대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 1, 69 ~ 88. Feb 2017

수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진 사례 연구

박 진 형*

본 연구에서는 수학적 모델링 활동이 창의적 사고를 촉진하는 것이 가능한지 이론적으로 타진하고, 가능하다면 어떤 모델링 과제를 설계하여 촉진할 수 있으며, 실제 수학적 모델링 활동에서 창의적 사고는 어떠한 방식으로 드러나는지 확인하는 데 목적을 둔다. 연구 결과, 학생들이 다양한 수학적 모델을 생성하고, 각자 생성한 수학적 모델을 검토하고 개선하면서 수학적 모델링을 진행하는 장면이 확인되었다. 그리고 이러한 수학적 모델링 과정에서 수학적 창의성의 요인들인 유창성, 유연성, 독창성, 정교성의 발현을 확인할 수 있었다.

I. 들어가는 글

수학적 창의성에 대한 논의가 국내외에서 활발하게 이루어지고 있으며(Leikin, 2009; Mann, 2006; Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012; Sriraman, 2005), 학생들의 창의적 사고 촉진 방안을 마련하려는 연구가 다방면으로 이루어지고 있다(Sheffield, 2006; Silver, 1997; Yuan & Sriraman, 2011). 한편으로 수학교육 연구 공동체에서는 수학 교수 학습에 수학적 모델링 활동을 접목해야 한다는 점이 논의되어 왔으며(Kaiser, 2007), 다른 한편으로 수학적 창의성의 함양은 우리 수학 교육의 주된 목표 가운데 하나로 다루어지고 있다(이경화, 2015). 이러한 점에서 국내외에서 지속적으로 그 중요성이 논의되고 있는 수학적 모델링 활동이 우리 수학교육의 주된 목표 가운데 하나인 수학적 창의성 함양과 궤를 나란히 할 수 있는지에 대해 검토하는 연구의 필요성이 제기된다.

수학적 모델링은 주어진 현상이나 문제 상황에 대해 수학적 모델을 세우고 개선하는 과정을 포함한다(Blum & Borromeo Ferri, 2009). 이러한 모델링 과정에서 학생들은 주어진 문제 상황이나 현상에 대해 다양한 수학적 모델을 생성할 수 있으며, 각자 생성한 수학적 모델들의 타당성과 적합성을 분석하고 비교하는 과정을 통하여 독창적인 산출물을 만들어내는 경험을 가질 수 있을 것이라는 점이 이론적으로 논의되어 왔다. 구체적으로, Chan(2008)은 수학적 모델링이 문제 상황을 해석하는 것에서 출발하여 문제의 해결에 이르는 전 과정에서 학생들의 의미 있는 문제해결과 창의적 사고를 경험하게 할 수 있을 것이라는 점을 주장하였다.

수학적 모델링 활동의 교육적 잠재력에 대하여 여러 논의가 이루어져 왔음에도 불구하고, 수학적 모델링 활동을 창의성과 관련지어 학생들의 창의적 사고를 촉진하는 데 활용할 수 있는지에 대해 확인한 연구는 찾아보기 어려운 실정이다. 이에 본 연구에서는 우선 수학적 창의성에

* 명지대학교, demxas@mju.ac.kr

대해 논의한 선행 연구들과 수학적 모델링 활동의 교육적 잠재력에 대해 논의한 선행 연구들을 검토하여, 수학적 모델링 활동을 통한 창의적 사고의 촉진 가능성과, 학생들의 창의적 사고 촉진을 꾀하기 위한 수학적 모델링 과제 설계상의 주안점을 이론적으로 모색한다. 또한, 본 연구에서는 이처럼 이론적으로 도출한 사항들을 준수하는 수학적 모델링 과제를 활용한 수업을 진행하여, 학생들의 수학적 모델링 과정에서 수학적 창의성의 일부 혹은 여러 요인들이 확인되는지, 확인된다면 수학적 모델링 과정에서 창의적인 사고가 어떠한 방식으로 드러나는지에 대해 분석한다.

II. 이론적 배경

이 장에서는 크게 두 가지 사항을 논의한다. 첫째, 수학적 창의성에 대한 선행 연구들의 논의를 검토하여, 본 연구에서 논의하고자 하는 수학적 창의성의 의미를 분명히

한다. 둘째, 수학적 모델링 활동을 수학적 창의성의 관점에서 검토한다. 이를 통하여, 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고의 촉진 가능성을 이론적으로 타진하고, 동시에 학생들의 창의적 사고 촉진을 위한 모델링 과제 설계상의 주안점을 도출한다.

1. 수학적 창의성

수학적 창의성에 대해 여러 정의와 관점들이 제기되어 왔으나, 여전히 이에 대한 합의는 이루어지지 않은 상태이다(Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012; Yuan & Sriraman, 2010). 이러한 여러 논의 가운데에서 Sriraman(2005)은 학교수학에서 추구되는 창의성은 전문 수학자들의 창의성과는 다르게 보는 것이 적절하다는 점을 지적하였다. 그에 따르면, 학교수학에서의 창의성은 “(a) 주어진 문제나, 유추적인 문제에 대하여 독창적이고(이거나) 통찰력 있는 해법을 산출할 수 있는 과정 (b) 낡은 문제를 상상력을 요하는 새로운 각도로 조망할 수 있게 하는 새로운 질문이나 가능성을 형성하는 것(Sriraman, 2005, p. 24),” 으로 정의할 수 있다.

하지만 이러한 넓은 정의로는 학생들의 수학적 창의성을 판별하거나 분석하는 데에 다소 부족하다는 점이 지적되어 왔다(Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012). 이에 선행 연구자들은 수학적 창의성을 이루는 핵심적인 요인들을 도출하고, 이를 활용하여 학생들의 수학적 창의성을 파악하고 이해하고자 시도해왔다. 대표적으로 박진형과 김동원(2016), 이정연과 이경화(2010)는 수학적 창의성의 핵심적인 요인으로 유창성, 유연성, 그리고 독창성을 고려하였다. 구체적으로, 유창성은 산출물의 양적인 풍성함을 나타내고, 유연성은 사고 전략이나 해석의 역동적인 변화를 의미하며, 독창성은 흔하게 찾아보기 어려운 결과물이나 사고 과정을 말한다(Silver, 1997). 이러한 유창성, 유연성, 독창성은 산출물이나 사고 과정이 다양하고 역동적으로 변화하며, 독특한 점을 나타낸다는 점에서 사고의 발산적인 측면으로 논의되어 왔다.

다른 한편으로, 이정연과 이경화(2010)는 사고의 정교성 또한 창의성의 핵심적인 요인임을 주장하였다. 이들에 따르면, 학생들이 각자 생성한 산출물이나 아이디어를 세련하거나 검증하는 과정에서도 좀 더 새롭고 유용한 사고를 경험하거나 산출물을 생성할 수 있다. 이러한 점에서 수학적 창의성을 다룬 국내외 연구들은 독창성, 유연성, 유창성과 함께 정교성을 수학적 창의성 요인으로 고려하고 있다(박만구, 2009). 이에 본 연구에서도 학교수학에서의 창의성에 대한 Sriraman

(2005)의 관점에 기반을 두고, 이를 이루는 네 가지 요인인 유창성, 독창성, 유연성, 정교성과 관련된 수학적 사고가 수학적 모델링 활동에 의해 촉진될 수 있는지 확인하고자 한다.

2. 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진

선행 연구자들은 다양한 방식으로 학생들의 창의적 사고를 촉진하고자 시도해왔다(이정연 & 이경화, 2010; Reiter-Palmon et al., 2009). 특히, 수학교육 연구 공동체에서는 학교수학에서의 수학적 창의성을 수학적인 문제를 해결하는 경험과 관련하여 논의해왔다(Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012; Sheffield, 2006; Silver, 1997; Yuan & Sriraman, 2011). 특히, 해답에 도달하는 경로가 다양하거나, 다양한 해석의 여지가 있어서 해답이 열려 있는 수학적 문제를 활용하는 것이 학생들의 창의적 사고를 촉진할 수 있다는 점이 지적되어 왔다(Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012; Silver, 1997).

수학적 모델은 "실세계 현상에 포함된 대상, 자료, 관계, 조건을 수학적 언어로 번역한 것 (Blum et. al., 2002, p. 153)" 이며, 이러한 수학적 모델을 수립하고 검증하며, 수정하고 개선하는 과정을 '수학적 모델링'이라고 한다(Blum et. al., 2002). 수학적 모델링 활동은 기본적으로 주어진 상황에 대한 수학적 모델을 수립하고 개선하는 과정으로 이루어진다. Chan(2008)은 학생들이 수학적 모델링 활동을 통해 각자 나름의 수학적 모델을 생성하고, 이를 개선하는 과정에서 발산적인 사고를 경험할 수 있을 것으로 기대하였다. 수학적 모델링 활동은 학생들이 실세계의 불확실성을 바탕으로 한 열린 문제 상황을 대면하게 하며(Kaiser, 2007), 학생들로 하여금 주어진 상황을 설명할 수 있는 다양한 수학적 모델을 발산적으로 생성하게 할 수 있으므로(Blum & Borromeo Ferri, 2009), 이는 사고의 풍성함 혹은 산출물의 양과 관련된 창의성 요인인 유창성과 관련된다. 이러한 점에서 수학적 모델을 다양하게 생성하도록 하는 것은 창의성의 여러 요인 가운데 우선 유창성과 관련된 사고를 촉진할 수 있을 것으로 예상된다.

수학적 창의성에 대한 여러 선행 연구들에서 사고의 유연성의 중요성 또한 강조되어왔다 (Krutetskii, 1976). 이와 관련하여, 선행 연구자들은 학생들이 양적으로 풍성한 산출물을 생성하는 것뿐만 아니라, 질적으로 다양한 유형의 산출물을 생성하도록 할 필요성을 제기해왔다(Leikin, 2009). Chamberlin & Moon (2005)은 수학적 모델링을 활용한 실세계 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 독창적이면서도 유용한 해법을 다양한 유형으로 생성할 수 있을 것이라는 점을 주장하였다. 이들은 수학적 모델링 활동이 학생들로 하여금 현실 상황을 다양한 방식으로 해석할 수 있는 여지를 제공할 수 있으며, 이러한 점에서 모델링 활동이 학생들의 창의적 사고를 촉진할 수 있을 것이라는 점을 주장하였다. 특히, 박진형과 김동원(2016)은 학생들이 다양한 변이 가능성을 고려하여 산출물을 생성하도록 하는 것이 유연성과 독창성을 촉진할 수 있다는 점을 지적하였다. 즉, 다양한 차원의 변인들을 고려하여 여러 유형의 산출물을 생성하도록 하는 것이 학생들로 하여금 서로 다른 범주의 산출물과 사고를 넘나드는 유연성을 경험하게 할 수 있으며, 또한 이처럼 넓은 범위의 산출물 생성 과정에서 독창적인 사고 역시 기대할 수 있다는 것이다 (박진형 & 김동원, 2016). 이러한 논의에 비추어 수학적 모델링은 수학적 모델의 생성과 수정 및 개선을 반복적으로 수행하면서 이루어지며 (Galbraith & Stillman, 2006), 학생들이 모델 수립에 영향을 주는 여러 변인들을 통제하면서 다양

한 범주의 수학적 모델 생성을 경험하게 할 수 있다는 점에서(Lesh, Cramer, Doerr, Post & Zawojewski, 2003) 유연하고 독창적인 사고의 촉진 가능성을 갖는 것으로 판단된다.

본 연구에서는 특히 수학적 모델링 과정에서 학생들로 하여금 표현의 다양성을 추구하도록 하는 것이 유연하고 독창적인 사고의 경험을 촉진할 수 있을 것으로 기대하였다. 구체적으로, Sheffield (2006)는 학생들이 주어진 문제 상황을 기하적으로, 대수적으로, 혹은 시각적으로 다양하게 나타낼 수 있는 과제가 창의적 사고를 촉진할 수 있다는 점을 지적하였다. 또한, Otte (2011)는 학생들이 주어진 문제 상황에 대해 다양한 표현을 생성하도록 함으로써 각자 나름의 방식으로 표현을 생성하고 해석하도록 할 수 있으며, 이는 독창적인 사고를 촉진할 수 있다는 점을 지적하였다. 특히, Lesh, Cramer, Doerr, Post & Zawojewski(2003)은 수학적 모델링의 과정에서 학생들이 주어진 문제 상황을 다양하게 표현하게 하고, 이러한 표현 방식의 변화를 촉진하는 것이 주어진 문제 상황에 대한 관점의 전환을 지원할 수 있을 것이라는 점을 지적하였다. 이러한 점에서 본 연구에서는 학생들이 주어진 문제 상황을 다양한 방식으로 표현할 수 있도록 하는 것이 학생들의 사고의 유연성과 독창성을 촉진할 수 있는 한 방안일 것으로 기대하였다. 특히 학생들에게 공학도구 환경을 제공하는 것은 수학적 모델링 과정에서 주어진 문제 상황에 대한 시각화와, 시각화된 자료의 표현 변환을 촉진할 수 있다는 점이 알려져 있으므로(Galbraith & Stillman, 2006), 학생들에게 공학 환경을 제공하는 것이 모델링에 의한 창의적 사고 촉진에 도움이 될 것으로 판단하였다.

이정연과 이경화(2010)는 정당화 활동이 학생들의 사고의 정교성을 꾀할 수 있다는 점을 지적하였다. 이들에 따르면, 학생들은 자신들의 수학적 활동을 정당화하면서 각기 생성한 다양한 산출물과 자신들의 사고 과정을 정돈하고 정교화하며 세련할 수 있었다. 뿐만 아니라, 김동원과 박진형(2016)은 정당화 활동이 사고의 유연성을 촉진하여 독창적인 산출물 생성에도 기여할 수 있음을 보였다. 이러한 점에서 본 연구에서도 학생들이 각자 생성한 수학적 모델의 적절성과 타당성을 정당화하도록 함으로써 사고 과정과 수학적 활동을 반성하고 사고 과정의 정교화를 촉진할 수 있으며, 또한 사고의 유연성과 독창성도 촉진 가능할 것으로 기대하였다.

요약하면, 본 연구에서는 창의적 사고 촉진을 위한 모델링 과제 설계 방안을 다음과 같이 도출하였다. 첫째, 학생들이 다양한 수학적 모델을 생성하도록 과제를 설계하는 것이 학생들의 유창한 사고를 촉진하는 데 도움이 될 것으로 판단된다. Lesh, Middleton, Caylor & Gupta(2008)는 단일한 수학적 모델이 수립되는 상황을 학생들에게 제시하기보다는, 풍성한 자료와 정보로부터 여러 유형의 수학적 모델이 수립될 수 있는 상황을 학생들에게 제공하는 것이 학생들로 하여금 다양한 수학적 내용 지식을 활용하여 발산적으로 여러 유형의 수학적 모델을 수립하는 경험을 제공할 수 있다는 점을 지적하였다. 이에 본 연구에서는 최소한의 자료나 정보로부터 단일한 수학적 모델을 수립하게 하는 닫힌 과제를 설계하기보다는, 학생들이 풍성한 자료와 정보들로부터 다양한 수학적 모델을 수립하고 검토할 수 있는 문제 상황을 기반으로 한 수학적 모델링 과제를 설계하는 것이 학생들의 창의적 사고 촉진에 적합할 것으로 판단하였다.

둘째, 사고의 유연성과 독창성을 촉진하기 위하여 학생들이 문제 상황을 다양한 방식으로 표현할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 이는 한편으로 주어진 문제 상황을 다양하게 표현하는 데 활용할 수 있는 공학도구 등의 교수 환경

을 학생들에게 제공해야 한다는 점을 말하며 (Galbraith & Stillman, 2006), 다른 한편으로 학생들에게 제시될 실세계 현상이 다양한 방식으로의 표상 가능성과 해석 가능성을 내포해야 한다는 점을 말한다(Chamberlin & Moon, 2005).

셋째, 정교성의 촉진을 위하여 모델링 과제 설계에서 학생들로 하여금 각자 생성한 수학적 모델을 검토하고 정당화하는 활동을 포함할 필요가 있다. 이 과정은 한편으로 학생들이 생성한 수학적 모델의 타당성을 점검하도록 함으로써 사고의 정교성을 촉진하며(이정연 & 이경화, 2010), 다른 한편으로 각자 고려한 수학적 모델의 타당성을 검토하면서 적절하지 않을 경우 이를 개선하도록 하여 사고의 유연성이나 독창성의 촉진에도 기여할 수 있을 것으로 기대된다 (김동원 & 박진형, 2016).

III. 연구 방법

본 연구의 목적은 학생들의 수학적 모델링 활동에서 창의적 사고가 확인되는지, 확인된다면 창의적 사고가 어떻게 일어나는지를 확인하는 데 있다. 본 연구에서는 사례 연구 방법을 사용하였다. 연구진은 사례 연구의 목적이 연구자가 이해하고자 하는 사례나 현상을 심층적으로 분석하여 최대한의 논점과 시사점 도출에 있다는 점(Stake, 1995)에서 본 연구의 목적에 부합하는 것으로 판단하였다. 본 연구에서는 다음과 같은 절차로 연구 참여자를 선정하고, 사례에 대한 자료를 수집하여 분석하였다.

1. 연구 참여자

Stake(1995)에 의하면, 사례 연구는 단일한 사례로부터 최대한의 논점을 이끌어내는 데 목적을 둔다. 이러한 점에서 이 연구에서는 비교적 장시간의 탐구적인 활동에 익숙한 연구 참여자를 선정하는 것이 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진의 가능성을 확인하고, 이 과정에 대한 심층적인 이해를 시도하는 본 연구의 목적에 적합할 것으로 판단하였다.

이에 본 연구에서는 학교 정규과정 이외에 별도의 탐구 중심 수업에 참여하고 있는 학생들을 대상으로 수업을 실시하였다. 연구 참여자는 서울시에 소재한 대학부설 과학영재교육원에서 6개월간 한 학급에서 수업을 받아온 중학교 2학년 학생 15명으로, 상위권의 수학적 성취를 보여주었으며 자신의 탐구 과정을 상세하게 표현하는 데 익숙한 학생들이었다. 본 연구에서 학생들의 탐구 활동은 개별적으로 3시간 동안 이루어졌다. 이 연구에서는 연구에 참여한 학생들을 S1~S15로 부르기로 하였다.

연구 참여자들은 과학영재교육원에서 다양한 형식과 내용의 수학 수업을 경험했기 때문에 새로운 내용을 다루는 수학수업에 거부감이 없었다. 이 학생들은 고등학교에서 다루어지는 초등함수들의 정의와 기본 성질들을 이미 개별적으로 학습하였음을 담당 학급 관찰지도 교사와의 면담을 통해 확인할 수 있었다.

2. 자료의 수집과 분석

본 연구에서는 학생들의 수학적 모델링 활동을 분석하기 위하여 다음과 같은 절차로 연구를 수행하였다. 우선 수학적 모델링 과제를 설계하고, 세 시간의 모델링 수업을 실시하였으며, 학생들에게는 스프레드시트 환경을 제공하였다. 또한 학생들이 공학 도구를 기계적으로 사용하지 않도록(Guin & Trouche, 1999) 수업 중에 활동지에도 스프레드시트 환경을 활용한 탐구 과정을 자세히 설명하도록 하였으며, 생각을 수정할 필

요가 있을 때는 앞서 기록한 내용을 지우지 않도록 하였다.

또한 본 연구에서는 학생들의 모델링 활동 및 이 과정에서 드러나는 창의적인 사고와 학생들이 활동지에 기록한 다양한 표상 등과의 밀접한 관련성을 가정하고, 연구진의 현장노트, 학생들의 탐구 과정을 기록한 영상 자료와 녹취록과 함께, 학생들의 활동지에 기록된 사항들을 분석하였다. 연구진은 이러한 다면적인 자료 수집이 본 연구의 내적인 타당도와 신뢰도를 높일 수 있을 것으로 판단하였다(Stake, 1995). 이와 더불어, 학생들의 스프레드시트 사용과 수학적 사고에도 관련성이 있을 것으로 가정하고(Artigue, 2002; Guin & Trouche, 1999), 모델링 활동을 수행한 스프레드시트 파일도 함께 분석하였다.

본 연구에서는 위와 같은 절차에 따라 수집한 자료들을 분석하여, 학생들의 수학적 모델링 활동에서 창의적 사고의 요인들인 유창성, 유연성, 정교성, 독창성이 드러나는지의 여부를 확인하는데 초점을 두었다. 본 연구는 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진 가능성을 확인하고 이는 어떻게 일어나는지를 확인하는 데 목적을 두고 있으므로, 연구진은 학생들이 유창하게 다양한 수학적 모델을 생성하는지, 앞서 생성한 수학적 모델로부터 새로운 범주의 수학적 모델을 생성하는 과정에서 사고의 유연성이 드러나는지, 각자 생성한 수학적 모델을 세련하고 그 적절성을 검토하는 사고의 정교성이 드러나는지, 그리고 학생들이 각자 수학적 모델을 생성하는 과정 혹은 생성한 수학적 모델이 독창적인지를 확인함으로써 수학적 모델링 활동이 창의적 사고와 어떻게 관련되는지를 확인할 수 있을 것으로 판단하였다.

우선 연구진은 학생들이 생성한 수학적 모델들과 수학적 모델의 생성 과정을 확인하였다. 다음으로 이들을 범주화하고, 범주들 간의 관계로부터 각 장면에서 드러난 수학적 모델들과 학생들의 수학적 모델링 과정, 창의적 사고 사이의 관련성을 확인하였다. 또한 본 연구에서는 수학적 모델링 활동에서 드러난 학생들의 창의적 사고에 대한 연구자 해석의 내적 타당도와 신뢰도를 높이기 위하여 동료 점검(Creswell, 2009)을 활용하였다. 동료 점검은 학생들이 생성한 수학적 모델들과 창의적 사고 사이의 관련성에 대한 해석을 확증하고, 동시에 부가적인 해석을 얻기 위하여 다른 연구자들에게 해석 결과에 대한 의견을 구하는 방식으로 이루어졌다.

3. 수학적 모델링 과제

학생들에게 주어진 과제는 적절한 온도와 농도를 만족하는 아이스커피를 만들기 위해 필요한 얼음의 양을 구하는 것이다. 이 과제는 얼음을 넣지 않은 커피용액의 온도 변화를 측정한 자료에 대한 수학적 모델을 수립하는 단계, 얼음이 녹는 속도의 함수를 이용하여 녹은 얼음의 양과 커피용액의 농도를 시간에 따라 구하는 단계. 그리고 이 두 단계의 결과를 종합하여 시간에 따른 아이스커피의 온도와 농도를 기술하는 모델을 세우는 단계로 이루어진다. 이러한 세 단계의 모델링 활동 가운데 본 연구에서는 얼음을 넣지 않은 커피용액의 온도 변화를 측정한 자료에 대한 수학적 모델을 수립하는 활동에 초점을 둔다. 이어지는 두 단계는 수학적 창의성의 촉진보다는 미적분에 대한 탐구나 범교과 탐구 소재에 좀 더 초점을 두고 설계되었기 때문이다. 수업에서 사용한 수학적 모델링 과제는 다음과 같다.

1. 다음은 실온에서 커피용액의 온도 변화를 10초 간격으로 측정한 자료이다. 아래에 주어진 자료를 바탕으로 커피용액의 온도를 구할 수 있는 함수를 가능한 한 많이 찾아보고 그 과정을 설명하시오. (스프레드시트를 사용한 경우, 그

과정과 내용을 적으시오.)

시간(초)	온도(℃)
0	61.4
10	60.5
20	59.4
30	58.5
40	57.5
50	55.8
60	55.7
70	55.0
80	54.6
90	54.4
100	54.3
110	54.4
120	54.3
130	54.0
140	54.4
150	53.2

시간(초)	온도(℃)
160	53.1
170	52.6
180	52.4
190	52.2
200	52.2
210	51.6
220	51.2
230	50.9
240	50.7
250	50.6
260	50.3
270	50.1
280	49.7
290	49.5
300	49.2

2. 1번에서 구한 함수들의 그래프를 각각 그려보고, 이를 이용하여 1번에서 각 함수들을 구한 방법들을 비교하시오.

3. 2번에서 각 함수들을 구한 방법들을 비교해보았다. 이를 바탕으로 시간에 따른 커피용액의 온도를 구할 수 있는 함수를 하나만 구하고 그 이유를 자세히 설명하시오.

위 과제에서 학생들은 주어진 자료의 전체 혹은 일부를 이용하여 다양한 함수로 상황에 대한 수학적 모델을 수립할 수 있다. 이러한 점에서 연구진은 위 과제가 학생들로 다양한 수학적 모델을 발산적으로 생성하게 할 수 있는 기회를 제공하며, 이는 동시에 사고의 유창성도 촉진할 수 있을 것으로 기대하였다.

또한 연구진은 앞서 이론적으로 검토한 것과 같이 스프레드시트 환경을 제공하여 학생들이 주어진 자료를 다양한 방식으로 표현할 수 있는 기회를 제공하였다. 뿐만 아니라 두 번째 과제에서는 명시적으로 학생들로 하여금 각자 생성한 수학적 모델을 그래프로 표현하도록 하여 앞서 첫 번째 과제에서 다양한 표현을 활용하지 못한 학생들도 수학적 모델링 과정을 시각화할 수 있는 기회를 제공하였다. 이처럼 본 연구에서는 수학적 모델링 활동에서 학생들이 표현의 다양성을 추구하도록 함으로써 발산적으로 다양한 모델을 수립함과 더불어 수학적 모델의 유의미한 변이를 경험하고, 동시에 사고의 유연성을 경험할 수 있을 것으로 기대하였다. 그리고 이처럼 공학 환경에서 표현의 다양성을 추구하도록 한 점은 앞서 Otte(2011)가 지적한 바와 같이 독창적인 사고 역시 촉진할 수 있을 것으로 고려하였다.

이와 함께 연구진은 학생들로 하여금 각 과제를 해결하는 과정에서 자신들의 수학적 모델링 활동을 설명하고 정당화하게 하였으며, 마지막 단계에서는 다양한 모델 가운데 최적의 수학적 모델을 선택하게 하였다. 이는 앞서 이론적으로 검토한 바와 같이 한편으로 학생들이 사고의 정교성을 꾀하도록 함으로써 창의성의 한 요소로써 정교성을 경험하게 하기 위함이며, 다른 한편으로 정당화와 정교성을 꾀하는 과정에서 독창적이고 새로운 아이디어의 생성을 촉진하기 위함이었다.

Ⅳ. 연구결과

연구 결과, 학생들이 수학적 모델링 과정에서 유창성, 유연성, 정교성, 독창성과 같은 창의성의 요인들과 관련된 수학적 탐구에 참여하는 장면이 확인되었다. 이 장에서는 학생들의 모델링 활동을 시간 순으로 크게 세 절로 나누어 살펴보고자 한다. 첫 번째 절에서는 학생들이 주어진 문제 상황에 대한 초기 모델을 수립하는 과정을 다루며, 이 과정에서 드러난 창의적인 사고를 확

인한다. 두 번째 절에서는 학생들이 처음 생성한 수학적 모델을 수정하거나 개선하는 장면에서 드러난 창의적 사고를 확인한다. 세 번째 절에서는 학생들이 최종적으로 주어진 자료를 기술하기에 가장 적합한 수학적 모델을 선택하는 과정에서 드러나는 창의적 사고를 확인한다.

1. 초기 모델 구축

학생들은 각기 나름의 방식으로 주어진 자료를 분석하고 이를 나타내는 수학적 모델을 수립하고자 시도하였다. 학생들의 초기 모델 수립 방식은 크게 다음과 같은 두 가지 유형으로 범주화되었다.

<표 IV-1> 학생들의 초기 모델 수립 방식

	초기 모델 수립 방식1	초기 모델 수립 방식2
학생 수	5	10

첫 번째 초기 모델 수립 방식을 취한 학생들은 주어진 31개의 모든 자료를 활용하여 수학적 모델을 수립하고자 시도하였다. 구체적으로, 이러한 접근을 시도한 다섯 명의 학생들 가운데 한 명의 학생은 31개의 자료를 이용하여 30차 함수의 식을 수립하고자 시도하였으며([그림 IV-1]), 나머지 네 명의 학생들은 수열의 일반항을 구하는 방식과 유사하게 주어진 31개 온도들 사이의 차를 구하면서 수치적인 패턴을 찾고자 시도하였다([그림 IV-2]).

정의역은 0, 10, 20, ··· 300의 31개

→ f(x)는 30차 이하의 다항식일 것이다.

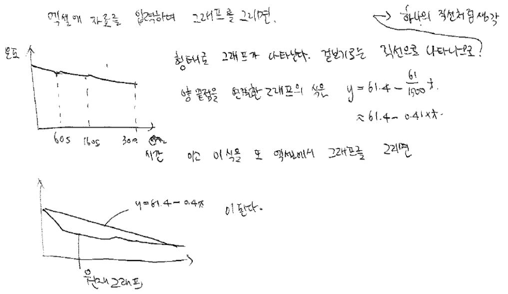
[그림 IV-1] 학생 S1 활동지

	A	B	C	D
1	0	61.4		
2	10	60.5	0.9	
3	20	59.4	1.1	0.2
4	30	58.5	0.9	-0.2
5	40	57.5	1	0.1
6	50	55.8	1.7	0.7
7	60	55.7	0.1	-1.6
8	70	55	0.7	0.6
9	80	54.6	0.4	-0.3
10	90	54.4	0.2	-0.2
11	100	54.3	0.1	-0.1
12	110	54.3	0	-0.1
13	120	54.4	-0.1	-0.1
14	130	54.3	0.1	0.2
15	140	54	0.3	0.2
16	150	54.4	-0.4	-0.7
17	160	53.2	1.2	1.6
18	170	53.1	0.1	-1.1
19	180	52.6	0.5	0.4
20	190	52.4	0.2	-0.3
21	200	52.2	0.2	0
22	210	51.6	0.6	0.4
23	220	51.2	0.4	-0.2
24	230	50.9	0.3	-0.1
25	240	50.7	0.2	-0.1
26	250	50.6	0.1	-0.1
27	260	50.3	0.3	0.2
28	270	50.1	0.2	-0.1
29	280	49.7	0.4	0.2
30	290	49.5	0.2	-0.2
31	300	49.2	0.3	0.1

[그림 IV-2] 학생 S4의 스프레드시트 화면

위 [그림 IV-2]에서 A열은 시간, B열은 각 시간에 따른 온도를 나타내며, C열은 B열의 이웃한 두 값 사이의 차를, D열은 C열의 이웃한 두 값 사이의 차를 나타낸다.

두 번째 유형의 학생들은 전체 자료 가운데 일부 자료를 활용하여 수학적 모델을 수립하고자 시도하였다. 이 학생들은 주어진 자료의 초기값과 최종 값 등의 부분적인 자료를 이용하여 수학적 모델을 수립하고자 시도하였다.



[그림 Ⅳ-3] 학생 S10의 활동지

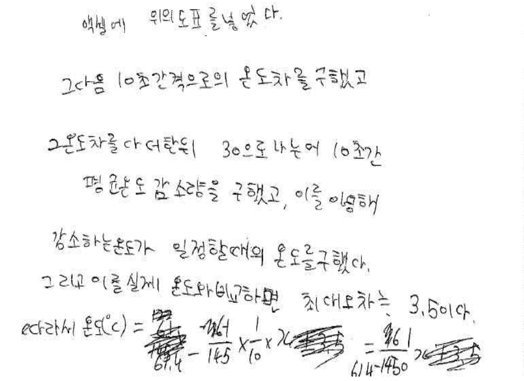
위 [그림 IV-3]에서 학생 S10은 주어진 자료의 초기 값과 최종 값을 활용하여 일차함수 모델을 수립하였다. 학생 S10은 전체 자료를 그래프로 나타내고 이 그래프를 바탕으로 전반적인 자료의 분포가 선형적이라는 점을 포착하여 일차함수 모델을 수립하였다. 이와 유사하게 열 명의 학생들은 전체 자료 가운데 일부 자료를 활용하여 수학적 모델을 수립하였다. 이 학생들이 각기 어떤 근거로 어떠한 수학적 모델을 수립하였는지는 학생들이 수립한 수학적 모델이 구체적으로 어떤 함수식들로 이루어졌는지를 살펴보는 과정에서 좀 더 상세히 확인하고자 한다. 수학적 모델을 수립하는 데 활용한 함수에 따라 학생들의 수학적 모델을 범주화하면 다음과 같다.

<표 IV-2> 학생들이 생성한 수학적 모델의 함수 유형

	함수 유형 1	함수 유형 2	함수 유형 3	함수 유형 4	못구함
학생 수	7	4	2	1	1

학생들이 생성한 수학적 모델의 첫 번째 함수 유형은 일차함수이다. 두 번째 함수유형은 이차 이상의 다항함수이다. 세 번째 함수 유형은 로그함수, 네 번째 함수 유형은 유리함수이다.

일차함수를 수립한 일곱 명의 학생들 가운데 여섯 명의 학생들은 주어진 자료의 처음 값과 마지막 값을 이용하여 일차함수 식을 도출하였다. 나머지 한 명의 학생은 전체 자료를 활용하여 일차함수 식을 산출하였다. 이 학생은 주어진 온도 값들 사이의 차를 모두 구하여 온도 변화의 평균을 산출한 후 이 값을 기울기로 갖는 일차함수 식을 수학적 모델로 수립하였다. 이 과정에서 초기 온도 값을 절편으로 활용하여 일차함수 식을 완성하였다([그림 IV-4]).

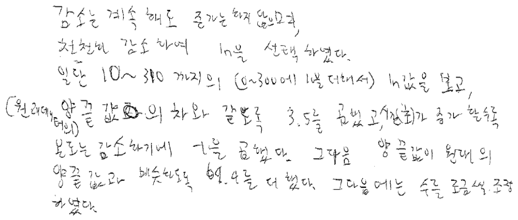


[그림 IV-4] 학생 S5의 활동지

이차 이상의 다항함수 모델을 수립한 학생들 중에는 앞서 확인한 것과 같이 30차 함수로 수학적 모델을 수립하고자 한 학생이 한 명 있었다([그림 IV-1]). 또한, 이웃한 온도 값들 사이의 차와 계차를 활용하여 마치 계차수열을 활용하여 수열의 일반항을 구하는 것과 유사한 방식으로 이차함수 모델을 수립한 학생이 두 명 있었다. 마지막으로, 주어진 자료를 나타내는 꺾은선 그래프의 개형이 전반적으로 이차함수와 유사하다는 점을 근거로 이차함수 모델을 수립한 학생도 있었다. 이 학생은 초기 값을 절편으로, 최종 값을 최솟값으로 갖는 이차함수 모델을 수립하였다.

세 번째 유형의 모델을 활용한 학생 가운데 한 명은 주어진 자료에 대한 꺾은선 그래프의

개형을 바탕으로, 이와 그래프 개형이 유사하다는 점에서 로그함수 모델을 수립하였다. 로그함수 모델을 수립한 다른 한 명의 학생과, 네 번째 유형인 유리함수를 활용한 학생은 각기 실세계 맥락에 비추어 로그함수와 유리함수를 채택하였다. 구체적으로, 학생 S9는 실세계 맥락에 비추어 다음과 같은 방식으로 로그함수 모델을 수립하였다.


감소는 계속 해도 증가는 하지 않으므로,
천천히 감소하여 ln을 선택하였다.
일단 10~310 까지의 (0~300에 10을 더해서) ln값을 보고,
(원래에 데이터의) 양 끝 값의 차와 같도록 3.5를 곱했고, 시간(회)가 증가할수록 농도는 감소하기에 -를 곱했다. 그다음 양 끝값이 원래의 양끝 값과 비슷하도록 64.4를 더했다. 그다음에는 수를 조금씩 조정하였다.

[그림 IV-5] 학생 S9의 활동지

학생들의 초기 모델 수립 과정을 요약하면, 우선 학생들이 생성한 수학적 모델들은 주어진 자료를 모두 활용하는지, 아니면 일부 자료를 활용하는지에 따라 크게 두 가지 유형으로 범주화할 수 있었다. 그리고 학생들이 생성한 수학적 모델에서 활용된 함수의 종류에 따라 네 가지 유형으로 학생들의 수학적 모델을 범주화할 수 있었으며, 이를 통하여 학생들이 어떠한 방식으로 초기 모델을 구축하였는지를 확인할 수 있었다.

학생들의 모델링 과정에서 창의성의 요인들 가운데 독창성 및 유연성과 관련된 학생들의 반응들이 확인되었다. 우선, 다른 학생들에 비해 비교적 주어진 실세계 맥락에 초점을 둔 수학적 모델을 수립한 두 명의 학생들이 확인되었으며, 이 두 학생들의 모델링 과정에서 사고의 독창성이 확인되었다. 독창성이라는 창의성 요인은 상대적으로 덜 제기되는 답안이나 적은 빈도수와 관련지어 논의되어 왔다(이경화, 2015). 또한, 수학적 모델링은 실세계 현상에 비추어 수학적 모델을 수립하고 개선하는 것이 적절하다는 점이 강조되어 왔다(Blum & Borromeo Ferri, 2009). 이러한 점에서 실세계 맥락을 고려하여 유리함수와 로그함수 모델을 수립한 두 학생들은 우선 다른 학생들에 비해 비교적 독특한 함수를 활용하였다는 점에서 상대적으로 독창적인 수학적 모델을 생성한 것으로 고려할 수 있다. 뿐만 아니라, 이 학생들의 수학적 모델은 실세계 맥락을 충분히 고려하여 수립되었다는 점에서 다른 학생들의 수학적 모델에 비해 그 질적인 수준 또한 다르다고 볼 수 있다. 이러한 점에서 이 두 학생의 수학적 모델링 활동은 다른 학생들이 비해 좀 더 독창적이라고 할 수 있다.

또한 일차함수 모델을 수립한 대부분의 학생들은 주어진 수치화된 자료를 그래프로 표현하고 이 그래프를 바탕으로 수학적 모델을 수립하였다는 점에서 수학적 표현의 전환(conversion)을 수행한 것으로 볼 수 있다([그림 IV-3]). Duval (2006)은 수치적이거나 대수적인 표현을 그래프나 다이어그램과 같은 표현 체계로 변환하는 것을 표현 전환으로 고려하였으며, 표현 전환이 수학적 의미의 생성에 핵심적으로 기여한다는 점을 강조하였다. 사고나 전략의 변화와 관련된 창의성 요인은 유연성이며, 이러한 점에서 그래프를 활용하여 일차함수 모델을 생성한 학생들은 전체 자료를 단순히 수열처럼 수치적으로 다룬 학생들과 비교하였을 때 모델링 과정과 결과에서 차이를 보인다. 특히, 이정연과 이경화(2010)는 주어진 상황을 새로운 방식으로 표현하면서 서로 다른 표현 방식들 사이의 관련성을 고려하는 것이 창의성의 요인들 가운데 사고의 유연성과 관련됨을 지적한 바 있다. 이러한 점에서 주어진 수치적인 자료들을 그래프로 나타내고 이를 활용하여 수학적 모델을 수립한 학생들에게서 사고의 유연성이 확인되었다고 할 수 있다. 이어지는 절에서는 학생들이 각자 생성한 초기 모델들을 수정하고 개선하는 과정에서 드러나는

창의적 사고를 확인한다.

2. 모델 수정 및 개선

학생들은 첫 번째 수학적 모델을 수립한 후 이 모델들을 학생들은 다양한 방식으로 수정하고 개선하였다. 이 절에서는 우선 첫 번째 절에서 확인한 네 가지 함수 유형에 따라 학생들의 모델 수정 방식을 확인하도록 한다.

우선 첫 번째 함수 유형인 일차함수 모델을 수립하였던 학생들(총 7명) 가운데 여섯 명의 학생들은 전체 구간(0초~300초)을 두 개 이상의 구간으로 나누고 각 구간별로 다르게 정의된 일차함수를 활용하여 수학적 모델을 개선하였다. 나머지 한 명의 학생은 단일하게 표현된 일차함수 모델을 유지하였으나, 그 식은 수정하였다. 이 학생은 특이점을 제외하는 방식을 취하였다. 구체적으로, 초기 여섯 개의 데이터를 제외하고 나머지 데이터를 이용하여 단일한 식으로 표현된 일차함수 모델을 수립하였다.

두 번째 함수 유형인 이차 이상의 다항함수 모델을 수립하였던 학생들(총 4명) 가운데 30차 함수 모델을 수립하고자 시도한 한 명의 학생은 일차함수로 수학적 모델을 변경하였다. 이 학생은 앞서 첫 번째 절에서 일차함수 모델을 수립한 다른 학생들의 탐구 과정과 유사하게 그래프를 활용하여 전체 자료가 선형적이라는 점을 포착하고 자신의 모델을 일차함수 모델로 수정하였다. 다른 한편으로, 앞서 2차 이상의 다항함수로 된 초기 모델을 수립하였던 나머지 학생들은 그대로 동일한 차수의 다항식 모델을 유지하였다. 이 학생들은 탐구 과정에서 일차함수 모델도 수립하여 앞서 수립한 초기 모델들과 비교하였으나, 차수가 높은 함수를 사용할수록 주어진 자료와 수학적 모델 사이의 오차가 더 작다는 점을 확인하였고 이에 기존의 차수를 유지하는 다항식 모델을 고수하였다. 다만 이 학생들 가운데 한 명의 학생은 실세계 맥락에 비추어 이차함수 모델이 적절할 것으로 판단하였다. 이 학생은 적어도 주어진 300초 동안은 온도가 감소하며 감소하는 폭이 서서히 줄어들고 있기 때문에, 일차함수에 비하여 이차함수가 주어진 상황을 나타내는 데 더 적합할 것으로 판단하였다.

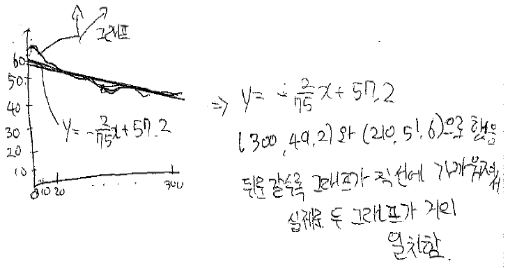
세 번째 함수 유형인 로그함수 모델을 수립하였던 학생들(총 2명) 가운데 1명의 학생은 전체 자료를 그래프로 나타내고 그 분포에 근거하여 수학적 모델을 일차함수로 변경하였다. 다른 한편으로, 실세계 맥락에 근거하여 로그함수 모델을 수립하였던 나머지 한 학생은 그대로 로그함수를 고수하였다. 이 학생은 일차함수 모델도 수립하였으나, 주어진 현상에 적합하지 않다는 점에서 이 모델을 기각하였다. 네 번째 유형인 유리함수 모델을 수립하였던 학생도 실세계 맥락에 근거하여 자신의 유리함수 모델을 유지하였다. 이상의 학생들의 모델 수정 방식은 크게 네 가지로 범주화할 수 있었다.

<표 IV-3> 학생들의 모델 수정 방식

	모델 수정방식 1	모델 수정방식 2	모델 수정방식 3
학생 수	5	7	3

학생들의 첫 번째 모델 수정 방식은 그래프 개형 맞추기이다. 두 번째 모델 수정 방식은 오차 그래프 활용이며, 세 번째 모델 수정 방식은 실세계 맥락 고려하기이다.

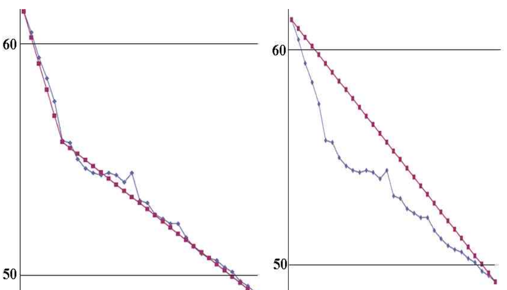
그래프 개형을 활용하여 수학적 모델을 수정한 학생들은 주어진 자료의 꺾은 선 그래프와 자신이 생성한 수학적 모델의 그래프를 동일한 좌표평면에 그리고, 이 두 그래프가 일치하는 정도를 확인하면서 수학적 모델을 검토하고 수정하였다.



[그림 IV-6] 학생 S3의 활동지

위 그림에서 학생 S3은 일차함수 모델을 수립하였다. 이러한 일차함수 모델을 수립하는 과정에서 주요한 부분 가운데 하나는 31개의 자료 가운데 일차함수 식을 수립하는 데 활용할 두 개의 자료를 선택하는 데 있었다. 이를 해결하기 위하여 S3은 그래프가 주어진 자료의 꺾은 선 그래프와 가장 유사한 식을 도출하려고 시도하였다.

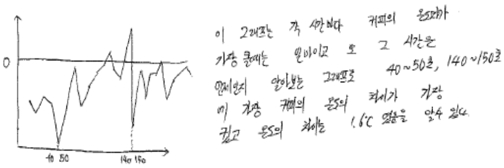
이 과정에서 학생 S3은 주어진 그래프를 좀 더 확대하여 어떠한 지점에서 오차가 얼마나 발생하는지에 대해 좀 더 면밀하게 분석하고자 시도하였다. 다음 [그림 IV-7]은 스프레드시트에서 [그림 IV-6]의 그래프의 세로 축 간격을 조정하여 확대하여 그린 그래프들이다.



[그림 IV-7] 학생 S3의 스프레드시트 화면

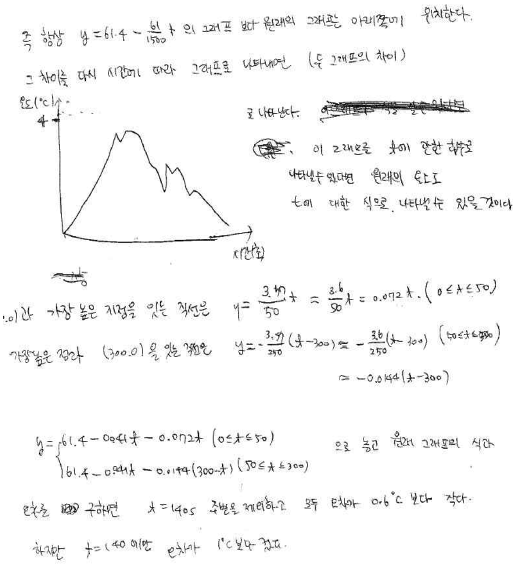
위 [그림 IV-7]에서 오른쪽 그래프는 양 끝점의 자료를 이어서 생성한 일차함수 모델의 그래프이다. 앞서 초기에 그린 그래프는 세로축 간격이 위 그림보다 더 조밀하였으나, 이 학생은 그래프를 좀 더 면밀히 분석하기 위하여 세로축 간격을 조정하였다. 그 결과 위 [그림 IV-7]의 오른쪽 그래프에서는 자료와 오차가 특히 큰 지점이 확인되었고, 자료가 전반적으로 두 개의 구간으로 범주화될 수 있다는 점이 드러났다. 이에 학생 S3은 위 [그림 IV-7]의 오른쪽 그래프에서 자료와 모델 사이의 차이가 가장 크게 발생하는 지점을 기준으로 전체 구간을 두 구간으로 나누고 각 구간별로 각기 다른 일차함수로 이루어진 모델을 작성한 후에 왼쪽 그래프를 그린 것이다.

오차 그래프를 활용하여 수학적 모델을 개선하고자 시도한 학생들은 우선 주어진 자료와 각자 생성한 수학적 모델에서 산출된 결과 사이의 오차를 스프레드시트에서 구하고, 이 오차들을 그래프로 나타내었다. 그리고 나서, 이 학생들은 오차 그래프가 전반적으로 0에 좀 더 가까워지도록 자신들의 수학적 모델을 개선하였다.



[그림 IV-8] 학생 S2의 활동지

위 [그림 IV-8]에서 학생 S2는 오차 그래프를 이용하여 오차의 범위를 검토하였고, 이를 근거로 자신의 개선된 수학적 모델이 좀 더 적합하다는 점을 주장하고 있다. 이처럼 오차 그래프를 활용한 학생들은 오차 그래프를 전반적으로 0에 맞추려고 시도하거나, 오차의 범위를 확인하는 방식으로 수학적 모델의 적절성을 비교하였다. 다른 한편으로 다음 학생과 같이 좀 더 체계적으로 오차 그래프를 활용한 학생도 있었다.



[그림 IV-9] 학생 S10의 활동지

위 그림에서 확인되는 바와 같이 학생 S10은 자신이 초기에 작성한 수학적 모델과 자료 사이의 오차그래프를 그리고, 이 오차 그래프에 비추어 주어진 자료와 수학적 모델 사이의 오차가 가장 큰 지점을 파악하였다. 그러고 나서 이 학생은 오차가 가장 큰 지점을 기준으로 일차함수를 각기 다르게 정의하여 수학적 모델을 개선하였다.

마지막으로 실세계 맥락을 검토한 학생들은 주어진 자료가 커피의 온도 변화를 나타낸다는 점에 주목하여 모델을 수정하고 개선하였다. 앞서 상술하였던 바와 같이, 세 명의 학생들은 로그함수나 유리함수, 혹은 이차함수가 감소하고 있는 커피 온도의 변화를 설명하기에 적합하다는 점을 주장하였다. 특히, 로그함수나 유리함수를 활용한 학생들은 이 두 함수가 점근선을 갖는다는 점이 온도 변화를 기술하는 데 적절하다는 점을 주장하였다.

요약하면, 학생들은 앞서 초기에 생성한 수학적 모델과 더불어 추가적인 수학적 모델을 생성하면서 각기 나름의 방식으로 수학적 모델을 개선하였음이 확인된다. 그리고 이 과정에서 창의성의 요인들 가운데 유창성과 유연성, 독창성, 정교성과 관련된 학생들의 반응이 확인되었다. 우선 학생들은 초기 모델로부터 추가적인 수학적 모델을 수립하면서 수학적 모델링 활동을 전개하였다. 사고의 유창성은 주로 산출물의 풍성함과 관련된다는 점이 논의되어 왔으므로(박진형, 김동원, 2016), 이 절에서 학생들이 다양한 모델을 추가적으로 수립하는 장면은 사고의 유창성이 드러난 것으로 볼 수 있다.

또한, 학생들이 표현 전환이나 오차 검토 등의 과정을 통해 각자의 수학적 모델을 검토하고 개선하는 과정에서 학생들의 사고의 유연성과 정교성이 함께 드러났다. 앞서 첫 번째 절에서 확인한 것과 같이, 일부 학생들은 두 번째 과제를 해결하는 과정에서 처음으로 주어진 자료를 그래프로 나타내는 표현 전환을 수행하여 추가적인 수학적 모델을 수립하였다. 뿐만 아니라, 첫 번째 과제에서 이미 표현 전환을 수행한 학생들 가운데에는 동일한 그래프 표현이지만 세로축 간격을 조정하여 수정된 그래프를 그린 학생들이 있었으며, 이는 동일한 그래프 표현 체계 내에서 표현을 수정하였다는 점에서 표현 변환(treatment)으로 풀이할 수 있다. Duval(2006)은 동일한 표현 체계 내에서 이루어지는 체계적인 표현의 변형을 표현 변환으로 정의하였으며, 이 역시 수학적 의미를 생성하는 주요한 방법 가운데 하나임을 지적하였다. 구체적으로, [그림 IV-7]과 같이 좌표의 축을 조정하여 그래프를 수정한 학생들의 탐구 과정은 표현 변환이 수정된 수학적 모델을 수립하는 데 기여할 수 있음을 보여준다. 뿐만 아니라, 앞서 첫 번째 절에서 상술한 바와 같이 표현의 변형을 꾀하는 과정은 사고의 유연성과 관련된다는 점이 지적되어 왔다. 이러한 점에서 수학적 모델링 과정에서 확인된 학생들의

표현 전환과 변환 과정에서 사고의 유연성이 드러난 것으로 판단된다.

다른 한편으로, 학생들은 각자 생성한 수학적 모델의 적절성을 주어진 자료와 자신들의 수학적 모델 사이의 오차를 확인하면서 검토하였고, 이 과정에서 자신들의 수학적 모델을 개선하고 새로운 수학적 모델을 수립할 수 있었다. 학생들은 자신들이 수립한 수학적 모델에 대하여 표현 변환이나 오차 검토, 오차 그래프의 활용, 실세계 맥락의 검토 등을 통해 각자 생성한 수학적 모델을 수정하거나 개선하였으며, 이러한 방식으로 기존과는 다른 유형의 수학적 모델을 수립할 수 있었다. 사고의 정교성은 학생들이 각자의 탐구 과정을 세련하고 검증하는 과정과 관련된다는 점이 지적되어 온 바(이정연, 이경화, 2010), 학생들이 수학적 모델의 적절성이나 타당성을 검토하는 과정에서는 사고의 정교성이 드러난 것으로 풀이된다. 또한, 유연성은 사고 전략이나 해석의 역동적 변화를 의미한다는 점에서(Silver, 1997) 학생들이 각자 수립한 수학적 모델의 적절성 검토 과정을 반영하여 기존의 모델링 과정을 개선하고 수정된 수학적 모델을 수립한 과정에서는 사고의 유연성이 드러난 것으로 판단된다.

마지막으로 학생들이 각자 수행한 수학적 모델링 과정을 검토하는 과정에서 나름의 독특한 표현 양식을 개발하거나 검증 방법을 도출하는 장면이 드러났으며, 이는 사고의 독창성과 관련된다. 앞서 <표 IV-3>에서 확인한 것과 같이, 학생들은 각자 독창적인 모델 수정 방안을 고안하여 활용하였으며, [그림 IV-8]이나 [그림 IV-9]와 같은 독창적인 오차 그래프를 창안하여 수학적 모델을 개선하는 데 활용하였다. 학생들의 독창적인 모델 검증 방식에 대해서는 이어지는 절에서 추가적으로 확인하도록 한다.

3. 최종적인 모델 검증 및 모델 선정

세 번째 과제를 해결하는 과정에서 학생들은 각자 도출하였던 수학적 모델들 가운데 최종적인 수학적 모델을 선택하였다. 이 절에서는 학생들이 각자 생성한 모델들을 비교하고 검토하면서 최종 모델을 선정한 방식들을 확인하고 이 과정에서 드러난 창의성 요인을 확인하는 데 초점을 둔다. 학생들이 각기 생성한 최종 모델의 유형은 다음과 같다.

<표 IV-4> 최종 수학적 모델

	최종 모델 1	최종 모델 2	최종 모델 3	최종 모델 4	최종 모델 5
학생 수	2	8	3	1	1

학생들이 선정한 최종 수학적 모델의 첫 번째 유형은 하나의 식으로 정의된 일차함수이다. 두 번째 수학적 모델은 구간에 따라 다르게 정의된 일차함수이며, 세 번째 수학적 모델은 2, 3차 함수, 네 번째 수학적 모델은 로그함수, 다섯 번째 수학적 모델은 유리함수이다. 학생들이 이러한 최종 모델을 선정하는 과정에서는 앞서 두 번째 과제를 해결하는 과정에서 드러난 그래프 개형 맞추어보기나 오차 그래프의 활용은 줄어들었다. 대신에 학생들은 오차의 최댓값을 활용하거나 (검증 유형 1), 오차를 이용한 별도의 대푯값을 산출하고(검증 유형 2), 실세계 맥락을 검토하는 방식(검증 유형 3)으로 각자 생성한 수학적 모델들을 검증하였다(<표 IV-5>).

<표 IV-5> 모델 검증 방식

	검증 유형 1	검증 유형 2	검증 유형 3
학생 수	9	3	3

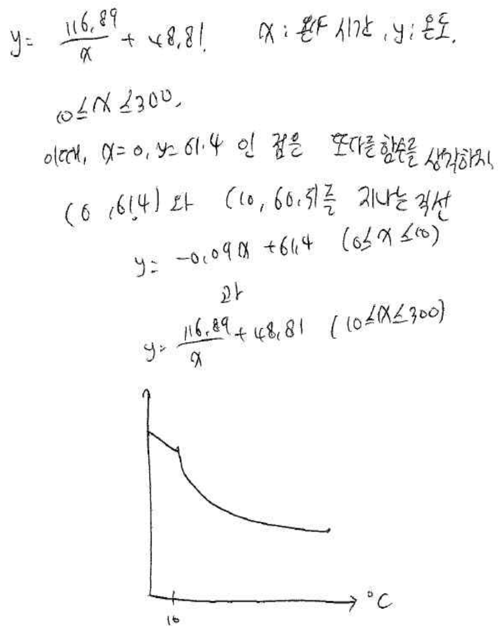
첫 번째 검증 유형은 앞서 두 번째 절에서 학생 S10의 탐구에서 확인한 바와 유사하게([그림

IV-9]) 각자가 생성한 수학적 모델과 주어진 자료 사이의 오차들을 조사하고, 이 오차들의 최댓값을 찾아서 모델을 개선하거나 특정 모델을 기각한 것이었다. 두 번째 검증 유형의 학생들도 우선은 주어진 자료와 각자 생성한 수학적 모델 사이의 오차를 모두 산출하였다. 그러고 나서 이 오차들을 대표할 수 있는 별도의 대푯값을 산출하였다. 구체적으로, 이 학생들은 오차들의 분산을 산출하거나, 오차들의 절댓값의 총합, 혹은 오차 제곱의 총합을 구하여 이 대푯값이 좀 더 작은 수학적 모델을 택하였다. 아래의 [그림 IV-10]은 오차들의 분산을 산출하여 수학적 모델의 적절성을 검토한 학생의 스프레드시트 화면이다.

A	B	C
0.980666	-0.13043	210
0.993847	0.017391	220
0.909874	0.065217	230
0.728725	0.013043	240
0.45038	-0.13913	250
0.374819	-0.0913	260
0.20202	-0.14348	270
0.231965	0.004348	280
0.064631	-0.04783	290
0	0	300
1.103342	=VAR(B2:B32)	
	VAR(number1, [number2], ...)	

[그림 IV-10] 학생 S12 스프레드시트 화면

마지막으로 실세계 맥락을 고려한 학생들은 앞서 두 번째 절에서 상술한 바와 같이, 커피 온도 변화라는 현실적 맥락에 비추어 이차함수나 로그함수, 유리함수를 선정한 학생들이었다. 이 학생들 역시 다른 학생들과 유사하게 일차함수를 포함한 다항함수 모델을 생성하고 오차를 비교하는 등의 활동도 수행하였으나, 커피의 온도 변화라는 맥락을 설명하기에는 자신들이 선택한 함수가 가장 적합할 것이라고 판단하였다. 다만 유리함수를 택한 학생 S15는 다음의 [그림 IV-11]과 같이 초기 값들에 대해서는 유리함수보다 일차함수가 좀 더 적합할 것으로 판단하고, 절충적으로 구간에 따라 일차함수와 유리함수를 각각 사용한 수학적 모델을 수립하였다.



[그림 IV-11] 학생 S15의 활동지

요약하면, 세 번째 과제를 탐구하면서 학생들이 수학적 모델을 각기 나름의 방식으로 비교하고 검증하는 과정이 확인되었으며, 이 과정에서 학생들의 사고의 정교성이 다시 한 번 확인되었다. 뿐만 아니라, 학생들이 오차의 최댓값이나 분산, 오차의 절댓값의 총합이나 제곱의 총합과 같은 독특한 값을 도출하여 각자 수립한 수학적 모델을 검증하는 과정에서는 한편으로 수학적 모델을 정밀하게 검증하는 데 실제로 유용하게 활용될 수 있는 방안을 마련하였다는 점에서, 다

른 한편으로 각기 나름의 고유하고 독특한 모델 검증 기법을 창안하였다는 점에서 사고의 독창성이 드러난 것으로 판단된다.

V. 논의 및 결론

본 연구에서는 수학적 모델링 활동이 창의적 사고를 촉진하는 것이 가능한지 이론적으로 검토하고, 가능하다면 이는 어떠한 과제를 설계하여 촉진할 수 있으며, 실제 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고는 어떠한 방식으로 드러나는지 확인하였다. 연구 결과 수학적 모델링 활동을 통해 수학적 창의성의 요인들인 유창성, 유용성, 정교성, 독창성이 확인되었으며, 연구 결과로부터 제기된 논점들은 다음과 같다.

첫째, 수학적 모델링 활동은 창의적 사고를 촉진할 수 있음이 확인되었다. 선행 연구자들이 이론적으로 제기하였던 바와 같이(Chamberlin & Moon, 2005; Chan, 2008), 학생들은 실세계 현상을 다양한 방식으로 표현하고 해석하면서 수학적 모델링을 수행할 수 있었으며, 이 과정에서 창의적 사고가 다각적으로 확인되었다. 수학적 모델을 다양하게 생성하는 과정에서 사고의 유창성이 확인되었으며, 각자 생성한 모델의 적절성을 검토하는 과정에서 사고의 정교성이 드러났다. 또한, 수학적 표현의 전환과 변환을 경험하면서 관점을 전환하고 새로운 유형의 수학적 모델을 생성하는 과정에서 사고의 유연성이 확인되었으며, 독창적인 수학적 모델을 생성하거나, 독창적인 모델 검증 방식을 창안하는 장면에서 사고의 독창성이 확인되었다. 이러한 점에서 수학적 모델링 활동은 다양한 국면에서 창의성의 여러 요소들을 촉진할 수 있음이 확인된다.

둘째, 주어진 상황을 다양한 방식으로 표현하는 과정에서 학생들의 사고의 유연성과 독창성이 함께 활성화될 수 있었으며, 스프레드시트 환경은 이러한 학생들의 표현 전환과 변환을 지원할 수 있었다. 학생들은 주어진 문제 상황을 각기 다양한 방식으로 표현하였으며, 다양한 방식의 문제 상황 표현은 Chamberlin & Moon(2005)이나 Sheffield(2006)가 강조하였던 것처럼 학생들의 창의적 사고를 촉진할 수 있었다. 특히, Duval(2006)이 강조한 바와 같이 표현 전환뿐만 아니라, 동일한 표현 체계 내에서 표현을 변형시키는 표현 변환은 수학적 모델링의 맥락에서도 학생들의 사고와 관점의 전환에 핵심적으로 기여할 수 있음이 드러났다. 구체적으로, 학생들은 주어진 자료를 그래프로 표현하는 과정이나 그래프의 세로축 간격을 조정하는 과정에서 먼저 생성한 모델의 결함을 파악할 수 있었고, 이를 바탕으로 수학적 모델을 개선하거나 새로운 모델을 생성할 수 있었다. 그리고 스프레드시트 환경은 모델링 활동 전반에서 학생들이 비교적 손쉽게 표현 전환과 표현 변환을 수행할 수 있게 지원하였다.

셋째, 선행 연구자들은 주로 수학적 모델을 생성하는 과정에서 학생들이 사고의 유창성이나 유연성, 독창성을 경험할 수 있을 것으로 가정하였으나(Chamberlin & Moon, 2005; Chan, 2008), 본 연구에서는 학생들이 각자 생성한 수학적 모델을 검증하는 과정에서도 사고의 발산적인 측면들이 촉진될 수 있음이 확인되었다. 수학적 모델링 과정에서 학생들은 각기 정형화되지 않은 나름의 모델 검증 방식을 창안해야 하였고, 이 과정에서 다양한 모델 검증 방식을 생성할 수 있었다. 특히, 학생들은 모델 검증 과정을 시각화하거나 분산이나 절댓값의 총합 등과 같이 오차를 측정할 수 있는 새로운 척도를 생성하였으며, 이 과정에서 사고의 유연성이나 독창성이 확인되었다.

넷째, 수학적 모델링 활동을 수행하는 과정에

서 초기에 일부 학생들은 주어진 자료의 모든 값을 활용하여 수학적 모델을 구축하려는 장면이 확인되었다. Galbraith & Stillman(2006)이 지적한 바와 같이, 수학적 모델링은 주어진 실세계 현상을 단순화하는 것에서 출발하는 것이 적절하다. 그럼에도 불구하고, 일부 학생들은 주어진 현상을 단순화하지 않고 이를 모두 반영한 수학적 모델을 수립하고자 시도하였다. 본 연구에 참여한 학생들은 주로 수학 내적인 문제를 해결하는 데 좀 더 익숙한 학생들이었다는 점에서, 주어진 과제의 모든 조건을 활용하는 것이 적합하다고 판단한 것으로 보인다. Blomhøj & Kjeldsen (2006)은 수학 내적인 탐구와 수학적 모델링 활동이 다소 다른 성격을 갖는 활동이라는 점을 지적하였다. 이들은 수학 내적인 탐구와 수학적 모델링 활동을 균형 있게 추구하는 것은 쉽지 않으며, 이러한 점에서 수학 내적 탐구와 수학적 모델링 활동 사이의 관계를 좀 더 상세하게 규명할 필요가 있다는 점을 지적하였다. 이에 비추어볼 때, 수학적 모델링을 수학 교수 학습에 접목하는 경우에는 주어진 실세계 현상을 단순화하는 과정에서 학생들이 어려움을 겪을 수 있다는 점에 주의할 필요성이 제기된다.

다섯째, 학생들의 수학적 모델링 활동은 주로 주어진 자료에 적합한 수학적 모델을 수립하는 데 초점을 두고 진행되었으며, 수학적 모델의 검증 역시 수학 내적인 사항에 초점을 두고 이루어졌다. Blum & Borromeo Ferri(2009)가 지적한 바와 같이 수학적 모델링은 수학적 모델을 실세계 현상에 비추어 재해석하면서 그 적절성을 검토하는 과정을 필요로 한다. 이에 비추어볼 때, 주어진 상황을 수학화하고 수학적 모델을 수립하는 데에는 대부분의 학생들이 성공적이었다고 볼 수 있으나, 각자 생성한 모델을 커피의 온도 변화라는 현실적 맥락에 비추어 재해석한 학생은 상대적으로 드물었다. 이러한 점에서, 수학적 모델링을 수학 교수 학습에 접목하는 경우에는 학생들이 각자 생성한 수학적 모델을 수학 내적인 맥락뿐만 아니라 주어진 실세계 현상에 비추어 그 적절성을 검토하는 과정을 강조할 필요성이 제기된다.

본 연구에서는 수학적 모델링 활동이 학생들의 창의적 사고를 촉진할 수 있는지의 여부를 이론적으로 그리고 실증적으로 검토하고자 시도하였으며, 연구 결과 수학적 모델링 활동은 수학적 성취가 뛰어난 수학 영재 학생들이 다양한 유형의 창의적 사고를 경험할 수 있는 기회를 제공한 것으로 확인되었다. 본 연구는 비교적 뛰어난 수학적 성취를 보인 수학 영재 학생들을 대상으로 비교적 단시간의 탐구 과정을 기반으로 수행되었다는 점에서 한계를 갖는다. 이러한 점에서 수학적 모델링 활동과 수학적 창의성 사이의 관련성에 대해 다양한 수준의 수학적 성취를 기록한 학생들에 대해서도 후속적인 연구의 필요성이 제기된다. 또한, 본 연구는 수학적 모델링 활동을 통한 수학적 창의성 함양 가능성을 확인하는 데 목적을 둔 바, 유창성과 유연성, 독창성 및 정교성과 같이 선행 연구들에서 기존에 보고되어 온 주요 창의성 요인들을 바탕으로 학생들의 모델링 활동을 분석하는 데 초점을 두었다. 하지만 수학적 모델링은 기존의 수학 교수 학습 방안들과는 다소 구분되는 대안적 수학 교수 학습 내용이자 방안이라는 점이 논의되어 왔으므로(Blum & Borromeo Ferri, 2009), 수학적 모델링 활동을 통하여 촉진될 수 있는 창의성이 갖는 나름의 독특한 특성이나 요인이 있는지에 대해서도 추가적인 연구의 필요성이 제기된다. 수학적 모델링 활동의 중요성이 선행 연구들에서 강조되어 온 것에 비하여(Blum & Borromeo Ferri, 2009), 국내에는 수학적 모델링 활동에 기반을 둔 교수 학습 방안에 대한 연구 역시 부족한 실정이다. 수학적 모델링 활동의 수학 교육적

인 잠재력을 이론적으로 그리고 실증적으로 검토하는 후속 연구가 활발히 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

박만구(2009). 수학교육에서 창의성의 개념 및 신장 방안, **수학교육, 23**(3), 803-822.

박진형, 김동원(2016). 예 만들기 활동에 의한 창의적 사고 촉진 방안 연구, **수학교육학연구, 26**(1), 1-22.

이경화(2015). **수학적 창의성: 수학적 창의성의 눈으로 본 수학교육**, 서울: 경문사.

이정연, 이경화(2010). Simpson의 패러독스를 활용한 영재교육에서 창의성 발현 사례 분석, **수학교육학연구, 20**(3), 203-219.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instruction and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers and Mathematical Learning, 7*, 245-274.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work - Experiences from an in-service course for upper secondary teachers, *ZDM, 38*(2), 163-177.

Blum, W. et al. (2002). ICMI study 14: Applications and modelilng in mathematics education - Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Chamberlin, S. A. & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 37-47.

Chan, C, M. E. (2008). The use of mathematical modeling tasks to develop creativity, In E. Veikova, A. Andzans, (eds.), *Promoting creativity for all students in mathematics education* (pp. 207-216). Bulgaria: University of Rousse.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process, *ZDM, 38*(2), 143-162.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 3*, 195-227.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school, In P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (eds.) *Mathematical modelling education, engineering and economics (pp. 110~119)*. Chechester: Horwood.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* (J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.; J. Teller, Trans.). Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1968)

Lesh, R. A., Cramer, K., Doerr, H., Post, T. &

Zawojewski, J. S. (2003) Model development sequences. H. Doerr & R. A. Lesh (Eds) *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Middleton, J. A., Caylor, E. & Gupta, S. (2008). A science need: Designing tasks to engage students in modeling complex data, *Educational Studies in Mathematics, 68*, 113-130.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. (pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

Mann, E. L. (2006). Creativity : The Essence of Mathematics, *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Nadjafikhah, M., Yaftian, N. & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia- Social and Behavioural Sciences, 31*, 285-291.

Otte, M. (2011). Evolution, learning, and semiotics from a Peircean point of view, *Educational Studies in Mathematics, 77*, 313-329.

Plucker, J. A. & Beghetto, R. A. (2004). Why creativity is domain general, why it looks domain specific, and why the distinction does not matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko, & J. L. Singer (Eds.), *Creativity: From potential to realization* (pp. 153 – 167). Washington, DC: American Psychological Association.

Reiter-Palmon, R., Illies, M. Y., Cross, L. K., Buboltz, C. & Nimps, T. (2009). Creativity and domain specificity: The effect of task type on multiple indexes of creative problem-solving. *Psychology of aesthetics, creativity, and the arts, 3*(2), 73-80.

Sheffield, L. J. (2006). Developing mathematical promise and creativity. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 1-11.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem posing and problem solving. *ZDM, 29*(3), 75~80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*, 20-36.

Sriraman, B., Yaftian, N. & Lee, K. H. (2011). Mathematical creativity and mathematics education, In K. H. Lee, B. Sriraman (eds.) *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 119-130). Sense publishers.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*, Thousand Oaks: Sage Publications.

Yuan, X. & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities, In K. H. Lee, B. Sriraman (eds.) *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5-28). Sense publishers.

Fostering Mathematical Creativity by Mathematical Modeling

Park, JinHyeong (Myongji University)

One of the most important activities in the process of mathematical modeling is to build models by conjecturing mathematical rules and principles in the real phenomena and to validate the models by considering its validity. Due to uncertainty and ambiguity inherent real-contexts, various strategies and solutions for mathematical modeling can be available. This characteristic of mathematical modeling can offer a proper environment in which creativity could intervene in the process and the product of modeling. In this study, first we analyze the process and the product of mathematical modeling, especially focusing on the students' models and validating way, to find evidences about whether modeling can facilitate students'creative thinking. The findings showed that the students' creative thinking related to fluency, flexibility, elaboration, and originality emerged through mathematical modeling.

* Key Words : mathematical modeling(수학적 모델링), mathematical creativity(수학적 창의성)

논문접수 : 2017. 1. 9
논문수정 : 2017. 2. 1
심사완료 : 2017. 2. 6