한국학교수학회논문집 제 20 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 20, Number 4, 405-422, December 2017

NIM 게임에서 수학 영재의 필승전략에 대한 추론 사례 분석

박달원[1]

Nim 게임을 구분하여 한 더미 대상 게임을 1단계, 두 더미 대상 게임을 2단계, 세 더미 대상 게임을 3단계로 나누어 중학교 수학영재들을 대상으로 탐구활동을 실시하였다. 학생들은 난이도가 낮은 1단계에서는 연역적 추론을 통하여 쉽게 필승전략을 발견하였다. 2단계에서는 연역적 추론 또는 귀납적 추론으로 필승전략을 발견하였지만 귀납적 추론 과정에서는 오류가 발견되었다. 3단계 게임에서는 연역적 추론으로 필승전략을 발견한 학생들은 없었으며 귀납적 추론 과정에서는 오류가 발견되었다. 유한개의 경우에서 성립하는 패턴을 정당화 절차 없이 무조건 일반화하려는 경향이 오류의 원인임이 밝혀졌다. 학생들에게 이진법 상자를 시각적으로 제시한 결과, 학생들은 승패에 따른 패턴을 쉽게 발견하고 게임 활동을 통하여 필승전략을 인식하게 되었으며 일부 학생들은 발견한 필승전략을 정당화하는 단계에 도달할 수 있었다.

주요용어 : Nim 게임, 필승전략, 수학적 게임, 귀납적 추론, 연역적 추론, 이진법 상자

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

제4차 산업혁명의 시대가 시작되면서 정보통신기술(ICT)의 융합은 인공지능, 로봇공학, 사물 인터넷, 무인 운송 수단, 3차원 인쇄, 나노 기술과 같은 6대 분야에서 급속하게 확산 발전하게 될 것이다. 이제 미래를 예측할 수 없고 변화의 속도 역시 가늠할 수 없는 혁명과 혁신의 시대가 시작되었다. 아주 특별한 영역을 제외하고는 거의 모든 일은 자동화된 로봇이 맡게 될 것이며 많은 사람들이 현재의 일자리에서 퇴출될 수 있다.

특히 알고리즘과 빅데이터로 무장한 인공지능의 출현은 바둑을 필두로 번역, 금융, 의료, 교육, 자동차, 작곡 등 수많은 분야에서 사람을 밀어내고 그 자리를 인공지능이 차지할 것으로 예견된다. 이와 같이 예측 불가능한 제4차 산업혁명의 시대에서 교육은 어느 시대보다도 중요하지만 반면 전통적인 교육방법은 위기에 직면하고 있다고 볼 수 있다. 만약 시대적인 요구에 부응하는 교육이 이루어지지 못한다면 기존의 교육시스템은 외면당하고 말 것이며 궁극적으로는 도태되고 말 것이다.

* MSC2010분류 : 97A20
1) 공주대학교 (dwpark@kongju.ac.kr)

4차 산업혁명 시대에 있어서 수학의 중요성은 어느 때보다 더욱 강조되고 있기 때문에 수학교육에 대한 더 많은 혁신과 노력이 필요할 시점이라 할 수 있다.

학생들은 귀납적인 활동과 관찰을 통하여 패턴을 발견하고 일반화하려는 경향이 있다. 수학교육에서도 이러한 학생들의 심리적 특성을 고려하여 학생들이 새로운 법칙과 개념을 이해하도록 지도하고 있다.

Polya는 문제해결에서 있어서 귀납적 유추의 중요성을 강조하고 있지만 유추가 만능이 아니고 오류가 발생될 수 있음을 예시를 통하여 설명하였다. 1개의 평면은 공간을 2개의 영역으로 나누며, 서로 교차는 하는 2개의 평면은 공간을 4개의 영역으로 나누고, 서로 평행하지 않은 세 개의 평면은 공간을 8개의 영역으로 나눈다. 이러한 활동을 통하여 대부분의 탐구자는 서로 평행하지 않는 평면의 개수가 n이면 분할된 공간의 영역의 개수가 2^n이라는 추측을 하게 된다. $n=4$일 때, 즉, 서로 평행하지 않는 평면의 개수가 4이면 분할된 공간의 영 영역의 개수가 $2^4=16$이라는 결론에 이르게 되지만 실제는 15개가 되어 추측한 패턴이 성립하지 않는다(우정호, 2005).

문제의 해결에서 귀납적 유추의 중요성을 강조하면서도 귀납적 유추에서 오류가 발생될 수 있음을 인정하고 이에 대한 정당화의 필요성을 인식하는 것은 수학영재들에게 매우 중요하다고 할 수 있다.

Nim 게임 활동에서 귀납적 유추를 통하여 필승전략을 찾으려는 학생들이 있다. 학생들의 귀납적 유추에서 어떤 오류가 있는지를 조사하고 그 이유를 분석할 필요가 있다. Nim 게임은 하버드 대학의 Bouton(1902) 교수가 'Nim'이라는 용어를 처음 사용하면서 널리 알려지게 되었다. 1939년 뉴욕에서 개최된 세계 박람회에서 처음으로 컴퓨터 게임이 등장 했는데 그 중에 하나가 Nim 게임이다(Donovan, 2010). Nim 게임은 수학적 필승전략이 존재하는 게임으로서 현대 조합수학의 발전에 기초가 되었으며 Nim 게임을 일반화한 다양한 게임 등이 현재에도 많이 연구되고 있다.

Freudenthal(2002)은 수학적 사고활동의 본질은 수학화이며, 수학 학습-지도는 기성 수학을 부과하는 것이어서는 안 되며 인류의 수학의 학습과정인 수학의 발생과정, 수학화 과정을 학습자의 현재의 상황에서 재발명하도록 안내하는 재발명 과정이 필요함을 강조하였다(우정호, 2005).

게임에 대한 탐구활동수업은 4차 산업혁명시대의 Freudenthal의 수학화에 적합한 주제이지만 학생스스로 게임의 구조를 파악하고 필승전략을 발견할 수 있는 방법의 제시가 부족하기 때문에 이에 적합한 탐구활동수업에 대한 연구가 필요하다.

2. 연구 문제

본 연구자는 2009년부터 매년 연구자가 소속된 대학부설 과학영재교육원 중등부 심화과정 수학반 교육과정에 Nim 게임에 대한 탐구활동을 편성하여 매년 4시간씩 탐구활동수업을 진행하였다. Nim 게임은 세 더미의 바둑돌(카운터)을 대상으로 두 사람이 하는 게임이며 규칙은 아래와 같다.

(1) 두 사람이 교대로 바둑돌을 가져간다.
(2) 한 번에 한 더미에서 한 개 이상의 바둑돌을 가져간다.

(3) 마지막으로 바둑돌을 가져가는 사람이 승리한다.

2009년에는 학생들에게 게임의 규칙을 제시하고 자유로운 게임 활동을 통하여 학생들이 게임의 필승전략을 발견하도록 하였다. 학생들은 간단한 경우에 대해서는 승패 여부를 판정할 수 있었지만 승패에 따른 패턴을 발견하지는 못하였다.

2012년에는 Nim 게임 탐구활동수업을 3단계로 진행하였다. 1단계에서는 두 사람이 한 모둠을 이루어 Nim 게임 탐구활동지<표Ⅰ-1>의 승패 여부를 결정하여 발표하도록 하였으며, 2단계에서는 각 모둠별로 발표한 승패 여부에 대한 결과를 전체 토론을 통하여 최종 확정하도록 하였다. 3단계에서는 Nim 게임 탐구활동지<표Ⅰ-1>에서 바둑돌의 개수를 이진수로 나타내고 승패에 따라 구별되는 이진수의 패턴을 발견하도록 하였다.

<표Ⅰ-1> Nim 게임 탐구활동

구분 / 번호	바둑돌의 개수			승패 여부	바둑돌의 개수(이진수)		
	A	B	C		A	B	C
1	1	1	1	승	1	1	1
2	1	2	3	패	1	10	11
3	2	3	4	승	10	11	100
4	1	4	5	패	1	100	101
5	1	5	6	승	1	101	110
6	2	4	6	패	10	100	110
7	2	5	6	승	10	101	110
8	3	4	5	승	11	100	101
9	3	5	6	패	11	101	110
10	4	5	7	승	100	101	111
11	5	6	7	승	101	110	111
12	5	7	8	승	101	111	1000
13	6	8	10	승	110	1000	1010

수업에 참여한 15명의 학생 중에서 5명이 승패 여부에 따라 구분되어지는 패턴을 발견하였으며 그 내용은 다음과 같다.

'각 더미의 바둑돌의 개수를 이진수로 나타낼 때, 각 자릿수별로 1의 개수가 0 또는 2가 되는 경우에 선행자가 반드시 패한다.'

학생들은 바둑돌의 개수를 이진수로 나타내고 각 자리별로 1의 개수가 0 또는 2가 아닌 경우에는 남은 바둑돌의 수(이진수)의 각 자리에서 1의 개수가 0 또는 2가 되도록 가져가야 할 바둑돌의 개수를 일일이 계산하였다. 학생들은 게임을 하면서 발견한 패턴에 대한 확신을 가졌지만, 그 이유를 대수적으로 정확하게 설명하지는 못하였다.

세 더미 대상인 Nim 게임에 대한 필승전략이 세 더미 이상인 Nim 게임에도 그대로 적용되기 때문에 세 더미 대상인 Nim 게임을 Nim 게임으로 부르기로 한다. 위에서 제시한 3단계 Nim 게임 탐구활동수업이 Nim 게임의 형식적인 필승전략을 발견하는 데에는 도움을 주었지만 학생들이 Nim 게임의 구조를 이해하는 데에는 큰 도움이 되지 못하였다. 학생들은 3단계 탐구활동수업을 통하여 Nim 게임의 필승전략과 이진법과의 관련성을 발견했지만 그 이유까지 설명하지 못한 것은 이진법의 구조와 특성에 대한 이해의 부족에 그 원인에 있다

고 분석하였다.

본 연구에서는 이진법의 구조와 특성을 이해하기 쉽도록 이진법 상자 표기법을 도입하였으며, 이진법 상자를 통한 Nim 게임의 승패에 따른 패턴 발견이 학생들의 필승전략 발견에 어떤 영향을 미치는지를 조사하기 위하여 탐구활동수업을 단계별로 설계하였으며 본 연구의 문제를 아래와 같이 설정하였다.

첫째, 한 더미, 두 더미 대상 게임과 Nim 게임의 필승전략을 발견하기 위해 학생들은 어떤 추론 방법을 사용하는가?

둘째, 한 더미와 두 더미 대상 게임에서의 필승전략 추론방법이 Nim 게임의 필승전략을 발견하는데 어떤 영향을 미치는가?

셋째, 이진법 상자 표기가 Nim 게임에 대한 필승전략의 발견에 어떤 영향을 미치는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. Nim 게임

하버드 대학의 Bouton(1902) 교수는 Nim 게임이 복잡하게 보이지만 단순하며 완전한 수학적인 이론을 가지고 있기 때문에 이 게임에 대하여 큰 관심을 갖게 되었다고 하였다. 당시 미국의 일부 대학과 박람회 등에서 특정한 형태의 게임이 행하여 졌는데 사람들은 이 게임의 이름을 중국식으로 Fan-Tan(番攤)이라고 불렀다. 그러나 이 게임의 이름이 실제 Fan-Tan(番攤)과 다르다고 판단한 Bouton 교수는 이 게임을 Nim 게임이라 불렀으나 그 이유에 대하여는 밝히지 않았다. 'Nimm'이라는 용어는 독일어로 '가져가'라는 뜻이 있는데 Bouton 교수는 이들의 관계를 직접 언급하지는 않았기 때문에 관련성을 추측만 할 뿐이다.

원래의 Fan-Tan 게임에는 수학적인 필승전략이 존재하지 않지만 Nim 게임에는 수학적인 필승전략이 존재하기 때문에 게임 전략 측면에서 보면 매우 다름을 알 수 있다.

각 더미에 있는 물체를 카운터(counters)라고 하며 카운터의 개수가 각각 a,b,c일 때, 이를 순서쌍 (a,b,c)로 표기한다. 후행자가 실수하지 않고 필승전략을 구사할 때, 선행자 패할 수 밖에 없는 (a,b,c)를 안전조합(safe combination)이라 한다. Bouton 교수는 a,b,c를 각각 이진법의 수로 나타내고 이진수의 각 자리에 1의 개수가 0 또는 2가 될 때, (a,b,c)가 안전조합이 된다고 하였으며, 안전조합인 경우에서는 다음 사람이 게임의 규칙 안에서 어떻게 카운터를 가져갈 지라도 남은 카운터 쌍은 안전조합이 되지 않음을 설명하였다.

배타적 논리합(exclusive OR, XOR)을 이용한 Nim Sum을 이용하여 안전조합을 설명하면 편리하다. 배타적 논리합 연산은 $\oplus$로 나타내며 0, 1에 대한 배타적 논리합은 아래와 같이

$$0 \oplus 0 = 0,\ 1 \oplus 0 = 1,\ 0 \oplus 1 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0$$

으로 정의한다. 이 연산은 $\{0,1\}$상에서 교환법칙, 결합법칙을 만족하고 항등원과 역원을 갖는다. 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3에 대하여, 각각을 이진법의 전개식으로 나타내면 $x_i = \sum_{j \ge 0} x_{ij} 2^j$, $(x_{ij} = 0,1,\ i = 1,2,3,\ j = 0,1,2,\cdots)$이다. $\{0,1\}$에서의 XOR 연산 $\oplus$을 음이 아닌 정수의 범위까지 확장하여 Nim sum을

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = \sum_{j \ge 0} (x_{1j} \oplus x_{2j} \oplus x_{3j}) 2^j$$

으로 정의한다. $x_1 \oplus x_2 = 0$일 필요충분조건은 $x_1 = x_2$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 x_1, x_2, x_3 또는 (x_1, x_2, x_3)이 안전조합일 필요충분조건은 $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$이다. 또한 $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$일 필요충분조건은 $x_1 = x_2 \oplus x_3$, $x_1 \oplus x_2 = x_3$, $x_1 \oplus x_3 = x_2$이다. Bouton(1902)의 정리를 Nim sum을 이용하여 설명하면 아래와 같다. A, B사람이 교대로 Nim 게임을 한다고 하자.

[Bouton 정리 Ⅰ] A가 안전조합을 남기면, 다음 시행자 B는 안전조합을 남길 수 없다.
「$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$일 때, 다음 시행자가 남긴 카운터의 개수를 각각 x_1', x_2', x_3'이라하면 $x_1' \oplus x_2' \oplus x_3' \neq 0$.」

[Bouton 정리 Ⅱ] A가 안전조합을 남기고 다음 시행자 B가 한 더미의 개수를 줄이면, A는 남은 두 더미 중 한 더미의 개수를 줄여 안전조합을 남길 수 있다.
「$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$일 때, 만약 $x_1 > x_1' \geq 0$이면 x_2' $(x_2 \geq x_2' \geq 0)$와 x_3'($x_3 \geq x_3' \geq 0$)이 존재하여 $x_1' \oplus x_2' \oplus x_3' = 0$이다.」

Bouton(1902) 교수는 위의 정리는 네 더미 이상에서도 성립된다고 하였으며, Nim 게임의 세 번째 규칙인 '마지막 남은 카운터를 가져가는 사람이 승리한다.'를 '마지막 남은 카운터를 가져가는 사람이 패한다.'라는 것으로 변경한 변형된 Nim 게임도 설명하였는데, 이 변형된 게임이 일반적인 Nim 게임보다 난이도가 높기 때문에 많은 사람들에게 인기가 있었다고 하였다.

이후 조합 게임 중에서 마지막으로 카운터를 가져가는 사람이 이기는 시합을 Normal play라 불렀으며, 어쩔 수 없이 마지막 남은 카운터를 가져가는 사람이 패하게 되는 시합을 misere play라고 하였다.

2. 귀납적 추론과 연역적 추론

연역적 추론(deductive inference)이란 전제로부터 결론을 논리적으로 도출하는 추론방식이다. 그러므로 연역적 추론에 의하여 옳은 전제로부터 얻은 결론은 반드시 옳은 것일 수밖에 없다. 연역적 추론은 전제와 결론 사이를 논리로 연결하여 탄탄한 수학적 구조를 만들뿐만 아니라 지식을 구조화하고 체계화하는데 매우 중요한 사고의 수단이다. 그러나 이 방법은 새로운 지식의 범위를 확장하거나 발견하는 데에는 적합하지 않을 수 있다.

귀납적 추론(inductive inference)이란 개별적인 특수한 사실들로부터 일반적인 원리를 이끌어내는 추론방식이다. 귀납적 추론은 특수한 사례가 가지고 있는 공통적인 성질이나 패턴을 찾아 일반적인 법칙을 이끌어 내는 추론이지만 귀납적 추론을 통하여 얻은 성질이 참이라고 증명된 것은 아니다.

Polya에 의하면, 완성된 수학은 연역과학이지만 만들어지고 있는 과정의 수학은 실험적이고 귀납적인 과학이라고 하면서, 발견·발명되는 방식대로 수학을 지도할 것을 강조한다. 관찰은 수학적 발견의 풍부한 원천이며 귀납은 수학자의 창조적인 사고에서 본질적인 역할을 한다. 창조과정의 수학은 귀납과 유추를 통해 발견에 이르는 '관찰과학'으로서, 자연과학과 매우 유사하다. 수학교육은 많은 학생들에게 수학을 이해하도록 해야 할뿐만 아니라 과학적 사고방법과 수학하는 활동에 친숙해야 하며 수학교사는 학생들 수준에 맞고 흥미로운 적절

한 문제를 선택하여 적정한 방법으로 제시하고 조심성 있고 적절히 도와줌으로써 학생들에게 독자적인 수학적 탐구활동의 경험을 제공해야 한다(우정호, 2005).

Popper나 Lakatos와 같은 학자들은 과학적 지식의 발견은 귀납추론에 의한 것이 아니며 전형적인 보기로부터의 단일한 관찰과 실험을 통한 추측, 반례에 의한 반박, 개선된 추측에 의해 성장한다는 주목할 만한 주장을 펴고 있다. 그러나 귀납추론은 오랫동안 여전히 과학적 탐구와 발견 및 교육을 위한 유용한 방법으로 여겨지고 있다(우정호, 2005).

남승인(2011)은 귀납적 추론을 제 1단계 관찰, 조작, 실험, 제 2단계 추측, 제 3단계 잠정적 일반화, 제 4단계 잠정적 일반화에 대한 검증, 제 5단계 일반화 단계로 구분하였다.

3. 선행 연구

노은환 외(2013)는 게임의 이론을 적용하여 사교육현상을 분석한 결과 학교 시험과 사교육과의 연결고리 차단과 교사의 역량 강화가 사교육 근절의 핵심으로 파악하였다. 도종훈, 허선희(2010)는 초등학교의 곱셈과 나눗셈에 대한 연산법칙을 카드게임을 고안하여 도입한 결과 학생들에게 흥미와 동기를 유발시키는데 효과적임을 관찰하였다. 이와 같이 게임이론은 여러 현상에 대한 실태분석 뿐만 아니라 여러 개념학습에서도 효과를 거두고 있으며 학생들의 수학적인 능력을 향상시키기 위한 수학적 게임에 대한 연구도 이루어지고 있다.

송상헌 외(2007)는 Nim 게임과 비슷한 특성을 가진「큐브 가져가기 게임」을 난이도가 낮은 단계부터 높은 단계 순으로 초등학교 수학영재들에게 제시하고 학생들의 문제 만들기를 Brow & Walter가 설정한 ‘What-if-not’전략에 따른 수준에 의거하여 조사한 결과, 수준 1과제에서는 한 방향 큐브 가져가기 게임을, 수준 2과제에서는 두 방향의 큐브 가져가기 게임을 제시하고, 수준 3과 수준 4과제에서는 세 방향 큐브 가져가기 게임을 제시하였으며 ‘마지막 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다’라는 규칙을 적용하였다. 수준 3과제에서는 한 번에 가져가는 큐브의 개수를 1개 또는 2개로 제한하였으며, 수준 4과제에서는 한 번에 가져가는 큐브의 개수를 제한하지 않았다. 연구에 참여한 교육청부설 과학영재교육원 소속 초등수학영재들은 대부분은 Ⅲ수준에 머물렀지만 대학부설 과학영재교육원 소속 수학영재들 중에는 Ⅳ수준에 도달하는 학생들이 있었다.

문제 만들기 첫 단계에서 주어진 원 문제에 대한 수학적 구조, 관계, 패턴을 파악하여, 문제를 해결하는 것은 매우 중요한 단계이다. 주어진 원 문제를 해결하지 못하고 단순히 조건이나 정보를 변경하여 새로운 문제를 만드는 경우에는 높은 수준에 이르지 못하는 것으로 조사되었다.

배신영, 송상헌(2015)은 초등학교 5학년 영재학급 학생들이 유추적 사고를 활용하여 Nim 게임을 일반화한 위도프 게임의 해법을 탐구하는 과정에서 보이는 사례 분석을 통하여 영재학급에서의 유용한 지도 방법을 고찰하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 게임의 구성

Nim 게임과 같이 필승전략이 있는 수학적 게임은 수학과의 탐구활동 수업에 매우 흥미있는 주제라고 볼 수 있다. 학생들은 게임 활동을 통하여 승패에 따른 패턴을 발견하고 필승전략을 유추하며 검증과정을 거쳐서 필승전략의 수용여부를 결정하게 된다.

본 연구에서는 Nim 게임 탐구활동 전에 한 더미 대상 게임을 1단계, 두 더미 대상 게임을 2단계 탐구활동으로 설정하고 3단계에서는 Nim 게임을 탐구하도록 하였다. 각 단계별 게임 규칙은 아래 <표 Ⅲ-1>와 같다.

<표 Ⅲ-1> 단계별 게임의 규칙과 필승전략

단계	1단계	2단계	3단계
더미 수	1	2	3
규칙	·두 사람이 교대로 바둑돌을 가져간다. ·한 번에 한 개 이상, 세 개 이하의 바둑돌을 가져간다. ·마지막 바둑돌을 가져가는 사람이 승리한다.	·두 사람이 교대로 바둑돌을 가져간다. ·한 더미에서 1개 이상, 세 개 이하의 바둑돌을 가져간다. ·마지막 바둑돌을 가져가는 사람이 승리한다.	·두 사람이 교대로 바둑돌을 가져간다. ·한 더미에서 한 개 이상의 바둑돌을 가져간다. ·마지막 바둑돌을 가져가는 사람이 승리한다.

2. 연구대상 및 과정

연구자가 소속된 과학영재교육원 중등부 심화과정 수학반 학생들을 대상으로 2017년 6월에 탐구활동수업을 진행하였으며 수업에 참여한 학생들은 12명으로 중학교 1, 2학년에 재학중인 학생들로 구성되었다. 본 연구에서는 Nim 게임의 일반 시합(Normal play)에서 학생들이 어떻게 필승전략을 찾는지를 조사하고 학생들의 추론방법을 분석하였다. 수업은 총 3시간 10분 동안 아래와 같이 세 단계로 진행되었다.

<표 Ⅲ-2> 탐구 단계

단계	시간	게임 형태
1단계 게임	9:30 ~ 9:45	·모둠별 탐구활동지 작성, 모둠별 발표 ·필승전략 확인
2단계 게임	9:45 ~ 10:10	·모둠별 탐구활동지 작성, 모둠별 발표 ·필승전략 확인
3단계 게임	10:10 ~ 12:40	·모둠별 탐구활동지 작성, ·모둠별 발표 ·모둠별 대항전 게임을 통해 번호별 승패 여부 확정 ·이진법 상자 그림을 통한 귀납적 추론 ·학생들과 Nim 게임 컴퓨터 프로그램과의 시합

탐구활동수업을 진행하기 전에 탐구활동 대상이 되는 게임은 필승전략이 있는 수학적 게임이라는 것과 탐구활동수업의 진행과정을 간단하게 소개하였다. 각 단계별로 개발된 탐구활동지를 단계 마다 학생들에게 배부하고 학생들은 주어진 게임에 대한 승패 여부를 확정하고 그 이유를 탐구활동지에 적어 제출하도록 하였다. 학생들을 두 사람씩 짝을 이루어 6개 모둠(A, B, C, D, E, F)으로 구성하였으며 학생들에게 바둑돌을 나누어 주고 자유롭게 게임

을 하면서 필승전략을 발견하도록 하였다. 단계별 탐구활동이 끝나면 게임에 대한 승패 여부를 확인하는 절차를 진행하였으며 만약 이견이 있는 경우에는 전체 토론을 통하여 승패 여부를 확정하도록 하였다.

Ⅳ. 연구의 결과

1. 한 더미 대상 게임(1단계)

탐구활동지에는 15개의 게임 번호가 제시되어 있으며 학생들은 모둘 별로 각 번호에 대하여 선행자의 승패 여부를 결정하고 그 이유를 활동지에 적도록 하였다. 승패 여부는 단지 게임의 결과를 적는 것이 아니라 게임의 상대가 누구이든지 관계없이 항상 성립하는 판정 결과를 적도록 하였다.

학생들은 게임에 대한 탐구활동수업을 매우 흥미 있게 생각하였으며 즐겁게 수업에 참여하였다. 학생들은 몇 번의 게임을 하다가 게임의 구조를 곧 파악하였으며, '바둑돌의 개수가 4의 배수이면 선행자가 패하고 그렇지 않은 경우에는 남은 바둑돌의 개수가 4의 배수가 되도록 바둑돌을 가져가면 선행자가 승리한다.'는 패턴을 발견하고 그 이유를 설명하였다. 학생들이 설명한 내용을 정리하면 아래의 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 한 더미 대상 게임에 대한 탐구활동결과

바둑돌의 개수	이유 설명
5, 6, 11, 13, 14, 15 17, 18, 19, 21, 22 23 (선행자 승)	· 4의 배수의 바둑돌만 남도록 가져가는 양을 조절하면 이길 수 있다. · 선행자가 4의 배수를 먼저 만들면 이긴다. · 선행자가 몇 개를 가져가서 4의 배수를 만들면 이긴다. · 마지막에 자신이 가져갔을 때, 4개가 남으면 이기는데 계속 4의 배수개씩 남기면 마지막에 4개를 남길 수 있다. · 4로 나누어 남은 나머지만큼을 가져가면 된다.
12, 16, 20 (선행자 패)	· 이미 4의 배수이기 때문에 선행자가 가져가는 수에 따라 후자가 가져가면 이길 수 없다. · 후행자가 (선행자가 가져간 바둑돌의 수)+(본인이 가져갈 돌 수)=4가 되면 선행자가 진다. · 선행자가 몇 개를 가져가든 상대방은 4의 배수가 되게 가져갈 수 있다.

2. 두 더미 대상 게임(2단계)

두 더미 대상 게임에서는 학생들의 추론은 크게 두 가지로 나타났는데, 하나는 귀납적 추론이고 다른 하나는 연역적 추론이다.

(1) 귀납적 추론

귀납적 추론 방법으로 접근한 학생들은 몇 개의 경우에 대하여 승패 여부를 확정하고 그곳에서 성립하는 패턴을 발견하여 일반화하였다. 귀납적 추론의 오류는 크게 두 가지 형태로 구분할 수 있다.

1) 유한개의 경우에서 성립하는 패턴에 대한 일반화 오류

<표 Ⅳ-2> 두 더미 대상 게임에서 C모둠의 귀납적 추론 오류

<table>
<tr><th>두 더미의 순서쌍</th><th>승패</th><th>이유 설명</th></tr>
<tr><td>② (1,3) ③ (4,5) ④ (5,6)
⑤ (7,8) ⑥ (9,10) ⑦ (11,12)
⑧ (13,15) ⑨ (16,19)</td><td>승</td><td rowspan="2">(패턴 발견)
· 두 더미의 개수를 똑 같이 맞춘 다음, 상대방이 가져 간 만큼의 개수를 상대방이 가져가진 않은 더미에서 가져간다.</td></tr>
<tr><td>① (1,1)</td><td>패</td></tr>
<tr><td>⑩ (20,24) ⑪ (4,9) ⑫ (5,11)
⑬ (7,12) ⑭ (6,5) ⑮ (12,15)</td><td>승</td><td>(일반화)
· 두 더미의 개수가 다르면 선행자가 승리한다.
※ 일반화 오류 : (20,24)는 선행자가 패하는 경우임</td></tr>
</table>

C모둠은 ①번부터 ⑨번까지 경우에서 승패 여부를 정확하게 확정하고 승패에 따라 구분되는 패턴을 발견하였다. 즉, ‘두 더미의 개수가 다르면 선행자가 승리하고 동일하면 선행자가 패한다.’라는 패턴을 일반화하여 나머지 ⑩번부터 ⑮번까지의 승패 여부를 확정하였다. 그러나 ⑩번의 (20,24)는 두 더미의 개수가 다르지만 선행자가 패하는 경우이기 때문에, C모둠은 귀납적 추론에서 오류를 보였다. 이 모둠은 패턴에 대한 오류 가능성은 전혀 예상하지 못하였지만 탐구활동지를 제출한 다음 모둠별 발표를 통하여 각 번호에 따른 승패 여부를 확인하는 과정에서 본인들의 실수를 발견하였다.

“아참! 한 번에 1개 이상, 3개 이하의 바둑돌만을 가져갈 수 있지!”

라고 말하면서 본인들이 발견한 패턴에 실수가 있음을 인정하였다. ①번부터 ⑨번까지는 두 더미의 개수의 차가 3이하이기 때문에 개수의 차이가 4이상인 경우에서 발생될 수 있는 패턴에 대하여는 생각하지 못하였다. 학생들은 유한개에서 성립하는 패턴을 검증 없이 무조건 일반화하는 것에는 오류의 가능성이 있음을 인식하게 되었다.

2) 인위적인 패턴 설정의 오류

E모둠은 ①번의 (1,1)부터 ⑩번의 (20,24)까지 승패 여부를 확정하면서 (1,1)과 (20,24)는 선행자가 패하는 경우이며, 나머지는 선행자가 승리한다고 판정하였다. 그러나 (1,1)에서는 동수라는 패턴을, (20,24)에서는 두 수의 합이 4의 배수라는 패턴을 발견하고 이를 일반화하여 ‘동수이면 선행자가 패한다.’라는 것과 ‘동수가 아닌 경우, 두 수의 합이 4의 배수이면 선행자가 패한다.’라는 패턴을 발견하고 이를 일반화하였다. 이 같은 일반화 과정에서 처음에 선행자가 승리한다고 판정했던 (13,15)는 두 수의 합이 4의 배수이기 때문에 선행자가 패하는 경우로 수정 판정하였다. E모둠은 (13,15)은 한 번의 시행으로 (13,13)을 만들 수 있다는 사실을 간과하였으며 (20,24)의 특징 중에는 ‘각 수를 4로 나누면 나머지가 0이다’, ‘각 수를 4로 나누면 나머지가 같다’ 또는 ‘두 수의 차이는 4의 배수이다.’ 등 여러 특성이 있는데 이

곳에서 ‘ 두 수의 합이 4의 배수이다.’라는 특성만을 유추하여 바로 일반화한 사실은 특이한 사례로 볼 수 있다.

<표 Ⅳ-3> 두 더미 대상 게임에서 E모둠의 귀납적 추론 오류

두 더미의 순서쌍	승패	이유 설명
② (1,3) ③ (4,5) ④ (5,6) ⑤ (7,8) ⑥ (9,10) ⑦ (11,12) ⑨ (16,19)	승	(패턴 발견) · (1,1)은 선행자가 패한다. · 두 더미의 합이 4의 배수이면 선행자가 패한다.
① (1,1) ⑧ (13,15) ⑩ (20,24)	패	
⑪ (4,9) ⑬ (7,12) ⑭ (6,15) ⑮ (12,15)	승	(일반화) · 두 더미의 개수가 동수이면 선행자가 패한다. · 두 더미의 합이 4의 배수이면 선행자가 패한다. ※ 일반화 오류 : (13,15), (5,11)은 선행자가 승리하는 경우임
⑫ (5,11)	패	

(2) 연역적 추론

A, B모둠은 ‘두 더미의 바둑돌 개수를 각각 4로 나누었을 때, 나머지가 같으면 선행자가 패한다.’라는 패턴을 발견하였으며 D모둠은 ‘두 더미에 있는 바둑돌 개수의 차가 4의 배수이면 선행자가 패하고 그렇지 않은 경우에는 선행자가 승리한다는 것이다.’라는 패턴을 발견하였다. 이들은 몇 번의 게임을 하면서 게임의 구조를 파악했으며. 본인들이 발견한 패턴을 연역적으로 증명하였다.

<표 Ⅳ-4> 두 더미 대상 게임에서의 연역적 추론

두 더미의 순서쌍	승패	이유 설명
② (1,3) ③ (4,5) ④ (5,6) ⑤ (7,8) ⑥ (9,10) ⑦ (11,12) ⑧ (13,15) ⑨ (16,19) ⑪ (4,9) ⑫ (5,11) ⑬ (7,12) ⑭ (6,15) ⑮ (12,15)	승	(패턴 발견) · (A, B모둠) 두 더미의 개수를 각각 4로 나누었을 때, 나머지가 같으면 선행자가 패한다. · (D모둠) 두 더미의 개수의 차가 4의 배수이면 선행자가 패한다.
① (1,1) ⑩ (20,24)	패	

‘두 더미의 개수의 차가 4의 배수이다.’라는 것과 ‘두 더미의 개수를 각각 4로 나누었을 때, 나머지가 같다.’라는 것은 같은 설명이기 때문에 학생들은 세 모둠이 발견한 패턴이 모두 동일하다는 것을 이해하게 되었다. 각 더미의 개수를 4로 나누어 나머지가 같은 경우에서는 규칙 안에서 어떻게 바둑돌을 가져가든지 남은 더미의 나머지가 동일하지 않음을 설명하였다. 따라서 학생들은 각 더미의 개수를 4로 나누었을 때, 나머지가 같지 않으면 필승전

략이 존재한다는 사실을 발견하였다.

3. 세 더미 대상 게임(Nim 게임)

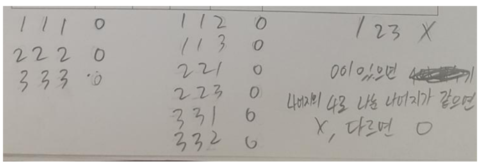
세 더미 대상 게임인 Nim 게임 탐구활동에서는 한 개 또는 두 더미 대상 게임보다는 상대적으로 많은 시간이 소요되었다. 1단계, 2단계 게임에서는 각 경우마다 학생들은 게임의 승패 여부를 비교적 쉽게 발견하였지만 Nim 게임에서는 승패 여부를 결정하는 데에도 많은 시간이 소요되었다.

(1) 귀납적 추론 전략

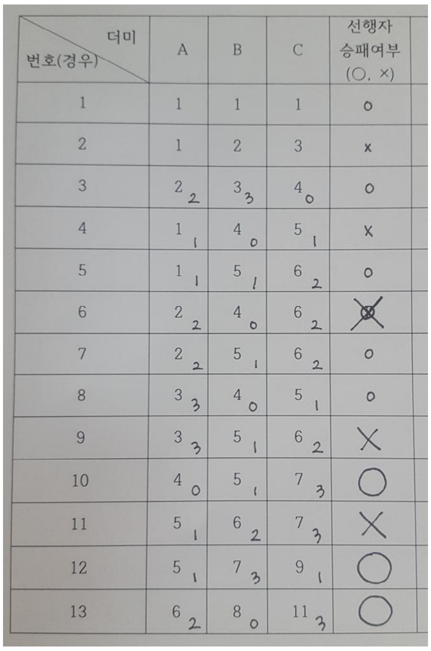
E모둠의 학생들은 2단계 두 더미 대상 게임에서와 같이 귀납적인 방법으로 패턴을 찾았다. [그림 Ⅳ-1]과 같이 1번에서 8번까지는 게임을 통하여 승패 여부를 판정하고 바둑돌의 개수를 4로 나누어 나머지를 적은 다음에 승패에 따라 구분되는 패턴을 찾았다. '바둑돌의 개수를 각각 4로 나누었을 때, '한 더미의 나머지가 0이고 남은 두 더미의 나머지가 동일한 경우 또는 각각의 나머지가 1, 2, 3이면 선행자가 패하고 그렇지 않은 경우에는 선행자가 승리한다.'라는 패턴을 발견하였다.

8번까지 패턴을 찾는 과정에서 6번의 (2,4,6)은 선행자가 승리하는 경우로 처음 판정하였지만 각 수를 4로 나누면 (2,0,2)이기 때문에 (2,4,6)은 선행자가 패하는 것으로 최종 판정하였다. 11번의 (5,6,7)은 각 수를 4로 나누었을 때, (1,2,3)이 되기 때문에 선행자가 패하는 경우로 판정하였지만 이 경우는 선행자가 승리하는 경우이기 때문에 발견한 패턴에 오류가 발견되었다.

B모둠의 학생들은 탐구활동지의 게임과 본인들이 여러 사례를 제시한 다음 그 곳에서 성립하는 패턴 찾는 활동을 [그림 Ⅳ-2]와 같이 하였다.



[그림 Ⅳ-2] B모둠의 귀납적 패턴



번호(경우) \ 더미	A	B	C	선행자 승패여부 (○, ×)
1	1	1	1	o
2	1	2	3	x
3	2_2	3_3	4_0	o
4	1_1	4_0	5_1	X
5	1_1	5_1	6_2	o
6	2_2	4_0	6_2	X
7	2_2	5_1	6_2	o
8	3_3	4_0	5_1	o
9	3_3	5_1	6_2	X
10	4_0	5_1	7_3	O
11	5_1	6_2	7_3	X
12	5_1	7_3	9_1	O
13	6_2	8_0	11_3	O

[그림 Ⅳ-1] E모둠의 패턴 발견

각각의 개수를 4로 나누었을 때, '한 더미의 나머지가 0이고 남은 두 더미의 나머지가 동일한 경우 또는 각각의 나머지가 1, 2, 3이면 선행자가 패하고 그렇지 않은 경우에는 선행자가 승리한다.'라는 패턴을 발견하였다. 각각의 수를 4로 나누는 방법은 1단계와 2단계의 필승전략 발견과정에서 사용한 방법이지만 게임의 규칙이 다른 3단계 Nim 게임의 필승전략에서도 계속 적용하고 있는 것은 특이한 결과로 볼 수 있다.

B, E모둠은 귀납적 추론에 대하여 강한 신뢰성을 갖고 있었다. 이들은 몇 가지의 경우에

서 성립하는 패턴이 적용 범위를 넓혀도 항상 성립한다는 강한 믿음을 가지고 있었다. 본인들이 발견한 패턴에 오류가 있음을 인식하면서 귀납적인 패턴은 반드시 정당화하거나 증명 단계를 거쳐 일반화해야 한다는 필요성을 인식하게 되었다.

(2) 경우의 수 전략

A모둠의 학생들은 (1,2,3)을 기준으로부터 선행자가 패할 수밖에 없는 경우를 찾아가는 방식으로 진행하였다. A모둠이 작성한 탐구활동지는 <표 Ⅳ-5>와 같다.

학생들은 Bouton 교수가 사용한 안전조합이라는 용어는 사용하지 않았으나 안전조합이라는 개념을 사용하였다. 즉, (1,2,3), (1,4,5), (2,4,6), (3,5,6)과 두 더미의 개수가 같고 남은 더미의 개수가 0인 경우에는 선행자가 패하며, 한 번의 시행으로 이 경우를 만들 수 있는 경우에는 선행자가 승리한다는 패턴을 발견하여 1부터 11번까지 승패 여부를 확정하였다. 그러나 12번의 (5,7,9)와 13번의 (6,8,11)에서는 선행자가 승리한다고 하였지만 그 이유를 설명하지 못하였고, 처음에는 ×로 표시하였다가 탐구활동지를 제출할 때, ○로 수정한 흔적이 보였으며, 모둠별 대항 게임에서 A 모둠이 항상 승리한다는 것을 입증하지 못하였다.

<표 Ⅳ-5> 1 Nim 게임에서 A 모둠의 경우의 수 전략

더미 / 번호	A	B	C	선행자 승패 여부 (○, ×)	설 명
1	1	1	1	○	선행자가 1개를 가져가고 따라하면 된다.
2	1	2	3	×	선행자가 몇 개를 가져가든 개수가 같은 두 더미를 만들 수 있다.
3	2	3	4	○	C에서 3개를 가져가면 (1,2,3)을 만들 수 있다.
4	1	4	5	×	선행자가 어떻게 가져가든 후자는 (1,2,3)이나 동수인 두 더미를 만들 수 있다.
5	1	5	6	○	C에서 2개를 가져가면 (1,4,5)를 만들 수 있다.
6	2	4	6	×	선행자가 어떻게 가져가든 후자는 (1,2,3), (1,4,5)를 만들 수 있다.
7	2	5	6	○	B에서 1개를 가져가면 (2,4,6)을 만들 수 있다.
8	3	4	5	○	A에서 2개를 가져가면 (1,4,5)를 만들 수 있다.
9	3	5	6	×	선행자가 어떻게 가져가든 후자는 (1,2,3), (2,4,6) 등을 만들 수 있다.
10	4	5	7	○	C에서 6개를 가져가면 (1,4,5)를 만들 수 있다.
11	5	6	7	○	C에서 4개를 가져가면 (3,5,6)을 만들 수 있다.
12	5	7	9	○	설명 없음
13	6	8	11	○	설명 없음

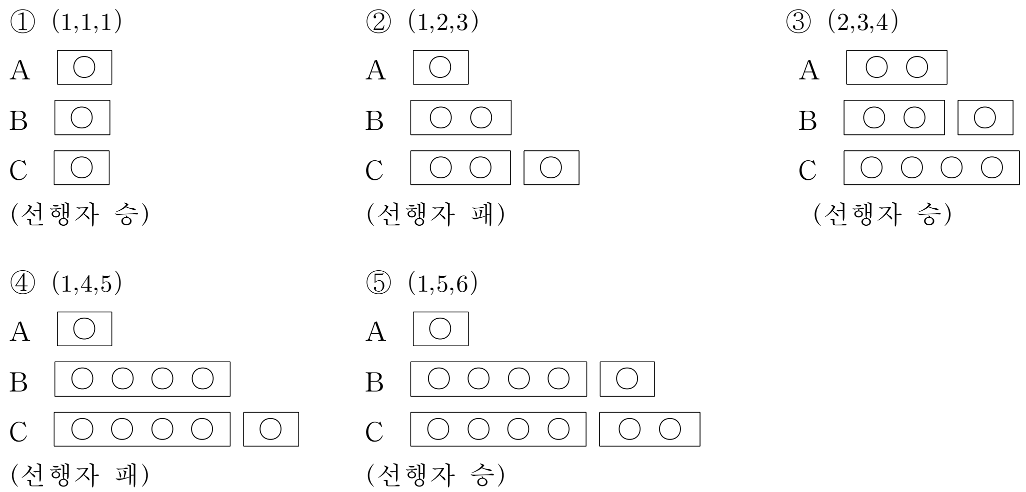
A모둠이 작성한 <표 Ⅳ-5>의 설명이 완벽하지는 않지만 첫 번째 단계에서는 (1,2,3)과 두 더미의 개수가 같고 나머지 한 더미의 개수가 0이면 선행자가 패한다는 판정을 하고, 두 번째 단계에서는 첫 번째 단계를 이용하여 (1,4,5)는 선행자가 패하는 경우로 판정하였으며, 세 번째 단계에서는 첫 번째, 두 번째 단계를 이용하여 (3,5,6)도 선행자가 패하는 경우로 판정하였다. 그러나 12번의 (5,7,9)와 13번의 (6,8,11)에서는 선행자가 한 번의 시행으로 (1,2,3),

(1,4,5), (2,4,6), (3,5,6) 또는 한 더미의 개수는 0이고 다른 두 더미의 개수가 동일한 형태로 만들 수 있다는 방법을 발견할 수 없었기 때문에 설명하지 못한 것으로 분석되었다. 이 모둠은 경우의 수에 의하여 승패 여부를 판정하였지만 필승전략 발견을 위한 패턴을 발견하지는 못하였다.

(3) 이진법 상자 전략

3단계 게임 활동을 통하여 학생 스스로 Nim 게임의 필승전략을 발견하는 것이 매우 어렵다는 것을 확인할 수 있었다. 귀납적 추론에서 오류를 보인 것 같이 유한개에서 성립하는 패턴을 정당화 절차 없이 무조건 일반화할 때, 오류의 가능성은 더욱 높아지기 때문에 특성을 고려한 패턴의 발견이 필요하다고 볼 수 있다.

3단계 탐구활동지의 1번부터 5번까지 바둑돌을 '○'로 표기하고 그 위에 이진법 상자를 표기한 다음 승패 여부에 따라 구분되는 패턴을 발견하도록 하였다. 이진법의 상자는 각 더미의 개수를 이진수로 나타낼 때, 2^n자릿수가 1이면 바둑돌 2^n개를 포함하는 상자를 표시하고 이를 2^n-상자라고 부른다. 예를 들어 $5=101_{(2)}$이므로 2^2자릿수가 1이므로 $2^2=4$개를 포함하는 2^2-상자를 그림으로 표시하고, 2^0자릿수가 1이므로 2^0=1을 포함하는 2^0-상자를 [그림 Ⅳ-4]와 같이 나타낸다.



[그림 Ⅳ-4] Nim 게임에서의 이진법 2^n-상자 전략

선행자가 승리하는 ①, ③, ⑤와 선행자가 패하는 ②, ④에서 구별되는 패턴이 무엇인지를 발견하라는 질문했으며 학생들은 아래와 같이 응답하였다.

"선행자가 패하는 ②번에서는 1-상자가 2개, 2-상자가 2개이며, ④번에서는 1-상자가 2개, 4-상자가 2개입니다. 즉, 선행자가 패하는 경우에는 1-상자, 2-상자, 4-상자의 개수가 각각 0 또는 2개인 경우입니다. 그렇지 않은 경우에는 선행자가 승리합니다."

6개의 모둠 중에서 F모둠을 제외한 모든 모둠은 어렵지 않게 패턴을 발견하였다. 2012년 탐구활동수업에서는 각 순서쌍을 이진수로 표현한 다음 승패 여부에 따라 구분되는 패턴을

찾으라는 과제를 학생들에게 제시한 결과, 학생 15명 중에서 5명(30%)이 패턴을 발견하였다. 그러나 이번 탐구활동수업에서는 12명 중에서 10명(83.3%)이 패턴을 발견했다. 본 과학영재교육원에서 실시하고 있는 여러 주제의 탐구활동프로그램의 학업성취도 결과를 비교분석해 볼 때, 2017년도의 학생들이 2012년도의 학생들에 비하여 더욱 우수하다고 판단할 근거를 찾지 못하였다. 따라서 이진법 2^n-상자 표기가 학생들의 필승전략의 발견에 큰 도움이 되었다고 볼 수 있다.

학생들은 본인들이 발견한 패턴을 이용하여 탐구활동지의 1번부터 13번까지의 승패 여부를 확인하였으며 다양한 게임을 통하여 상대방에게 각 2^n-상자의 개수가 0 또는 2개가 되도록 바둑돌을 가져가면 승리한다는 사실을 확인할 수 있었다. 이는 상대방에게 Nim sum이 0이 되도록 바둑돌을 남겨주면 승리한다는 것과 동일한 것이다.

B모둠의 학생들은 각 더미의 바둑돌을 2^n-상자로 표시했을 때, 각각 상자의 개수가 0 또는 2개인 경우에, 한 더미에서 바둑돌을 가져가면 그 더미에 있던 어떤 2^n-상자가 없어지기 때문에 없어진 2^n-상자의 개수가 1이 된다는 사실을 설명하였다. 또한 각각의 2^n-상자가 0 또는 2개가 아닌 경우에는 가장 큰 2^n-상자가 있는 더미에서 적당한 바둑돌을 가져가서 각각의 2^n-상자의 개수가 0 또는 2가 되도록 할 수 있음을 설명할 수 있었다. 학생들은 이를 대수적인 방법에 의하여 증명하지는 못하였지만 시각적인 2^n-상자를 이용하여 Nim 게임의 구조를 이해할 수 있었다.

Nim 게임에 대한 구조를 파악한 학생들은 Nim 게임의 normal play의 규칙을 변형한 misere play에서도 쉽게 구조를 파악하여 게임을 할 수 있었다. 웹사이트[2]에서 제공되는 Nim 게임의 misere play에 대하여 수학영재학생들 전체가 한 팀이 되어 컴퓨터 Nim 게임 프로그램과의 게임을 진행하였다. misere play는 normal play와는 다르게 마지막 바둑돌을 가져가는 사람이 패하는 규칙이 적용되기 때문에 normal play보다는 난이도가 높다고 볼 수 있다. 이 컴퓨터 프로그램 게임은 수준이 높아짐에 따라 더미의 수가 증가하고 각 더미의 카운터의 수도 증가하는 형태로 구성되었다.

Level 1에서는 두 더미 대상으로 시작하지만 level 2는 3더미, level 8은 4더미, level 13은 5더미를 대상으로 한 게임이며, level 15에서는 5개 더미에 각각 4, 6, 8, 9, 10개의 카운터가 제시된다.

학생들은 게임 시작한지 30분도 안되어 Nim 게임의 15수준까지 도달할 수 있었다. 물론 어떤 레벨에서는 학생들이 패하는 경우도 있었지만, 시행착오를 거치면서 Nim 게임의 misere play의 구조를 이진법 상자 표기를 통하여 이해할 수 있었으며 후반부에는 압도적으로 승리할 수 있는 전략을 구사할 수 있었다.

[그림 Ⅳ-5] Nim 게임의 misere play

2) http://www.transience.com.au/pearl3.html

V. 결론 및 제언

1. 결론

필승전략이 있는 Nim 게임 탐구활동수업에 참여한 대학부설 과학영재교육원 중등부 심화과정 수학반 학생들은 Nim 게임을 매우 흥미 있게 생각하였다. 학생들이 Nim 게임의 필승전략을 스스로 발견할 수 있도록 난이도를 고려하여 탐구활동수업을 3단계로 구분하였다. 1단계는 한 더미 대상 게임, 2단계는 두 더미 대상 게임, 3단계에는 세 더미 대상 게임인 Nim 게임을 구성하였다. 학생들은 바둑돌을 이용하여 게임 활동을 활발하게 하였으며, 쉬운 단계에서는 짧은 시간의 게임 활동을 통하여 게임의 구조를 파악하였지만 어려운 3단계에서는 게임의 구조를 파악하는 게임 활동의 시간이 비교적 많이 소요되었다. 학생들은 처음에는 귀납적 추론에 의하여 필승전략에 접근하였으나 과정 중에서 게임에 대한 구조가 파악되면 연역적 추론에 의하여 필승전략을 설명하였다. 학생들은 경우의 수, 귀납적 추론 또는 연역적 추론에 의하여 필승전략을 찾으려는 노력을 보였으며 문제의 난이도에 따라 접근 방법은 각각 다르게 나타났다.

첫째, 학생들은 귀납적 추론과 연역적 추론에 의하여 게임의 필승전략을 발견하였으나 귀납적 추론에서는 오류가 발견되었다.

한 더미 대상인 1단계 게임에서, 학생들은 게임의 구조를 비교적 짧은 시간 안에 쉽게 파악하였으며, 연역적 방법에 의하여 게임의 필승전략을 설명하였다. 탐구활동지에는 15개 문제가 제시되어 있었지만 각각의 번호에 따라 모든 게임을 실행한 모둠은 없었으며 몇 번의 게임 활동을 하면서 게임의 구조를 쉽게 파악하고 필승전략을 발견하였다.

두 더미 대상인 2단계 게임에서는 학생들은 귀납적 추론 또는 연역적 추론에 의하여 필승전략을 찾으려는 노력을 보였다. 6개 모둠 중에서 3개의 모둠은 연역적 추론에 의하여 문제를 바르게 해결하였지만 귀납적 추론으로 접근한 2개 모둠이 발견한 패턴에서는 오류가 발견되었으며, 심지어 한 경우로부터 일반화하는 특징을 보이기도 하였다.

세 더미 대상인 3단계 Nim 게임에서는 연역적 추론에 의하여 필승전략을 도출하려고 접근한 학생들은 없었으며, 6개 모둠 중에서 2개 모둠이 귀납적 추론에 의하여 필승전략을 찾기 위한 노력을 하였지만 발견한 패턴에서는 오류가 발견되었다. 한 모둠은 경우의 수에 의하여 승패 여부를 판정하였지만 승패에 따라 구분되는 패턴을 발견하지 못하였다.

<표 V-1> 게임 단계별 학생들의 추론 유형

게임 구분	1 단계 게임	2 단계 게임	3 단계 게임 (Nim 게임)
추론 유형	·연역적 추론 (6개 모둠)	·연역적 추론 (3개 모둠) ·귀납적 추론 (2개 모둠) ※패턴에서 오류 발견	·귀납적 추론 (2개 모둠) ※패턴에서 오류 발견 · 경우의 수 (1개 모둠)

둘째, 한 더미와 두 더미 대상의 게임에서의 필승전략 추론 방법이 Nim 게임의 필승전략의 발견에 의미 있는 영향을 미쳤다고는 볼 수 없다.

3단계 Nim 게임에서 귀납적 추론에 의하여 필승전략을 발견하려고 시도한 모둠은 B, E 모둠으로 조사되었지만 필승전략의 발견에 두 모둠은 실패하였다. 2단계에서 B모둠은 연역적 추론 방법에 의하여 필승전략을 발견하였으며 E모둠은 귀납적 추론에 의하여 필승전략을 발견하는 시도를 하였다. 1, 2단계에서는 '한 번에 1개 이상 3개 이하의 바둑돌을 가져간다.'는 규칙이 있어서 '4의 배수' 또는 '4로 나눈 나머지'라는 개념을 사용했으나 3단계에서는 '한 번에 1개 이상의 바둑돌을 가져간다.'라는 규칙으로 변경되었음에도 불구하고 '4로 나눈 나머지'라는 개념을 계속 적용하여 패턴을 발견하는 특징을 보였다. 1, 2단계에서의 필승전략의 발견 방법이 3단계에 영향을 미쳤지만 오히려 오개념의 원인이 되었다고 볼 수 있다.

이 학생들은 귀납적으로 발견한 패턴을 의심 없이 일반화하려는 경향이 매우 강하였다. 학생들은 귀납적 추론 방법을 문제를 해결하는 중요한 수단으로 생각하고 있었으며 귀납적 추론에 대한 오류 가능성은 전혀 인식하지 못하였다. 본인들이 이미 확정한 승패 여부를 그 이후에 발견한 패턴을 확정하는 단계에서 다시 수정할 정도로 귀납적으로 발견한 패턴을 매우 신뢰하였다.

셋째, 이진법을 시각화한 이진법 상자는 중학교 수학영재들이 Nim 게임에 대한 필승전략을 발견하는데 큰 도움이 되었다.

본 연구자가 소속된 대학부설 과학영재교육원 중등부 심화과정 수학반에서 2012년도에 실시한 Nim 게임 탐구활동수업에서는 '각 자리에서 1의 개수가 0 또는 2개인 경우일 때, 선행자가 패한다.'라는 패턴을 발견한 수학영재들은 30% 정도였으며 패턴을 발견한 학생들 중에서도 그 이유까지 설명한 학생들은 없었다.

2017년도에는 각 더미의 바둑돌을 그림으로 표시하고 그 위에 이진법 상자를 표시하여 승패에 따른 패턴을 발견하도록 한 결과 83.3%의 수학영재들은 '각각의 2^n-상자의 개수가 2 또는 0일 때, 선행자가 패한다.'라는 패턴을 발견하였으며 그 이유까지 설명할 수 있는 학생들로 있었다. 따라서 단순히 바둑돌의 개수를 이진법으로 표시하는 것 보다는 바둑돌을 그림으로 표시하고 그 위에 2^n-상자 표시를 하는 것이 학생들의 발견학습에 긍정적인 영향을 주었다. 게임 규칙을 변경한 Nim 게임의 misere play에서 학생들과 컴퓨터 프로그램과의 게임 대결에서도 학생들은 이진법 상자 전략을 통하여 게임의 구조를 빨리 파악할 수 있었으며 5더미 대상인 15수준까지 도달할 수 있었다.

2. 제언

2015 개정 교육과정에 의하면 '수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다'라고 수학교육의 목적을 기술하고 있고(교육부 2015), Freudenthal은 수학을 현상을 조직하는 수단인 본질로 보고 있으며, 현상에 대한 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적으로 조직하는 것으로부터 수학화가 시작된다고 하였다.

Nim 게임은 2015교육과정의 수학교육의 목적이나 Freudenthal의 수학화 교육에 매우 적

합한 수업의 주제라고 할 수 있다. 학생들은 Nim 게임 활동을 통하여 현상에 대한 관찰, 귀납, 유추 등을 하게 되는 경험을 하게 되며, 발견한 패턴을 정당화하거나 증명하는 과정을 통하여 일반화할 수 있다. 귀납적 방법은 학교수학에서 매우 중요한 방법이지만 발견한 패턴을 정당화하는 절차 없이 무조건 참으로 간주하고 일반화하여 적용할 때, 오류가 발생될 수 있다는 사실을 학생들이 경험을 통하여 인식하도록 해야 한다.

Nim 게임의 탐구활동수업은 Bruner의 EIS 이론의 예로도 설명할 수 있다. 게임 활동을 행동적 표현으로, 2^n-상자를 통하여 필승전략을 표현하는 방법을 영상적 표현으로, Nim sum을 통한 필승전략의 기호화를 상징적 표현으로 설명할 수 있다.

다양한 게임 문화를 창조할 수 있는 학생들의 수학적 능력의 신장을 위하여 Nim 게임뿐만 아니라 수학적 게임에 대한 탐구활동수업이 더욱 중요하다고 볼 수 있다.

참고 문헌

교육부(2015). **수학과 교육과정**, 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

남승인(2011). 귀납 추론을 통한 수학적 원리·법칙 지도 방안에 관한 고찰, **한국초등수학교육학회지, 15**(3) 641-654.

노은환, 강정기, 노문기(2013). 게임 이론을 이용한 사교육 현상에 대한 이론적 접근, **한국학교수학회논문집, 16**(4), 771-796.

도종훈, 허선희(2010). 곱셈과 나눗셈 기호의 생략 규칙 학습을 위한 카드 게임의 고안과 활용, **한국학교수학회논문집, 13**(3), 345-356.

배신영, 송상헌(2015). **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 25**(1), 95-111

송상헌, 정영옥, 임재훈, 신은주, 이향훈(2007). 수학영재들이 Nim 게임 과제에서 만든 문제 만들기 사례 분석. **대한수학교육학회지 수학교육연구, 17**(1) 51-66.

우정호(2005). **수학학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교출판부.

Bouton, Charles L.(1902). *A Game with a Complete Mathematical Theory*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 3, No. 1/4. (1901 – 1902), 35-39.

Donovan, Tristan(2010). *Replay: The history of video games*. Wired.com, June.

Freudenthal, H.(2002). *Revisiting Mathematics Education, China Lecture,* Kluwer Academic Publishere.

A Case Analysis of Inference of Mathematical Gifted Students in the NIM Game

Dal-Won Park[3]

Abstract

Nim games were divided into three stages : one file, two files and three files game, and inquiry activities were conducted for middle school mathematically gif ted students. In the first stage, students easily found a winning strategy throug h deductive reasoning. In the second stage, students found a winning strategy with deductive reasoning or inductive reasoning, but found an error in inductive reasoning. In the third stage, no students found a winning strategy with deducti ve reasoning and errors were found in the induction reasoning process. It is fou nd that the tendency to unconditionally generalize the pattern that is formed in the finite number of cases is the cause of the error. As a result of visually pre senting the binary boxes to students, students were able to easily identify the p attern of victory and defeat, recognize the winning strategy through game activi ties, and some students could reach a stage of justifying the winning strategy.

Key Words : nim game, winning strategy, mathematical game, inductive reasoning, deductive reasoning, binary box

Received November 2, 2017
Revised December 13, 2017
Accepted December 20, 2017

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97A20
3) Kongju National University (dwpark@kongju.ac.kr)