韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2017.56.2.193
2017. 05. 제 56권, 제 2호, 193-212.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
May. 2017, Vol. 56, No. 2, 193-212.

초등학교 분수 학습에서 퀴즈네어 막대 활용에 대한 비판적 고찰

이지영(팔달초등학교)

Ⅰ. 서론

추상적이고 고차원적인 수학 개념이나 원리를 개념적으로 이해하는 것은 초등학생들에게 쉬운 일이 아니다. 이러한 이유로 초등학교의 수학 학습은 학생들로 하여금 구체적인 교구를 조작하거나 모델로 표현하면서 활동에 내재되어 있는 추상적인 수학 개념이나 원리를 경험하도록 하고, 핵심적인 구조나 원리를 시각적으로 확인하게 하면서 수학에 대한 이해를 확장해 나가도록 돕는다. 이러한 과정에서 학생들은 활동에 흥미를 느끼고 적극적으로 참여할 수 있게 된다. 2015 개정 수학과 교육과정에서도 수학 교과 역량의 정보 처리 능력, 교수・학습 방법, 평가 등 전반에 걸쳐 교구의 활용을 강조하고 있다(교육부, 2015a).

그러나 수학적 상황은 교구나 모델로 변환되는 과정에서 상당 부분 축소되거나 수정된다. 이로 인해 개념적으로 심각한 오류나 잘못된 해석이 생겨날 수 있으며 이는 학생들의 학습에 혼란을 일으킨다. 그러므로 교구를 활용한 수업에서 교사의 역할은 매우 결정적이다. 교사는 분명한 목적의식을 가지고 교구를 활용할 필요가 있으며 수학 주제나 교구에 대한 정확한 이해와 함께 세심하게 접근할 필요가 있다(김남희, 2000, 2008).

한편 초등학교에서 분수와 분수의 계산은 학생들이 개념적으로 이해하는 데 많은 어려움을 겪는 주제이다. 이에 퀴즈네어 막대, 분수 막대, 패턴 블록, 기하판 등을 활용하여 분수의 의미와 계산 원리를 개념적으로 이해하도록 돕기 위한 연구가 진행된 바 있다(예, 김남희, 1999, 2008; 김민경, 2001, 2005). 특히 퀴즈네어 막대는 수의 구조와 관계를 파악하기에 유용한 교구로, 다양한 주제와 관련된 활용 방안이 여러 연구에 의해 제시되었다(예, 구광조・전평국・김성만・류기천・안영옥・이영주・주미자, 1997; 김남희, 1999; 류성림, 2002; 이영주・장인옥・김동우, 1999; Behr & Post, 1992). 위의 연구들은 퀴즈네어 막대 활용 방안을 다양한 수학 주제와 관련하여 매우 폭넓게 제시하고 있다는 점에서 의미가 있다. 그러나 퀴즈네어 막대는 막대 사이의 상대적인 크기를 다루면서 특히 분수 학습에서 유용하게 활용될 수 있기 때문에 분수 학습에 초점을 둔 구체적인 연구가 진행될 필요가 있다. 예외적으로 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수 학습 프로그램을 개발한 연구(예, 윤선미・김민경, 2005)가 있지만 분수 학습에서 퀴즈네어 막대를 활용하였을 때 어떠한 오해나 어려움이 발생할 수 있는지를 고찰한 연구는 거의 없다. 김남희(1999)는 퀴즈네어 막대 활용에 대한 긍정적인 입장과 비판적인 입장을 함께 논하면서 교사의 역할을 강조한 바 있다. 따라서 분수 학습에서 퀴즈네어 막대를 활용할 때 어떠한 어려움이 발생할 수 있는지를 밝히고 이를 최소화하기 위해 교사 또는 교과용 도서 개발자가 주의하여야 할 사항을 탐색하는 연구가 필요하다.

2009 개정 수학과 교육과정에 의한 교사용 지도서(이하 2009 개정 교사용 지도서)는 퀴즈네어 막대를 분수 학습에서 활용할 수 있는 교구로 여러 차례 제시하고 있다(교육부, 2014). 2015 개정 수학과 교육과정 역시 교육과정 전반에 걸쳐 교구의 활용을 강조하며(교육부, 2015a), 개발 중인 2015 개정 수학과 교육과정에 의한 교과용 도서에서는 붙임딱지 등을 이용한 활동을 지양하고 교구를 직접 조작하는 활동을 강조하므로(박만구, 2016), 실제 분수 수업에서 퀴즈네어 막대를 보다 바람직하게 활용할 수 있도록 이에 대한 비판적인 검토가 이

* 접수일(2017년 4월 20일), 수정일(2017년 5월 5일), 게재확정일(207년 5월 24일)
* ZDM분류 : U72
* MSC2000분류 : 97C80
* 주제어 : 퀴즈네어 막대, 조작 교구, 전체-부분으로서의 분수, 비율로서의 분수, 동치분수, 이분모분수의 덧셈
* 본 논문의 일부 내용은 한국수학교육학회의 '2017 춘계학술대회(2017. 04. 15.)'에서 발표되었음.

루어져야 한다.

이러한 필요성에 따라 본 연구에서는 분수 학습과 관련된 퀴즈네어 막대 활용을 다음과 같이 두 가지로 구분하여 구체적으로 탐색하고자 한다. 첫째, 선행 연구에서 분수 학습과 관련하여 제안한 퀴즈네어 막대 활용 방안을 정리하고 이에 대해 고찰한다. 둘째, 선행 연구 고찰을 토대로 분수 관련 단원의 교과용 도서와 실제 수업에서 퀴즈네어 막대를 어떻게 활용하고 있는지 분석하고 이를 비판적으로 검토한다. 이를 통해 초등학교 분수 학습에서 퀴즈네어 막대를 보다 바람직하게 활용하기 위해 교사 또는 교과용 도서 개발자가 무엇을 주의해야 하는지에 대한 구체적인 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

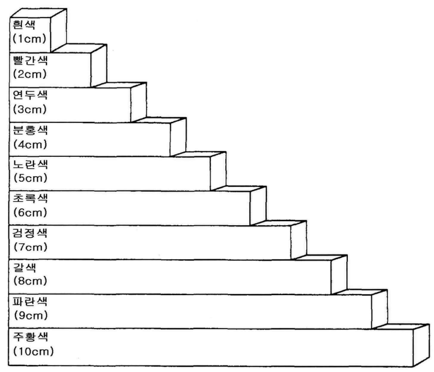
본 장에서는 퀴즈네어 막대에 대하여 간략하게 설명하고 선행 연구에서 분수 학습과 관련하여 제안한 퀴즈네어 막대 활용 방안을 분수의 의미, 분수의 크기 비교, 분수의 연산으로 구분하여 살펴본다. 각 연구에서 제안한 방법 간의 차이와 각각의 방법에 내재되어 있는 수학적 개념이나 원리가 무엇인지를 구체적으로 밝히고 이를 통해 실제 분수 학습에서 활용할 때 유의해야 할 점을 간략하게 제시한다.

1. 퀴즈네어 막대

퀴즈네어 막대는 벨기에의 교사 퀴즈네어(G. Cuisenaire)와 영국의 수학교육학자 가테그노(C. Gattegno)가 공동으로 개발한 것으로(김연식・우정호・박영배・박교식, 1994, p. 257), [그림 1]과 같다[1]. 직육면체 모양의 막대는 여러 길이와 색으로 구분된다.

구체적으로 분수 학습과 관련하여 퀴즈네어 막대 활용의 의의를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 여러 막대 중에서 하나의 막대를 단위 1로 정하면 다른 막대들을 단위에 대한 상대적인 크기인 분수로 표현할 수 있다(김남희, 1999, 2008). 분수로 표현된 양이 단위에 따라 결정된다는 것을 이해하는 것은 분수 학습에서 핵심이다(Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). 학생들은 하나의 막대를 단위로 정하고 다른 막대를 분수로 표현하는 활동에 참여하면서 각각의 분수가 단위와의 관계를 나타내는 상대적인 크기라는 것을 자연스럽게 이해할 수 있다.



[그림 1] 퀴즈네어 막대(김남희, 1999, p. 701)
[Fig. 1] Cuisenaire rods(Kim, 1999, p. 701)

둘째, 여러 막대 중에서 상황에 적절한 막대를 단위로 정할 수 있다. 예를 들어 이분모분수의 덧셈 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$에서 퀴즈네어 막대를 활용하여 문제를 해결하기 위해서는 가장 먼저, 2등분되고 동시에 5등분될 수 있는 막대를 찾는 것이 중요하다(Behr & Post, 1992). 학생들은 다양한 활동을 통해 10막대[2]가 이러한 조건을 만족한다는 것을 이해하고 각 상황에 적합한 단위가 무엇인지를 판단하여 여러 막대 중에서 단위가 되는 막대를 결정할 수 있다.

셋째, 두 막대의 길이 사이의 관계를 분수로 나타내는 것이므로 전체-부분으로서의 분수뿐만 아니라 비율로서의 분수를 지도할 때에도 유용하게 활용할 수 있다(김연식 외, 1994; 이영주 외, 1999). 전체-부분으로서의 분수의 의미에서는 가분수, 대분수를 표현하기에 어려움이 있지만 퀴즈네어 막대는 기본적으로 비율로서의 분수의 의미를 담고 있으므로 퀴즈네어 막대를 이용하여 가분수, 대분수를 자연스럽게 표현할 수 있다.

---

1) 4cm 막대는 분홍색, 보라색, 자홍색 등으로 다양하게 표현된다.

2) 본 논문에서는 각각의 퀴즈네어 막대를 막대의 색깔보다는 막대의 길이에 초점을 두어 기술한다. 예를 들어 10cm 길이의 주황색 막대를 10막대로 표현하였다.

넷째, 분수로 표현된 양을 시각적으로 관찰하고 구체적으로 조작할 수 있으므로 수의 개념뿐만 아니라 크기 비교, 연산 등의 다양한 주제에서 활용할 수 있고 학생들의 흥미나 참여를 이끌 수 있다.

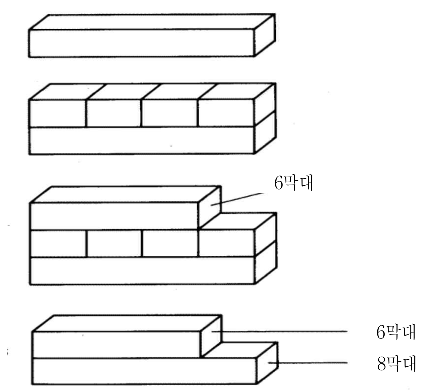
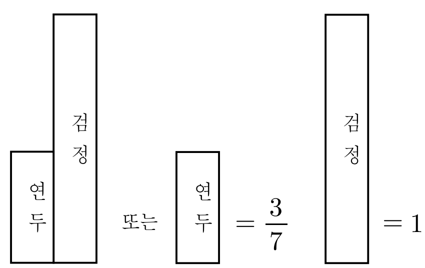
2. 분수의 의미에 관한 퀴즈네어 막대 활용

선행 연구에서 분수의 의미와 관련하여 제안한 퀴즈네어 막대 활용의 예는 [그림 2]와 같다.

먼저 <방법 1>을 제안한 연구는 대표적으로 Behr & Post(1992)를 들 수 있다. 김남희(1999)와 류성림(2002) 역시 위의 연구를 바탕으로 <방법 1>을 분수의 개념을 처음 학습하는 학생들에게 전체-부분으로서의 분수를 지도할 때 활용할 수 있는 것으로 제시하였다. 구체적으로 $\frac{3}{4}$을 구성하는 과정을 살펴보면 다음과 같다(Behr & Post, 1992, pp. 215-216).

> 첫째, 어떤 막대를 단위(전체)로 사용할 것인지를 생각한다. $\frac{3}{4}$에서 단위가 되는 막대는 다른 막대로 4등분될 수 있는 것이어야 한다. 예를 들어 8막대를 선택할 수 있다.
>
> 둘째, 단위를 4등분할 수 있는 막대를 찾는다. 이 경우에는 2막대이다.
>
> 셋째, 분수 $\frac{3}{4}$은 단위 막대를 4등분하고 그 중 3개에 해당하는 것으로 8막대의 $\frac{3}{4}$은 6막대임을 알 수 있다.
>
> 넷째, 막대를 가지고 더 많은 경험을 한 후에 학생들은 이 표현이 $\frac{3}{4}$이기도 하면서 $\frac{6}{8}$이기도 하다는 것을 인식하게 된다.

<방법 1>에서 $\frac{3}{4}$을 만들기 위해 먼저 단위가 되는 막대를 찾도록 하는 것은 학생들에게 상황에 적절한 단위를 스스로 선택할 기회를 제공한다는 점에서 바람직하다. 단위인 8막대를 2막대로 4등분하여 2막대 4개로 재구성하고 그 중에서 3개에 해당하는 양을 $\frac{3}{4}$으로 나타내는 과정은 전체-부분으로서의 분수를 설명하기에 적합하다(<방법 1> 두 번째 그림 참고). 동시에 단위를 8막대로 선택함으로써 동치분수에 대한 이해까지 확장시킬 수 있다.

	<방법 1>	<방법 2>
퀴즈네어 막대 활용		
관련 문헌	‣ Behr & Post(1992, pp. 215-216) ‣ 김남희(1999, pp. 705-708) ‣ 류성림(2002, pp. 79-80)	‣ 구광조 외(1997, p. 121) ‣ 이영주 외(1999, p. 33)

[그림 2] 분수의 의미에 관한 퀴즈네어 막대 활용의 예

[Fig. 2] Examples for the use of cuisenaire rods related to the interpretations of fractions

<방법 2>를 제안한 연구는 구광조 외(1997)와 이영주 외(1999) 등이 있다. 연구자들은 이 방법을 분수의 개념을 처음 학습하는 학생들에게 전체-부분으로서의 분수를 지도할 때 활용할 수 있는 방안으로 제시하였고 분수를 표현하기 위해 먼저 단위를 정하는 것을 강조하였다. 예를 들어 검정색 7막대를 단위라고 하였을 때 연두색 3막대는 $\frac{3}{7}$이다. 이 방법은 단위와 다른 막대 사이의 상대적인 관계를 보여주기에 적절하다. 또한 단위가 되는 막대가 달라지면 같은 $\frac{1}{2}$이라고 하더라도 막대의 길이가 다를 수 있다는 것을 시각적으로 나타낼 수 있는 좋은 방법이다.

위의 두 가지 방법에는 분수의 의미와 관련하여 매우 중요한 차이가 나타난다. 각각의 차이를 설명하면서 퀴즈네어 막대를 활용할 때 주의해야 할 사항을 함께 제시하면 다음과 같다.

첫째, 단위를 선택하는 목적에 차이가 있다. <방법 1>은 $\frac{3}{4}$을 구성하기 위해 상황에 적절한 단위를 학생들이 스스로 선택하는 것이고 <방법 2>는 하나의 막대를 단위로 결정하고 다른 막대의 상대적인 크기를 분수로 나타내는 것이다. 따라서 단위 선택과 관련하여 교수 목적에 적합한 방법을 활용할 필요가 있다.

둘째, 등분할 과정이 명시적으로 나타나는가에 차이가 있다. <방법 1>은 단위인 8막대를 2막대 4개로 재구성함으로써 전체를 4등분한 것 중에 3이 되는 부분의 크기를 직관적으로 보여준다. 즉 <방법 1>은 전체-부분으로서의 분수의 의미와 직접적으로 연결할 수 있다. 따라서 어떤 막대(예, 2막대 또는 1막대)로 등분할하는가에 따라 같은 길이(예, 6막대)를 다양한 분수(예, $\frac{3}{4}$ 또는 $\frac{6}{8}$)로 표현할 수 있다. 이를 통해 단위인 8막대를 다양한 수준의 단위(예, 8막대 1개, 2막대 4개, 1막대 8개)로 구성하는 경험을 제공할 수 있다. 그러나 이러한 전체-부분으로서의 분수에 대한 충분한 경험 없이 <방법 1>의 네 번째 그림과 같이 8막대를 기준으로 하여 6막대의 크기를 분수로 나타내는 활동을 바로 도입하거나, <방법 2>와 같이 등분할 과정이 명시적으로 드러나지 않는 상태에서 7막대를 기준으로 3막대를 분수로 표현하도록 한다면 분수를 처음 학습하는 학생들에게는 인지적 부담이 될 수 있다. 두 막대의 상대적인 크기를 분수로 나타낸 것은 비율로서의 분수에 더욱 가깝다[3]. 교육과정 상에서 비율로서의 분수는 전체-부분으로서의 분수보다 더 높은 학년에서 다루는 고차원적인 주제이다. 구체적으로 제7차 수학과 교육과정에서는 4-나-1. 분수 단원에서 두 양의 크기를 비교하는 과정에서 다루고 2007과 2009 개정 교육과정에서는 학습자의 수준을 고려하여 각각 5-2-7. 비와 비율 단원과 6-1-4. 비와 비율 단원에서 지도하고 있다[4]. 특히 퀴즈네어 막대는 1cm씩 등분할되어 있지 않기 때문에 분수를 처음 학습하는 경우에 전체-부분으로서의 분수의 의미와 관련하여 퀴즈네어 막대를 활용하고자 한다면 단위인 7막대를 1막대 7개로 재구성하고 그 중 3개에 해당하는 길이와 같은 3막대를 $\frac{3}{7}$이라고 표현하는 과정이 반드시 필요하다.

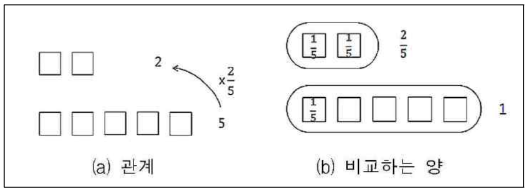
셋째, 단위 막대가 제시되는 위치에 차이가 있다. <방법 1>은 단위 막대(예, 8막대)를 아래에, 비교하는 막대(예, 6막대)를 위에 두었고 어떤 막대가 1인지 명시하지 않았다. 1을 명시하지 않아도 단위 막대가 1을 나타낸다는 것은 어찌보면 당연하다. 그러나 학생들에게는 당연하게 받아들여지지 않을 수 있다. 예를 들어 임재훈(2015)이 제시한 '$\frac{2}{5}$의 두 가지 의미' 중에서 학생들은 [그림 3]의 (a)처럼 $\frac{6}{8}$을 두 막대의 길이 사이의 관계로 받아들일 수 있고 심각한 경우에는 두 양 사이의 관계에 초점을 두기 보다 8막대와 6막대가 각각 $\frac{6}{8}$의 분모와 분자에 해당하는 양이라고 단순하게 생각할 수도 있다. 즉 분모와 분자의 수치적 특성에만 초점을 두고 퀴즈네어 막대 표현을 마치 하나의 기호처럼 사용할 수 있다. 이에 비해, <방법 2>는 단위가 되는 막대와 비교하는 막대를 좌우로 배열하였다. 또한 단위가 되는 막대를 1로 명확하게 표현하고 연두색 막대를 $\frac{3}{7}$이라고 나타냈다. 이는 [그림 3]의 (b)와 연결하여 설명할 수 있다. 분수를 처음 학습하는 학생들은 분수가 가리키는 양을 두 양 사

---

3) 전체-부분으로서의 분수는 전체를 등분할하였을 때 전체를 구성하는 똑같은 크기의 조각의 총 개수 중에서 부분을 구성하는 똑같은 크기의 조각의 개수를 분수로 나타낸 것이고 비율로서의 분수는 어떤 두 양의 크기를 비교한 것이다 (Lamon, 2012).

4) '4-나-1'은 4학년 나단계 1단원을 의미하며 '5-2-7'은 5학년 2학기 7단원을 의미한다.

이의 관계보다는 비교하는 양으로 이해하기가 더욱 쉬울 것이다. 따라서 분수를 처음 학습하는 학생들에게는 단위가 되는 막대를 1로 명시하고 비교하는 막대를 분수로 표현하도록 하는 것이 더욱 적합하다.



[그림 3] $\frac{2}{5}$의 두 가지 의미(임재훈, 2015, p. 380)

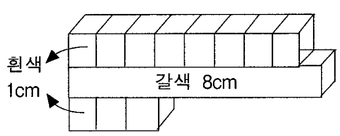
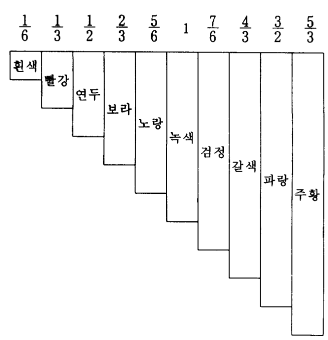
[Fig. 3] The interpretations of $\frac{2}{5}$(Yim, 2015, p. 380)

앞서 제시한 연구자들과 다르게 윤선미·김민경(2005)은 퀴즈네어 막대를 비율로서의 분수를 지도할 때 활용하였다. 구체적으로 "4는 20의 얼마인지 알아보기 위하여 퀴즈네어 막대를 사용한다. 10을 나타내는 주황색 막대 두 개를 연결한 후 4에 해당하는 보라색 막대가 몇 개 들어가는지 조작을 통해 확인하게 된다. 20을 4씩 나누면 5라는 사실을 통해 20은 4의 5배라는 것을 알게 하며 이것을 이용하여 4는 20의 $\frac{1}{5}$이라는 것을 동시에 알게 한다(p. 48)." 이는 앞에서 제시한 <방법 1>과 유사해 보이지만 전체-부분으로서의 분수가 아니라 비율로서의 분수를 지도하는 방법이라는 점에서 상당한 차이가 있다.

요약하면 퀴즈네어 막대는 어떻게 표현하는가에 따라 전체-부분으로서의 분수와 비율로서의 분수를 모두 다룰 수 있다. 따라서 전체-부분으로서의 분수와 비율로서의 분수 각각을 지도할 때 사용할 수 있고 방법을 다르게 하여 지속적으로 사용할 수 있다. 예를 들어, 분수를 처음 학습할 때에는 전체-부분으로서의 분수로 도입한다. 즉, 단위 막대(예, 8막대)를 등분할된 다른 막대로 구성(예, 2막대 4개)하고 여기에서 부분의 크기(예, 2막대 3개)를 분수(예, $\frac{3}{4}$)로 표현하도록 한다. 학생들이 이러한 등분할 과정을 충분히 경험하고 나면 두 막대를 제시하고 두 막대의 길이를 비교하여 비율로서의 분수로 나타내도록 한다.

3. 분수의 크기 비교에 관한 퀴즈네어 막대 활용

분수의 크기 비교와 관련된 퀴즈네어 막대 활용의 예는 [그림 4]와 같이 구분할 수 있다. 먼저 류성림(2002)은 3학년 학생들을 대상으로 동분모분수의 크기를 비교하는 활동으로 <방법 3>을 제안하였다. 갈색 8cm를 단위 막대로 두면 $\frac{7}{8}$은 흰색 막대 7개에 해당하는 양이고 $\frac{3}{8}$은 흰색 막대 3개에 해당하는 양이므로 $\frac{7}{8}$이 더 크다

	<방법 3>	<방법 4>
퀴즈네어 막대 활용		
관련 문헌	‣ 류성림(2002, pp. 79-80)	‣ 구광조 외(1997, p. 121) ‣ 이영주 외(1999, p. 33)

[그림 4] 분수의 크기 비교에 관한 퀴즈네어 막대 활용의 예

[Fig. 4] Examples for the use of cuisenaire rods related to the comparison of fractions

는 것을 알 수 있다. 이는 동분모분수를 비교하는 상황에서 단위 막대가 같으므로 각각의 분수 양을 직관적으로 파악하기 쉽고 그 크기를 직관적으로 비교할 수 있다는 점에서 유용한 방법이다.

한편, 구광조 외(1997)와 이영주 외(1999)의 연구에서는 초등학교 3~4학년 학생들에게 <방법 4>를 활용하는 것을 제안하였다. "한 막대를 단위로 정하면, 다른 막대 모두는 그 상대적 크기에 따라 수가 정해진다. 예를 들어 녹색 막대가 단위라면, 다른 막대의 수값은 다음과 같다.(구광조 외, 1997, p. 122)"라고 하면서 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$와 $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$과 $\frac{5}{3}$ 등을 비교해보도록 하였다. 이는 단위를 어떤 막대로 정하는가에 따라 다른 막대를 나타내는 분수가 결정된다는 것을 직관적으로 보여주는 좋은 방법이다. 또한 전체-부분으로서의 분수에서 다루기 어려운 가분수를 설명하기에도 어색함이 없다. 좌우로 나란히 배열함으로 인해서 분모의 수에 해당하는 막대를 아래에, 분자의 수에 해당하는 막대를 위에 둔다는 제한된 생각으로부터 자유로울 수 있다.

분수의 크기 비교와 관련하여 연구자들이 제시한 두 가지 방법에도 차이가 나타난다. 차이를 설명하면서 퀴즈네어 막대를 활용할 때 주의해야 할 사항을 함께 제시하면 다음과 같다.

<방법 3>은 하나의 막대를 단위로 정하고 동분모분수로 표현할 수 있는 다른 두 막대의 크기를 비교하였고, <방법 4>는 하나의 막대를 단위로 정하고 이분모분수로 표현할 수 있는 여러 막대의 크기를 비교하였다. 학생들은 <방법 3>을 적용하여 이분모분수의 크기를 비교할 때 어려움을 겪을 수 있다. 류성림(2002)은 동분모분수의 크기 비교에 이어서 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{5}$을 퀴즈네어 막대를 활용하여 비교해보도록 하였는데 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$의 경우에 어떤 막대가 2등분도 되고 4등분도 되는지 생각해보는 것이 먼저 선행되어야 한다. 또한 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$에서는 단위 막대를 4막대로, $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$에서는 단위 막대를 6막대로, $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{5}$에서는 단위 막대를 10막대로 둘 수 있는데 이때 각각의 $\frac{1}{2}$이 가리키는 양의 크기가 같지 않아서 또 다른 혼란을 야기할 수 있다. 이에 비해 <방법 4>에서는 하나의 막대가 고정되고 여러 분수를 비교할 수 있다는 장점이 있지만 하나의 막대를 고정하면 크기를 비교할 수 있는 분수가 제한적이라는 데 한계가 있다.

따라서 교사는 교수 목적에 맞게 선택하여 활용할 수 있어야 하며 각각의 방법에서 나타나는 한계점을 참고하여 사용하여야 한다. 또한 초등학교 3~4학년 학생들은 아직 비율로서의 분수를 학습하지 않았으므로 반드시 단위 막대를 다른 막대로 등분할하는 경험을 충분히 제공하여야 하며 이를 통해 분수의 크기를 비교할 수 있도록 해야 한다.

4. 분수의 연산에 관한 퀴즈네어 막대 활용

분수의 연산과 관련된 퀴즈네어 막대 활용의 예는 [그림 5]와 같이 구분할 수 있다.

먼저 Behr & Post(1992)는 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$를 하기 위한 방법으로 <방법 5>를 제안하였다. 구체적으로 다음과 같다(pp. 225-227).

첫째, 2등분되면서 동시에 5등분이 되는 막대를 찾는다. 이를 위해서 2와 5의 최소공배수인 10을 찾기 위해 2막대와 5막대를 나란히 배열해서 같은 길이가 되게 한다. 두 배열의 길이에 맞는 하나의 막대 즉 10막대를 찾는다.

둘째, $\frac{1}{2}$을 $\frac{5}{10}$로 나타낸다.

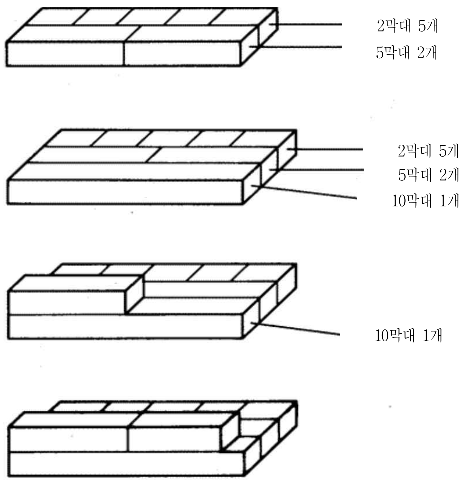
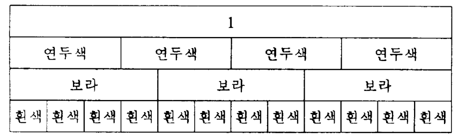
셋째, $\frac{2}{5}$를 $\frac{4}{10}$로 나타내고 더한다.

위의 단계를 나타내면 다음과 같다.

1) $\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$ 10막대 위에 5막대는 5막대 1개이고, 단위의 역할을 하는 10막대는 5막대 2개의 길이와 같다.

2) $\frac{2}{5}=\frac{2\times2}{5\times2}=\frac{4}{10}$ 10막대 위에 놓인 4막대는 2막대 2개이고, 단위의 역할을 하는 10막대는 2막대 5개의 길이와 같다.

그러므로 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5}{2\times5}+\frac{2\times2}{5\times2}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$ 이다.

	<방법 5>	<방법 6>
퀴즈 네어 막대 활용		 흰색 = $\frac{1}{12}$ 보라 = $\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{4}{12}$ 연두 = $\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{3}{12}$ (보라)+(연두)=7개의 흰색 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$
관련 문헌	‣ Behr & Post(1992, pp. 215-216) ‣ 김남희(1999, pp. 705-708) ‣ 류성림(2002, pp. 79-80)	‣ 구광조 외(1997, p. 121) ‣ 이영주 외(1999, p. 33)

[그림 5] 분수의 연산에 관한 퀴즈네어 막대 활용의 예
[Fig. 5] Examples for the use of cuisenaire rods related to the operation of fractions

한편 구광조 외(1997), 이영주 외(1999)와 같은 경우는 <방법 6>으로 이분모분수의 덧셈을 설명하였다. 초등학교 5학년에서 이분모분수의 덧셈을 할 때 "먼저 단위가 되는 길이를 구한 다음 이 때의 흰색 막대를 공통분모로 하고 각 막대 하나가 차지하는 흰 막대의 수를 분자로 하여 합이나 차를 구한다(구광조 외, 1997, p. 37)." 예를 들어 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$을 하기 위해 단위가 되는 길이(예, 12cm)를 구하고 1막대를 $\frac{1}{12}$로 둔다. 그러면 $\frac{1}{3}$에 해당하는 보라색 4막대는 1막대 4개의 길이와 같으므로 $\frac{4}{12}$로 표현할 수 있고, $\frac{1}{4}$에 해당하는 연두색 3막대는 1막대 3개의 길이와 같으므로 $\frac{3}{12}$이 된다. 따라서 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$은 1막대 7개의 길이와 같으므로 $\frac{7}{12}$이 된다. 이 과정을 수식으로 정리하면 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$이다.

두 가지 방법 모두 구체적인 조작활동을 통해 이분모분수의 덧셈에서 통분의 필요성을 설명하기에 적절하다. 퀴즈네어 막대에서 통분의 필요성은 2등분되면서 동시에 5등분되는 단위 막대를 찾는 과정과 직접적으로 연결된다. 학생들은 두 수의 최소공배수를 구할 때 퀴즈네어 막대를 활용하는 방법으로 공통분모를 구할 수 있다. 또한 각 과정을 수식으로 표현하여 이분모분수의 덧셈 알고리즘과 연결할 수 있다는 장점이 있다.

그러나 통분을 하는 과정에서 퀴즈네어 막대를 활용할 때 교사가 반드시 주의해야 할 사항이 있다. 퀴즈네어 막대를 활용하여 공통분모를 찾기 위해 두 분모의 최소공배수를 구하는 과정은 분할이 아닌 반복의 과정으로 오해될 수 있다. 이분모분수의 덧셈에서 통분은 단위를 등분할하는 아이디어에서 시작해야 한다. 예를 들어 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$에서 막대의 길이가 같아질 때까지 2막대와 5막대를 반복하여 10막대를 만들고 이를 단위로 정하는 이유는 10막대를 5막대로 2등분할 수 있고 2막대로 5등분할

수 있기 때문이다. 따라서 5막대는 $\frac{1}{2}$로, 2막대는 $\frac{1}{5}$로 표현된다. 그러나 단순히 두 분모의 최소공배수를 구하는 것으로 각각의 막대를 반복하면 심각한 어려움을 겪을 수 있다. 즉 2막대를 $\frac{1}{2}$의 분모로, 5막대를 $\frac{2}{5}$의 분모로 생각하고 각각의 막대를 반복하여 10막대를 만든다면 통분 과정에서 단위가 되는 막대의 길이가 늘어나기 때문에 이분모분수의 덧셈에서도 각각의 단위가 늘어난다고 잘못 생각할 수 있다. 이러한 어려움은 4장에서 실제 수업 사례를 통해 더욱 구체적으로 분석한다.

한편 두 가지 방법은 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 설명하는 것에서 약간의 차이가 있다. <방법 5>는 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5}{2\times5}+\frac{2\times2}{5\times2}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$의 과정을 모두 설명하는 반면에 <방법 6>은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$ 과정만 설명하고 있다. <방법 5>에서는 $\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$ 과정을 그림과 연결하여 설명할 수 있다. 즉 10막대 1개가 5막대 2개의 길이와 같고 5막대는 5막대 1개의 길이이므로 이를 수식으로 나타내면 동치분수를 만드는 과정까지 수식으로 나타낼 수 있다. 그러나 엄밀히 따지면 이러한 방법은 미국의 곱셈 표현 방식에 해당한다[5]. 우리나라의 경우에는 $\frac{1\times5}{2\times5}$는 2막대 5개 중에서 1막대 5개의 크기를 나타낸 것이기 때문에 퀴즈네어 막대를 가지고 활동한 상황과 직접적으로 연결되지 않는다. 따라서 5막대 2개에 대한 5막대 1개의 크기는 $\frac{1}{2}=\frac{5\times1}{5\times2}=\frac{5}{10}$라고 표현하는 것이 더욱 적절하며 곱셈의 교환법칙을 이용하여 $\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$로 연결하는 과정이 필요하다. <방법 6>에서는 먼저 단위가 되는 막대의 길이를 정함으로써 각각의 단위를 측정할 수 있는 새로운 단위를 1막대로 표현한다. 즉, $\frac{1}{3}$은 $\frac{1}{12}$이 4개인 양과 같고 $\frac{1}{4}$은 $\frac{1}{12}$이 3개인 양과 같으므로 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$임을 알 수 있고 각각의 양을 1막대로 재구성하는 과정을 통해 전체-부분으로서의 분수를 직관적으로 표현할 수 있다. 그러나 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$ 과정은 명시적으로 드러나지 않는다. 따라서 각 방법에 대한 정확한 이해를 바탕으로 교수 목적에 따라 활용할 수 있어야 하며 각각의 막대가 가리키는 양이 무엇이고 어떻게 분할되었는지에 초점을 두어 계산 원리를 설명하도록 해야 한다.

5) 우리나라의 경우에는 3의 4배를 3×4로 나타내지만, 미국의 경우에는 4×3으로 나타낸다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 초등학교 분수 학습에서 퀴즈네어 막대를 활용하는 방법을 비판적으로 고찰하여 교과용 도서 개발자와 교사에게 구체적인 시사점을 제시하는 것이 목적이므로 교과용 도서와 실제 수업에서 퀴즈네어 막대를 어떻게 활용하고 있는지 면밀하게 탐색하였다.

1. 교과용 도서 분석 대상 및 방법

초등학교 교과용 도서에서 퀴즈네어 막대를 어떻게 활용하고 있는지를 분석하기 위해서는 활용 방법에 대해 구체적인 설명이 제시되어 있는 자료를 참고할 필요가 있다. 이에 교과서보다는 교사용 지도서를 중심으로 분석하였다. 또한 현재 수학과 교육과정은 제7차 수학과 교육과정을 기반으로 하여 수학적 힘의 신장을 강조하고 있으며 교육과정의 개정이 거듭될수록 교구의 사용을 더욱 강조하고 있으므로 제7차~2009 개정 교사용 지도서를 살펴보았다[6]. 그러나 제7차~2007 개정 교사용 지도서의 분수 관련 단원에서는 퀴즈네어 막대를 제시한 경우를 찾을 수 없었으므로 본 연구에서는 2009 개정 교사용 지도서의 분수 관련 단원을 분석 대상으로 하였다. 교사용 지도서에서 제시된 퀴즈네어 활용 방법들을 선행연구 고찰을 통해 구분한 퀴즈네어 활용 방법들과 비교하면서 각 방법들의 주의 사항과 연결하여 고찰하였다.

2. 실제 수업 분석 대상 및 방법

분수 관련 단원의 실제 수업에서 퀴즈네어 막대를 어떻게 활용하고 이러한 방법이 학생들의 학습에 어떠한 영향을 미치는지 살펴보기 위해서, 교사가 직접 퀴즈네어 막대를 선택한 경우를 분석할 필요가 있다. 이를 위해 에듀넷 초등학교 수학 교과에 탑재되어 있는 우수 수

6) 2015 개정 교사용 지도서는 2017년 3월 현재, 1학년 1학기, 2학년 1학기만 개발된 상황이며 해당 학기에서 분수에 대한 내용을 다루지 않으므로 분석에서 제외하였다.

업 동영상을 살펴보았다.[7] 초등학교 수학 교과의 총 184개의 수업 중에서 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수 관련 내용을 지도한 수업은 모두 2개였다.[8] 본 연구에서는 이 두 개의 수업을 분석 대상으로 하였다. 하나는 분수의 의미에 관한 것으로 2007 개정 수학과 교육과정 시기에 진행된 수업이며 다른 하나는 이분모분수의 덧셈에 관한 것으로 제7차 수학과 교육과정 시기에 진행된 수업이다. 제7차, 2007 개정 교사용 지도서에서는 분수 관련 단원에서 퀴즈네어 막대를 제시하지 않았지만 교사들은 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수 관련 내용을 지도하였다. 이 과정에서 어떠한 오류 및 어려움이 발생할 수 있는지 선행 연구를 고찰한 내용과 연결하여 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 2009 개정 교사용 지도서의 퀴즈네어 활용 방안

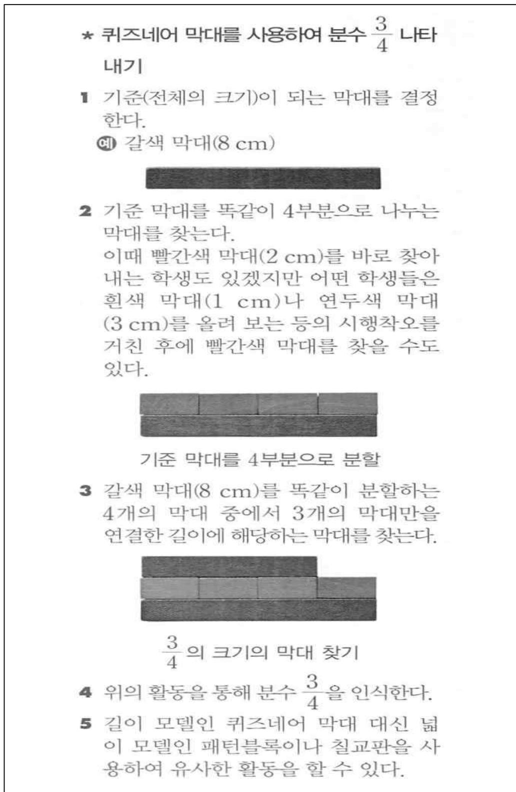
2009 개정 교사용 지도서의 분수 관련 단원에서 퀴즈네어 막대를 제시한 경우는 [그림 6]과 같다(교육부, 2014). 이를 통해 퀴즈네어 막대가 교과서에는 직접 제시되지 않았지만 교사용 지도서 창의수학활동 등에 제시되어 있음을 알 수 있다.

분수의 의미에서는 3-1-6. 분수와 소수 단원의 4차시 "분수를 알 수 있어요"의 창의수학활동 및 창의수학활동지에 [그림 6]의 (a), (b)와 같이 제시되었다. 구체적으로 (a)는 2장에서 제시한 <방법 1>과 유사하다. "4개의 막대 중에서 3개의 막대만을 연결한 길이에 해당하는 막대를 찾는다"라고 하였는데 만약 등분할 과정을 생략하고 8막대의 $\frac{3}{4}$이 6막대에 해당한다는 것에만 초점을 둔다면 3학년 1학기에서 다루는 범위를 벗어나게 된다. (b)가 분수만큼의 양에 해당하는 막대를 고르는 것에 초점을 둔 대표적인 예라고 할 수 있다. 한 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 막대를 고르는 것은 <방법 2>와 유사하고 엄밀하게 따지면 비율로서의 분수를 구하는 것이라고 할 수 있다. 물론 단위 막대를 무엇으로 두는가에 따라 여러 막대를 $\frac{1}{2}$로 표현할 수 있으므로 분수가 상대적인 크기를 나타낸다는 것을 이해하는 데 도움이 될 수 있고 추가 학습자료로 제시된 것이지만 분수를 전체-부분으로서의 의미로 처음 접하는 3학년 학생들에게는 인지적 부담이 될 수 있다. 따라서 8막대를 2막대 4개로 구성하는 과정을 강조하여 등분할 활동에 충분히 참여하도록 해야 하며 4개 중에 3개에 해당하는 양을 분수 $\frac{3}{4}$으로 표현하는 것에 초점을 두어 활용할 필요가 있다.

분수의 크기 비교에서는 3-1-6. 분수와 소수 단원의 7차시 동분모 분수의 크기를 비교하는 "분수의 크기를 비교할 수 있어요(1)" 차시에 [그림 6]의 (c)와 같이 제시되었다. 이는 <방법 3>과 유사하다. 또한 3-2-4. 분수 단원의 문제해결 차시에도 분모가 같은 대분수와 가분수를 비교하는 활동에서 반성 단계에 "분수 막대로 그림을 그리거나 퀴즈네어 막대를 사용하여 크기를 비교할 수 있습니다."라고 제시되었다(교육부, 2015b, p. 261). 따라서 2장에서 <방법 3>과 관련하여 논의한 바와 같이 교사는 먼저 단위가 되는 막대를 선택하게 하고 이를 등분할하는 활동을 통해 동분모분수의 크기를 비교하도록 이끌어야 한다.

분수의 덧셈에서는 해당 단원에 퀴즈네어 막대가 제시된 것은 아니지만 교사용부록의 '수학과 교구 활용'에 [그림 6]의 (d)와 같이 제시되었다. 이 방법은 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$을 퀴즈네어 막대로 표현하는 과정에서 기준이 되는 막대 5가 피가수, 가수, 합에 모두 등장하고 일관적으로 분모 5에 해당하는 막대를 아래에, 분자에 해당하는 막대를 위에 제시함으로써 학생들에게 상당한 오해를 불러일으킬 수 있다는 점에서 재고할 필요가 있다. 학생들은 위에 놓여있는 1막대, 2막대, 3막대가 각각 $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$에 해당하는 양이라고 생각하기 보다는 분자 1, 2, 3을 의미한다고 생각할 수 있다. 이러한 사고를 이분모분수의 덧셈에 그대로 적용할 경우 이지영・방정숙(2016a, 2016b)이 지적하고 있는 전체 단위가 변하는 대표적인 오류로 연결될 수 있다. 따라서 퀴즈네어 막대에서 동분모분수의 덧셈 과정을 설명하기 위해서는 [그림 7]과 같은 방법으로 단위 1에 대해 명시할 필요가 있으며 등분할 과정을 통해 각각의 막대를 분수로 나타내는 과정이 반드시 필요하다.

7) http://www.edunet.net
8) 2017년 3월 기준



★ 퀴즈네어 막대를 사용하여 분수 $\frac{3}{4}$ 나타내기

1 기준(전체의 크기)이 되는 막대를 결정한다.
예 갈색 막대(8 cm)

2 기준 막대를 똑같이 4부분으로 나누는 막대를 찾는다.
이때 빨간색 막대(2 cm)를 바로 찾아내는 학생도 있겠지만 어떤 학생들은 흰색 막대(1 cm)나 연두색 막대(3 cm)를 올려 보는 등의 시행착오를 거친 후에 빨간색 막대를 찾을 수도 있다.

기준 막대를 4부분으로 분할

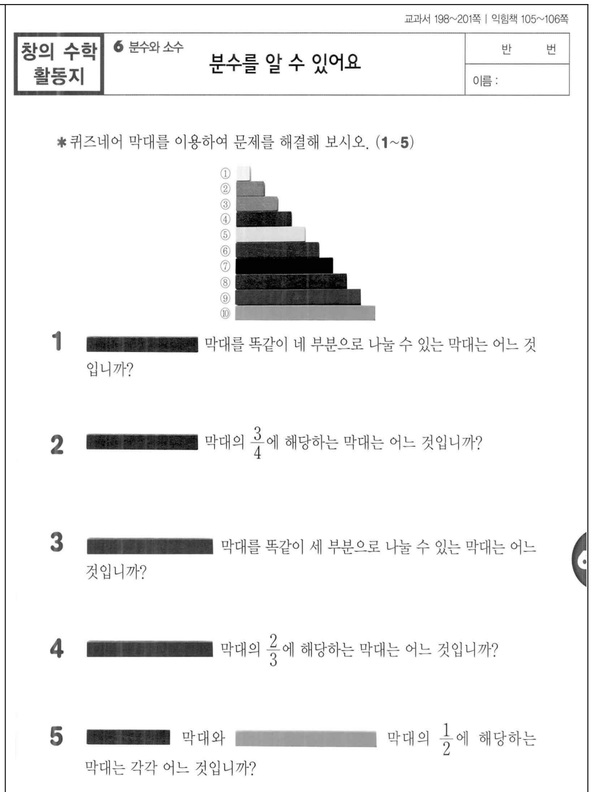
3 갈색 막대(8 cm)를 똑같이 분할하는 4개의 막대 중에서 3개의 막대만을 연결한 길이에 해당하는 막대를 찾는다.

$\frac{3}{4}$ 의 크기의 막대 찾기

4 위의 활동을 통해 분수 $\frac{3}{4}$을 인식한다.

5 길이 모델인 퀴즈네어 막대 대신 넓이 모델인 패턴블록이나 칠교판을 사용하여 유사한 활동을 할 수 있다.

(a) 3-1-6. 분수와 소수(교육부, 2014, p. 386)



교과서 198~201쪽 | 익힘책 105~106쪽

창의 수학 활동지 | 6 분수와 소수 | 분수를 알 수 있어요 | 반 번 | 이름 :

✱퀴즈네어 막대를 이용하여 문제를 해결해 보시오. (1~5)

1 막대를 똑같이 네 부분으로 나눌 수 있는 막대는 어느 것입니까?

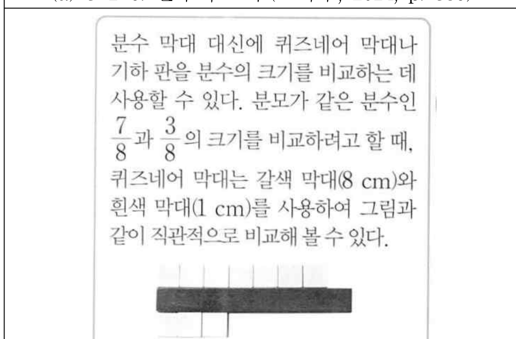
2 막대의 $\frac{3}{4}$에 해당하는 막대는 어느 것입니까?

3 막대를 똑같이 세 부분으로 나눌 수 있는 막대는 어느 것입니까?

4 막대의 $\frac{2}{3}$에 해당하는 막대는 어느 것입니까?

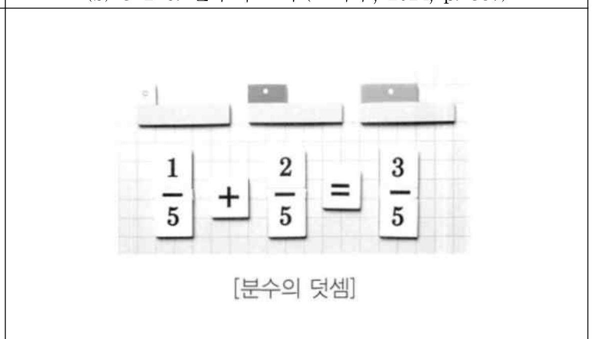
5 막대와 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 막대는 각각 어느 것입니까?

(b) 3-1-6. 분수와 소수(교육부, 2014, p. 387)



분수 막대 대신에 퀴즈네어 막대나 기하 판을 분수의 크기를 비교하는 데 사용할 수 있다. 분모가 같은 분수인 $\frac{7}{8}$과 $\frac{3}{8}$의 크기를 비교하려고 할 때, 퀴즈네어 막대는 갈색 막대(8 cm)와 흰색 막대(1 cm)를 사용하여 그림과 같이 직관적으로 비교해 볼 수 있다.

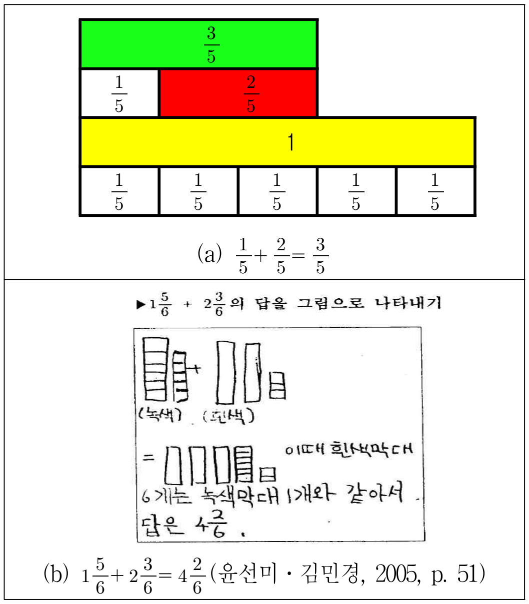
(c) 3-1-6. 분수와 소수(교육부, 2014, p. 393)



(d) 교사용 부록: 수학과 교구의 활용(교육부, 2014, p. 89)

[그림 6] 2009 개정 교사용 지도서에 제시된 분수 학습 관련 퀴즈네어 막대 활용

[Fig. 6] Examples for the use of cuisenaire rods in teachers' manuals developed from the revised curriculum by 2009



(a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

(b) $1\frac{5}{6}+2\frac{3}{6}=4\frac{2}{6}$ (윤선미・김민경, 2005, p. 51)

[그림 7] 동분모분수의 덧셈에 대한 올바른 표현
[Fig. 7] Appropriate representations about the addition of fractions with the same denominator

2. 우수 수업 동영상에서의 퀴즈네어 활용 방안

1) 분수의 의미에 관한 퀴즈네어 막대 활용 수업[9]

분수의 의미와 관련하여 퀴즈네어 막대를 활용한 수업은 2007 개정 교과서의 4-1-6. 분수 단원 3차시에 해당하는 “가분수를 대분수로, 대분수를 가분수로 나타내기”에 관한 것이다. 교사가 퀴즈네어 막대를 사용한 이유는 구체적 조작을 통해 학생들의 흥미를 유발하고 스스로 문제를 해결하고 발견할 기회를 제공하기 위한 것이었다. 교사는 활동 1에서 퀴즈네어 막대로 대분수를 가분수로 나타낸 후에 가분수를 대분수로 나타내도록 하였고, 활동 2에서 모둠별로 퀴즈네어 막대, 치즈케잌 조각, 초콜렛 조각 등을 활용하고 퀴즈네어 막대로 발견한 원리를 적용하여 문제를 해결하도록 하였다.

교사는 먼저 대분수를 가분수로 나타내는 활동을 하기 위해 [그림 8]의 (a)와 같이 칠판에 제시하였고 학생들과 함께 분수를 퀴즈네어 막대로 표현하였다. <에피소드 1>은 이에 대한 교사와 학생 간의 대화이다.

<에피소드 1> 퀴즈네어 막대를 사용하여 $1\frac{1}{4}$을 $\frac{5}{4}$로 변환하는 과정

교사A: $1\frac{1}{4}$을 퀴즈네어 막대로 어떻게 나타낼 수 있을까?

학생A[10]: 자연수 1을 보라색짜리 한 개로 나타내고 분모 4도 보라색짜리 한 개로 나타내고 분자 1은 한 개짜리 한 개로 나타냅니다.

(교사는 학생의 발표에 따라 [그림 8]의 (b)와 같이 $1\frac{1}{4}$을 퀴즈네어 막대로 나타낸다.)

교사A: 그런데 여기서 궁금한 점이 생겼어요. 여기 왜 1을 보라색으로 나타냈나요?

학생B: 분모에 있는 4와 분자에 있는 4는, $\frac{4}{4}$는 1이기 때문입니다.

교사A: ([그림 8]의 (c)와 같이 퀴즈네어 막대로 표현하면서) 분모에 4와 분자에 4를 올리면 이렇게 1이 되지요. 그래서 요 앞에 자연수를 1로 두었네요.

교사A: $1\frac{1}{4}$을 퀴즈네어 막대로 나타냈는데 이것을 가분수로 나타내려면 어떻게 해야 될까?

학생C: 세워져 있는 자연수를 분자에 붙이면 될 것 같아요.

교사A: ([그림 8]의 (d)와 같이 퀴즈네어 막대로 표현하면서) 세워져 있는 자연수를 이렇게 분자에 붙이면 될 것 같아요. 그리고 남아있는 하얀색을 어떻게 하면 될까요? 옆에 이렇게 붙이면 되지요. 그런데 변하지 않는 것이 있어요. 뭘까요?

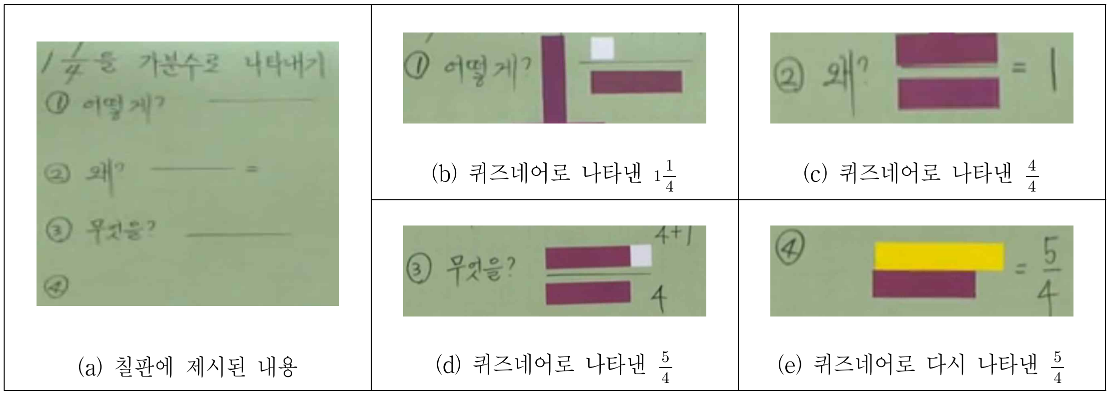
학생들: 분모!

교사A: 분모 4는 늘 변하지 않아요. 그러면 이렇게 나타내면 퀴즈네어 막대로 보라색은 뭐예요?

학생들: 4.

9) http://www.edunet.net/nedu/contsvc/viewGoodCont.do?contents_openapi=menu&menu_id=162&contents_id=@@h00150-0001-0000-0000-000000000060

10) 학생A, B, C, D는 각각의 에피소드에서 서로 다른 학생을 구분하기 위한 표현이다. 따라서 <에피소드 1>의 학생A와 <에피소드 2>의 학생A는 서로 다를 수 있다.

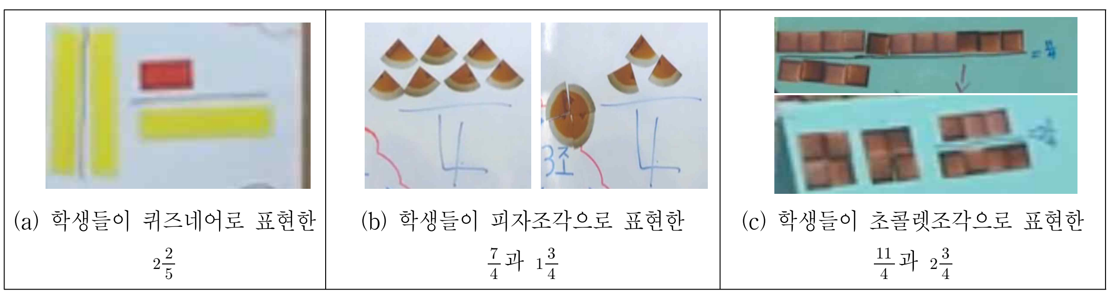


(a) 칠판에 제시된 내용
(b) 퀴즈네어로 나타낸 $1\frac{1}{4}$
(c) 퀴즈네어로 나타낸 $\frac{4}{4}$
(d) 퀴즈네어로 나타낸 $\frac{5}{4}$
(e) 퀴즈네어로 다시 나타낸 $\frac{5}{4}$

[그림 8] 교사A가 칠판에 제시한 내용과 퀴즈네어 막대로 표현한 $1\frac{1}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$
[Fig. 8] Teacher's representations of $1\frac{1}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ with cuisenaire rods

교사A: 그 다음에 보라색 4와 흰색 하나를 어떻게 해야 할까?
학생들: 더해요.
교사A: 그러면 $1\frac{1}{4}$은 어떻게 나타낼 수 있을까?
학생들: $\frac{5}{4}$.
교사A: $\frac{5}{4}$로 나타낼 수 있는데 그림 5와 길이가 같은 퀴즈네어 막대는 뭐예요?
학생들: 노란색.
교사A: ([그림 8]의 (e)와 같이 퀴즈네어 막대로 표현하면서) 그래서 $1\frac{1}{4}$은 $\frac{5}{4}$로 나타낼 수 있어요.

다음으로 교사는 가분수를 대분수로 나타내는 활동을 하기 위해 $\frac{5}{4}$를 제시하였고 <에피소드 1>과 유사한 방법으로 퀴즈네어 막대를 활용하여 $\frac{5}{4}$가 $1\frac{1}{4}$이 됨을 학생들과 함께 알아보았다. <에피소드 1>에서 알 수 있듯이 이 수업에서 단위가 되는 보라색 4막대는 놓이는 위치에 따라 서로 다른 양을 가리킨다. 즉 4막대가 분수의 자연수 부분에 놓이면 1이 되고, 분수의 분자나 분모 부분에 놓이면 4가 되었다. 이는 [그림 7]의 (b)에서 동분모대분수의 덧셈을 표현한 그림과 상당한 차이가 있다. 물론 4막대는 측정 단위를 무엇으로 두는가에 따라 1(예, 4막대 전체가 단위일 때)이 될 수도 있고 4(예, 1막대가 단위일 때)가 될 수도 있다. 그러나 이것은 하나의 양을 측정단위에 따라 다양하게 표현한 것이지 서로 다른 양을 의미하는 것은 아니다. 그러나 이 수업에서는 분수의



(a) 학생들이 퀴즈네어로 표현한 $2\frac{2}{5}$
(b) 학생들이 피자조각으로 표현한 $\frac{7}{4}$과 $1\frac{3}{4}$
(c) 학생들이 초콜렛조각으로 표현한 $\frac{11}{4}$과 $2\frac{3}{4}$

[그림 9] 학생들이 모둠활동을 통해 나타낸 표현
[Fig. 9] Students' representations through team activities

자연수, 분자, 분모 부분에 각각의 퀴즈네어 막대를 제시함으로써 퀴즈네어 막대 사이의 관계를 분수로 표현하기보다는 분수 기호를 표현하기 위해 퀴즈네어 막대를 사용하였다.

이로 인해 학생들이 어떠한 어려움을 겪었는지는 활동 2에서 볼 수 있다. 학생들은 [그림 9]와 같이 모둠별로 퀴즈네어 막대, 케잌 조각, 초콜렛 조각을 이용하여 대분수를 가분수로 고치고, 가분수를 대분수로 고치는 활동에 참여하였다. <에피소드 2>는 모둠활동과 전체 발표에서 학생들이 설명한 내용이다.

<에피소드 2> 대분수를 가분수로 나타내는 활동에 관한 학생들의 설명

학생A: $2\frac{2}{5}$를 가분수로 만들려면 분모와 분모끼리는 더하지 않습니다. 그 다음 분자랑 분자끼리 더하면 $\frac{7}{5}$이 됩니다. 그러므로 대분수 $2\frac{2}{5}$를 가분수를 만들면 $\frac{7}{5}$이 됩니다. (중략)

학생B: 여기 $\frac{12}{5}$가 있습니다. 가분수를 대분수로 바꾸려면 12에 5가 몇 번 들어가는지 먼저 알아야 합니다. 12에는 5가 두 번 들어가고 나머지 2가 남습니다. ([그림 9]의 (a)와 같이 나타내면서) 여기에서 이거[5막대] 두 개는 자연수자리로 오고 나머지는 분자자리에 옵니다. 분모는 절대 변하지 않습니다. 그래서 가분수 $\frac{12}{5}$는 대분수 $2\frac{2}{5}$와 같습니다. (중략)

학생C: 먼저 가분수 $\frac{7}{4}$을 대분수로 나타내는 방법은 ([그림 9]의 (b)의 첫 번째 표현을 가리키며) 이 그림처럼 $\frac{7}{4}$은 4조각을 서로 붙여서 자연수로 만들고 이것을 옮겨서 자연수 자리에 두는 것입니다. ([그림 9]의 (b)의 두 번째 표현과 같이 나타내면서) 그러면 남은 3은 분자 자리에 그대로 있게 되고 그러면 대분수 $1\frac{3}{4}$이 될 수 있습니다. 반대로 $1\frac{3}{4}$을 가분수로 바꾸는 방법은 자연수 1을 이렇게 나누어서 분자 자리에 붙이는 것입니다. 그렇게 되면 $\frac{7}{4}$이 됩니다.

학생들은 분수에서 자연수, 분자, 분모의 수치적인 수에 초점을 두고 각각의 교구를 분수의 자연수, 분자, 분모 부분에 두면서 하나의 분수 기호처럼 사용하였다. 학생A는 $2\frac{2}{5}$에서 자연수를 표현하는 5막대 2개를 하나는 분모로, 하나는 분자로 사용하였다. 따라서 분모끼리는 더하지 않으므로 분모는 그대로 5막대이고, 분자끼리는 서로 더하므로 5막대와 2막대를 더해서 $\frac{7}{5}$이라고 하였다. 같은 모둠에 있는 다른 학생도 이와 똑같은 방법으로 설명하면서 $2\frac{2}{5}$를 $\frac{7}{5}$로 잘못 표현하였다. 이를 통해 학생들은 아직 각각의 막대가 의미하는 양을 정확하게 구분하지 못하고 있다는 것을 알 수 있다. 또한, [그림 9]의 (b)와 (c)와 같이 케잌 조각이나 초콜렛 조각은 전체-부분으로서의 분수를 나타낼 수 있는 대표적인 모델임에도 불구하고 학생들은 각각의 조각을 $\frac{1}{4}$이 아닌 분자 1로 표현하였다.

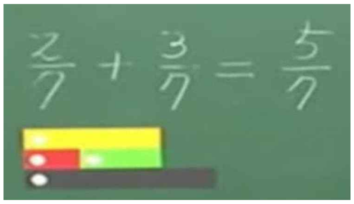
분수의 의미와 관련하여 퀴즈네어 막대는 단위 막대가 1일 때 다른 막대를 분수로 표현하고 그 양이 단위에 비해 어느 정도인지를 시각적으로 보여주는 장점을 가지고 있다. 따라서 교사는 퀴즈네어 막대를 기호적으로 사용하기보다는 먼저 단위가 되는 막대가 1이 된다는 것을 명시적으로 다루고 단위 막대를 다른 막대로 등분할하는 과정을 통해 다른 막대를 분수로 표현하여야 한다.

2) 이분모분수의 덧셈에 관한 퀴즈네어 막대 활용 수업[11]

이분모분수의 덧셈과 관련하여 퀴즈네어 막대를 활용한 수업은 제7차 교과서의 5-가-5. 분수의 덧셈과 뺄셈 단원 1차시에 해당하는 “분모가 다른 두 진분수의 덧셈하기”에 관한 것이다. 교사가 퀴즈네어 막대를 사용한 이유는 시각화 자료를 활용해서 학생들이 좀 더 쉽고 재미있게 스스로 이분모분수 덧셈의 원리를 탐구하도록 돕기 위한 것이었다. 구체적으로 활동 1에서 퀴즈네어 막대를 활용하여 이분모분수의 덧셈 계산 원리를 파악하도록 하였고 활동 2에서 점판을 활용하여 덧셈을 한 후, 활동 3에서 이제까지 배운 내용을 바탕으로 이분모분수 덧셈식을 형식화하도록 하였다.

11) http://www.edunet.net/nedu/contsvc/viewGoodCont.do?contents_openapi=menu&menu_id=162&contents_id=@@e00150-0001-0000-0000-000000000011

교사는 활동 1을 하기 전에 선수 학습 상기와 관련하여 4학년 나단계에서 학습한 동분모분수의 덧셈 $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$를 퀴즈네어 막대로 나타내는 활동을 하였다([그림 10] 참고). <에피소드 3>은 이에 대한 교사와 학생의 대화이다.



[그림 10] 동분모분수의 덧셈을 퀴즈네어 막대로 나타낸 교사 B의 표현

[Fig. 10] Teacher's representation of $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ with cuisenaire rods

<에피소드 3> 퀴즈네어 막대로 나타낸 동분모분수의 덧셈 과정

교사B: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$을 퀴즈네어 막대로 알아볼까요? 자 공통분모가 뭘까요?

학생들: 7!

교사B: 7막대를 준비할게요. (칠판에 검정색 7막대를 붙인다.) 그 다음에 어떻게 해줄까?

학생A: $\frac{2}{7}$의 분자 2 막대와 $\frac{3}{7}$ 분자 3 막대를 합해줍니다.

교사B: 더해줘야 한다고 했으니까 이어붙여줘야 겠지요? (칠판에 빨간색 2막대와 연두색 3막대를 이어 붙인다.) 자, 얼마가 될까?

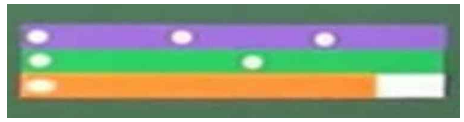
학생들: 5!

교사B: 그러면 $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$은 얼마가 될까요?

학생들: $\frac{5}{7}$.

교사는 단위가 되는 막대가 무엇인지 찾아보는 발문보다는 공통분모가 무엇인지를 먼저 질문하였고 공통분모가 7이므로 7막대를 준비한다고 표현하였다. 또한 학생A는 "$\frac{2}{7}$의 분자 2 막대와 $\frac{3}{7}$ 분자 3 막대"라고 표현하였다. 즉 교사와 학생들은 퀴즈네어 막대로 $\frac{2}{7}$를 나타낼 때 2막대는 분자 2를, 7막대는 분모 7을 의미하는 것으로 사용하였다.

다음으로 교사는 5학년 가단계에서 학습한 통분과 관련하여 [그림 11]과 같이 퀴즈네어 막대를 통해 이분모분수의 크기 비교를 하였다. <에피소드 4>는 이에 대한 교사와 학생의 대화이다.



(a) 4와 6의 공통분모를 구하는 과정

(b) $\frac{3}{4}$와 $\frac{5}{6}$의 크기를 비교하는 과정

[그림 11] 이분모분수의 크기 비교를 퀴즈네어 막대로 나타낸 교사 B의 표현

[Fig. 11] Teacher's representation of the comparison of fractions with cuisenaire rods

<에피소드 4> 퀴즈네어 막대를 활용하여 이분모분수의 크기 비교

교사B: 분모가 다른 분수의 비교를 한번 알아봐요. $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{6}$를 비교하기 위해서 우선 해줘야 할게 있지요.

학생A: 통분을 하여 분모를 같게 합니다.

교사B: 통분을 하려면 몇 막대부터 준비 할까요?

학생들: 4막대와 6막대!

(교사는 칠판에 보라색 4막대와 초록색 6막대를 위아래에 붙인다.)

교사B: 4막대와 6막대를 준비했어요. 이제 어떻게 하면 될까?

학생B: 4와 6의 퀴즈네어 막대를 길이가 같아질 때까지 이어서 붙입니다.

교사B: 뭐가 같아질 때까지? 두 개의 길이가 같아질

때까지.

(교사는 [그림 11]의 (a)와 같이 4막대와 6막대를 번갈아서 붙인다. 중략)

교사B: 얼마예요?

학생들: 12.

교사B: 이 12가 의미하는 게 뭘까?

학생C: 4와 6의 최소공배수이고 공통분모입니다.

교사B: 그러면 공통분모를 12로 해도 된다는 소리인가요?

학생들: 네.

교사B: 그러면 공통분모 12가 될 때 $\frac{3}{4}$의 분모 4는 몇 배가 됐나요?

학생들: 3배.

교사B: 그러면 분자 3에도 몇 배를 해주면 될까요?

학생들: 3배.

교사B: 3에 3배 하면 몇 배가 되지?

학생들: 9.

교사B: 9배. 그럼 몇 막대?

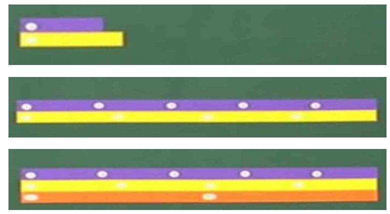
학생들: 9막대.

교사B: 그래서 $\frac{3}{4}$은 몇분의 몇이 된다?

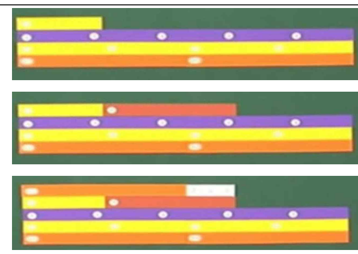
학생들: $\frac{9}{12}$. (교사는 [그림 11]의 (b)와 같이 4막대가 3번 반복된 전체 길이 위에 9막대를 올린다.)

교사는 $\frac{5}{6}$도 이와 같은 방법으로 학생들에게 질문하면서 $\frac{5}{6}$가 $\frac{10}{12}$이 되는 것을 보여주고 $\frac{5}{6}$가 $\frac{3}{4}$보다 크다는 것으로 이끌었다. 교사는 $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{6}$를 통분하기 위해 4막대와 6막대를 서로 길이가 같아질 때까지 이어붙여 12막대를 만들었고 이를 통해 공통분모가 12가 된다고 설명하였다. 다음으로 공통분모 12가 $\frac{3}{4}$의 분모 4에 3배를 하여 만들어진 것이므로 분자 3에도 3배를 하여 9막대를 찾았다. 교사는 <방법 5>, <방법 6>과 같이 두 분수를 통분하기 위해서 퀴즈네어 막대를 이용하여 두 수의 최소공배수를 구하는 방법을 활용하였다. 그러나 이 과정에서 분할에 초점을 두기 보다는 반복에 초점을 두어 두 분수의 크기를 비교하였다. 이 방법은 학생들이 이분모분수의 덧셈을 하는 과정에서도 그대로 나타났다.

교사는 활동 1에서 학생들에게 개별적으로 퀴즈네어 막대를 이용하여 $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$를 탐구하도록 하였고 자신의 방법을 발표하도록 하였다. [그림 12]는 학생이 이분모분수의 덧셈 과정을 칠판에 나타낸 것이며 이에 대한 학생의 설명은 <에피소드 5>와 같다.



(a) 4와 5의 공통분모를 구하는 과정



(b) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$를 구하는 과정

[그림 12] 이분모분수의 덧셈을 퀴즈네어 막대로 나타낸 학생의 표현

[Fig. 12] Student's representation of $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$ with cuisenaire rods

<에피소드 5> 퀴즈네어 막대를 이용하여 $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$의 계산원리를 도출한 학생의 설명

학생A: ([그림 12]의 (a)와 같이 보라색 4막대와 노란색 5막대를 아래 위로 붙이면서) 두 분수의 분모의 길이가 다르므로 먼저 통분하기 위해 4막대와 5막대를 준비하겠습니다. (보라색 막대와 노란색 막대를 번갈아가며 붙이면서) 두 막대의 길이가 같아지도록 붙이겠습니다. 두 막대의 길이가 몇 인지 알아보겠습니다. (주황색 10막대를 두 개를 노란색 막대 아래에 붙이면서) 두 막대는 20으로 같아졌습니다. 두 분수의 최소공배수 20이므로 20을 공통분모로 하여 통분할 수 있습

니다. $\frac{1}{4}$의 분모 4는 5배를 하였으므로 ([그림 12]의 (b)와 같이 노란색 5막대 하나를 위에 붙이면서) 분자 1에도 5배를 하여 5가 됩니다. 분수 $\frac{2}{5}$의 분모 5는 4배를 하였으므로 (갈색 8막대 하나를 위에 붙이면서) 분자 2에도 4배를 하여 8이 됩니다. 5와 8의 합이 얼마인지 알아보겠습니다. (주황색 막대 1개와 흰색 막대 3개를 위에 붙이면서) 5와 8의 길이는 13이 되었습니다. 그러므로 $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$는 $\frac{13}{20}$이 되었습니다.

<에피소드 5>에서 알 수 있듯이 학생은 앞에서 교사가 이분모분수의 크기를 비교할 때 사용한 통분방법을 그대로 이용하였다. 구체적으로 $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5}{4\times5}+\frac{2\times4}{5\times4}$를 설명하기 위해서 4막대와 5막대를 번갈아가면서 길이가 같아질 때까지 이어붙였다. 다음으로 "$\frac{1}{4}$의 분모 4는 5배를 하였으므로 분자 1에도 5배를 하여 5가 됩니다."라고 하면서 $\frac{1}{4}=\frac{1\times5}{4\times5}=\frac{5}{20}$를 설명하였다. 학생은 $\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{8}{20}$도 이와 똑같은 방법으로 설명하였다.

학생의 방법을 <방법 5>, <방법 6>과 비교하면 통분을 하기 위해 4막대와 5막대를 번갈아 이어 붙이고 이를 통해 결과가 $\frac{13}{20}$임을 구하는 것은 동일하다. 그러나 통분을 하여 동치분수를 만드는 과정에 상당한 차이가 있다. 구체적으로 해당 수업에서는 4막대를 분수 $\frac{1}{4}$의 분모로, 1막대를 분자로 사용하였지만 연구자들이 제안한 방법에서는 4막대를 분수 $\frac{1}{5}$ 자체의 양으로 사용하였다. 이 수업에서는 4막대와 5막대를 번갈아가면서 이어 붙이는 목적이 공통분모가 되는 수를 찾기 위한 것이지만 연구자들의 목적은 4등분도 되고 5등분도 되는 단위 막대가 무엇인지를 찾기 위한 것이었다. 즉 4막대가 분수 $\frac{1}{4}$의 분모를 의미하는 것이 아니라 20막대를 등분할할 수 있는 막대로서의 역할을 한다. 결국 4막대는 전체를 5등분한 것 중에 하나이므로 $\frac{1}{5}$에 해당하는 양이다. 이러한 차이는 미묘해보이지만 다음과 같은 상당한 오해를 불러일으킬 수 있다.

첫째, 이 수업과 같은 방법으로 접근하면 이분모분수의 덧셈에서 전체 단위가 변하는 오류가 발생한다. 이지영・방정숙(2016a, 2016b)은 이분모분수의 덧셈의 핵심 아이디어 중 하나로 전체 단위의 고정성을 강조한 바 있다. 이에 비해 이 수업에서는 처음 $\frac{1}{4}$을 분모가 4막대이고, 분자가 1막대인 표현으로 해석하고 $\frac{8}{20}$은 분모가 20막대이고, 분자가 8막대인 것으로 해석하였으므로 $\frac{1}{4}$과 $\frac{8}{20}$의 단위가 4막대와 20막대로 서로 다르다.

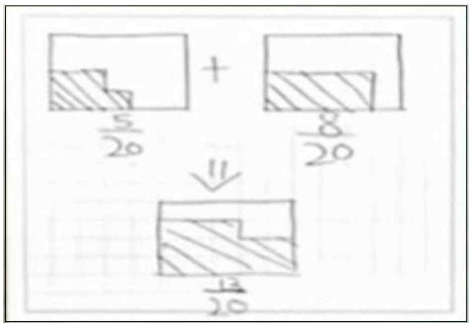
둘째, 통분 과정에서 나타나는 곱셈을 분할이 아니라 반복으로 인식하는 오류를 범할 수 있다. 실제 이분모분수의 덧셈에서 통분은 단위가 되는 막대의 길이(예, 20막대)가 늘어나는 것이 아니라 분할을 통해 단위 막대를 재구성하는 막대의 길이가 줄면서(예, 4막대→1막대), 막대의 개수가 많아지는 과정(예, 4막대 5개→1막대 20개)이다. 즉 하나의 양이 등분할되는 과정에서 더 작은 측정단위가 발생하고 이 과정을 곱셈으로 표현한 것이라는 것을 이해해야 한다.

셋째, $\frac{1}{4}=\frac{1\times5}{4\times5}=\frac{5}{20}$를 4막대에 5배를 하고 1막대에 5배를 한 것으로 설명하는 것은 막대가 가리키는 양에 대한 혼란을 야기한다. 앞에서 설명한 바와 같이 이분모분수의 덧셈에서 4막대는 $\frac{1}{4}$의 분모가 아니라 $\frac{1}{5}$ 자체의 양이다. 즉 $\frac{1}{4}=\frac{1\times5}{4\times5}=\frac{5}{20}$는 5막대 4개 중에서 5막대 1개인 양으로 설명해야 하며 곱셈의 교환법칙을 이용하여 알고리즘을 도출해내야 한다.

활동 2에서도 학생들은 직사각형 모델을 이용하여 이분모분수의 덧셈 계산 원리를 반복의 과정으로 설명하였다. <에피소드 6>은 이에 대한 학생의 설명이다.

<에피소드 6> $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$의 계산 원리를 설명하기 위해 직사각형 모델을 사용한 학생의 설명

학생A: 퀴즈네어 막대를 통해 공통분모가 20이라는 사실을 알았습니다. ([그림 13]을 제시하면서) 그래서 가로 5칸 세로 4칸인 직사각형을 그렸습니다. $\frac{1}{4}$은 $\frac{5}{20}$이므로 5칸을 색칠하고 $\frac{2}{5}$는 $\frac{8}{20}$이므로 8칸을 색칠합니다. $\frac{5}{20}$와 $\frac{8}{20}$을 더하면 $\frac{13}{20}$이므로 13칸을 색칠합니다.



[그림 13] 학생이 직사각형 모델로 표현한 $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$
[Fig. 13] Student's representation of $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$ with rectangular model

[그림 13]을 보면 처음의 $\frac{1}{4}$과 $\frac{2}{5}$에 해당하는 양이 직관적으로 잘 드러나지 않고 있음을 알 수 있다. 이는 $\frac{1}{4}$의 원래 양이 더 작은 단위로 세분되어 $\frac{5}{20}$가 되고, $\frac{2}{5}$의 원래 양이 더 작은 단위로 세분되어 $\frac{8}{20}$이 되는 과정이라기 보다는 공통분모가 20이므로 $\frac{1}{4}$의 분자에 5배하여 5칸을 색칠하고, $\frac{2}{5}$의 분자에 2배를 하여 8칸을 색칠한 과정이라고 할 수 있다.

마지막으로 활동 3에서 이분모분수의 덧셈을 형식화하는 과정에서도 한 학생은 "퀴즈네어 막대에서 공통분모 20이 되려면 분모 4에 5배를 해 주었으니까 분자 1에도 5배를 해주고 분모 5에 4배를 해주었으니까 분자 2에도 4배를 해주면 $\frac{5}{20}$와 $\frac{8}{20}$이 됩니다. 분자 5와 8을 더하면 $\frac{13}{20}$이 됩니다."라고 이야기하였다. 이는 수치적으로 보았을 때 틀린 설명은 아니지만 퀴즈네어 막대로 표현할 때는 다양한 해석을 불러일으킬 수 있다.

따라서 교사는 퀴즈네어 막대를 이용하여 이분모분수의 덧셈을 지도할 때에는 통분 과정을 분할에 초점을 두어 설명할 필요가 있으며 단위 막대를 분할하는 각각의 막대가 의미하는 분수 양이 무엇인지 생각해볼 기회를 충분히 제공할 필요가 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 분수 학습에서 퀴즈네어 막대를 활용하는 방법과 관련하여 선행 연구에서 제안한 방법을 고찰하였으며 이를 바탕으로 교사용 지도서와 실제 수업에서 활용한 방법을 비판적으로 검토하였다. 각각의 퀴즈네어 활용 방법에는 미묘한 차이가 있으며 이러한 미묘한 차이는 분수에 대한 학생들의 이해에 상당한 영향을 미친다. 따라서 교사는 각각의 차이를 정확하게 파악해야 하고 이를 통해 교수 목적에 적합한 방법을 활용할 수 있어야 한다. 또한 각각의 방법에서 발생할 수 있는 어려움이나 주의해야 할 사항들이 서로 다르기 때문에 이에 대해 면밀하게 탐색한 후 활용해야 한다.

분수 학습에서 퀴즈네어 막대를 활용할 때 교사 또는 교과용 도서 개발자가 주의해야 할 사항과 관련하여 시사점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 전체-부분으로서의 분수와 비율로서의 분수의 각각의 의미를 충분히 살릴 수 있는 방향으로 퀴즈네어 막대를 사용해야 한다. 전체-부분으로서의 분수를 지도할 때에는 단위 막대를 1로 명시하고 단위를 다른 막대로 재구성하는 활동을 통해 등분할하는 과정에 참여하도록 하고 이 중 부분에 해당하는 막대를 분수로 표현하도록 해야 한다. 비율로서의 분수를 지도할 때에는 앞에서 한 활동을 바탕으로 두 막대의 크기를 비교하고 기준에 따라 비교하는 막대를 분수로 표현하도록 해야 한다. 이때 임재훈(2015)이 제시한 분수의 두 가지 의미를 모두 다룰 수 있다. 그러나 2009 개정 교사용 지도서는 퀴즈네어 막대를 전체-부분으로서의 분수를 다루는 활동에서 비율로서의 분수의 의미로 활용하는 반면에([그림 6] 참고), 정작 비율로서의 분수를 다루는 활동에서는 제시하지 않고 있다. 이는 재고할 필요가 있다. 퀴즈네어 막대는 두 막대의 길이 사이의 관계를 다루기에 좋은 교구이므로 각각의 교수 목적에 따라 적합한 방법으로 활용되어야 한다.

둘째, 양적 추론을 통해 각각의 퀴즈네어 막대가 가리키는 양이 무엇인지를 파악하는 데 초점을 두어야 한다. 4장에서 살펴본 수업들에서 퀴즈네어 막대는 분수의 자연수, 분자, 분모 등으로 각각의 위치에 해당하는 수를 나타내기 위해 사용되었다(예, $\frac{2}{7}$에서 2막대는 분자 2, 7

막대는 분모 7). 이러한 경우에 양적 추론과 관련하여 퀴즈네어 막대가 지니는 강점은 사라진다. 즉, 이러한 활동은 분수를 숫자를 이용하여 수치적으로 나타내는 활동과 별반 다르지 않다. 심각한 경우에는 이 과정에서 잘못된 해석을 불러일으키기도 한다. 예를 들어 이분모분수의 덧셈을 하는 과정에서 각각의 막대가 의미하는 분수 양을 잘못 해석하여 알고리즘을 다르게 설명하거나 전체 단위가 변하는 오류 등이 발생할 수 있다(<에피소드 5> 참고). 따라서 퀴즈네어 막대는 양적 추론을 통해 수학적 개념이나 원리에 접근하기 위한 도구로 활용되어야 한다.

셋째, 교구의 사용과 관련하여 더욱 세심하고 민감하게 접근할 필요가 있다. 교사들은 교구를 활용하여 수학적 주제를 지도할 경우에는 활동에 내재되어 있는 개념이나 원리가 무엇인지를 정확하게 이해할 필요가 있다. 또한 수학적 상황이 교구로 변환되는 과정에서 어떠한 오류나 잘못된 해석이 발생할 수 있는지를 살피고 어느 범위까지 활용할 것인지를 철저하게 탐색할 필요가 있다(김남희, 2008). 교사용 지도서 역시 교구를 활용한 방안을 제시할 때에는 활용 방안, 교사의 주의 사항 등을 구체적으로 제시하여 교사들이 충분히 이해할 수 있도록 도와야 한다. 예를 들어 어떠한 구체적인 설명 없이 동분모분수의 덧셈 상황을 [그림 6]의 (d)와 같이 표현한다면 교사들은 분수를 나타낼 때 분모와 분자 각각의 양을 나타내는 것으로 퀴즈네어 막대를 오용할 수 있다. 이로 인해 학생들은 퀴즈네어 막대에 내재되어 있는 원리나 구조를 파악하지 못한 채 잘못된 이해를 할 수 있고 교구를 활용한 활동은 수학적인 개념이나 원리를 위한 활동이 아닌, 활동을 위한 활동에 그칠 수 있다.

본 논문에서 주장하는 바는 “분수 학습에서 퀴즈네어 막대 활용을 지양해야 한다.”가 아니다. 수학적 상황을 교구로 표현할 때에는 상당 부분이 축소되거나 수정되기 때문에 이로 인한 다양한 오해나 오류가 발생할 수 있다. 따라서 교사나 교과용 도서 개발자들은 이 점을 숙지하여 분수 학습에서 학생들의 개념적 이해를 돕기 위해 퀴즈네어 막대를 바람직하게 활용할 수 있도록 끊임없이 연구해야 한다. 더 나아가 여러 수학 주제를 다양한 교구를 활용하여 지도할 때 각각의 상황에 대한 구체적인 연구와 충분한 논의가 일어나기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2014). <u>수학지도서 3-1.</u> 서울: 천재교육.

Ministry of Education. (2014). *Korean national elementary mathematics teachers' manuals 3-1.* Seoul: Chunjae Education.

교육부 (2015a). <u>수학과 교육과정</u>(교육부 고시 제2015-74호 별책 8).

Ministry of Education. (2015a). *Mathematics curriculum.* Notification of the Ministry of Education No. 2015-74. [Vol. 8]

교육부 (2015b). <u>수학지도서 3-2.</u> 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2015b). *Korean national elementary mathematics teachers' manuals 3-2.* Seoul: Chunjae Education.

구광조, 전평국, 김성만, 류기천, 안영옥, 이영주, 주미자 (1997). 열린 수학 수업을 위한 퀴즈네어 막대의 활용 방안 탐색. <u>수학교육프로시딩 6</u>, 117-130.

Ku, K., Jeon, P., Kim, S., Ryu, K., An, Y., Lee, Y., & Ju, M. (1997). Exploring the use of cuisenaire rods for open math classes. *Proceeding of the Korean Society of Mathematical Education Conference on Mathematical Education 6*, 117-130.

김남희 (1999). 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용. <u>학교수학 1</u>(2), 699-721.

Kim, N. (1999). The use of cuisenaire rods in learning of mathematics. *School Mathematics 1*(2), 699-721.

김남희 (2000). 교구이용에 대한 교수학적 논의. <u>학교수학 2</u>(1), 29-51.

Kim, N. (2000). A didactical discussion on the use of mathematical manipulatives. *School Mathematics 2*(1), 29-51.

김남희 (2008). <u>예비교사와 현직교사를 위한 학교수학과 교구</u>. 서울: 경문사.

Kim, N. (2008). *School mathematics and manipulatives for pre-service and in-service teachers.* Seoul: Kyeongmunsa.

김민경 (2001). 초등수학에서 기하판 활용방안 탐색. <u>초등수학교육 5</u>(2), 111-119.

Kim, M. (2001). Investigation of geoboards in elementary mathematics education. *Education of Primary School Mathematics 5*(2), 111-119.

김민경 (2005). 패턴블록을 활용한 구체적 조작활동에 관

한 소고: 분수학습을 중심으로. 수학교육 44(1), 125-141.

Kim, M. (2005). A study of fraction instruction using pattern blocks as manipulatives. *The Mathematics Education 44*(1), 125-141.

김연식, 우정호, 박영배, 박교식 (1994). 수학교육학 용어 해설(1). 수학교육학연구 4(2), 245-260.

Kim, Y., Woo, J., Park, Y., & Park, K. (1994). Explanation on terms of mathematics education(1). *The Journal of Educational Research in Mathematics 4*(2), 245-260.

류성림 (2002). 초등 수학 수업에서 퀴즈네어 막대의 활용에 관한 연구. 과학·수학교육연구 25, 73-92.

Ryu, S. (2002). A Study on the use of cuisenaire rods in elementary mathematics education. *The Research of Science Mathematics Education 25*, 73-92.

박만구 (2016). 예비교사의 관점에서 본 초등수학 수업에서 교구의 의미와 사용 방법 분석. 초등수학교육 19(1), 61-78.

Park, M. (2016). An analysis on the meaning and use of manipulatives in the elementary mathematics lessons. *Education of primary school mathematics 19*(1), 61-78.

윤선미, 김민경 (2005). 퀴즈네어 막대의 활용을 강조한 TAI(Team Assisted Individualization) 분수 학습 프로그램 개발. 교과교육학연구 9(1), 37-60.

Yoon, S. & Kim, M. (2005). Developing a TAI fraction-learning program using cuisenaire rods. *Journal of the Research Institute of Curriculum Instruction 9*(1), 37-60.

이영주, 장인옥, 김동우 (1999). 수학교육에서의 퀴즈네어 막대 활용 방안. 수학교육학술지 3, 29-67.

Lee, Y., Jang, I., & Kim, D. (1999). Using cuisenaire rods in mathematics education. *Studies in Mathematical Education 3*, 29-67.

이지영, 방정숙 (2016a). 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고. 학교수학 18(3), 625-645.

Lee, J. & Pang, J. (2016a). Reconsideration of teaching addition and subtraction of fractions with different denominators: Focused on quantitative reasoning with unit and recursive partitioning. *School Mathematics 18*(3), 625-645.

이지영, 방정숙 (2016b). 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대한 초등학교 5학년 학생들의 이해. 학교수학 18(4), 793-818.

Lee, J. & Pang, J. (2016b). Fifth grade students' understanding on the big ideas related to addition of fractions with different denominators. *School Mathematics 18*(4), 793-818.

임재훈(2015). 비의 값과 비율 용어에 대한 교수학적 분석. 한국초등수학교육학회지 19(3), 371-386.

Yim, J. (2015). A didactical analysis of Korean mathematical terms Bi-yul and Bi-ui-gap. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 19*(3), 371-386.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5. Reston, VA: NCTM.

Behr, M.J. & Post, T.R. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T.R. Post (Ed.), Teaching mathematics in Grades K-8: Research-based methods(2nd ed., pp. 201-248). Allyn and Bacon.

Lamon, S.J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (3th ed.). New York: Routledge.

A Critical Review on the Use of Cuisenaire Rods in Learning of Fraction

Lee, Jiyoung
Paldal Elementary School, Suwon 16493, Korea
E-mail : ez038@naver.com

This study focuses on cuisenaire rods that can be used when teaching fractions to elementary school students. First of all, this study critically examines the use of cuisenaire rods in learning of fraction proposed by various researches. Then, based on this review, this study explores in detail the use of cuisenaire rods in teachers' manuals developed from the revised curriculum by 2009 and in lessons related to fraction.

The results of this study show that there are subtle differences in how to use cuisenaire rods in learning fractions and these subtle differences have a significant impact on students' understanding of the fractions. Therefore, the teachers should be able to accurately grasp the differences and utilize appropriate methods for teaching purpose. The followings are some of the implications for teachers or textbook developers when using cuisenaire rods in fraction learning: First, we should use cuisenaire rods in ways that can fully exploit the interpretations of the fraction as a part-whole and the fraction as a ratio. Second, we should focus on quantitative reasoning with unit to determine what each cuisenaire rod refers to. Third, it is necessary to take a more careful and sensitive approach to the use of cuisenaire rods.

Teachers and textbook developers should constantly explore ways to make good use of mathematical manipulatives to help students understand conceptually in fractional learning. Furthermore, when teaching various mathematical topics using different manipulatives, I expect that there will be sufficient discussions and specific studies on how to use each of these manipulatives.

---

* ZDM Classification : U72
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80
* Key words : Cuisenaire rods, Manipulative material, Fraction as part-whole relationship, Fraction as ratio, equivalent fraction, Addition of fractions with different denominators