한국학교수학회논문집 제 20 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 20, Number 4, 495-519, December 2017

예비교사들의 실수 e에 대한 이해

최은아[1] · 이홍렬[2]

본 연구에서는 실수 e의 다양한 의미와 맥락을 살펴보고, 실수 e에 대한 예비교사들의 이해 정도를 조사하였다. 먼저 실수 e의 역사적 발생과 수학적 의미를 살펴보았으며, 이를 바탕으로 검사지를 개발하여 예비교사 28명에게 적용하고, 그 중 8명에게 반성 및 탐구 활동을 수행하였다. 실수 e에 대한 예비교사들의 이해를 분석한 결과는 다음과 같다. 상당수의 예비교사들이 실수 e의 형식적 정의와 그 표현과의 관계를 인식하지 못하였으며, 실수 e의 표현을 극한 표현에 편중되어 이해하고 있었다. 실수 e의 무리수 속성과 작도 불가능성에 대해서는 대체적으로 적절한 판단을 내렸으나, 그 근거에서는 다소 미흡한 면모를 드러내었다. 또한 실수 e의 연속 복리 맥락과 지수함수 맥락에는 높은 이해도를 나타낸 반면에, 기하적 맥락과 자연로그 맥락을 미흡하게 이해하고 있음을 확인하였다. 향후 예비교사 프로그램의 개선 방향으로, 예비교사들에게 실수 e의 다양한 표현과 속성, 맥락에 대한 학습기회를 제공하고, 실수 e의 다양한 측면이 잘 조직된 관계망 속에서 통합 지도될 필요가 있음을 제시하였다.

주요용어 : 실수 e, 예비교사, 지수함수, 자연로그, 기하적 맥락, 연속 복리

Ⅰ. 서 론

수는 사물의 개수와 양을 나타내기 위해 발생했으며, 방정식의 해의 존재를 보장하기 위해 자연수로부터 정수, 유리수, 실수 등으로 확장되어 왔다(교육부, 2015). 그런데 학교수학에서 다루는 수 중에는 수의 발생과 확장에 관한 일반적인 지식에 부합되지 않는 다소 인공적인 수가 존재한다. 자연상수 e가 바로 그 대표적인 사례로, 세기 상황 또는 측정 상황과 직접적인 관련성을 찾기 어려울 뿐 아니라 정수 계수 방정식의 해가 될 수 없다고 알려져 있다. 미적분에서 가장 중요한 함수라고 할 수 있는 지수함수 e^x와 그 역함수 자연로그 $\ln x$의 밑으로 더 잘 알려져 있는 실수 e는 정의 방식에서도 차이를 보인다. 실수 e는 극한 개념을 이용하여 '$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 또는 $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$'로 정의되는 바, 이로부터 실수 e는 극한 과정으로 정의된 최초의 수라고 불리고 있다(Maor, 2000). 실제로 2009 개정 교육과정에 따

* MSC2010분류 : 97B50, 97C70
1) 우석대학교 (eunachoi@woosuk.ac.kr)
2) 우석대학교 (hylee@woosuk.ac.kr), 교신저자

른 미적분2 교과서는 실수 e를 극한 개념으로 정의하고 있으며, '무한소수 2.718281828⋯로 나타내지는 무리수'임을 기술하고 있다(정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원, 민진원, 김호경, 2014).

실수 e는 학교수학에서 다루는 대표적인 무리수 사례로서 종종 무리수 π와 비교되어진다. π의 역사는 고대 이집트와 바빌로니아까지 거슬러 올라가지만, e의 역사는 겨우 4세기 정도라고 할 수 있다(Maor, 2000). 오랜 역사를 가진 π가 수학적 의미와 유용성 측면에서 가치 있는 것은 사실이지만, 해석학을 비롯한 고등수학 분야에서는 지수함수를 구성하는 e의 수학적 가치에 보다 더 주목한다. 무리수와 초월수의 증명의 역사에서도 e에 대한 증명이 π의 증명을 이끌었다고 할 수 있다. Euler가 e가 무리수임을 증명한 후 30여년이 지나서야 π가 무리수임을 Lambert가 증명할 수 있었으며(Cajori, 1905; Fey, 1969; Boyer & Merzbach, 2000), e가 정수 계수 다항방정식의 해가 될 수 없는 초월수라는 사실을 증명한 Hermite의 방법은 이후 Lindemann이 π가 초월수임을 증명한 방법에 그대로 활용되었다(Maor, 2000). 그럼에도 불구하고 대부분의 학생들에게 π는 그 근삿값 3.14를 즉각적으로 떠올릴 정도로 익숙한 수이지만, e는 상대적으로 인지도가 낮아 보인다. 그 이유로 초월함수의 미적분을 배우는 학생들만 실수 e를 학습하는 교육과정 측면과 실수 e가 가지는 다양한 의미에 주목하지 못한 교수·학습과정 측면을 추측해볼 수 있다. 특히 후자 측면은 실수 e의 개념적 이해를 위한 교수·학습 연구가 이루어질 필요가 있음을 이야기한다.

그동안 이루어진 실수 e에 관한 연구들은 e에 대한 역사적 분석과 수학적 분석 위주로 수행되어 왔으며, 양적으로도 소수에 불과하다. 국내에서는 주로 교육대학원 학위논문 형태로 찾아볼 수 있는데, e의 역사적 발생 배경과 수학적 분석, 실생활 속에서 활용되는 사례와 6종의 교과서에 대한 분석을 실시한 허훈(2013)의 연구와 미적분 교과서에 대한 분석을 통해 무리수 e의 지도방안을 이야기한 한혜원(2012)의 연구, e의 정의와 표현을 살펴보고 정의 방법에 따른 이론 전개 방법을 비교한 곽성훈(2015)의 연구 등을 들 수 있다. 국외 연구로는, 로그 개념을 창시한 Napier부터 Saint-Vincent, Newton과 Leibniz를 거쳐 Euler에 이르는 실수 e의 역사를 연대기적으로 기술하고 있는 Coolidge(1950), Fey(1969), O′Corner & Robertson(2001)의 연구와 '수수께끼와 같은 e의 역사'라는 독특한 시를 제시하고 이를 수학수업에 활용할 것을 제안한 Glaz(2010)의 연구 등이 있다. 이상의 연구들은 실수 e를 독립된 주제로 하여 역사적, 수학적으로 분석한 연구에 해당한다. 반면에 자연로그의 도입 또는 지수함수의 미분을 주제로 한 연구에서 실수 e에 대한 분석을 부분적으로 삽입하고 있는 연구들도 찾아볼 수 있다(민세영, 박선용, 2002; 이동근, 양성현, 신재홍, 2017).

한 가지 아쉬운 점은 실수 e에 대한 학생들 또는 예비교사들의 이해를 살펴 본 연구를 찾아볼 수 없다는 것이다. 고등학교 2학년 수준별 상반 학생들을 대상으로 실수 e의 수렴성과 수렴 범위를 증명하도록 재구성한 수업을 실시한 후에 학생들의 e에 대한 의미와 근삿값에 대한 이해도가 향상되었음을 제시한 이성숙의 연구(2013)가 거의 유일하다. 특히, 장차 실수 e와 관련된 미적분 내용들을 지도할 예비교사들이 현재 실수 e를 어떻게 이해하고 있는지를 살펴보는 것은 실수 e의 교수를 위한 수학지식(Mathematical Knowledge for Teaching; MKT)을 도출하는 것에 유용할 것이다. Ball, Thames & Phelps(2008)가 개념화한 MKT는 일반내용지식(CCK)과 전문내용지식(SCK), 수평내용지식(HCK)으로 세분화되는 교과내용지식(SMK)과 내용과 학생에 관한 지식(KCS), 내용과 교수에 관한 지식(KCT), 교육과정지식으로 세분화되는 내용교수지식(PCK)으로 분류될 수 있다. 이 중에서도 본 연구는 실수 e를 가르치는 맥락에서 수학적 원리와 법칙을 개념적으로 설명하고 수학적인 아

이디어를 정확하게 표현하며, 여러 표현들을 서로 연결하고, 수학적 판단을 내리고 설명할 때 필요한 지식인 전문내용지식(SCK)을 밝히는데 기여할 것이다.

이에 본 연구는 실수 e의 개념의 다양한 의미와 맥락을 살펴보고, 이를 바탕으로 실수 e에 대한 예비교사들의 이해 정도를 조사하는 것을 목적으로 한다. 본 연구의 결과는 실수 e를 가르치는데 필요한 수학지식을 밝혀줄 것이며, '수학교재 연구 및 지도법' 과목을 비롯한 예비교사 프로그램에 유의미한 시사점을 도출할 것으로 본다. 이를 위해 먼저 실수 e의 역사적 발생과 발달 과정, 다양한 수학적 의미와 맥락을 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 실수 e의 개념 분석

1. e의 역사적 발생

수학사에서 실수 e의 역사는 400년 정도에 불과할 뿐 아니라 그 기원 또한 명확하게 설명하기 어렵다(Maor, 2000). 다만 확인 가능한 것은 1731년에 Euler가 Goldbach에게 쓴 편지에 기호 e가 처음으로 등장하기까지 17세기와 18세기 동안 실수 e가 간접적으로나마 여러 차례 등장했었다는 사실이다. 발생 시기와 형태에서 모호한 측면이 많은 e의 발생에 대해서, O'Corner & Robertson(2001)는 'e는 아주 미미한 방식으로 수학의 세계로 들어왔다'고 기술하고 있으며, Glaz(2010)는 'e의 첫 등장은 자연로그표로 변장한 모습이었다'고 표현하고 있다. 본 연구에서는 Cajori(1905, 1917), Fey(1969), O'Corner & Robertson(2001), Maor(2000), Glaz(2010)의 연구를 종합하여, e의 발생과 발달 과정을 암묵적 발생 단계, 기하적 측정 단계, 극한 인식 단계, 형식적 정의 단계로 명명하여 나누어 살펴본다.

첫 번째 암묵적 발생 단계는 17세기 초 Napier에 의해 만들어진 로그에서 e의 출현을 간접적으로 확인할 수 있는 시기이다. Napier는 삼각함수의 곱을 합과 차로 바꾸는 공식인 $\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$와 등비수열의 항을 곱하면 그 지수가 등차수열을 이룬다는 사실을 바탕으로 로그를 구상하였다. 1614년 <놀라운 로그 법칙 설명>이라는 Napier의 라틴어 책은 1618년에 영어로 번역되었으며, 이 번역본의 부록에 오늘날의 자연로그에 해당하는 로그표가 등장한다. Oughtred가 썼을 거라고 추정되는 이 부록에 바로 $\log_e 10 = 2.302585$와 동치인 명제가 나타난다. 그런데 초기의 Napier의 로그는 오늘날과 달리 밑에 대한 인식이 없는 상태였으며, 진수가 증가함에 따라 로그값은 오히려 감소하는 성질을 가지고 있었다. Napier 자신은 미처 인식하지 못하였지만, Napier 로그는 밑이 $\frac{1}{e}$인 로그에 해당한다. 이후 Briggs가 Napier와 협의 하에 밑이 10인 상용로그를 만들고 나서야 비로소 밑의 개념이 생겨났다고 보고 있다.

기하적 측정 단계는 쌍곡선 아래의 넓이를 구하는 과정에서 e가 간접적으로 등장한 시기이다. 그리스 시대부터 수학자들의 지속적인 관심 분야였던 원뿔 곡선의 넓이를 구하는 문제는 17세기에 미적분이 발견되기 전까지 주로 Archimedes의 실진법과 Cavalieri의 불가분량법 등을 이용하여 구해졌다. 그런데 직각 쌍곡선 $y = \frac{1}{x}$의 경우에는 무한대로 뻗어나가면

서도 점근선이 존재하는 특징으로 인하여 넓이를 계산하는데 어려움이 있었다. 1640년경에 Fermat가 $x=0$에서 $x=a$사이의 곡선 $y=x^n$ 아래 부분의 넓이, 즉 $\int_0^a x^n dx$에 해당하는 값이 $\frac{a^{n+1}}{n+1}$임을 밝혔지만, $n=-1$인 직각 쌍곡선의 경우에는 분모가 0이 되는 관계로 이를 적용할 수가 없었다. 드디어 1647년 Saint-Vincent에 의해서 $x=1$에서 $x=t$까지의 쌍곡선 $y=\frac{1}{x}$ 아래의 넓이가 계산되었다. 그는 x가 등비수열로 변할 때 곡선 아래의 넓이가 등차수열로 변하는 것은 로그 밖에 없다는 사실을 발견하게 된다. 1661년 Huygens는 이러한 직각쌍곡선과 로그의 관계를 보다 명시적으로 설명하였다. 오늘날의 개념으로 보면, e는 $x=1$부터 직각쌍곡선의 아래 넓이를 측정할 때, 그 넓이가 정확히 1이 되게 하는 x값이다. 그러나 Saint-Vincent와 Huygens 모두 로그의 밑에는 주목하지 않았기 때문에 e가 수학의 전면에 명시적으로 등장할 수 있는 기회를 다시 한번 놓치게 되었다고 볼 수 있다. 이후 Newton은 자신이 발견한 미적분법과 Saint-Vincent의 결과를 이용하여 $y=\frac{1}{x}$의 역도함수가 $\ln x$임을 보였으며, 이 로그를 '쌍곡선 로그'라고 부르게 된다.

극한 인식 단계는 복리이자에 관한 원리합계 문제를 해결하는 과정에서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값으로서 e을 인식한 시기이다. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$은 원리합계 공식 $S=P(1+r)^t$에서 파생된 식으로, 원금이 1, 연이율이 1일 때 이자를 n번에 걸쳐 복리로 계산했을 때의 원리합계를 의미한다. 주지하다시피, n이 무한히 커진다고 해도 원리합계는 일정한 값을 넘지 못한다. 17세기 당시에는 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에 적당히 큰 수를 대입해보는 방식으로 이 사실을 경험적으로 추측했을 것으로 추정가능하다. 이 시기의 주요 관심사는 연속 복리 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값이 존재함을 증명하는 것이었다. 드디어 1683년 Jakob Bernoulli는 이항정리를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴하고 그 극한이 2와 3 사이에 있음을 밝히는 데 성공하였다. Napier의 암묵적 발생 단계와 Saint-Vincent의 기하적 측정 단계와 비교할 때, 이 단계는 연속 복리라는 실생활 맥락을 통해 e의 존재성을 인지하고 e를 극한값으로 인식한 시기였다는 점에서 e에 대한 보다 명시적인 접근이 시작되었던 시기라고 할 수 있다. 그렇지만 Bernoulli는 자신의 성과가 로그와 관련이 있다는 사실을 인식하는 것에는 이르지 못하였다.

형식적 정의 단계는 e가 수학적으로 극한 과정으로 정의되고, 다양한 해석적 표현들이 제시된 시기이다. 1690년 Leibniz는 Huygens에게 보낸 편지에서 'b'라는 기호를 이용하여 실수 e를 최초로 기록하였으며, 오늘날과 같은 기호 'e'는 Euler가 1731년 Goldbach에게 보낸 편지에서 처음으로 나타난다. Euler는 편지에서 e를 '쌍곡선 로그 값이 1인 수'라고 정의하고 기호 'e'로 표기함으로써 수학계에 실수 e를 전면적으로 등장시켰으며, 이로 인해 수학계는 e의 중요성에 주목하게 되었다. 1748년에 출간된 Euler의 <무한소 해석 입문>은 e에

대한 다양한 아이디어와 성질들을 다루고 있다. 일단 e를 '$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$'으로 정의하였으며, 급수 $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ 을 유도하여 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$가 성립함을 증명하였다. 이에 따라 소수 18번째 자리까지 e의 근삿값을 계산하기도 하였다. 한편, Euler의 업적 중 하나는 그동안 로그함수의 역함수로만 여겨졌던 지수함수를 $e^x = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$로 재정의함으로써 $\lim_{n \to \infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1)$로 정의한 로그함수 $\ln x$로부터 독립시켰다는 점이다. 이로 인해 지수함수는 로그함수와 동등한 위치로 올라설 수 있었으며, 실수 e와 함수 e^x가 해석학에서 중심적인 역할을 할 수 있는 기초를 마련하였다고 할 수 있다.

이상에서 살펴본 실수 e의 발생과 발달 과정의 단계는 대체적으로 선형적이라고 할 수 있으나, 절대적인 것은 아니다. 예를 들어, Saint-Vincent의 기하적 측정 단계는 쌍곡선의 넓이와 로그의 관계를 인식했다는 점에서 Napier의 암묵적 발생 단계에 선형적으로 연결되어 있다고 볼 수 있으나, Bernoulli의 연속 복리에 대한 극한 인식 단계는 앞의 두 단계와 독립적으로 발생한 것이다. 또한 미적분학이 발달한 Euler의 형식적 정의 단계에 이르러 이전의 수학적 성과들이 회고적으로 분석되었을 때, 서로 개별적으로 보였던 각 단계의 발견물들이 결국 실수 e를 중심으로 한 개념망 속에 연결되어 있음을 확인할 수 있었던 것이다.

2. e의 수학적 의미

1절에서 살펴본 e의 역사적 분석을 바탕으로, 실수 e가 가지는 다양한 수학적 의미를 정의와 표현, 속성으로 나누어 살펴보도록 한다. 먼저 실수 e의 정의는 두 가지로 나타난다고 볼 수 있다. 두 가지 모두 Euler의 정의로, 하나는 극한 과정으로 정의하는 '$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$'이며, 다른 하나는 '$\log a = 1$인 양수 a'이다. 특히 후자는 밑이 e인 자연로그의 '$\log_e e = 1$'에 해당하므로 일종의 순환논리에 빠진 사례라고 생각할 수 있으나, Napier의 로그가 나온 이후로 오랜 기간 동안 밑에 대한 인식 자체가 없었던 점을 감안한다면, '쌍곡선 로그값이 1인 수'라는 Euler의 정의는 성립가능하다. e를 대수적으로 접근하면, e는 '방정식 $\ln x = 1$의 해'이며, Newton이 제시한 바와 같이 정적분 개념을 이용하면 자연로그(쌍곡선 로그) $\log a$는 $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$로 정의 가능하므로, e는 $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = 1$을 만족시키는 양수 a로 정의 가능하다(김홍종, 2014).

실수 e를 나타내는 표현은 극한 표현뿐 아니라, 급수 표현, 기하적 표현 등이 존재한다.[3] 수학적 표현은 문제해결뿐 아니라 개념 학습에서도 중요한 역할을 담당한다. 특히, 수 개념은 정의 자체가 표현에 의존하는 경우가 대부분이므로(Zazkis & Gadowsky, 2001), 실수 e에 대한 개념적 이해를 위해서는 e의 표현에 대한 이해가 필수적이다. e의 극한 표현에는

3) 이외에도 실수 e를 나타내는 표현에는 무한 연분수 표현이 있다. 본 논문에서는 예비교사가 학교수학의 미적분 영역에서 실수 e를 지도하는데 필요한 수학지식을 살펴보는 바, 연분수 표현 자체가 학교수학의 미적분과 직접적인 관련성이 떨어진다고 판단하여 논의 대상에서 제외하였다.

정의 형태인 '$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$' 또는 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$' 외에도 '$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$'도 가능하다. 급수 표현으로는 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 을 들 수 있다. Newton은 자신이 발견한 이항정리를 이용하여 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n^n}$ 을 보였고, 이 식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$ 급수가 수렴함을 밝혔다. 한편 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, 즉 $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots$ 은 $\frac{1}{e}$에 수렴한다. 이 급수는 Bernoulli가 제시한 'n개의 편지지를 주소가 쓰여진 n개의 편지봉투에 넣을 때, 모든 편지지를 잘못된 편지 봉투에 넣을 확률은 얼마인가?'라는 '잘못 넣은 편지 봉투' 문제에서 n이 한없이 커질 때의 확률에 해당한다.

e의 기하적 표현은 Saint-Vincent, Huygens, Newton의 연구를 바탕으로, x가 1부터 e까지의 직각 쌍곡선 $y=\frac{1}{x}$ 아래의 넓이, 즉 $\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$로 나타낼 수 있다. 또한 e는 x가 $-\infty$부터 1까지 곡선 $y=e^x$ 아래의 넓이, 즉 $\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx$ 이기도 하며, 곡선 $y=e^x$ 의 $x=1$에서의 접선의 기울기를 의미하기도 한다.

한편 실수 e는 대수적으로 무리수이자 초월수라는 속성을 가진다. Euler는 논문 <연분수에 관한 에세이>에서 $\frac{e+1}{e-1}$이 분모에 등차수열이 나오는 무한 연분수로 표현된다는 사실로부터 $\frac{e+1}{e-1}$가 무리수임을 보였으며, 이를 이용하여 e가 무리수임을 증명하였다. e의 급수 표현을 잘 알고 있었던 Euler가 무리수 증명에서 급수를 이용하지 않은 것은 의아한 일로 남아있다(Maor, 2000). 결국 e의 급수 표현을 이용하여 e가 무리수임을 증명한 것은 1815년의 Fourier의 업적으로 돌아갔다.

19세기 초, 수학자들은 '과연 정수 계수 다항방정식의 해가 될 수 없는, 즉 대수적이지 않은 무리수가 존재하는가?'라는 질문에 답하기 위하여 특별히 Liouville의 수, 즉 $\sum\frac{1}{10^{n!}}=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\cdots$와 같은 수를 인공적으로 만들었을 뿐 아니라, 기존의 무리수 중에서 π와 e를 검토하기 시작하였다. Liouville은 e가 정수 계수의 이차방정식의 해가 될 수 없음을 밝히는 것에 성공했으며, 1873년 Hermite는 30쪽이 넘는 논문에서 e가 정수 계수의 모든 다항방정식의 해가 될 수 없는 초월수임을 증명하였다. 그런데 e의 무리수 속성과 초월수 속성이 증명된 것이 Lambert가 π가 무리수임을 증명하고, Lindemann이 π가 초월수임을 증명한 것보다 훨씬 먼저 이루어졌다는 점에 주목할 필요가 있다. π에 비해 훨씬 짧은 역사를 가진 e이지만, 어느새 수학에서 π만큼 중요한 상수로서 자리를 잡았다고 할 수 있다.

3. e의 다양한 맥락

Freudenthal(2008)은 수학 개념을 비롯한 본질이 광범위한 상식과 상식적인 현실에서 발생했으므로, 발생했던 곳에서 다시 재발명되어야 함을 강조한다. 이는 구체적인 학습 과정에서 수학화가 일어나기 위해서는 학습자에게 현실의 영역으로서 맥락이 제시되어야 함을 의미하며, 맥락의 활용은 수학 개념의 형성과 문제해결력의 신장뿐 아니라 학습동기 유발에도 도움을 준다(허남구, 강향임, 최은아, 2017). 실수 e 또한 그 발생적 맥락을 재발명하는 것이 실수 e의 개념적 이해에 효과적이라 할 것이다.

실수 e는 1절에서 살펴본 발생 맥락에 따라, Napier의 로그 맥락과 직각 쌍곡선의 아래 넓이를 측정하는 기하 맥락, 이자를 지급하는 횟수를 한없이 크게 했을 때의 원리합계를 구하는 연속 복리 맥락과 자연스럽게 연결된다. Napier가 로그를 창안했던 아이디어는 기하급수적 변화를 산술급수적 변화로 파악하고자 하는 것으로(민세영, 박선용, 2002), 당시 천문학의 발달이 가져온 큰 수의 복잡한 곱셈과 나눗셈을 간단한 덧셈과 뺄셈으로 변환한다는 의미가 담겨 있다. 계산의 도구로서 로그를 사용하기 위해서는 등비수열이 좀 더 조밀해질 필요가 있었으므로, 초기 Napier는 초항을 10^7, 공비를 1에 가까운 값인 $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}$로 잡았던 것이다. 그런데 Napier의 공비를 1보다 큰 $(1+\frac{1}{10^7})^{10^7}$로 수정하게 되면, 밑이 $\frac{1}{e}$인 Napier 로그를 밑이 e인 자연로그 $\log_e x$로 변환하여 유도할 수 있다. 다음으로, e의 기하 맥락은 e가 x가 1부터 e까지인 직각 쌍곡선 $y=\frac{1}{x}$ 아래의 넓이와 관련이 있다는 것이며, $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$이 되게 하는 x의 값으로 x축 위의 e의 위치를 찾아낼 수 있다. Bernoulli의 연속 복리 맥락은 원금이 1이고 연이율이 1인 경우의 연속 복리의 극한값인 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 e라는 것을 의미한다. 이자를 지급하는 횟수 n이 무한히 커진다고 해도 원리합계는 일정한 값, 즉 원금 a의 e배인 약 $2.7a$를 넘지 못한다.

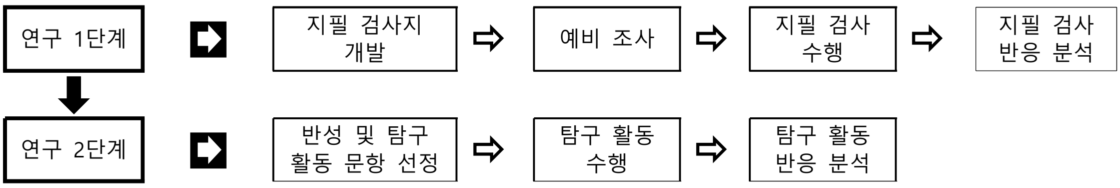
이상이 e의 발생과 관련된 역사적 맥락이라면, 미적분의 발달과 더불어 e를 명시적으로 인식하고 이를 활용하여 함수로 생성한 지수함수 맥락에 주목해보자. Cajori(1917)에 의하면, 로그가 발생된 당시에는 현대적인 지수 표현이 사용되지 않았으며, 지수 개념에 대해서도 잘 알려져 있지 않는 상태였을 뿐 아니라, 이후 상당 기간 동안 지수함수는 로그함수의 역함수 정도로만 인식되고 있었다. 오늘날 학교수학의 방식과 같이 로그함수를 지수함수의 역함수로 도입하는 아이디어는 Euler에 의한 것으로, Euler는 지수함수를 $e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$로 독립적으로 정의함으로써 지수함수 e^x의 성질과 유용성에 대한 연구를 촉진하게 된다. 지수함수의 중요성은 미적분이 발달하면서 점점 확대되었으며, $y=a^x$의 도함수가 자기 자신에 비례한다는 성질, 즉 $(a^x)'=ka^x$라는 성질은 다양한 현상을 설명하는 좋은 모델이라는 점에서 주목받게 되었다. 특히, 비례상수 k가 1이 되기 위해서는 $a=e$가 되어야 하므로, 도함수가 그 함수 자신이 된다는 성질은 함수 $y=e^x$을 '자연 지수함수' 또는 '지수함수'라고 부르게 된 이유가 되었다(Maor, 2000). 어떤 양의 변화율이 그 양 자체에 비례하는 현상은 자연현상이나 응용분야에서 많이 관찰되는데, 시간에 따른 방사성 물질의 붕괴율, 시간에 따

른 냉각 온도, 진행한 거리에 따른 음파의 강도, 시간에 따른 인구의 증가 현상 등이 그 사례이다. 변화율이 함수 자신과 같다는 $y=e^x$의 성질은 수학과 응용 분야에서 지수함수가 중요하게 다루어지는 본질적인 이유라고 할 수 있다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 절차

본 연구는 실수 e에 대한 예비교사들의 이해를 조사한 사례 연구에 해당한다. 사례 연구의 목적은 사례로부터 현상을 심층적으로 이해하여 새로운 의미를 발견하는 것이다(우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈, 2006). 이에 본 연구는 지필검사와 반성 및 탐구 활동에 대한 예비교사들의 반응을 귀납적으로 분석하여(Denzin & Lincoln, 1994), 심층적인 서술을 시도함으로써 그 의미를 해석하는 방법을 선택하였다. 연구 절차는 [그림 Ⅲ-1]과 같이 2단계에 걸쳐 이루어졌다.



[그림 Ⅲ-1] 연구 절차

연구 1단계는 지필 검사지를 적용한 단계로, 먼저 e에 대한 역사적 분석과 수학적 분석 결과를 바탕으로 지필 검사지를 개발하여 수학교육 전공 예비교사 2명을 대상으로 예비 조사를 실시하였다. 이 과정에서 해석학 전공 교수 1명과 수학교육학 박사 2명의 검토를 받고 수정하였다. 그 결과를 반영하여 지필 검사지를 최종 완성하였으며, 28명의 예비교사들에게 적용하였다. 검사시간은 50분을 기준으로 하되, 충분한 검사시간을 확보하는 차원에서 검사 시작 전에 연구 참여자에게 시간이 연장 가능함을 고지하였으나, 모든 학생들이 50분 안에 검사지 반응을 완료하였다. 예비교사들의 검사 반응지는 1차 자료로 수집하여 분석하였다.

연구의 2단계는 지필검사 반응을 분석한 결과를 토대로 반성 및 탐구 활동을 수행한 단계이다. 먼저 1단계 검사지 분석에서 정답률이 저조한 것으로 조사된 문항을 중심으로 탐구 활동 문항지를 구성하였으며, 이 문항들에 대해서 1단계 검사에서 미흡한 반응을 보인 예비교사 8명에게 적용하였다. 반성 및 탐구 활동은 예비교사 개인별로 탐구 활동지 문항에 대한 본인의 1단계 반응을 검토하여 반성하고, 연구자 1인과 함께 이 문항에 대해 재탐구하여 해결해나가는 방식으로 진행되었으며, 원활한 탐구 활동을 위해 연구자가 제기한 발문에 대해 예비교사가 반응하는 과정도 포함되었다. 2단계 탐구 활동은 예비교사별로 60분 내외로 이루어졌으며, 모든 과정을 녹음한 녹음 자료와 동영상 촬영 자료, 예비교사들이 추가로 작성한 검사 반응지를 2차 자료로 수집하였다.

2. 연구 참여자

본 연구에 참여한 예비교사들은 전라권 J시 소재의 사범대학 수학교육과 학생들로, 1단계 지필 검사에는 2학년 학생 28명이 참여하였다. 교육과정상 다음 학년에 편제된 '수학교과교재연구 및 지도법'의 수강 여부가 미치는 영향에 비해, 그동안 학생들이 개인적으로 경험한 고등학교 미적분학의 학습 경험과 대학에서 공동으로 수강한 미적분학 과목과 해석학 과목의 학습 경험이 미치는 영향이 더 클 것으로 판단하였기에 연구 참여자를 2학년 학생으로 선정하였다. 이들은 공동 연구자들이 각각 개설한 '해석학2' 과목과 '수학교육과정론' 과목을 수강하는 학생들이었다. 지수함수 e^x와 자연로그 $\ln x$에서 사용되는 실수 e'에 대한 인지도를 조사한 결과, 모든 예비교사들은 고등학교 미적분 과목에서 e에 대한 기본적인 내용을 학습한 상태였으며, 대학 교육과정에서도 1학년 '미적분학'과 2학년 '해석학' 과목에서 지속적으로 지수함수 e^x와 로그함수 $\ln x$을 다룸으로써 e에 대해서 익숙한 상태라고 답하였다. 공동연구자 중 한 명인 해석학2 강의자는 모든 학생들이 지수함수 e^x에 대한 테일러 급수와 맥클로린 급수를 학습하였다는 것과 지난 학기의 '해석학1' 과목에서 실수 e의 초월수의 속성을 지도한 바가 있었음을 확인해 주었다.

연구의 2단계에서는 탐구 활동 문항으로 선정된 문항들에 대해서 1단계 검사에서 미흡한 답변을 했거나 무응답을 한 예비교사들을 파악하여, 이 중에서 자발적으로 연구 참여를 동의한 예비교사 8명을 연구 대상자로 선정하였다. 사례연구는 사례에 대한 심층적 이해와 분석에 초점을 두므로, 1단계 지필검사에서 미흡한 반응을 보인 예비교사들을 대상으로 2단계에서 탐구활동을 진행하는 것이 사례 연구의 취지에 보다 적합할 것으로 판단하였다. 개별적으로 진행되는 반성 및 탐구 활동 과정에서, 예비교사들이 실수 e에 대해서 어떠한 교사 지식을 가지고 있는지, 문제 해결 과정에서 어떠한 전략과 사고를 수행하는지, 겪고 있는 어려움은 무엇인지에 대한 심층적인 관찰과 이해가 가능하기 때문이다.

3. 검사도구 및 분석 방법

연구가 진행되는 동안 연구주제인 e개념에 대한 불필요한 정보 제공을 최소화하기 위하여, '자연상수 e' 또는 '무리수 e' 라는 직접적인 표현을 자제하고, 일관성 있게 '실수 e'라고 지칭하였다. 검사 문항은 실수 e의 정의 및 표현, e의 속성, e의 맥락 등 3가지 항목으로 나누어 제작하였다. 최초 검사지는 13문항으로 개발되었으나, 예비 조사를 통해 중복된 것으로 판별된 문항과 실수 e와 직접적 관련성이 부족하다고 판단한 문항을 제외하여 총 9문항으로 제작하였다. 또한 예비 조사에서 학생들에게 질문의 뜻이 제대로 전달되지 못했던 문항은 측정하고자 하는 내용이 보다 잘 드러나도록 문장 표현을 명료하게 수정하였다. 이와 같은 과정을 거쳐 최종 완성된 검사지 문항은 [그림 Ⅲ-2]와 같다.

1. 실수 e의 정의를 쓰시오.
2. 실수 e를 극한을 이용하여 표현하시오.
3. 실수 π는 반지름이 1인 원의 넓이로 나타낼 수 있다. 이와 같이 어떤 특정한 그래프의 넓이를 이용하여 실수 e를 좌표평면 위에 나타내보시오.
4. 실수 e를 함수의 전개식을 이용하여 급수로 표현하시오.
5. 공학용 계산기에 $\boxed{e}$ 키를 입력하고 등호 $\boxed{=}$ 키를 눌렀더니 결과창에 $\boxed{2.718281828}$이라고 나타났다. 이와 관련하여 실수 e가 유리수인지 무리수인지 판단하고, 그렇게 판단한 이유를 서술하시오.
6. 실수 e는 자와 컴퍼스만을 가지고 수직선 위에 정확한 위치를 나타낼 수 있는가?(즉 작도 가능한가?) 만약 작도 가능하다면, 그 방법을 자세히 설명하고 실수 e의 위치를 수직선에 작도하시오. 만약 작도 불가능하다면, 그 수학적 근거를 서술하시오.
7. 등차수열 $a_n = n$, 등비수열 $b_n = 10^7(1+\frac{1}{10^7})^n$에 대하여, $\frac{b_n}{10^7} = x$, $\frac{a_n}{10^7} = y$ 로 놓았을 때, x와 y 사이의 관계식을 유도하시오.(단, $(1+\frac{1}{10^7})^{10^7}$은 근삿값 e로 계산한다)
8. 지수함수 $y=e^x$가 다른 함수들보다 수학적으로 중요하게 다루어지는 이유가 무엇인지 서술하시오.
9. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> 연초에 은행에 맡긴 원금 a원을 연이율 r로 계산하면, 연말의 원리합계는 $a(1+r)$원이 된다. 만약 1년에 두 번 이자를 복리로 지급한다면, 연말의 원리합계는 $a\left(1+\frac{1}{2}\cdot r\right)^2$원이고, 은행이 이자를 n번 복리로 지급한다면 연말의 원리합계는 $a\left(1+\frac{1}{n}\cdot r\right)^n$원이 된다. 이자가 지급되는 횟수가 많아질수록 연말의 원리합계는 커짐을 알 수 있다.

은행에서 연이율을 100%$(r=1)$로 복리로 지급하고, 이자 지급 횟수도 무한하다고 가정하자. 이러한 경우라도 연말의 원리합계가 원금 a원의 3배, 즉 $3a$를 넘지 못함을 보이시오.

[그림 Ⅲ-2] 1단계 조사에 사용한 검사 도구

정의 및 표현 항목에 해당하는 1번부터 4번까지의 문항에서는 예비교사들이 e를 어떻게 정의하는지와 e의 극한 표현, 기하적 표현, 급수 표현을 어떻게 이해하고 제시하는지를 조사하였다. e의 속성 항목인 5번과 6번 문항에서는 각각 무리수 속성과 초월수 속성을 어떻게 이해하고 있는지를 살펴보고자 하였다. 마지막으로 e의 맥락 항목에서는 7번부터 9번까지의 문항을 통해 e의 자연로그 맥락, 지수함수 맥락, 연속 복리 맥락을 어떻게 해석하는지를 살펴보고자 하였다.

수집한 자료는 <표 Ⅲ-1>에 제시된 분석의 초점에 따라 2명의 연구자가 공동으로 분석하였다. 분석의 초점은 Ⅱ장에서 살펴본 e에 대한 이론적 배경을 바탕으로, 극한 과정으로 e를 정의하기, 극한 표현, 기하적 표현, 급수 표현 등 e의 다양한 표현을 적절하게 제시하기, 계산기의 한계 인식과 더불어 무리수와 초월수 속성 설명하기, e의 다양한 맥락 속에서 e를 적절하게 해석하기, e를 이용하여 문제 해결하기로 설정하였다. 공동 연구자간에 학생 반응에 대한 해석이 다른 경우에는 논의를 지속하여 합의에 이르도록 하였다. 각 문항에 대한 예비교사들의 반응을 유형별로 범주화하여 결과 분석에서 심층적으로 서술하였다. 분석 결과는 편의상 연구의 2단계에 참여한 학생들에게 S1에서 S8까지 명명하였으며, 연구의 1단계만 참여한 학생들에게는 S9부터 S28을 부여하여 기술하였다.

<표 Ⅲ-1> 조사 항목에 따른 분석의 초점

조사 항목	조사 문항	분석 초점
e의 정의 및 표현	1번, 2번 3번, 4번	· e를 극한 과정으로 정의하는가? · e의 극한 표현, 기하적 표현, 급수 표현을 적절하게 제시하는가?
e의 속성	5번, 6번	· 계산기 표현의 한계를 지적하고, e의 무리수 속성을 설명하는가? · e의 작도불가능성을 지적하고, 초월수 속성을 설명하는가?
e의 맥락	7번, 8번 9번, 10번	· 자연로그 맥락, 지수함수 맥락, 연속복리 맥락에서 e를 적절하게 해석하고, e를 이용하여 문제를 해결하는가?

Ⅳ. 분석 결과

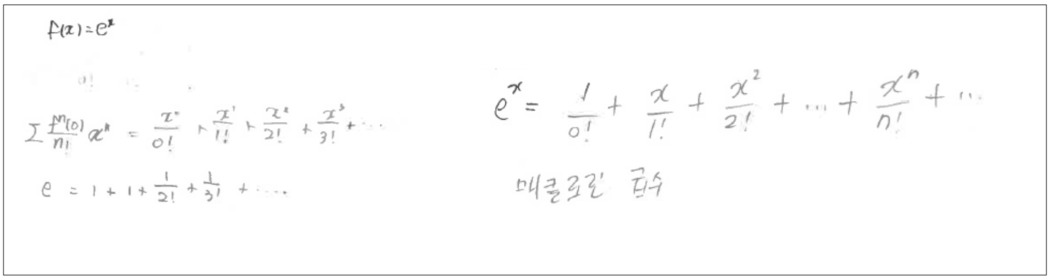
1. 지필검사 결과 분석

가. e의 정의 및 표현

예비교사들이 e를 어떻게 정의하는지와 e의 극한 표현, 기하적 표현, 급수 표현을 어떻게 이해하고 제시하는지를 조사한 첫 번째 항목에 대한 분석 결과는 다음과 같다. '실수 e의 정의를 쓰시오'라는 문항에 대해서 전체 28명의 학생 중에서 14명의 학생들(50%)이 e에 대한 수학적 정의를 제시하였다. 이 중 9명은 학교수학에서의 e의 정의인 극한 표현 $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 또는 $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 을 제시하였으며, 2명(S5, S25)은 대학 수준의 급수의 정의 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$을, 3명의 학생(S9, S22, S23)은 극한과 급수의 정의를 둘 다 제시하였다. 오답 유형으로는 '자연로그 $\ln x$의 밑'이 제일 많았으며, '무리수', '2.71828 ⋯', 무응답 등이 있었다. 이와 같은 오답 유형은 상당수의 예비교사들이 e의 정의를 e가 사용되는 사례 또는 e의 속성, e의 근삿값과 혼동하고 있다는 것을 말해준다.

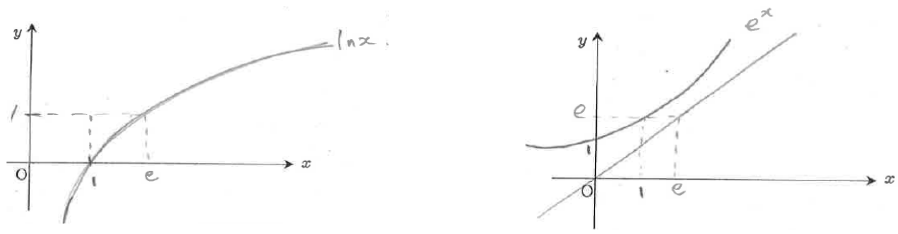
그런데 한 가지 주목할 점은 '실수 e를 극한을 이용하여 표현하시오'라는 문항에 대한 정답률이 96.4%에 이를 만큼 거의 대부분의 예비교사들이 e의 극한 표현을 제시할 수 있었다는 점이다. 이는 13명(46.4%)의 예비교사들이 e의 극한 표현을 알고 있었음에도 불구하고, e의 극한 표현이 e의 정의라는 것을 미처 인식하지 못했다는 것을 의미한다. 이번 조사에서 다른 극한 표현인 $\lim_{n \to \infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$은 나타나지 않았다. 예비교사들은 고등학교 미적분 시간에 배운 바 있는 극한 표현에 보다 익숙하다는 것을 알 수 있으며, 대부분의 학생들이 $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$와 $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$를 동시에 제시함으로써 '$\frac{1}{n}=x$'라는 치환 관계의 이해와 두 표현간의 변환활동에 성공적인 모습을 보였다. 한편 e의 급수 표현을 묻는 4번 문항에 대한 정답률은 67.9%(19명)에 그쳤다. 대학교 1학년 미적분학 강의에서 테일러 급수와 맥클로린 급수를 이미 학습한 바 있으나, 이를 상기해 적용하는 것에 실패한 경우가 8명으로 조사되

었다. 주지하다시피, $x=0$에서 함수 $f(x)$에 의해 발생하는 매클로린 급수는 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 이다. 여기에 $f(x)=e^x$를 적용하면, e^x의 n계 도함수는 항상 e^x이므로, 다음 [그림 Ⅳ-1]의 S10의 반응과 같은 급수 표현을 얻을 수 있다. 오답 유형으로는, 함수 $f(x)=e^x$에 대한 매클로린 급수를 구한 상태에서 $x=1$을 대입하지 못한 경우([그림 Ⅳ-1] 참조), 테일러 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$ 형태만을 제시한 경우, 무응답 등이 있었다. 별다른 설명 없이 e^x의 급수 표현만을 제시한 경우는 암기된 내용을 단순 재생한 것일 뿐, 임의의 함수를 다항함수의 합으로 근사시키는 매클로린 급수에 대한 의미와 활용을 제대로 이해하지 못한 것으로 판단하였다.



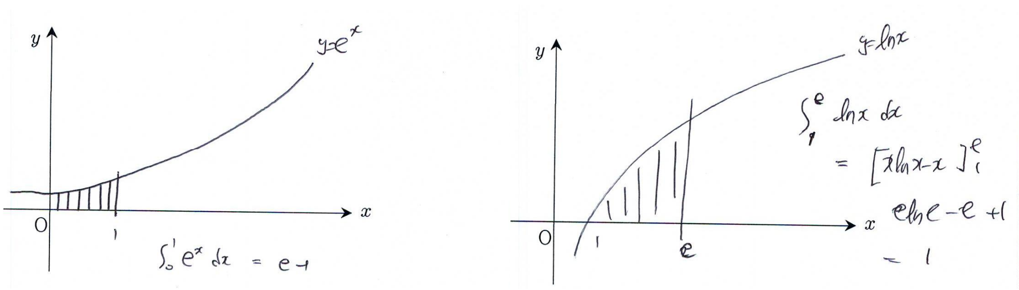
[그림 Ⅳ-1] e의 급수 표현에 대한 S10(좌)의 정답 사례와 S14(우)의 오답 사례

그런데 e의 기하적 표현을 묻는 3번 문항에 대해 직각쌍곡선 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 그 넓이를 이용해서 표현한 답변은 1단계 지필검사에서 단 한명도 찾아볼 수 없었다. 대부분의 학생들은 실수 e가 직접적으로 포함되어 있는 $y=e^x$ 와 $y=\ln x$의 그래프를 이용하였다. [그림 Ⅳ-2]의 S5는 그 사례이다. $y=\ln x$의 그래프에서 y좌표가 1인 x좌표를 e라고 나타내고, $y=e^x$ 의 그래프에서 x좌표가 1일 때의 y좌표를 e로 나타내었을 뿐 아니라 직선 $y=x$를 추가로 그려 x축 위에 e를 표현한 경우이다.



[그림 Ⅳ-2] S5의 e에 대한 기하적 표현

[그림 Ⅳ-2]의 S5가 그래프의 넓이를 이용하라는 문제의 조건을 이용하지 않은 경우라면, [그림 Ⅳ-3]은 $y=e^x$ 와 $y=\ln x$의 그래프와 넓이를 이용하는 시도를 한 경우이다. S2는 $y=e^x$ 를 0부터 1까지의 정적분함으로써 $y=e^x$ 그래프와 x축 사이의 넓이를 $e-1$로 나타내고 있다. $y=\ln x$의 그래프에서는 1부터 e까지 정적분한 결과인 1을 나타낸다. 두 경우 모두 함수식에 실수 e가 직접적으로 포함되어 있는 함수로, 실수 e가 직접적으로 포함되어 있지 않는 함수를 이용하여 표현하라는 하위 문제에 대해서는 답하지 못하였다.

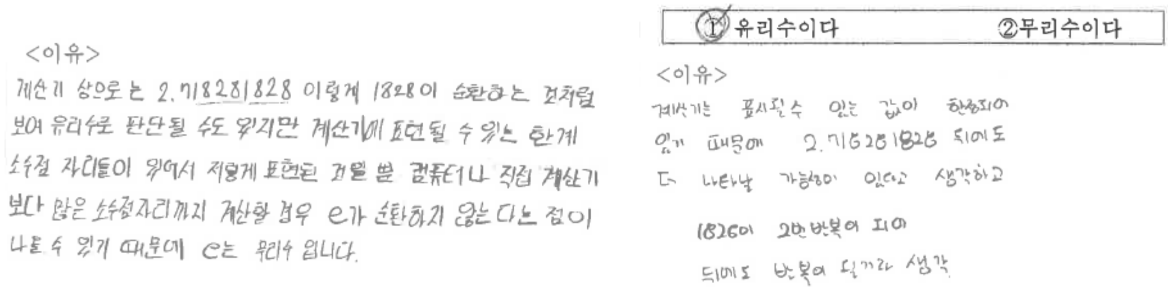


[그림 Ⅳ-3] S2의 e에 대한 기하적 표현

표현은 개념적 이해를 형성하는 수단이므로(Zazkis & Sirotic, 2010), 실수 e에 대한 개념적 이해를 위해서는 e의 개념과 관련된 다양한 표현 체계에 내재된 아이디어를 인식하고, 하나의 표현 방식에서 다른 표현 방식으로 번역할 수 있는 능력이 필요하다. 이번 지필검사에서는 예비교사들이 e의 표현에 대해서 극한 표현에 편중되어 이해하고 있다는 것과 급수 표현에 대한 기억과 인출이 자동화되지 않았다는 점, 상대적으로 기하적 표현에 대한 이해가 취약하다는 점을 확인할 수 있다.

나. e의 속성에 대한 이해

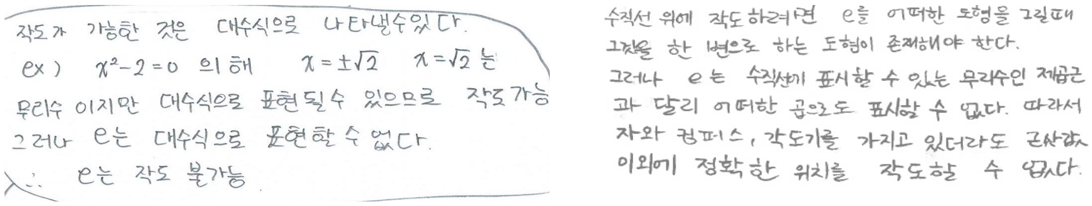
e의 무리수 속성과 초월수 속성에 대한 예비교사들의 이해를 살펴본 결과는 다음과 같다. 먼저 공학용 계산기에 $\boxed{e}$ 키와 등호 $\boxed{=}$ 키를 입력한 결과창에 $\boxed{2.718281828}$으로 나타난 것과 관련하여 실수 e가 유리수인지 무리수인지 판단하는 문제에 대해서 약 89.3%(25명)의 학생들이 무리수라고 답하였다. 실수 e가 유리수라고 답한 학생은 S2와 S19로, ‘순환마디 1828이 존재하는 순환소수이므로 유리수’라고 답하는 부주의한 모습을 보였다. 실수 e가 무리수라고 답한 학생들이 제시한 근거는 ‘순환하지 않는 무한소수이기 때문에’였으며, 일부 학생들(S7, S8, S12, S13, S17, S18, S19, S23, S24, S26)은 유한개의 자릿수로 표시될 수밖에 없는 계산기의 한계를 지적하기도 하였다. [그림 Ⅳ-4]의 왼쪽은 S24 반응으로, 1828이 마치 순환마디처럼 보이지만 계산기의 한계에 의한 것이므로, 이후 자릿수에 1828이 반복된다는 보장이 없다는 것과 e가 무리수임을 기술하고 있다. 반면에 오른쪽 S19는 계산기의 한계를 기술하고는 있지만, 1828이 이후에도 계속 반복될 것이라 생각하므로 e가 유리수라고 판단하였음을 밝히고 있다. 두 학생 모두 유한 자릿수를 표시하는 계산기의 한계와 1828의 반복을 공통적으로 지적하였지만, 결국 e가 무리수라고 판단을 내리는 근거로 e가 무리수라는 선행지식이 작용하였다고 추측할 수 있다. 이와 같은 선행지식은 정답 반응을 보인 25명의 학생들의 경우에도 마찬가지로 발현된 것으로 해석하였다.



[그림 Ⅳ-4] e가 무리수인 이유(S24)와 유리수인 이유(S19)

다음으로, 자와 컴퍼스만을 가지고 수직선 위에 실수 e의 정확한 위치를 나타낼 수 있는지, 즉 작도 가능성에 대해서는 92.9%(26명)의 학생들이 작도가 불가능하다고 답하였다. e의 작도불가능성에 대해 대부분의 학생들은 e가 무리수인 이유로 제시한 '순환하지 않는 무한소수이기 때문에'라는 이유를 동일하게 제시하였다. 그러나, 이와 같은 이유는 e가 작도불가능하다는 수학적 근거로 부적절하다. 왜냐하면, 순환하지 않은 무한소수란 무리수를 지칭하는데, 무리수 중에 $\sqrt{2}$와 같은 유리수의 제곱근과 제곱근에 유한 번의 사칙계산을 적용하여 얻어지는 수는 작도가능하기 때문이다. e가 작도 불가능한 이유는 수학적 속성인 초월수로 설명되어야 하는 부분이다. 사실 초월수 개념은 교육과정상 향후 3학년에 편제되어 있는 '현대대수' 과목에서 보다 상세하게 배우게 되는 개념이다. 그러나 Ⅲ장 2절에서도 기술한 바와 같이, 연구 참여자들은 모두 '해석학1' 과목에서 e의 초월수 속성을 이미 학습한 경험이 있었음에도 불구하고 응답자 중에서 초월수라는 용어를 제시하여 설명한 사례는 3명(S1, S26, S28)에 불과하였다. 이와 같은 상황으로 인하여, 연구자들은 '초월수'라는 용어를 사용하지 않았다 하더라도 작도가능성과 불가능성에 대해 원시적 또는 비형식적으로 접근하고 있는 학생들의 반응에 주목하였다.

[그림 Ⅳ-5]의 S7은 '정수 계수 다항방정식의 해'라는 정확한 표현 대신에 '작도 가능한 것은 대수식으로 나타내진다. e는 대수식으로 표현될 수 없다'라는 대수적 수와 초월수에 대한 비형식적이고 소박한 아이디어를 가지고 있는 것으로 볼 수 있다. 반면에 [그림 Ⅳ-5]의 S18은 작도 상황을 특정 도형의 한 변의 길이를 이용하는 측정 상황과 연결 지어 생각하는 경우이다. 무리수 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 작도할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선을 이용하거나 밑변과 높이가 각각 1인 직각삼각형의 빗변을 이용했던 이전의 학습경험이 새로운 과제인 e의 작도에도 영향을 주었다고 볼 수 있다. 이는 두 과제의 유사성을 바탕으로 추론하는 유추를 적용한 사례라고 할 수 있다. 이상은 비록 엄밀성과 형식적인 면에서 다소 미흡하기는 하지만, 학생 나름의 수학적 근거를 토대로 실수 e의 작도가능성에 대한 추론을 시도했던 의미 있는 사례라고 판단하였다.

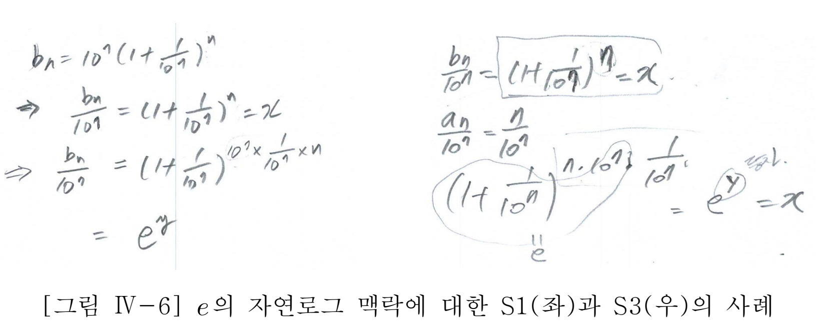


[그림 Ⅳ-5] e가 작도불가능한 이유에 대한 S7(좌)과 S18(우)의 사례

다. e의 맥락에 대한 이해

Ⅱ장 3절에서 살펴본 바와 같이, 실수 e는 자연로그 맥락, 기하적 맥락, 지수함수 맥락, 연속복리 맥락 등 다양한 맥락과 관련된다. 이 중에서 e의 기하적 맥락은 첫 번째 정의 및 표현 항목의 기하 표현과 중복된다고 판단하여 제외하였다. 나머지 자연로그 맥락과 지수함수 맥락, 연속 복리 맥락에 대해 예비교사들이 어떻게 해석하는지를 살펴본 결과는 다음과 같다.

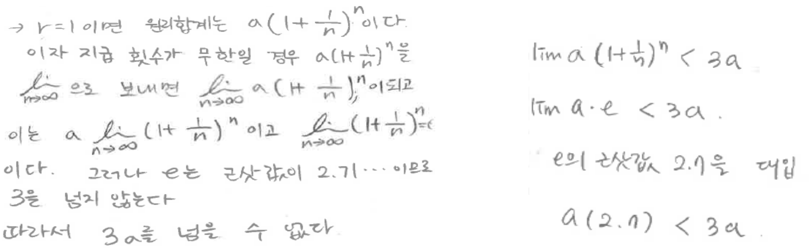
먼저 ‘등차수열 $a_n = n$, 등비수열 $b_n = 10^7\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^n$에 대하여, $\frac{b_n}{10^7} = x$, $\frac{a_n}{10^7} = y$ 로 놓았을 때, x와 y 사이의 관계식을 유도하라’는 문제는 $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$을 근삿값 e로 계산함으로써 자연로그함수 $y=\log_e x$를 유도하는 문제이다. 이는 기하급수적 변화를 산술급수적 변화로 파악하려고 시도했던 Napier의 로그 창안 아이디어를 맥락으로 제시한 문항이었다. 1단계 지필 검사에서 이 문항에 대해 $y=\log_e x$를 유도한 답안은 찾아볼 수 없었다. 다만 [그림 Ⅳ-6]의 S1과 S3이 관계식 $x=e^y$를 유도하는데 성공하였다. 그러나 두 학생 모두 지수함수 $x=e^y$ 형태를 로그함수 $y=\log_e x$인 양함수 형태로 변환하지는 않았다. 만약 대학에서 ‘수학교과교재연구 및 지도법’을 수강한 경험이 있는 학생들이라면 무리수 e의 역사적 맥락인 자연로그 맥락을 다루어 볼 기회가 있을 수 있지만, 이번 조사의 대상자들은 모두 그러한 경험이 없는 것으로 확인되었다. 그렇지만 이 문항이 예비교사들에게 낯선 맥락이라 할지라도 몇 단계의 변환 과정을 거친다면, 관계식 $x=e^y$과 $y=\log_e x$가 충분히 유도 가능하다는 점에서 아쉬움이 남는다. 이 문항에 대한 접근은 2단계 반성 및 탐구 활동 과정에서 다시 시도되어 기술할 것이다.



[그림 Ⅳ-6] e의 자연로그 맥락에 대한 S1(좌)과 S3(우)의 사례

한편 지수함수 $y=e^x$가 다른 함수들보다 수학적으로 중요하게 다루어지는 이유에 대해서 대부분의 학생들(23명, 82.1%)은 '$y=e^x$를 미분해도, 적분해도 자기 자신이 되기 때문에'라는 이유를 제시하였다. 나머지 4명의 학생들은 '일반적 계산에 많이 쓰여서', '미적분학과 해석학에서 많이 쓰여서'라는 다소 직접적 관련성이 떨어지는 근거를 제시하였다. Ⅱ장의 역사적 분석에서 살펴본 바와 같이, e는 미적분의 발달과 더불어 명시적으로 인식되었으며, 지수함수 $y=e^x$의 중요성 또한 미적분이 발달하면서 점점 확대된 바 있다. 도함수가 자기 자신에 비례한다는 성질은 다양한 현상을 설명하는 좋은 모델이며, 특히 $y=e^x$의 도함수가 자신이 된다는 성질은 자연현상을 비롯한 응용 분야에서 자연지수함수가 중요하게 다루어지는 본질적인 이유가 되었던 것이다. 그런데 대부분의 예비교사들은 $y=e^x$의 도함수와 부정적분이 자기 자신이 되는 함수라는 것을 기술하고 있었지만, 지수함수가 어떤 양의 변화율이 그 양 자체에 비례하는 현상을 설명하는 최적의 모델이라는 점이나 복소지수함수 e^{ix}로의 확장, e^{ix}와 삼각함수 $\cos x + i\sin x$의 관계인 오일러 공식, 주기 함수를 삼각함수의 합으로 나타낸 푸리에 급수를 다시 복소지수함수들의 합으로 나타낼 수 있다는 성질 등을 언급하지는 못하였다. 이 또한 조사 대상이 2학년 학생들이어서 관련 내용들을 아직 학습하지 못한 상태라는 점에 기인한다.

마지막으로 e에 대한 Bernoulli의 연속 복리 맥락의 9번 문항은 '연초에 은행에 맡긴 원금 a원을 연이율 r로 n번에 걸쳐 복리로 지급한다면, 연말의 원리합계는 $a\left(1+\frac{1}{n}\cdot r\right)^n$원이 된다. 은행에서 연이율을 $r=1$로 지급하고, 이자 지급 횟수도 무한하다고 가정하자. 이러한 경우라도 연말의 원리합계가 원금 a의 3배, 즉 $3a$를 넘지 못함을 보이시오'라는 형태로 제시되었다. 이자가 지급되는 횟수가 많아질수록 연말의 원리합계는 한없이 커질 것이라고 예측되지만, 실수 e의 극한 표현을 적용하면 실제로는 원금의 약 2.7배를 넘지 못한다는 사실을 유도하는 문제이다. 이 문항에 대해 약 89.3%(25명)의 학생들이 문제해결에 성공한 것으로 조사되었다. 오답은 모두 무응답 형태였으며, 3명(S2, S19, S28)이 해당되었다. 대부분의 학생들은 [그림 Ⅳ-7]의 S18과 S22의 반응과 같이, $n\to\infty$일 때의 $a(1+\frac{1}{n})^n$의 극한값이 ae임을 보이고, e의 근삿값을 이용하여 원리합계가 약 $2.7a$가 되므로 $3a$를 넘을 수 없다는 사실을 어렵지 않게 유도하였다.



[그림 Ⅳ-7] e의 연속 복리 맥락에 대한 S18(좌)과 S22(우)의 사례

2. 탐구 활동 결과 분석

예비교사 8명을 대상으로 개별적으로 수행된 2단계 반성 및 탐구 활동은 예비교사 본인의 1차 검사지 반응을 반성하거나 연구자와 함께 탐구 활동지 문항을 탐구하고 문제 해결을 재시도하고, 연구자의 추가 발문에 답하는 방식으로 이루어졌다. 이번 절에서는 1단계 지필 검사지 분석에서 미흡한 것으로 조사되었던 문항을 중심으로 구성한 탐구 활동 문항에 대한 예비교사의 반응을 세 가지 에피소드로 나누어 그 분석 결과를 기술한다.

가. [에피소드 1] e의 정의와 표현의 관련성에 대한 이해

1단계 지필검사에서 S2, S4, S6, S8은 실수 e의 정의를 각각 '무리수 e', '무리수', '자연로그의 밑', '자연상수 e'라고 기술하여, 실수 e의 수학적 정의를 제대로 제시하지 못한 학생들이었다. 그러나 4명 모두 실수 e의 극한 표현은 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 또는 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 로 바르게 제시한 바 있다. 다음은 실수 e의 정의에 대한 탐구 활동 과정에서 S2와 나눈 대화의 일부이다.

T: 실수 e의 정의를 무리수 e라고 썼네요.
S2: 네. 2.7 얼마 얼마잖아요.
T: 아, 그럼 실수 e가 무리수라는 것은 어떻게...
S2: 그건 알아요. 로그 ln의 밑이예요.
T: 그렇구나. 근데 2번 문제에는 답을 제대로 썼어요. e의 극한 표현 말이예요.
S2: 네. 이건 알아요. 고등학교 때부터 배운 거라서...
T: 이 리밋으로 표현한 것이 실수 e의 정의라고 하면 안될까요?
S2: 진짜요? 정의는 다른 것 인줄 알았어요.
T: 보통 e를 극한으로 정의된 최초의 수라고 말한대요.
S2: 우와, 정말 신기해요. 수를 리미트로 정의해도 된다니...

S2는 e의 극한 표현을 알고 있었음에도 불구하고, e의 극한 표현이 e의 정의라는 것을 미처 인식하지 못했던 13명(46.4%)에 속하는 학생이었다. S2는 e의 정의를 '무리수 e'라고 썼던 자신의 1단계 반응에 대한 반성 과정에서, '2.7 얼마 얼마'라는 사실을 부연 설명함으로써 e를 무리수 속성으로 정의하는 것을 고수하는 모습을 보였다. '리밋으로 표현한 것을 실수 e의 정의라고 하면 안될까요?'라는 연구자의 발문에 대해서도 '실수 e의 정의는 다른 것이다'라는 반응을 보임으로써 극한 표현으로서의 실수 e의 정의를 쉽게 수용하지 못하는 모습을 나타내었다. 결국 실수 e가 극한으로 정의된 최초의 수라는 연구자의 설명이 있고 나서야 극한 표현으로서의 e의 정의를 수용하였다고 볼 수 있다. 따라서 S2에게 수는 무리수 또는 유리수와 같은 수의 속성으로 정의되거나 구체적인 무리수의 근삿값으로 정의될 수는 있지만, 극한 표현을 비롯한 다양한 수학적 표현으로 정의 가능하다는 지식은 형성되지 못한 것으로 보인다. Zazkis & Gadowsky(2001)에 따르면, 수 개념은 정의 자체가 표현에

의존하는 경우가 대부분이다. 예비교사들에게 실수 e의 정의가 그 표현에 의존한다는 사실과 더불어 수 개념의 정의와 표현의 관계를 인식할 수 있는 경험이 필요한 것으로 보인다.

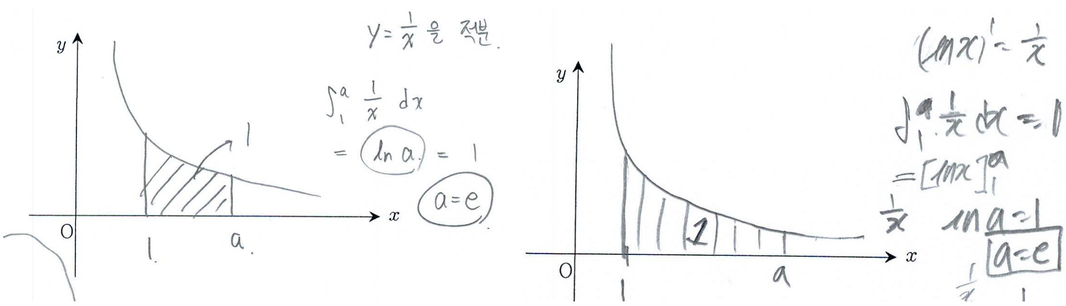
나. [에피소드 2] e의 기하적 표현에 대한 탐구

예비교사 8명은 1단계 지필검사에서 직각쌍곡선 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 그 넓이를 이용하는 e의 기하적 표현을 제시하지 못한 학생들이었다. 그런데 이 학생들 모두 2단계 반성 및 탐구 활동 과정을 통해서 e의 기하적 표현을 성공적으로 탐구하여 적절하게 제시하는 모습을 보여주었다. [그림 Ⅳ-2]에서 보는 바와 같이, S5는 1단계 지필검사에서 $y=\ln x$와 $y=e^x$의 그래프에서 각각 x좌표, y좌표가 e인 그림을 제시한 바 있지만, 실수 e를 직접적으로 사용하지 않는 함수를 이용하라는 하위 문항에는 답하지 못하고 있음을 알 수 있다. 다음은 실수 e의 기하적 표현에 대한 탐구 활동 과정에서 S5와 나눈 대화의 일부이다.

T: 로그함수와 지수함수로 나타냈는데, 문제에서는 e가 직접적으로 들어가 있지 않은 함수를 이용하라고 했네요.
S5: 근데 정말 아무리 생각해봐도 e가 안 들어간 함수로는 그릴 수가 없어요.
T: 그렇군요. 그런데 넓이를 이용하라고 했으니까요, 그래프의 넓이를 구하려면 보통 함수를 어떻게 하죠?
S5: 적분요.
T: 그렇죠. 정확히는 정적분인데요. 그럼 여기에 그린 e^x 함수랑 $\ln x$ 함수를 적분하면 될까요?
S5: 적분하면... 둘 다 e가 들어 있으니 안 돼요.
T: 아, 이럴 때는 거꾸로 생각해 보는 것도 좋은 방법이예요.
S5: 미분 말씀하시는 거예요?
T: 두 함수를 적분하려고 하지 말고, 누군가를 적분한다면?
S5: 누군가를 적분요? 거꾸로 미분하면 되니까... e^x은 미분해도 자기니까 안 되고... $\ln x$를 미분하면 x분의 1인데... 어, x분의 1 같아요. 우와... x분의 1을 적분하면 $\ln x$가 나오니까... 넓이를 구하면 될 것 같아요.

위의 대화를 통해 볼 때, 일단 S5는 검사 1단계에서 본인이 제시한 e의 기하적 표현에 대한 반성 활동을 하고 있다고 할 수 있다. e의 기하적 표현이라고 생각했던 $y=e^x$ 함수와 $y=\ln x$ 함수에 e가 직접적으로 포함되어 있음을 인식하게 되었으며, 결과적으로 더 이상의 함수는 도저히 찾을 수 없다고 판단해버리는 소위 '막다른 골목'에 처한 상태라고 할 수 있다. 그러다가 연구자가 제기한 '그래프의 넓이를 구하려면 보통 함수를 어떻게 하죠?'라는 발문에 사고를 자극 받아 '넓이를 구하는 것은 정적분'이라는 사실을 발견하고 있다. 이어서 연구자가 거꾸로 생각해보는 전략을 유용함을 이야기하자 바로 '미분'을 생각해내고, 결국 '적분해서 $y=\ln x$를 얻을 수 있는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$'이라는 사실을 발견하기에 이른다. 따라서 이 탐구 활동 과정에서 S5가 사용한 전략은 거꾸로 생각하기 전략이라고 볼 수 있다. 또한 S5는 연구자와의 대화로부터 문제해결의 실마리를 찾는 통찰의 경험을 하고 있다고 해석할 수

있다. 결국 S5는 [그림 Ⅳ-8]의 왼쪽과 같은 그림을 완성할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-8] e의 기하적 표현에 대한 S5(좌)와 S8(우)의 사례

다른 학생들도 S5와 거의 유사한 과정을 거쳐 함수 $y=\frac{1}{x}$을 찾아내었으며, 정적분을 이용하여 실수 e의 기하적 표현을 제시하였다. 특히 1차 검사에서 기하적 표현을 전혀 제시하지 못했던 S8은 문제 해결에 이르기까지 좀 더 많은 시간을 필요로 하였다. 탐구 활동 초반에 S8은 반지름이 $\sqrt{\frac{e}{\pi}}$인 원을 그린 후 넓이를 e라고 표시하거나, $x=0$에서 1까지 $y=e^x$ 그래프와 x축 사이의 넓이를 $e-1$로 나타내는 등 다른 학생들이 1차 검사에서 보였던 반응을 재현하였다. 결국 몇 번의 시행착오를 거친 후, S8 또한 [그림 Ⅳ-8]의 오른쪽 그림과 같은 실수 e의 기하적 표현을 적절하게 제시할 수 있었다.

다. [에피소드 3] e의 자연로그 맥락에 대한 탐구

e의 로그함수 맥락은 예비교사들이 가장 어려움을 겪었던 문항으로, 1단계 지필 검사에서 단 두 명의 학생(S1, S3)만이 관계식 $x=e^y$을 유도하는데 성공한 바 있다. S1과 S3는 반성 및 탐구 활동 과정에서 지수함수 $x=e^y$을 양함수 형태로 변환하라는 질문에 어렵지 않게 로그함수 $y=\log_e x$로 변환하였다. 다음은 이후의 탐구 활동 과정에서 S1과 나눈 대화의 일부이다.

T: 이 문제에서 $(1+\frac{1}{10^7})^{10^7}$을 왜 e로 계산하는 걸까요?

S1: 음... 원래 e는 n이 무한대로 갈 때인데, 10^7이면 많이 크니까 맞는 것 같아요.

T: 그렇군요. 이 과정이 바로 네이피어가 처음으로 로그를 만들 때 사용했던 아이디어래요.

S1: 네? 무슨 말인지... 잘...

T: 문제에서 a_n이 등차수열, b_n이 등비수열로 주어져 있잖아요. 그럼 x랑 y는 무슨 수열일까요?

S1: x는 등비수열을 10^7으로 나누니까 등비수열이구요, y는 등차수열이예요.

T: 그렇군요. 그럼 로그함수는 $y=\log x$니까, 등비수열 x에 로그를 취하면 y는...

S1: 등차수열 y가 나와요. 그런데 로그는 곱을 합으로 바꾸는 것 아닌가요?

T: 바로 그거예요. 등비수열의 곱을 등차수열의 합으로 바꾸어 계산하기 위해서 로그가 만들어 진거죠.

S1: 아, 알겠어요. 로그가 큰 수를 작은 수로 줄여 계산하기 편하다고 한 말이 생각났어요.

S1은 1단계 지필검사에서 적절한 식의 변환 과정을 거쳐 관계식 $x=e^y$을 성공적으로 유도하였지만, 이 문항이 e의 로그함수의 발생 맥락이라는 사실을 미처 인식하지 못한 상태라고 할 수 있다. 다만, 지필검사 문항에서 주어진 '$(1+\frac{1}{10^7})^{10^7}$은 e로 계산한다'는 조건의 의미를 반성하게 한 연구자의 발문을 통해, '10^7은 충분히 크므로, $(1+\frac{1}{10^7})^{10^7}$은 e에 근사한다'라는 점을 이해하게 되는 모습을 관찰할 수 있다. 즉 n이 무한대로 갈 때 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값이 e라는 것으로부터 주어진 $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$이 근사적으로 e로 계산 가능함을 적절하게 설명하고 있는 것이다. 또한 이후의 탐구 활동 과정에서 제기된 연구자의 발문에 적절하게 반응하면서, 자연로그의 발생맥락을 이해하게 되는 모습을 보여주고 있다고 할 수 있다. 즉 x가 등비수열을 이루고, y가 등차수열을 이룬다는 것으로부터 로그가 등비수열의 곱을 등차수열의 합으로 파악하는 도구라는 사실을 이해했다고 볼 수 있다.

한편 1단계 검사에서 e의 자연로그 맥락에 전혀 접근하지 못했던 다른 학생들(S2, S4, S5, S6, S7, S8) 또한 개별적으로 이루어진 반성 및 탐구 활동 과정에서 함수 $y=\log_e x$를 성공적으로 유도할 수 있었다. 특히, 학생들은 기하급수적인 등비수열의 변화를 산술급수적인 등차수열의 변화로 파악하는 로그의 의미와 이 과정에서 실수 e가 등장하고 있다는 사실이 흥미롭다는 반응을 나타냈다. 이와 같은 예비교사들의 반응은 앞으로 예비교사들에게 실수 e의 자연로그 맥락을 비롯한 다양한 맥락에 대한 접근을 통해서 실수 e의 유용성과 필요성을 인식하는 기회를 제공할 필요가 있음을 보여주는 사례라고 할 수 있다.

V. 결론

본 연구에서는 실수 e의 다양한 의미와 맥락을 살펴보고, 이를 바탕으로 실수 e에 대한 예비교사들의 이해 정도를 조사하였다. 먼저 실수 e의 역사적 발생과 발달 과정을 암묵적 발생 단계, 기하적 측정 단계, 극한 인식 단계, 형식적 정의 단계로 나누어 기술하였다. 실수 e는 자연로그의 발생 맥락과 직각 쌍곡선 아래의 넓이를 구하는 기하적 맥락에서 간접적으로 등장하였다가, 원리합계를 구하는 연속 복리 맥락에서 그 존재가 명시화되기 시작했다. 결국 미적분의 발달에 따라 실수 e는 극한 과정으로 정의된 최초의 수가 되었으며, 지수함수 $y=e^x$는 어떤 양의 변화율이 그 양 자체에 비례하는 다양한 현상을 조직하는 유용한 수학적 모델이 되었다.

본 연구에서는 실수 e에 대한 역사적 분석과 수학적 분석을 바탕으로 검사지를 개발하여 예비교사 28명에게 적용하였으며, 그 중 8명에게 반성 및 탐구 활동을 수행하였다. 실수 e

의 다양한 측면에 대한 예비교사들의 이해 정도를 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 상당수의 예비교사들이 실수 e의 형식적 정의와 그 표현과의 관계를 인식하지 못하는 것으로 조사되었다. 이번 조사에 참여한 28명 중에서 14명(50%)이 e에 대한 수학적 정의를 제시하지 못하였는데, 이 중 13명(46.4%)은 e의 극한 표현을 올바르게 제시한 학생들이었다. 이는 해당 예비교사들이 e의 극한 표현이 e의 정의라는 것을 미처 인식하지 못했음을 의미한다. 추후 인터뷰에서 S2는 본인이 이미 알고 있었던 e의 극한 표현이 e의 정의라는 사실과 e가 극한으로 정의된 최초의 수라는 사실에 놀라워하는 반응을 나타내었다. e의 사례와 같이, 수 개념은 정의 자체가 표현에 의존하는 경우가 대부분이다(Zazkis & Gadowsky, 2001). 예비교사들로 하여금 실수 e의 정의가 e의 표현에 의존한다는 사실과 이를 확장하여 수학 개념의 정의와 표현의 관계를 인식할 수 있는 경험을 제공할 필요가 있다. 한편 e의 정의에 대한 오답 분석을 통해 일부 예비교사들이 e의 정의를 e가 사용되는 사례 또는 e의 속성, e의 근삿값과 혼동하고 있음을 확인할 수 있었다.

둘째, 예비교사들이 실수 e의 다양한 표현 중에서 극한 표현에 편중하여 이해하고 있음을 확인하였다. 실수 e의 극한 표현의 정답률은 96.4%(27명)로, 급수 표현의 정답률 67.9%(19명)보다 훨씬 높게 조사되었다. 극한 표현은 이미 학교수학에서부터 익숙한 표현인 반면에 급수 표현은 대학의 미적분학 강의에서 맥클로린 급수를 통해 새롭게 학습한 내용이라는 점에서 기억과 인출이 자동화되지 못하는 상태였으며, 상대적으로 취약한 지식으로 존재한다고 볼 수 있다. 반면에 실수 e의 기하적 표현에 대한 이해는 상당히 미흡한 상태라는 것이 확인되었다. 1단계 지필검사에서 직각쌍곡선 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 그 넓이를 이용하여 e의 기하적 표현을 제시한 학생은 단 한명도 없었다. 그렇지만, 2단계 반성 및 탐구 활동에서 S5는 본인이 그린 $y=e^x$ 함수와 $y=\ln x$ 함수에 e가 직접적으로 포함되어 있음을 발견하고 일종의 교착상태에 빠졌지만, 거꾸로 생각하기 전략을 사용하여 적분해서 $y=\ln x$를 얻을 수 있는 함수가 $y=\dfrac{1}{x}$라는 사실을 발견하는 통찰의 경험을 하였다. 수학적 표현은 문제해결뿐 아니라 개념 학습에서도 중요한 역할을 담당하는 만큼, 실수 e의 다양한 표현에 대한 지식은 실수 e의 개념적 이해를 위한 필수적이라고 할 수 있다.

셋째, 대부분의 예비교사들은 실수 e의 무리수 속성과 작도 불가능성에 대해 적절한 판단을 내렸으나, 그 근거에서는 다소 미흡한 면모를 드러내었다. 실수 e의 속성에 대해서는 89.3%(25명)의 학생들이 무리수라고 답하고, 92.9%(26명)의 학생들이 작도가 불가능하다고 답했을 정도로 정답률은 높게 조사되었다. 한편 무리수 속성에 대한 두 명의 오답자는 계산기 표현의 한계를 지적하지 못한 채, 계산기창의 유한소수 형태 2.718281828을 판단 근거로 하여 실수 e가 순환마디가 1828인 순환소수, 즉 유리수라고 답하는 부주의한 모습을 보였다. 그런데 대부분의 학생들이 e가 작도불가능한 근거로 '순환하지 않은 무한소수이기 때문에'라는 수학적으로 부적절한 근거를 제시한 점을 지적할 필요가 있다. 이는 연구대상자들이 무리수 중에서 유리수의 제곱근과 제곱근에 유한 번의 사칙계산을 적용하여 얻어지는 수는 작도가능하다는 사실을 대수적 수와 초월수 개념과 연계하여 학습하지 못한 상태라는 것을 감안한다고 하더라도 상당히 아쉬운 반응이라고 할 수 있다. 이미 학교수학에서 $\sqrt{2}$를 비롯한 제곱근 형태의 무리수가 수직선 위에 작도 가능함을 학습하였기 때문이다. 일부 예비교사들은 '해석학1' 과목에서 e의 초월수 속성을 학습한 경험을 바탕으로 초월수라는 용어를 사용하여 근거를 제시하기도 하였다. 그런데 '초월수'라는 용어의 사용 여부에 못지않게

중요한 것은 작도가능성에 대한 원시적 또는 비형식적인 접근이라고 할 수 있다. 예를 들어, S7은 '정수 계수 다항방정식의 해'라는 정확한 표현을 사용하지는 못했지만, '작도 가능한 것은 대수식으로 나타내진다'라는 대수적 수와 초월수에 대한 비형식적이고 소박한 아이디어를 표현하였다. S18 또한 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 작도했던 방법을 토대로 실수 e의 작도가능성을 판단하는 유추의 사고 과정을 드러내었다. 실수 e의 작도가능성이라는 새로운 과제에 대해서 학생 나름의 수학적 근거를 토대로 비형식적 전략을 사용하여 추론을 하고 있다는 것은 상당히 유의미한 측면이라고 해석하였다.

넷째, 예비교사들이 실수 e의 연속 복리 맥락과 지수함수 맥락에는 높은 이해도를 나타낸 반면에, 기하적 맥락과 자연로그 맥락을 미흡하게 이해하고 있음을 확인하였다. 82.1%(23명)의 예비교사들은 Bernoulli의 연속 복리 맥락 $a\left(1+\frac{1}{n}\cdot r\right)^n$에서 $r=1$, 이자 지급 횟수 n이 무한하다 할지라도, 연말의 원리합계가 무한히 증가하는 것이 아니라 원금 a의 약 2.7배를 넘지 못한다는 사실을 어렵지 않게 증명하였다. 또한 지수함수 $y=e^x$가 수학적으로 중요한 이유에 대해서도 89.3%(25명)의 학생들이 $y=e^x$의 도함수와 부정적분이 자기 자신이 되는 함수라는 것을 제시하였다. 지수함수가 어떤 양의 변화율이 그 양 자체에 비례하는 현상을 설명하는 최적의 모델이라는 점과 복소지수함수 e^{ix}로의 확장, 오일러 공식, 푸리에 급수 등을 언급하지는 못하였지만, 연구대상자들이 관련 내용들을 아직 제대로 학습하지 못한 상태라는 점을 감안할 수 있었다.

반면에 기하적 맥락에 대한 이해는 이미 기하적 표현에 대한 이해에서 분석한 바와 같이 취약하다고 할 수 있다. 자연로그 맥락에 대한 이해 또한 관계식 $x=e^y$를 유도한 예비교사가 단 두 명(S1, S3)에 불과할 정도로 상당히 미흡한 것으로 조사되었다. 다만, 고무적인 사실은 2단계 반성 및 탐구 활동에 참여한 8명의 학생 모두 해당 문항을 로그함수 $y=\log_e x$로 변환하는데 성공하였다는 점이다. 특히, S1은 1단계 검사의 반응에 대한 반성 과정에서 지수함수 $x=e^y$을 바로 로그함수 $y=\log_e x$로 변환하였으며, 주어진 $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$이 근사적으로 e로 계산 가능함을 적절하게 설명하였다. 또한 이후의 탐구 활동 과정에서 S1은 x가 등비수열을 이루고, y가 등차수열을 이룬다는 것으로부터 로그가 등비수열의 곱을 등차수열의 합으로 파악하는 도구라는 사실, 즉 자연로그의 발생 맥락을 어느 정도 이해하는 모습을 보여주었다. 또한 8명의 예비교사들은 기하급수적인 등비수열의 변화를 산술급수적인 등차수열의 변화로 파악하는 로그의 의미와 이 과정에서 실수 e가 등장하고 있다는 사실에 흥미를 나타내었다. Freudenthal(2008)이 주장한 바와 같이, 수학적 본질은 광범위한 상식과 상식적인 현실에서 발생했으므로, 발생했던 곳에서 다시 재발명되어야 한다. 실수 e의 개념적 학습 또한 학습자에게 현실의 영역으로서의 맥락이 제시됨으로써 그 발생적 맥락을 재발명하는 교수·학습과정이 이루어져야 할 것이다.

이상의 연구 결과는 실수 e를 가르치는데 필요한 수학지식과 향후 예비교사 프로그램에 대한 시사점을 제공한다. 예비교사 교육에서 학교수학의 주제를 가르치는데 필요한 수학지식의 증진과 실천은 고희정과 고상숙(2013), 하영화와 고호경(2013)의 연구를 비롯한 다수의 연구에서 꾸준히 강조되어왔다. 본 연구에서 살펴본 실수 e의 다양한 표현과 속성, 맥락들은 장차 예비교사들이 실수 e를 지도하는데 필요한 교과내용지식, 특히 전문내용 지식 SCK에 해당한다. 실수 e의 다양한 측면에 대한 풍부하고 심화된 지식은 장차 고등학교에서 실

수 e의 개념과 지수함수, 로그함수의 성질을 가르치는데 필요한 교수지식으로 작용할 것이다. 특히, 지수함수 $y=e^x$와 자연로그함수 $y=\ln x$가 다양한 현상을 설명하는 최적의 모델임을 인식하고, 두 함수를 구성하는 실수 e의 유용성과 필요성을 인식할 수 있는 교과내용지식을 신장시키는 것이 필요하다. 이를 위해서 예비교사들에게 실수 e의 다양한 측면에 대한 학습 경험을 제공해야 할 것이다. 특히, 본 연구의 연구 참여자가 대학교 2학년이었음을 감안한다면, 교육과정상 이후 학년에서 수강하게 될 과목인 '수학교재 연구 및 지도법' 과목에서 극한과 미분, 적분 영역의 주요 개념을 아우르는 소주제로 실수 e를 학습하게 하는 방법을 생각해 볼 수 있다. 또한 '수학 논리 및 논술' 과목에서도 관련 제시문과 논제의 형태로 제시하는 방법을 생각할 수 있다.

S1은 반성 및 탐구활동 단계에 참여한 소감을 다음과 같이 남겼다. 'e가 이렇게 많은 쓰임새가 있는 줄 몰랐어요. 사실 다 배운 내용인 것 같은데... 따로 따로 배워서 연결이 안돼서 어려웠어요.' 사실 이 말은 앞으로 실수 e의 개념과 e와 관련된 함수를 지도할 때 고려해야 할 중요한 지적이다. 실수 e의 역사적 발생 과정에서도 미적분학이 어느 정도 발달한 후 과거의 성과들이 회고되었을 때, 그동안 개별적이고 암묵적이며 모호했던 수학적 성과들이 e라는 개념을 중심으로 하나의 관계망 속에 연결됨을 명시적으로 파악하였기 때문이다. 향후 예비교사 프로그램에서 실수 e에 대한 다양한 의미와 맥락이 잘 조직된 관계망 속에서 통합되어 지도될 필요가 있음을 시사한다.

본 연구는 실수 e의 개념과 의미에 초점을 맞추어 일부 예비교사에게 적용하여 분석한 질적 사례 연구에 해당한다. 따라서 본 연구 결과를 일반화하여 해석하기는 어렵지만, 앞으로 실수 e와 관련된 후속 연구의 기초 자료로서의 역할을 할 것으로 본다. 향후 실수 e를 바탕으로 한 자연로그와 자연로그함수, 자연지수함수의 수학적 의미를 보다 심층적으로 탐색하는 연구가 이루어질 필요가 있으며, 이에 대한 학생들의 이해와 예비교사들의 교수 지식을 살펴보는 연구가 요구된다.

참고 문헌

고희정, 고상숙 (2013). 고등학교 미적분 수업에서 나타나는 초임교사의 교수를 위한 전문화된 수학 내용 지식(SCKT). **한국학교수학회논문집, 16**(1), 157-185.

교육부 (2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책8].

곽성훈 (2014). **고등학교 미분적분학과 무리수 e의 지도방안**. 금오공과대학교 교육대학원 석사학위논문.

김홍종 (2014). **미적분학 1+**. 서울: 서울대학교출판부.

민세영, 박선용 (2002). 쌍곡선의 구적법에 의한 자연로그의 도입에 관한 고찰. **수학교육학연구, 12**(1), 81-93.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원, 민진원, 김호경. (2014). **미적분 Ⅱ**. 서울: 금성출판사.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈(2006), 수학교육학 연구방법론, 서울: 경문사.

이동근, 양성현, 신재홍 (2017). 자연상수 e에 대한 이해를 기반으로 지수함수 $y=2^x$의 $x=0$에서의 순간변화율 구성에 관한 연구. **학교수학, 19**(1), 95-116.

이성숙 (2013). **무리수 e에 대한 고등학생들의 이해에 관한 연구**. 부산대학교 대학원 석사학위논문.

하영화, 고호경 (2013). 중학교 기하에 관한 교사의 인지적 지식 분석. **한국학교수학회논문집, 16**(1), 187-200.

한혜원 (2012). **고등학교 수학에서 무리수 e의 지도 방안**. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

허남구, 강향임, 최은아 (2017). 지수함수 그래프의 구성 맥락에 대한 예비교사들의 이해. **수학교육학연구, 27**(3), 411-430.

허훈 (2013). **무리수 e의 교수학적 변환에 관한 연구**. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C.(2000), **수학의 역사** (양영오·조윤동 역). 서울:경문사. (원저 1968년 출판).

Cajori, F. (1905). *History of mathematics*, London: the Macmillan Company.

Cajori, F. (1917). *History of elementary mathematics with hints on methods of teaching*. London: the Macmillan Company.

Coolidge, J. L. (1950). The number e. *The American Mathematical Monthly, 57*(9), 591-602.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Fey, J. T. (1969). The number e, In J. K. Baumgart (Eds), *Historical topics for the mathematics classroom*, Reston, VA: NCTM.

Freudenthal, H. (2008). **프로이덴탈의 수학교육론**. (우정호, 정은실, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화 공역). 서울: 경문사. (원저 1991년 출판)

Glaz, S. (2010). *The enigmatic number e: A history in verse and its uses in the mathematics classroom*, MAA Loci: Convergence, April 2010. MAA: Washington DC.

Havil, J. (2014). **무리수: 헤아릴 수 없는 수에 관한 이야기**. (권혜승 역). 서울: 경문사. (원저 1994년 출판)

Maor, E. (2000). **오일러가 사랑한 수 e**. (허민 역). 서울: 경문사. (원저 1994년 출판)

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2001). *The number e*. St Andrews University. Retrieved from http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). *Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers*. NCTM, 44-52.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16.* American mathematical Society.

An Analysis of Pre-Service Teachers' Understanding of the real number e

Choi, Eunah[4)] · Lee, Hong-Youl[5)]

Abstract

The purpose of this study is to analyze the concept of the real number e and to investigate the understanding of pre-service teachers about the real number e. 28 pre-service teachers were asked to take a test based on the various ideas of the real number e and 8 pre-service teachers were interviewed. The results of this study are as follows. First, a large number of pre-service teachers couldn't recognize relation between the formal definition and the representations of the real number e. Secondly, pre-service teachers judged appropriately for the irrationality and the construction impossibility of the real number e, but they couldn't provide reasonable evidence. Lastly, pre-service teachers understood the continuous compounding context and exponential function context of the real number e, but they had a difficulty in understanding the geometric context and natural logarithm context of the real number e.

Key Words : real number e, pre-service teacher, exponential function, natural logarithm, geometric context, continuous compounding.

Received November 14, 2017
Revised December 14, 2017
Accepted December 18, 2017

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97B50, 97C70
4) Woosuk University (eunachoi@woosuk.ac.kr)
5) Woosuk University (hylee@woosuk.ac.kr), Corresponding Author