아들일 수 있도록 안내(압축)한 후([그림 Ⅳ-14]), 기존에 배운 지수 개념을 통해 엄밀하게 로그를 정의하는 활동(구성)으로 진행하였다([그림 Ⅳ-15]).

다음 표의 빈칸을 채우고 이를 log로 표현하시오.

$2^{(0)}=1$	$\Leftrightarrow$	$(0)=\log_{(2)}(1)$
$2^{(1)}=2$	$\Leftrightarrow$	$(1)=\log_{(2)}(2)$
$2^{(5)}=32$	$\Leftrightarrow$	$(5)=\log_{(2)}(32)$
$2^{(7)}=128$	$\Leftrightarrow$	$(7)=\log_{(2)}(128)$
$2^{(10)}=1024$	$\Leftrightarrow$	$(10)=\log_{(2)}(1024)$
⋮		⋮

위 표를 일반화하여 다음 빈칸을 채우시오.

$a^x=b$	$\Leftrightarrow$	$x=\log_{(a)}(b)$

[그림 Ⅳ-14] 지수를 이용한 로그의 표현(학생3)

〈물음9-**로그가 정의되기 위한 조건**〉

〈물음8〉의 (1), (2), (3)을 참고하여 $a^x=b$에서 이끌어낸 $x=\log_a b$가 값을 갖기 위해서는 상수 a와 b가 어떤 조건을 만족해야 하는지 생각해보시오.

(도움말. $a^x=b \Leftrightarrow \log_a b$이므로 $a^x=b$에서 상수a, b의 조건을 생각해보자.)

$a \neq 1$ (1이면 (2)번과 같은 오류발생)

$a > 0$ (밑이 양수가 아니면 (1)번과 같은 '')

$b > 0$ (진수가 양수여야 (3)번과 같은 오류가 발생하지 X)

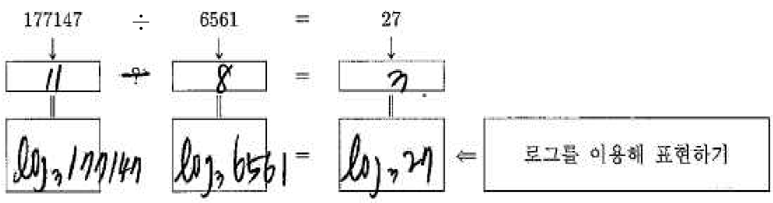
[그림 Ⅳ-15] 지수를 이용한 로그의 표현(학생2)

지금까지의 '로그의 정의'에 대한 학생들의 수학학습수준을 살펴보면 다음과 같다. 로그의 정의에 관한 실험 수업을 통해 4명의 학생들은 등차수열이 대응하는 등비수열의 지수가 된다는 관계를 파악하였고 이를 통해 등비수열의 큰 수에 대한 복잡한 계산을 대응하는 등차수열을 이용해 쉽게 해결할 수 있다는 것을 인식하였다. 즉 계산의 간소화를 위해 모든 수에 대응하는 지수를 찾을 필요성을 인식하였으므로 시각적 수준에 도달한 것으로 볼 수 있다. 또한 지수의 표현 도구로서 로그가 발명되었음을 로그의 어원을 통해 상황을 제시하여 학생들을 이해시킨 후 지수 방정식을 로그로 바꾸는 활동을 일반화하여 로그를 정의할 수 있었으므로 기술적 수준에 도달한 것으로 볼 수 있다.

2) 로그의 성질 (3~4차시)

로그의 정의를 이용해 밑과 진수가 복잡한 로그 값을 계산하는 과정(적용)을 통해 번거로운 로그 값 계산 방법에 대한 대안(추출)으로 로그의 성질을 밝힐 필요성이 있음을 인식시켜 주었다. 이때 로그는 지수를 표현하는 도구이므로 등비수열의 복잡한 연산을 대응하는 지수를 이용해 간소화해 보고 각각에 지수를 로그로 표현하는 활동을 통해 로그의 성질을 직관적인 방법으로 이끌어 내었다([그림 Ⅳ-16]).

(1) $177147 \div 6561 = 27$이다. 아래 표를 참고하여 로그를 이용하여 표현해보아라.



(2) $M=177147$, $N=6561$일 때, $M \div N = \frac{M}{N}$의 식을 로그를 이용하여 일반화하여라.

$$\log_3 M - \log_3 N = \log_3 \frac{M}{N}$$

[그림 Ⅳ-16] 역사-발생적 원리를 이용한 로그의 성질 추론(학생4)

학생들이 직관적으로 받아들인 로그의 성질을 정당화하기 위해서는 형식적인 증명과정이 필요하다. 이때 교과서에 제시된 증명과정을 학생들에게 보여주는 교수방법은 어려운 증명에 대한 이해를 불러일으킬 수 없다. 본 연구에서는 다음과 같은 방법으로 수학적 문제해결방법 중 하나인 '거꾸로 생각하기'의 아이디어를 활용해 증명순서를 제시하여 증명에 대한 아이디어와 사고과정을 학생 스스로 이해하고 구성해 나갈 수 있는 활동을 하였다([그림 Ⅳ-17]).

(2) $\log_a M^k = k \times \log_a M$

증명순서	
①	$\log_a M = x$라 하자.
④	$a^x = M$
⑤	$(a^x)^k = M^k$
③	$a^{kx} = M^k$
②	$\log_a M^k = kx$

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

증명순서	
①	$\log_a M = x$, $\log_a N = y$라 하자.
④	$a^x = M$, $a^y = N$
⑤	변변 빼면
③	$a^{x-y} = \frac{M}{N}$이므로
②	$\log_a \frac{M}{N} = x - y$

[그림 Ⅳ-17] '거꾸로 생각하기'를 활용한 증명활동(학생3, 학생4)

교사 : $\log_a M = x$, $\log_a N = y$라 두면 $\log_a MN = x + y$가 됨을 보이면 되겠지? 우리는 지수를 이용해 로그를 정의했으니까 $\log_a MN = x + y$가 된다는 것은 $a^{x+y} = MN$임을 보이면 돼. ..(생략).. 이처럼 증명이란 차례대로 진술된 연역적인 전개방식으로 완성되는 것이 아니라 우리가 보일 결과에 초점을 두고 그 전에 무슨 결과가 나와야 될지를 역 추론해 가며 생각하다보면 변형된 가정에 도달하게 되어 하나의 증명을 추론을 통해 이해하고 정리할 수 있는 거야.

학생1 : 어려워요. 아직도 잘 모르겠어요. 그냥 공식만 외우면 안돼요?

학생3 : 표 왼쪽에 증명순서를 따라가면 되는 거죠? 진짜 말이 되네요?

교사 : 그렇지. 왼쪽 증명순서를 따라가면 증명을 완성할 수 있을 거야.

학생4 : 샘. 책에 있는 다른 증명들도 이렇게 생각하면 되죠?

교사 : 그렇지. 증명과정을 이해하려면 역 추론 해보면 많은 도움이 돼. ..(생략)

위의 대화 내용처럼 교사가 증명의 토대를 마련하고 증명 방법을 하나의 예를 통해 함께 생각해보는 시간을 갖고 나머지 증명 문제를 학생 스스로 해결해 보게 한 결과 중하 수준(학생1)학생은 여전히 엄밀한 증명과정에 대해 두려움을 나타냈지만, 중상 수준(학생3, 4) 학생들은 기존에 경험하지 못한 증명의 아이디어에 대해 이해하고 스스로 해결하며 관심을 갖게 되었다.

지금까지의 로그 개념에 대한 학생들의 수학학습수준을 살펴보면 다음과 같다. 로그의 성질에 관한 실험 수업을 통해 4명의 학생들은 각각의 지수에 대한 로그 표현을 통해 로그의 성질을 추론해 낼 수 있었으므로 이론적 수준에 도달하였다고 볼 수 있다. 다음으로 지수를 이용한 로그의 성질의 엄밀한 증명 과정에서는 중상 수준의 학생들은 거꾸로 생각하기의 문제해결전략을 바탕으로 제시된 증명 순서에 따라 증명을 완성할 수 있었으므로 형식적

수준에 도달하였다고 볼 수 있다. 반면에 중하 수준의 학생들은 왜 그렇게 증명 순서가 제시되었으며 교과서에 제시된 증명 방법과 다르게 생각하는지 서로 연관을 짓지 못하고 어려움을 겪었으므로 형식적 수준에는 도달하지 못하고 이론적 수준에 머물러 있다고 볼 수 있다.

3) 밑 변환 공식 (5차시)

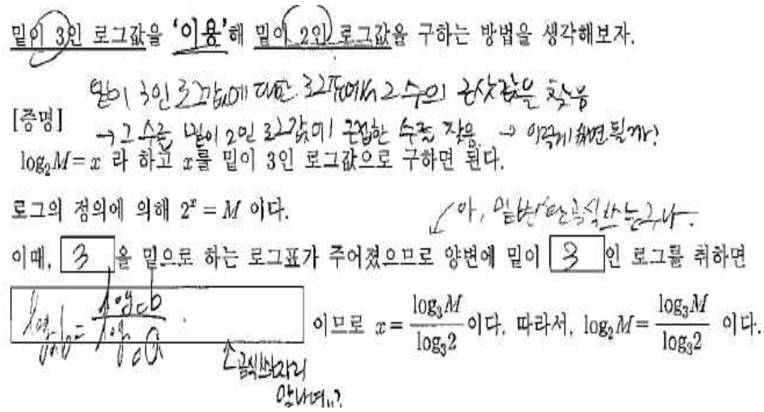
특정 로그표를 통해 주어진 표 이외의 수들에 대해서도 로그를 활용한 계산의 간소화가 가능한지 생각해보는 활동(적용)을 한 후 모든 수들에 대한 로그 계산이 가능하려면 어떤 로그표가 필요한지를 생각해 보게 하여 로그 표 변환(밑 변환 공식)의 필요성을 학생들이 인식할 수 있도록 유도하고자 하였다(추출). 이 때 로그표 변환의 필요성으로 인하여 등장한 밑 변환 공식의 발생 맥락은 학생 수준에서 이해하기가 쉽지 않기 때문에 연구자는 이를 재구성하여 조밀한 등비수열로 이루어진 로그표를 구성해 나가는 활동을 통해 학생 수준에 맞게 로그표 변환의 필요성을 다음과 같은 방법으로 안내하는 활동을 하였다.

교사 : 여기 밑이 2인 로그표를 보자. ..(생략).. 27×81은 어떻게 계산하지?
학생2 : 로그표에 27하고 81이 없는데요?(①)
학생3 : 둘 다 3의 거듭제곱이니까 밑이 3인 로그표가 있어야 하지 않나?
교사 : 그럼 16×64는 어떻게 계산하지?
학생2 : 4의 거듭제곱이니까 밑이 4인 로그표가 있어야 되요.(②)
학생4 : 샘, 그럼 로그를 이용하려면 아래(등비수열) 있는 수들에 대해서만 가능한가요? 모든 수들에 대해서 로그를 이용할 수 있어야 좋은 거 아닌가요?(③)
교사 : <물음1>을 통해 어떻게 하면 모든 수들에 대해서 로그를 이용해 계산을 쉽게 할 수 있을지 생각해 볼까?
교사 : (생략).. 1번에서 4개의 로그표가 있지? 아래로 내려갈수록 등비수열의 항들이 어떻게 구성되어있는지 살펴볼까?
학생4 : 공비가 작아지는데요?
교사 : 공비가 작아지면 항들이 어떻게 변하지?
학생1 : 좁아져요.(④)
학생3 : 아하! 공비가 작아질수록 항들 사이가 좁아지니까 더 많은 수들에 대해 로그 계산이 가능해져요.(⑤)
교사 : 그럼 어떤 등비수열을 구성하면 될까?
학생4 : 공비가 1에 가까운 등비수열이요(⑥)
교사 : 그럼 기존의 로그표를 가지고 밑이 다른 로그표를 구성해나가면 되겠네?(⑦)
학생3 : 그런데 그 과정도 쉬워 보이지 않는데요?
교사 : 역사적으로 로그가 발생될 당시에는 무한 개념에 대한 연구가 미흡해서 완벽하지는 않았지만 로그표 변환의 아이디어를 통해 수많은 로그표를 쉽게 구성할 수 있었단다. 즉, 실질적인 로그 계산이 가능하게 되었지.(⑧)

위 발췌문을 살펴보면 학생들은 교사의 발문에 대답을 하면서 특정 로그표를 가지고는 모든 수들에 대한 로그 계산이 불가능함을 인식하였다(①,②,③). 또한, <물음1> 활동을 통해

등비수열의 각 항들 사이의 간격을 살펴봄으로써 모든 수들에 대해서 로그 계산이 가능하려면 공비가 한없이 1에 가까워지는 로그표를 구성하면 됨을 인식하였다(④,⑤,⑥). 이때 아직 극한 개념을 배우지 않은 학생들에게 공비가 1에 가까이 간다는 의미를 이해시키는 것이 처음에는 어려웠지만 몇 가지 예를 통해 그 가능성을 일깨워 준 후 기존의 로그표를 가지고 밑이 다른 로그표를 구성해 가면 되지 않을까라는 유한 개념을 접목하여 자연스럽게 로그표 변환의 필요성으로 인해 등장한 밑 변환 공식을 이끌어내고자 하였다(⑦,⑧).

그 다음으로 기존의 로그표를 통해 밑이 다른 로그표를 구성하는 과정을 특별한 예를 통해 추론하여 밑 변환 공식을 직관적으로 이끌어내는 활동을 한 후(압축)([그림 Ⅳ-18]), 로그의 성질 증명과정과 동일하게 지수를 이용해 밑 변환 공식을 증명하여 이를 정당화 하였다(구성)([그림 Ⅳ-19]).



[그림 Ⅳ-18] 밑 변환 공식의 아이디어 추론(학생2)

$$a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1\text{일 때},\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

증명순서	
①	$\log_c a = x$, $\log_c b = y$라 하자.
④	$c^x = a$, $c^y = b$
⑤	$a^{\frac{y}{x}} = (c^x)^{\frac{y}{x}} = c^y = b$
③	$a^{\frac{y}{x}} = b$
②	$\log_a b = \dfrac{y}{x}$

[그림 Ⅳ-19] 밑 변환 공식의 증명과정(학생3)

이때 중상 수준 학생들은 로그의 성질의 증명과정을 연습하였기 때문에 형식적인 증명과정도 구성해 낼 수 있어서 형식적 수준에 도달하였으나, 중하 수준 학생들은 밑 변환 공식의 발생 맥락에 대한 아이디어는 이해하고 관심을 보였지만 지수를 이용한 엄밀한 증명과정은 어려움을 호소하여 이론적 수준에 머물렀다고 볼 수 있다.

V. 결론

이 연구에서는 수학적 지식을 스스로 구성하여 개념적으로 이해할 수 있도록 개발된 발생적 모델링을 활용하여 로그 단원에 대한 교수·학습 자료를 개발하고 발생적 모델링을 적용한 실제적인 수업 사례를 통해 학생들이 로그 개념을 이해해 나가는 과정을 분석하여 학교 현장에 의미 있는 시사점을 제공하고자 하였다.

로그 단원을 로그의 정의, 로그의 성질, 밑 변환 공식 3가지 소주제로 나누고 각각의 소주제별로 발생적 모델링의 교수학적 4단계인 적용, 추출, 압축, 구성의 단계별 목표가 설정된 교수·학습 자료를 개발하였다. 개발 과정 중 세심하게 신경 쓴 부분은 소주제별로 개념들의 발생적 근원 맥락을 반영하여 학생들이 이해를 바탕으로 하여 스스로 개념을 구성해 나갈 수 있도록 학습 체계를 구성하는 것이었다. 이를 활용한 실험 수업에서 발생적 모델링의 학습 체계를 바탕으로 학생들의 로그 개념 구성 과정을 살펴보았고, 개발한 로그 단원의 수학학습수준 분석틀을 바탕으로 학생들의 로그 개념의 이해 정도(수학학습수준)를 분석하였다.

분석한 결과 학생들의 로그 개념의 이해 정도에 대해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 학생들은 등차수열과 등비수열의 규칙성을 바탕으로 주어진 수들에 대응하는 지수를 이용하면 복잡한 수들의 계산을 간단하게 해결할 수 있다는 것을 알게 되었고, 지수의 표현 도구로 로그 개념의 도입 필요성을 인식한 후 지수를 이용하여 로그를 정의할 수 있었다. 즉, 중하·중상수준 4명의 학생 모두 계산의 간소화를 위한 지수의 중요성을 깨닫고 로그를 정의할 수 있었으므로 시각적 수준을 거쳐 기술적 수준에 도달하였다고 볼 수 있다.

둘째, 학생들은 로그의 정의를 이용한 복잡한 로그 계산의 번거로움을 인식하고 이를 해결하기 위해 지수를 이용한 복잡한 수계산 과정 속에서 로그의 성질을 추론해 낼 수 있었다. 또한 특정 로그표를 가지고 주어진 등비수열 이외의 값들에 대해서는 로그를 활용한 계산의 불가능함을 인식하고 모든 수들에 대한 실질적인 로그 계산이 가능하기 위해서는 조밀한 등비수열을 구성할 필요가 있다는 아이디어를 바탕으로 밑 변환 공식을 추론해 낼 수 있었다. 즉, 중하·중상수준 4명의 학생 모두 로그 개념의 발생 맥락을 바탕으로 하여 로그의 성질과 밑 변환 공식을 이해하고 추론해 낼 수 있었으므로 이론적 수준에 도달하였다고 볼 수 있다.

셋째, 로그의 성질 및 밑 변환 공식을 정당화하기 위한 증명 방법에서 중하 수준 학생 2명은 '거꾸로 생각하기'의 문제해결전략을 활용한 연구자의 증명 과정을 이해하기는 하였으나 스스로 증명을 완성하는 데는 어려움을 보였다. 반면에 중상 수준 학생 2명은 '거꾸로 생각하기'의 증명 아이디어를 이해하여 제시된 증명순서를 바탕으로 증명을 완성할 수 있었다. 즉, 중상 수준의 학생들만 형식적 수준에 도달하였다고 볼 수 있다.

이상의 연구 결과로부터 발생적 모델링을 활용한 로그 개념의 교수·학습에 대한 결론은 다음과 같다.

첫째, 로그의 역사적 발달 과정에 내재된 의미를 살펴보고 주제별로 구체적인 맥락을 해석하는 활동을 통해 학생들이 능동적으로 개념을 재구성할 수 있는 기회를 제공받게 되므로 로그를 개념적으로 이해할 수 있었다. 또한 수학과 맥락을 연결함으로써 학생들이 계산의 효율성 측면에서의 로그의 유용성을 인식하여 수학에 대한 관심과 흥미를 갖게 하는데 도움을 줄 수 있었다. 더 나아가 개념들의 발생 맥락을 활용한 추론 과정을 통해 로그의 성질이 가진 의미, 밑 변환 공식의 필요성 등을 알 수 있었고 이는 개념들 사이의 관계망이 형성되어 로그 단원에 대한 본질적인 이해가 가능하게 해주었다.

둘째, 발생적 모델링 활동을 통해 학생들은 안내된 학습 자료 및 교사의 적절한 도움만으로

스스로 개념을 구성해 나갈 수 있었고 특히 중하 수준의 학생들에게도 수학학습수준을 바탕으로 한 개념의 이해 정도를 분석한 결과 이론적 수준에 도달함을 볼 수 있었다. 그러므로 발생적 모델링 활동은 수학적 지식들의 관계적 이해를 이끌어 내는데 효과가 있다고 볼 수 있다.

셋째, 발생적 모델링을 활용하여 현재의 교육과정에 부합하는 교수·학습 자료를 개발하여 실제 수업에 적용한 결과 로그 단원에 대한 학습 부담 및 시간을 경감할 수 있었다. 그럼으로써 로그 단원에 대한 선행 연구들의 한계점으로 드러났던 문제들도 해결할 수 있었다. 먼저, 역사-발생적 과정을 따르는 로그 단원의 교수·학습 방법의 한계로 드러났던 학습량 부담 및 시간적 제약의 문제를 어느 정도 해결할 수 있었다. 또한, 지수·로그와 지수·로그 함수 개념의 상호 보완적인 유기적 측면을 다루자는 교수·학습 방법의 한계로 드러났던 실제 교육 현장에 적용하기 힘들다는 문제도 해결할 수 있었다.

마지막으로 이 연구의 시사점 및 연구 과정에서 나타난 제한점을 보완하여 보다 좋은 후속 연구를 위한 제언을 하고자 한다.

첫째, 수학적 개념은 시대적 필요에 의해 발명되고 체계화 되었다. 즉, 개념의 본질적 이해를 위해서는 발생적 근원 맥락을 살펴보는 것이 중요하다. 그런데 학교 현장에서는 학습량 부담 및 시간적 제약이라는 이유로 이를 생략하곤 한다. 개념의 역사-발생적 과정을 학생들에게 여과 없이 제시하여 이해시키는 것은 학교 현장에서 무리가 될 수 있다. 이때 개념의 발생적 근원 맥락이 담긴 발생적 모델링의 학습 체계를 따르는 교수·학습 자료는 실제 학교 현장에서 적용 가능하며 학생 수준에 맞게 재구성된 과제를 바탕으로 하였기 때문에 이해를 동반한 의미 있는 학습이 이루어지는 데도 도움을 줄 수 있어서 발생적 모델링을 활용한 교수·학습 자료를 학교에서 적극 활용해야 할 것이다.

둘째, 수학적 개념은 수학의 특성상 형식화된 기호체계로 이루어졌기 때문에 처음에는 기호자체가 생소하여 어려움을 느끼게 된다. 특히, 수학을 어려워하는 학생들은 수학적 개념을 이해하기 보다는 그냥 공식처럼 무의미하게 받아들이기 쉽다. 이처럼 논리적인 사고과정의 표현 수단인 수학 용어와 기호를 무의미하게 받아들이면 개념들 사이의 관계적 이해가 불가능하기 때문에 기존 지식을 바탕으로 고차원적인 지식을 구성하는데 어려움을 느끼게 된다. 이때 발생적 모델링 활동을 통해 직관적으로 해결할 수 있는 맥락(상황) 속에서 점차 높은 수준의 사고 과정을 통해 개념을 이해하고 해석할 수 있는 과제를 제시받고 교사의 적절한 안내를 받으며 교수·학습 활동이 이루어진다면 학생들이 개념들의 본질적 의미를 파악하는데 도움이 될 것이다.

셋째, 본 연구는 수학적 개념의 발생적 맥락이 담긴 체계화된 학습 자료 및 교사의 적절한 안내가 뒷받침되면 중하 수준 학생들에게도 학습자 스스로의 개념 구성과정이 이루어 질 수 있다는 가능성을 보여주었다. 하지만 로그 개념 구성 과정이라는 특정 사례를 바탕으로 한 학생들의 수학학습수준을 분석하였기 때문에 성급한 일반화보다는 학습 과정에서 나타나는 특징을 바탕으로 효율적인 교수·학습 방법을 제안하고자 하는 것으로 그 의미를 축소하고자 한다. 또한, 본 연구는 질적 사례연구를 바탕으로 하였기 때문에 보다 신뢰할 수 있는 효율적인 교수·학습 방법임을 입증하기 위해 발생적 모델링을 적용한 학교 단위의 교수·학습 활동이 이루어지길 기대한다.

참고 문헌

강향임 (2013). **발생적 모델링을 활용한 미적분 개념의 구성**. 한국교원대학교 박사학위 논문.

김부미, 정은선, 안연진(2009). 역사 발생적 원리에 따른 교수학습 모듈을 적용한 수행평가의 교수학적 효과 분석. **학교수학, 11**(3), 431-462

김현정 (2008). **로그 개념에 대한 이해 실태 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

김윤옥, 김성혜, 김은경, 신경숙, 신경일, 정명화, 허승희, 황희숙(2001). **교육 연구를 위한 질적 연구 방법과 설계**. 서울: 문음사.

민세영 (1997). **역사발생적 원리에 따른 중등학교 수학교재 구성에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위논문.

예정아 (1992). **고등학교 수학문제해결에서 개념 이해의 적용수준에 대한 연구**. 이화여자대학교 석사학위논문.

우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

이경숙 (2002). 고등학교 학생들의 로그함수에 대한 이해도 및 오류에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 5**(1), 117-127.

이정아 (2005). **로그 단원의 역사-발생적 접근**. 서울대학교 석사학위논문.

이현미 (2006). **역사발생적 원리에 의한 로그 지도법**. 신라대학교 석사학위논문.

조정수 (2011). 학교수학 관점에서 살펴본 로그의 역사적 배경과 교수·학습 방법에 대한 고찰. **수학교육논문집, 25**(3), 557-575.

조현경 (2014). **로그 단원의 지수표현을 활용한 교수·학습 효과**. 한국교원대학교 석사학위논문.

지혜정 (2005). **역사 발생적 원리를 활용한 지수·로그의 실제 수업 방안**. 단국대학교 석사학위논문.

정영옥 (1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

황석윤, 김익표 (2015). van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 예비교사들의 수학수업에서 탐구활동의 활성화 방안 탐색. **한국학교수학회논문집, 18**(1), 39-60.

Freudunthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*, Kluwer Academic Publishers.

Hiebert, J., & LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert(Ed), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*(pp. 1-27). Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. John Wiley & Sons, 강윤수, 고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형 공역(2005). **정성연구방법론과 사례연구**. 서울 교우사.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of “well taught” mathematics courses. *Educational psychologist*, 23(2), 145-166.

Tabaghi, S. G. (2007). *APOS analysis of students' understanding of logarithms*. Master dissertation, Concordia University.

Toumasis, C. (1993). Teaching Logarithms Via Their History, *School Science and Mathematics*, 93(8), 428-434.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

Development of Logarithm Units' Teaching • Learning Materials using Genetic Modeling and Application Cases

Jangrok Oh[7)] · Sungmo Kang[8)]

Abstract

In this paper, we develop a logarithm units' teaching · learning materials using genetic modeling which is designed for students to construct by themselves and figure out mathematical knowledge conceptually, and we analyze the process of students' comprehension of logarithm concepts through genetic modeling activities. For this purpose, we divide logarithm units into three subunits and develop teaching · learning materials which include genetic original contexts and are framed by the four pedagogic phases of genetic modeling, application, extraction, comprehension, and construction so that students themselves are capable of construct the concepts of logarithm units. The developed teaching · learning materials are applied into lessons for two intermediate-basic students and two intermediate-advanced students. Through this, we examine students' conceptual construction process about logarithms units with the four pedagogical stages of genetic modeling applied, and analyze the depth of their comprehension about the logarithm units based on the general phases of mathematics-learning introduced by van Hiele, and then we suggest several pedagogical implications.

Key Words : Genetic modeling, logarithm, Phases of mathematical-learning

Received February 7, 2017
Revised May 7, 2017
Accepted May 29, 2017

∗ 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D60

7) Sinyong Middle School (roksno2@naver.com)
8) Chonnam National University (skang4450@chonnam.ac.kr), Corresponding Author