대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 1, 23 ~ 49. Feb 2017

그래프 유형에 따른 두 공변 추론 수준 이론의 적용 및 비교1)

박 종 희* · 신 재 홍** · 이 수 진*** · 마 민 영****

본 연구는 중학교 3학년 학생 2명을 대상으로 공변 추론 수준에 관련된 두 이론 (Carlson et al.(2002), Thompson, & Carlson(2017))을 그래프 유형(양적 그래프, 질적 그래프)에 따라 분석하였다. 이에 대한 연구결과로 양적 그래프 과제에서 Thompson과 Carlson(2017)은 Carlson 외(2002)보다 학생의 수준을 세분화하였으며, 질적 그래프 과제에서 Thompson과 Carlson(2017)은 학생 수준을 범주화하기 어려웠지만, Carlson 외(2002)는 학생의 수준을 자세히 파악할 수 있었다. 이와 같은 연구결과는, 학생들의 공변 추론을 파악하는 데 있어 양에 따른 수치적 접근의 분석뿐만 아니라 두 양의 공변 양상을 비수치적으로 파악하는 질적 접근의 분석도 중요함을 시사하며, 또한 Thompson과 Carlson(2017)이 양에 따른 수치적 접근을 분석하는 데 있어 중요한 방법이며 Carlson 외(2002)가 비수치적으로 파악하는 질적 접근을 분석하는 데 있어 중요한 방법임을 시사한다.

I. 서 론

함수는 현실 세계의 상황을 이해할 수 있는 도구일 뿐만 아니라 수학의 여러 영역을 통합할 수 있다는 점에서 중요하다(김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤, 2011). 이런 함수는 다양한 영역에서 연구가 이루어지고 있는데, 공변 추론에 대한 연구가 그 중 하나이다. 공변 추론은 두 변수의 변화관계를 주목한다는 점에서 변화율 개념에 기본이 되며, 미적분학의 학습과도 관련 있기 때문에 함수 학습에서 강조되고 있다. 국내의 공변 추론에 대한 연구는 대부분 Carlson, Jacobs, Coe, Larsen과 Hsu(2002)의 이론적 틀을 바탕으로 해 왔는데(모성준, 2013; 문혜선, 2015; 서창범, 2016; 신재홍 · 이중권, 2009), 최근에 Thompson(2016)은 공변 추론에 대한 현재까지의 연구를 종합하여 새로운 이론적 체계를 마련하였고, Thompson과 Carlson(2017)은 Thompson(2016)을 수정, 보완하였다.

Thompson과 Carlson(2017)은 기존의 공변 추론에 대한 연구를 종합하였다고 주장하고 있기 때문에 Carlson 외(2002)의 연구를 반영하였다고 볼 수 있으나, Carlson이 두 논문에 공통으로 속한 저자임에도 불구하고 공변 수준을 기술하는 방식과 사용하는 용어가 많이 달라짐을 발견할 수

* 한국교원대학교 대학원, cyber-iris@hanmail.net (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)
*** 한국교원대학교, sjlee@knue.ac.kr
**** 한국교원대학교 대학원, mmy8724@naver.com
1) 이 논문은 2015년 대한민국 교육부와 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2015S1A5A8011242)

있다. 따라서 앞으로 공변 추론을 바탕으로 한 학생들의 함수 학습에 대한 연구를 수행함에 있어 최근 연구라는 이유로 무조건 적용하여 현상을 분석하려고 하기보다는 이전의 이론적 틀과 무엇이 어떻게 달라졌는지 면밀히 살피고, 실제 학생의 수학 문제 해결과정에서 드러나는 공변 추론의 양상을 설명하는데 두 분석틀이 어떻게 다르게 적용될 수 있는지 비판적으로 접근할 필요가 있다.

한편, 함수는 역사적으로 여러 측면이 있는데, 종속성, 그래프, 공식, 행동, 과정, 대응, 순서쌍, 대상 등이 바로 그것이다. 그 중 그래프는 함수를 표현하는 데 널리 사용되는 방법이다. 일반적으로 학생들은 그래프에 대해 점별 접근, 국소적 접근, 양적 접근에 대한 경험이 많지만, 질적 접근에 대해서는 그렇지 못하다(김남희 외., 2011). 양적 특성을 가진 그래프만 제시된다면, 학생들은 그래프를 전반적으로 구성할 기회를 놓칠 것이다(Hattikudur at al., 2012). 따라서 그래프를 의미 있게 사용하려면 여러 가지 접근 방식의 통합이 필요하다(김남희 외., 2011). 또한, 동시에 변하는 두 변수들 사이의 관계를 표현할 때, 그래프 전체를 고려해야 하며 수보다는 언어로 관계를 표현해야 하기 때문에(Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990), 공변 추론에 대한 연구 역시 질적 특성을 가진 그래프를 포함해야 한다.

이에 본 연구는 중학교 3학년 영재학생 2명을 대상으로 질적 그래프와 양적 그래프[2)]를 구성하는 활동을 실시하고, 이 때 드러나는 학생들의 공변 추론 수준을 Carlson 외(2002)와 Thompson과 Carlson(2017)의 이론을 바탕으로 분석하고자 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

- 양적 그래프 문제를 해결하는 과정에서 두 학생의 공변 추론 수준은 어떠한가?
- 질적 그래프 문제를 해결하는 과정에서 두 학생의 공변 추론 수준은 어떠한가?
- 그래프의 유형과 두 이론에 근거한 학생 수준은 어떠한 관계가 있는가?

Carlson 외(2002)와 Thompson과 Carlson(2017)에서 제시한 공변 추론 수준으로 학생들을 분석하기에 앞서, 이론적 배경에서 양적·질적 그래프와 공변을 설명하고, 공변 추론 수준 이론을 비교·분석하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 그래프의 유형

함수와 그래프에 관련된 대부분의 과제는 해석(interpretation)과 구성(construction)으로 분류된다. 해석은 그래프를 학생들이 이해하고 의미를 찾는 것을 말하며, 구성은 새로운 것을 생성하는 행위를 말하는 것으로 그래프를 그리거나 데이터를 점으로 찍거나 대수적 함수로 만드는 것 등을 말한다. 해석은 구성이 필요 없지만, 구성은 일부 해석을 토대로 한다. 현재 대부분의 연구는 해석에 대한 과제이고 구성에 대한 과제는 거의 없다(Leinhardt et al., 1990). 그 중 학생들의 그래프 구성은 공학적 도구를 이용한 과제에서 일부 찾아볼 수 있는데, 공학적 도구가 함수에 대한 이해를 촉진시킬지라도, 학생들이 함수를 완전히 이해하도록 돕지 못한다(Hattikudur at al., 2012).

한편, 그래프를 구분하는 방법은 다양하지만, 질적 그래프와 양적 그래프로 분류하는 방법이 있다. 양적 그래프는 각 변수가 구체적인 값을 가진다. 그래프의 양적 특성은 학생들이 그래프

2) 양적 그래프는 본문에서 사용된 Thompson의 양적 추론과는 직접적인 관련은 없는 용어로, 그래프 상에 각 변수가 수치적인 값을 가지는 경우 그 그래프를 일컫는 말이다.

의 국소적인 측면에 초점을 두고, 구체적인 점이나 값들을 알아낼 수 있다. 질적 그래프는 좌표에 명칭이 붙을지라도, 각 변수에 대한 구체적인 값을 갖지 않는다. 따라서 그래프를 구성하거나 해석할 때 사용할 수치적인 정보가 없다. 대신에 학생들은 그래프의 일반적인 흐름을 보고, 두 변수 사이의 공변 관계를 관찰하게 된다(Leinhardt et al., 1990). 학생들은 그래프를 구성할 때, 전반적인 구조보다는 몇 개의 점에 집중하는 경향이 있다. 양적 특징을 가진 그래프만 제시된다면, 학생들은 그래프를 전반적으로 구성할 기회를 놓칠 수 있다(Hattikudur at al., 2012). 또한, 학생들은 동시에 변하는 두 변수들 사이의 관계를 표현할 때 그래프 전체를 고려해야 하며, 수보다는 언어로 관계를 표현해야 한다(Leinhardt et al., 1990). 따라서 본 연구는 지필 환경에서 양적 그래프뿐만 아니라 질적 그래프를 구성하는 과제를 이용하여 학생들의 함수와 그래프에 대한 이해를 살펴보도록 할 것이다.

2. 공변의 역사와 공변 추론 수준에 관한 연구

공변 추론에 대한 언급은 Confrey와 Smith(1994)와 Thompson(1993)의 연구에서 찾아볼 수 있다. Confrey와 Smith(1994)는 함수에서 공변과 대응을 구분하면서 공변을 설명하였다. 공변은 x의 값이 x_m에서 x_{m+1}로 움직일 때, y의 값이 y_m에서 y_{m+1}로 조작적으로 움직이는 것이라고 하였다. 즉, 두 변수의 값이 변할 때, 두 변수의 값을 조정하는 것으로 공변을 정의하였고, 공변의 의미에서 수열을 강조하였다. 이를 바탕으로 함수를 두 수열의 병렬이며, 각 수열은 데이터 값의 패턴을 통해 독립적으로 생성된다고 보았다(Confrey, & Smith, 1994).

Thompson(1993)은 양적 추론을 중요시 여겼는데, 이는 양과 양 사이의 관계로 상황을 개념화하는 것이다. 이후 Thompson과 Carlson(2017)에서는 양적 추론을 기반으로 공변 개념을 설명하였다. 이와 같이 Thompson의 공변 개념은 양적 추론에서 비롯되었다. 즉, 변하는 양의 값을 정의한 후, 두 개 이상의 양이 동시에 변하는 것으로 공변을 정의하였다. 이 때, 누군가는 두 개의 변하는 양의 값을 상상하고, 그 두 개의 양의 값이 동시에 변한다는 것을 상상할 때, 공변 추론을 하게 된다고 하였다(Thompson, & Carlson, 2017). 이렇듯 Confrey와 Smith는 학생들이 어떻게 원소 사이에 관계를 생각하는지 설명하지 않는 반면에, Thompson은 양이 변하는 값을 가진다는 것은 구체적으로나 추상적으로 생각하는 사람에게서 비롯되었다고 보고, 공변을 바라보는 학생의 사고에 초점을 두었다.

이후 Carlson 외(2002)는 학생들의 공변 추론 능력을 조사하기 위해 공변 추론 수준을 제시하였다. 이들은 학생들의 공변 추론 수준을 분석하기에 앞서, 공변 추론이 무엇인지부터 정의하였다. 즉, 공변 추론은 두 양이 서로 관계되어 변하는 방식을 처리할 때, 변화하는 두 양을 조정하는 인지활동이라고 하였다. 국내에서도 Carlson 외(2002)의 공변 추론틀을 사용한 연구를 찾아볼 수 있다. 모성준(2013)은 중학교 1학년 학생, 문혜선(2015)은 고등학교 1학년 학생, 서창범(2016)은 고등학교 2학년 학생을 대상으로 공변 추론 수준을 조사하였다. 연구에 사용된 문항은 수치적 정보를 제시하고 양적 그래프를 구성하는 활동도 있었지만, 함수적 상황을 제시하고 이를 질적 그래프로 구성하는 활동이 대부분이었다. 신재홍・이중권(2009)은 Carlson 외(2002)의 공변 추론틀을 사용하여 예비교사의 공변 추론 능력 발달을 조사하는 것에 그치지 않고, Carlson 외(2002)의 한계점을 지적하였다. 말하자면, 예비교사들은 공학적 도구인 GSP의 도움으로 2수준

에서 5수준으로 공변 추론 능력이 발달하였지만 Carlson 외(2002)가 함수 개념의 중요한 특징인 인과관계를 설명하지 못함을 밝혔다. 또한, 학생들의 함수 개념의 발달을 조사하기 위해 인과관계의 개념과 공변적 사고를 결합시켜야 한다고 제안하였다. 이와 같이 Carlson 외(2002)의 공변 추론틀은 질적 그래프를 구성하는 상황에서 학생들의 수준을 파악할 수 있다는 점뿐만 아니라 (모성준, 2013; 문혜선, 2015; 서창범, 2016, 신재홍・이중권, 2009), 한계점이 있음을 시사한다(신재홍・이중권, 2009).

3. 공변틀 이론의 비교 분석

Carlson 외(2002)는 학생들의 공변 추론 능력을 조사하기 위해, 공변 추론 수준을 제시하였다. 그 후, Thompson(2016)은 기존의 공변 추론에 관련된 연구를 종합하여 새로운 공변 추론 수준을 제시하였고, 이를 일부 수정하여 Thompson과 Carlson(2017)에서는 수정된 공변 추론 수준을 제안하였다. 본 연구자들은 Carlson 외(2002), Thompson(2016), Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론 수준을 각각 분석하기 위해 공통점 및 차이점 등을 비교하였다.

Carlson 외(2002)는 대학생들이 과제에 대해 보인 반응을 바탕으로 학생들의 행동을 분류하고, 수준을 결정하였다. 학생들이 공변 과제에 참여할 때 보여준 행위를 분류하는 수단으로 정신적 행동(mental action, MA)을 사용하였고, 정신적 행동을 뒷받침하는 전반적인 이미지에 따라 수준을 분류하였다. 학생의 공변 추론 능력은 그 수준에 관련된 정신적 행동과 모든 낮은 수준에 관련된 행동을 뒷받침할 때, 주어진 발달 수준에 도달했다고 말한다. 다음의 <표 II-1>은 공변 체계의 정신적 행동을 나타내며, <표 II-2>는 다섯 가지의 공변 추론의 발달 수준을 나타낸다.

공변 추론 수준을 설명하는 데 있어, Carlson 외(2002)의 연구에는 몇 가지 특징이 있다. 첫째, 동적인 함수 관계에 대해 추론하기 위한 기초로, 이미지(image), 비율(rate), 조정(coordination)의 개념을 사용하였다. 이미지는 정신적 조작의 역동성에 초점을 둔다고 말한 Thompson(1994a)의 설명과 비슷한 의미로 사용되었다. 비율은 세부구간을 생각하는 경우 평균변화율을 의미하기 위

<표 II-1> 공변 체계의 정신적 행동(Carlson et al., 2002, p.357)

MA	정신적 행동(MA)의 설명	행 위
MA5	함수 정의역 전체에서 독립변수의 연속적인 변화에 따른 함수의 순간변화율 조정하기	• 오목성 변화를 명확하게 인식함을 보여주면서 부드러운 곡선 구성하기 • 함수 정의역 전체에서 변화율의 순간적인 변화를 인식함을 언어로 표현하기(예: 오목성의 방향과 변곡점이 정확하다)
MA4	입력 변수의 일정한 증가량(increments)에 따른 함수의 평균변화율 조정하기	• 정의역에서 구간별 할선 구성하기 • 입력(input)의 일정한 증가량을 고려하면서 (입력에 대한) 출력(output)의 변화율을 인식함을 언어로 표현하기
MA3	한 변수의 변화에 따른 다른 변수의 변화량 조정하기	• 점찍기, 할선 구성하기 • 입력의 변화를 고려하면서, 출력의 변화량을 인식하고 있음을 언어로 표현하기
MA2	한 변수의 변화에 따른 다른 변수의 변화 방향 조정하기	• 증가하는 직선 구성하기 • 입력(input)의 변화를 고려하면서 출력(output)의 변화 방향을 인식하고 있음을 언어로 표현하기
MA1	한 변수의 변화에 따른 다른 변수의 값 조정하기	• 두 변수를 조정을 암시하는 언어적 표현과 함께 좌표축에 이름 붙이기 (예: x가 변함에 따라 y가 변한다)

<표 II-2> 공변 추론 수준(Carlson et al., 2002)

공변 체계는 공변의 이미지를 다섯 수준의 발달로 설명한다. 공변의 이미지는 각 이미지에 의해 뒷받침된 정신적 행동으로 제시된다.
수준 5 (L5). 순간 비율 순간 비율 수준에서 공변의 이미지는 입력 변수의 연속 변화에 따른 함수의 순간변화율을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. 이 수준은 순간변화율이 평균변화율의 점점 더 작은 세분으로 생긴다는 인식을 포함한다. 또한, 변곡점은 변화율이 증가에서 감소하거나, 감소에서 증가로 변하는 곳이라는 인식을 포함한다. MA1에서 MA5까지 확인된 정신적 행동은 L5 이미지에 의해 뒷받침된다.
수준 4 (L4). 평균 비율 평균 비율 수준에서 공변의 이미지는 입력 변수의 일정한 증가량에 따른 함수의 평균변화율을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. 평균변화율은 입력변수의 변화와 출력변수의 변화량을 조정하기 위해 분석될 수 있다. MA1에서 MA4까지 확인된 정신적 행동은 L4 이미지에 의해 뒷받침된다.
수준 3 (L3). 양적 조정 양적 조정 수준에서 공변의 이미지는 한 변수 변화에 따른 다른 변수의 변화량을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. MA1, MA2, MA3에서 확인된 정신적 행동은 L3 이미지에 의해 뒷받침된다.
수준 2 (L2). 방향 방향 수준에서 공변의 이미지는 한 변수 변화에 따른 다른 변수의 변화 방향을 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다. MA1, MA2에서 확인된 정신적 행동은 모두 L2 이미지에 의해 뒷받침된다.
수준 1 (L1). 조정 조정 수준에서 공변의 이미지는 한 변수 변화에 따른 다른 변수의 변화를 조정하는 정신적 행동을 뒷받침할 수 있다(MA1).

해 사용하였으며, 전체 정의역에서 함수를 상상하는 경우 순간변화율을 의미하기 위해 사용되었다. 조정 역시 동적인 함수 관계를 추론하기 위한 기초로 사용하였다. 둘째, 공변의 이미지는 발달적(developmental)이다. Saldanha와 Thompson (1998)의 연구를 참고하여, 발달적이라는 용어를 사용하였다. 공변의 이미지는 수준으로 정의할 수 있고, 수준은 일련의 순서로 나타날 수 있기 때문이다. 공변의 이미지는 정신적 행동에 의해 뒷받침되며, 공변의 이미지가 발달할 때 더 정교한 공변 추론을 할 수 있다. 셋째, 함수의 과정(process) 관점은 공변 추론에 필요한 능력이라는 기존의 연구를 바탕으로 하였다. 함수는 입력을 수락하고, 출력을 생산하는 과정이고, 과정 관점은 성숙한 함수 이미지 발달에 필수적이다. 이는 서로 관계되어 변하는 두 변수의 이미지를 조정하기 위한 토대가 된다. 이와 같은 입력과 출력의 표현은 <표 II-1>에서 정신적 행동과 행위에서 찾아볼 수 있다.

그러나 Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준으로 학생들의 수준을 파악하기에는 다음과 같은 한계가 있다. 첫째, 그래프에 주로 초점을 두었다. Carlson 외(2002)는 학생들에게 그래프를 구성하는 과제를 제시하였고, 공변 수준 체계 역시 그래프 상황에 대한 설명이다. 연구자들은 그래프와 관련된 활동에서 학생들의 어려움을 관찰하였기 때문에, 연구의 시작단계부터 그래프에 초점을 두었다. 그러나 함수를 표현하는 방법에는 그래프뿐만 아니라 공식, 대수적 표현도 가능하기 때문에 그래프가 아닌 다른 표현으로 과제를 해결하였을 경우 수준 파악이 어렵다. 둘째, 미분 가능한 함수에 국한되어있다. 함수는 미분 가능한 함수뿐만 아니라 미분가능하지 않지만 연속인 함수, 불연속 함수 등 다양하다. 그러나 MA5를 확인하는 주된 특징은 오목성과 변곡점이다. 이는 미분 가능한 함수에서 설명이 가능하기 때문에, 일반적인 함수에 대한 공변 추론 수준을 파악하기에는 한계가 있다. 셋째, 함수에

대한 공변 추론을 설명하고 있음에도 불구하고, 공변 추론이 무엇인지에 대한 설명만 있을 뿐 함수가 무엇인지에 대한 구체적인 언급이 없다. 공변적 관점에서 함수를 바라보고 있지만, 바라보고 있는 함수 그 자체에 대한 언급은 없다.

Thompson(2016)은 학생들의 변수, 함수, 변화율의 이해에 관한 연구를 종합하여 정리한 새로운 공변 추론 수준을 제시하였다. 변수의 값이 연속적으로 변한다는 아이디어는 공변 추론에 기본적이고, 함수, 그래프, 관계를 이해하는 데 필수적인 구성요소이기 때문에(Thompson, 2016), 연속적 변화를 바탕으로 연속적 공변을 설명하였다. 다음의 <표 II-3>과 <표 II-4>는 Thompson (2016)에서 설명한 연속적 변화와 연속적 공변에 대한 수준이다. <표 II-3>은 변하는 변수의 값에 대해 어떻게 생각하는지를 수준으로 설명한 것이다. 가장 높은 두 수준은 연속적인 구간을 만드는 변화에 대한 설명이다. 부드러운 연속 변화 수준은 임의의 변화가 수정될 수 있다는 것을 반복해서 예상할 수 있고, 덩어리 연속 변화 수준은 자를 끝에서 끝으로 놓는 것처럼 각 증분 안에서 변화가 발생한다는 이미지 없이 고정된 증분을 가진 구간에서 변화를 상상한다. 아래의 세 수준은 변수의 값을 문자로 대체하는 것으로 변화를 생각한다. <표 II-4>는 다른 종류의 변화를 가진 두 변수를 인식할 가능성을 설명할 수도 있다(Thompson, 2016).

<표 II-4>의 연속적 공변의 의미는 <표 II-2>의 Carlson 외(2002)와는 몇 가지 다른 특징이 있다. 첫째, 변화율 개념이 없다. 변화율을 이해하기 위해서 공변 추론이 필요하지만, 비(ratio), 몫, 적분, 비례(proportionality)와 같이 공변 추론을 넘어서는 개념을 필요로 하기 때문에, Thompson (2016)에서는 변화율의 개념을 제거하였다(Thompson, & Carlson, 2017). 둘째, 오목성과 변곡점의 개념이 없다. Carlson 외(2002)의 연구는 미적분학 과제의 맥락에서 데이터를 수집하였기 때문에, 그래프의 오목성이 어떻게 변하는지, 부드러운 곡선을 어떻게 구성하는지에 관심을 가졌다. 셋째, 인과적인 관점인 독립변수, 종속변수에 대

<표 II-3> 연속적 변화의 의미(Thompson, 2016, p.447)

수 준	설 명
부드러운 연속 변화 (smooth continuous variation)	낱낱이 증가하는 변수의 크기로 변수 값의 변화를 생각하면서, 각각의 낱낱 안에서도 변수의 값이 부드럽게 변한다는 것을 동시에 생각하는 것이다.
덩어리 연속 변화 (chunky continuous variation)	고정된 크기의 구간들을 증가시키면서, 변수의 크기 변화에 대해 생각한다. 예를 들어, 0에서 1, 1에서 2, 2에서 3과 같이 변하는 변수의 값을 상상한다. 0과 1사이, 1과 2사이, 2와 3사이의 값은 덩어리의 한 부분이기 때문에 함께 따라오지만, 0, 1, 2가 값으로 가지는 것과 같은 방식으로 하나의 값으로 가지지 않는다. 덩어리 연속 변화는 자연수 양으로만 증가한다고 생각하지 않는다. 0에서 0.25, 0.25에서 0.5, 0.5에서 0.75 등으로 변수 값을 생각하는 것은 0에서 1, 1에서 2로 증가를 생각하는 것처럼 덩어리 연속 변화로 생각하는 것이다.
이산 변화 (discrete variation)	변수는 구체적인 값을 가지는 것으로 생각한다. 변수는 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 값을 가져서 a에서부터 b까지 변하는 변수 값을 볼 수 있지만, a_i와 a_{i+1}사이의 임의의 값이 있는 것으로 생각하지 않는다.
변화 없다. (no variation)	변수는 고정된 값을 가진다고 생각한다. 다른 고정된 값을 가질 수 있지만, 단순히 다른 상황을 상상하는 것이다.
문자로서의 변수 (variable as letter)	변수는 문자이다. 변화와 관계없다.

<표 II-4> 연속적 공변의 의미(Thompson, 2016, p.448)

수 준	설 명
부드러운 연속 공변 (smooth continuous covariation)	한 변수 값의 변화와 다른 변수 값의 변화를 상상한다. 이 때, 변수들은 부드럽고 연속적으로 변한다.
덩어리 연속 공변 (chunky continuous covariation)	한 변수 값의 덩어리 연속 변화(chunky continuous variation)와 다른 변수 값의 덩어리 연속 변화(chunky continuous variation)를 상상한다.
값의 조정 (coordination of value)	한 변수의 값(x)과 다른 변수의 값(y)의 순서쌍들로 이산적인 수집(x, y)을 만드는 것에 관한 예상과 조정이다.
값의 조정 전 (pre-coordination of value)	두 변수는 함께 변하지만, 동시에 발생하지 않는 것으로 생각한다. 값의 순서쌍을 만드는 것을 생각하지 않는다.
변화는 있지만, 조정은 없다. (variation but no coordination)	함께 변하는 변수에 대한 이미지를 가지지 않는다. 값의 조정을 하지 않고, 두 변수 중 한 변수 변화에 초점을 둔다.

한 용어가 없다. Thompson과 Carlson(2017)은 독립인 것과 종속인 것은 상황에 대한 인간의 사고에 전적으로 의존한다고 보았으며, 누군가 조금이라도 종속을 생각한다면, 종속을 생각하는 방식에 의존한다고 하였다. 독립변수와 종속변수라는 용어를 사용하지 않은 것은 한 양에 의해 야기된 다른 양의 값을 생각하지 않는 경우를 포함하기 위해서이며, 대신에 종속을 두 양이 함께 나타나는 양의 값들에 대해 불변인 것으로 생각한다(Thompson, & Carlson, 2017). 넷째, 양과 양 사이의 관계를 중요하게 생각한다. 이론적 배경에서 설명하였듯이, Thompson의 공변 추론은 양적 추론에서 비롯되었다. 누군가 두 개의 변하는 양의 값을 상상하고, 그 두 개의 양의 값이 동시에 변한다는 것을 상상할 때, 공변 추론을 하게 된다고 설명한 바와 같이, 양과 양 사이의 관계로 상황을 개념화하는 것은 공변 추론에 관련된다. 다섯째, 변하는 양을 인식하는 방법을 포함시켰다. 이는 Castillo-Garsow(2012)의 연구와 관련 있다. Castillo-Garsow(2012)는 공변 추론의 한 요인으로 변화(variation) 그 자체에 초점을 두었다. 즉, 한 양의 값에서의 변화를 학생들은 이산적 변화와 연속적 변화로 인식할 수 있다고 보았다. 연속적 변화는 다시 덩어리 연속 변화와 부드러운 연속 변화로 구분하였다. 덩어리 연속 변화는 값이 이산적으로 변한다는 생각과 비슷하지만, 일련의 값들 사이의 연속체에 대한 암묵적인 이미지를 가지고 있다. 덩어리로 변화에 대해 생각할 때, 학생의 이미지는 중간 값을 수반하지만, 값을 실제로 가지는 양에 대한 이미지를 수반하지 않는다. 변화에 대한 이런 이미지는 자를 끝에서 끝으로 놓고, 끝점을 찍는 것과 같다. 부드러운 연속 변화는 Thompson(2011)에서 극소량으로 변하는 값을 상상하면서, 그 극소량 안에서도 변하는 값을 생각한다고 설명한 내용과 유사하다.

한편, Thompson과 Carlson(2017)은 Thompson(2016)에서 제시한 <표 II-3>과 <표 II-4>를 수정하였다. 수정된 내용은 크게 세 가지로 생각할 수 있다. 첫째, 곱셈적 대상을 추가하였다. 곱셈적 대상을 개념화하는 것이 공변 추론에 필수적이라고 보았기 때문이다(Thompson, & Carlson, 2017). 누군가 정신적으로 하나와 다른 하나가 동시에 있는 새로운 개념적 대상을 만들기 위해 두

<표 II-5> 변화 추론 수준(Thompson, & Carlson, 2017, p.440)

수 준	설 명
부드러운 연속 변화 (smooth continuous variation)	변수 값의 변화를 구간들에 의해 증가하거나 감소하는 것으로 생각하며, 각 구간 안에서 변수 값이 부드럽고 연속적으로 변한다는 것을 생각한다. 변화를 같은 크기의 구간에 대해 생각할지도 모르지만, 꼭 그럴 필요는 없다.
덩어리 연속 변화 (chunky continuous variation)	변수 값의 변화를 고정된 크기의 구간들에 의해 변하는 것으로 생각한다. 구간들은 같은 크기일지도 모르지만, 꼭 그럴 필요는 없다. 예를 들어, 자를 놓는 것처럼, 0에서 1, 1에서 2, 2에서 3으로 변하는 변수 값을 상상한다. 자에 있는 수처럼 0과 1사이, 1과 2사이, 2와 3사이의 값은 덩어리의 부분이기 때문에 같이 따라온다. 그러나 변수는 0, 1, 2가 값으로 가지는 것과 같은 방식으로 하나의 값이 아니다. 또한, 변화는 자연수 양에서만 발생한다고 생각하지 않는다. 0에서 0.25, 0.25에서 0.5, 0.5에서 0.75와 같이 생각하는 것은 0에서 1, 1에서 2로 증가하는 것과 같다.
전체적인 변화 (gross variation)	변수의 값이 증가하거나 감소한다고 생각하지만, 변하는 동안 값을 가질 것이라는 생각을 거의 하지 않는다.
이산적 변화	변수는 구체적인 값을 가지는 것으로 생각한다. 변수는 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 값을 가져서 a에서부터 b까지 변하는 변수값을 볼 수 있지만, a_i와 a_{i+1}사이의 임의의 값이 있는 것으로 생각하지 않는다.
변화가 없다.	변수는 고정된 값을 가진다고 생각한다. 다른 고정된 값을 가질 수 있지만, 단순히 다른 상황을 상상하는 것이다.
상징으로서의 변수	변수는 상징이다. 변화와 관계없다.

양의 속성을 결합할 때, 곱셈적 대상을 형성하게 된다(Saldanha, & Thompson, 1998). Thompson과 Carlson(2017)은 그래프에서 공변의 의미를 나타내기 위해 두 양의 값으로부터 곱셈적 대상을 만드는 것의 중요함을 강조하였다. 이를 위해 Thompson(2016)은 그래프 상에 점을 놓는 것을 동시에 두 양의 값을 표현하는 곱셈적 대상으로 보았다. 단순히 순서쌍이 주어질 때 좌표평면에 점을 찍거나, 좌표평면 상의 점의 좌표값을 읽는 것을 의미하는 것이 아니다. 그래프 상의 점을 두 측정을 동시에 표현하는 곱셈적 대상으로 인식하지 못 한다면, 그래프를 공변량의 기록으로 볼 수 없다. 곱셈적 대상으로 좌표 평면 상에 순서쌍을 구성하는 것은 쉽지 않다. 둘째, Carlson 외(2002)에서 MA4는 입력 변수 변화의 일정한 증가량이라는 조건을 제시하였다. Thompson(2016)에서는 변수 값의 크기에 대한 설명이 구체적으로 제시되지 않았지만, 덩어리 연속 변화수준에서 설명한 예시는 균등한 크기의 구간에 대한 것이다. 따라서 부드러운 연속 공변과 덩어리 연속 공변에서도 변수 값의 크기가 같다고 생각할 수 있다. Thompson과 Carlson(2017)에서는 부드러운 연속 공변과 덩어리 연속 공변에 대한 설명에 크기가 같을 필요가 없다는 조건을 명시적으로 사용하였다. 따라서 일정한 구간뿐만 아니라 일정하지 않은 구간에서의 변화를 생각할 수 있다. 셋째, 값의 전체적인 조정(gross coordination of values)수준을 추가하여, 함께 변하는 전반적인 이미지를 설명하였다. 다음의 <표 II-5>와 <표 II-6>은 수정된 변화 추론 수준 및 공변 추론 수준이다.

또한, Thompson과 Carlson(2017)은 공변 추론을 기반으로 함수의 의미를 설명하였다. 함수는 한 양의 모든 값이 다른 양의 오직 하나의 값을 결정한다는 특성을 가지며, 동시에 변하는 두 양은 불변하는 관계가 있다는 것을 인간이 인식하는

<표 II-6> 공변 추론 수준(Thompson, & Carlson, 2017, p.441)

수 준	설 명
부드러운 연속 공변 (smooth continuous covariation)	한 변수 값에서의 증가나 감소(이후 내용에서, 변화)와 다른 변수 값에서의 변화를 동시에 발생하는 것으로 생각한다. 또한 모든 변수는 부드럽고 연속적으로 변하는 것으로 생각한다.
덩어리 연속 공변 (chunky continuous covariation)	한 변수 값에서의 변화와 다른 변수 값에서의 변화를 동시에 발생하는 것으로 생각한다. 또한 모든 변수는 덩어리 연속적 변화(chunky continuous variation)로 변한다고 생각한다.
값의 조정 (coordination of value)	한 변수의 값(x)과 다른 변수의 값(y)의 순서쌍들의 이산적인 수집(x, y)을 만드는 것에 관한 예상과 조정이다.
값의 전체적인 조정 (gross coordination of values)	“이 양은 증가하는 반면에, 저 양은 감소한다.”와 같이 함께 변하는 양의 값에 대한 전체적인 이미지를 형성한다. 개별적인 값들이 함께 변한다는 것을 생각하지 못한다. 대신에 두 양의 값에서 전체적인 변화 사이에 곱셈적이지 않은 연결을 상상한다.
값의 조정 전 (pre-coordination of value)	두 변수는 함께 변하지만, 동시에 발생하지 않는 것으로 생각한다. 곱셈적인 대상으로 값의 순서쌍을 만드는 것을 생각하지 않는다.
조정은 없다. (no coordination)	함께 변하는 변수에 대한 이미지를 가지지 않는다. 값의 조정을 하지 않고, 두 변수 중 한 변수 변화에 초점을 둔다.

것이라고 하였다. 즉, 함수를 인식하는 사람의 마음속에 독립인 양으로 선택한 것의 임의의 값으로부터 종속인 양으로 선택할 값을 결정하기 위해 “불변하는 관계”가 사용될 수 있다. 학생들이 함수를 불변하는 관계로 이해할 때, 함수의 그래프를 형태(shape)로 생각할 가능성이 적게 된다.

공변 추론 수준에 대한 이론이 수정을 거듭함에도 불구하고 공통된 특징이 있다. 첫째, 수준은 발달적이라는 것이다. 이는 모두 Saldanha와 Thompson(1998)의 연구를 기반으로 하였기 때문이다. Saldanha와 Thompson(1998)은 ‘발달적’이라는 용어를 사용하였다. 공변의 이미지는 수준으로 정의할 수 있고, 수준은 일련의 순서로 나타날 수 있다고 보았다. 둘째, 그래프 상에서 점을 찍는 행위에 의미를 부여한다. Carlson 외(2002)의 MA3는 입력의 각 새로운 구간에 대해 출력의 변화량을 고려하는 동안, 고정된 길이의 구간으로 x축을 분할하고, 그래프 상에 점을 찍는 것으로 관찰될 수 있다. 이는 점을 입력에 대한 출력의 변화량을 표현하는 것으로 생각하기 때문이다. Thompson과 Carlson(2017)은 그래프 상에서 점을 찍는 것을 동시에 두 양의 값을 표현하는 곱셈적 대상으로 보았다. 두 이론 모두 그래프를 공변량의 기록으로 본다. 셋째, 공변 추론은 행위로 표현되기 이전에 인간의 사고에서 시작한다. Carlson 외(2002)는 공변의 이미지를 각 이미지에 의해 뒷받침된 정신적 행동 및 행위로 표현하였다. Thompson과 Carlson(2017)은 공변 추론을 양적 추론처럼 상황을 이해하는 것으로 보았기 때문에, 공변 추론은 동시에 양의 값을 파악하는 방법을 계획할 때 가장 활성화된다고 하였다. 이 때 전략을 실행하는 것은 공변 추론을 표현하는 것으로 Carlson 외(2002)의 정신적 행동 및 행위와 비슷한 맥락이다. 이와 같이 공변 추론은 행위로 표현되기 이전에 인간의 사고에서부터 발생한다고 보았다.

이론적 배경에서 살펴본 바와 같이 공변 추론 수준에 대한 이론은 각각의 공통점과 차이점을 가지고 있다. 한편 Thompson과 Carlson(2017)은

Thompson(2016)의 공변 추론 수준을 기반으로 일부 추가된 공변 수준 체계를 제시하였기 때문에, 본 연구자들은 연구 분석에서 Carlson 외(2002)와 Thompson과 Carlson(2017)에서 제시한 공변 추론 수준을 이용하여 그래프 유형에 따른 학생들의 사고를 각각 분석하고자 한다.

III. 연구 방법

본 연구는 다음과 같은 이유로 질적 사례연구방법을 사용하였다. 첫째, 학생들이 그래프 과제를 해결하는 동안 나타나는 특징을 두 공변 추론 수준 이론을 사용하여 자세하게 분석하기 위해서이다. 둘째, 학생들의 학습과정을 분석한 결과를 토대로, 교육현장에서 같은 상황에 있는 다른 사례를 이해하고 도움이 될 수 있는 보다 구체적인 방법을 제시할 수 있기 때문이다. 따라서 그래프의 유형에 따른 중학생들의 공변 추론 수준에 대한 정보를 얻기 위해 사례연구방법이 적절하다고 판단하였다.

1. 연구대상

본 연구는 중학교 3학년 영재 사사교육 프로그램에 참여하는 2명의 학생을 대상으로 하였다. 두 학생은 모두 수학 사사교육 프로그램을 자발적으로 신청하였다. 한 명은 여학생 '학생 S'이고, 한 명은 남학생 '학생 K'이다. 학생 S는 주어진 과제를 성실하게 수행하는 편이다. 그러나 과제가 주어졌을 때, 과제의 의미를 파악하지 못하고 제시된 수치적 정보만을 이용해 숫자를 대입해서 답을 얻는데 초점을 두는 경향이 있으며, 왜 그렇게 수행하였는지에 대한 이유를 제시할 때에도 논리적 근거가 부족한 편이다. 학생 K는 수학, 과학에 대한 지식이 풍부하며, 문제를 해결하기 위해 알고 있는 모든 지식을 이용하여 수행하고, 자신의 풀이나 주장에 대해 이유를 타당하게 제시하려고 노력하였다. 이들은 정규학교 수업을 통해 일차함수, 일차함수의 기울기, 이차함수에 대해 학습을 한 경험이 있는 상태에서 사사교육 프로그램에 참여하였다.

2. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구에 사용된 자료는 6개월에 걸친 영재 사사교육 프로그램의 일부이다. 총 6회의 수업이 진행되었고, 1회당 수업 시간은 약 3시간 정도였다. 1회 수업 당 1~3개 정도의 비교적 적은 수의 과제를 해결하였는데, 이는 학생들이 왜 그렇게 생각하게 되었는지에 대해 자신의 생각을 표현하는 기회를 가능한 한 충분히 부여하고 이를 교사와 공유하기 위한 목적이 있었기 때문이다. 수업에 사용된 과제는 함수와 변화율에 관련된 과제가 대부분이었다. 따라서 모든 과제는 그래프로 그리고 표현하는 것이 가능하지만, 본 연구는 그래프를 구성하는 활동이 주된 목적인 과제만을 분석하였다. 특히 두 변수사이의 다양한 공변 관계를 관찰할 수 있도록 변화율이 일정한 상황, 변화율이 변하는 상황에 대해 질적 그래프와 양적 그래프를 구성하는 과제를 각각 1개씩 분석하여, 총 4개의 과제를 선택하였다. 학생을 면밀히 관찰하기 위해 모든 수업은 비디오로 녹화되고, 녹음기로 녹음되었다. 또한, 학생의 과제 수행을 자세히 분석하기 위해 학생 활동지를 따로 촬영하였다. 매 수업이 끝나면 같은 시간대에 이루어진 모든 활동을 동시에 분석할 수 있도록 비디오, 녹음기를 한 화면에 편집하였다. 학생 활동이 종료되면 학생들이 작성한 활동자료를 수집하여 분석에 활용하였다. 영재 사사교육 프로그램이 종료된 이후에는 학생들의 사고가 잘 드러나는 부분을 중심으로 내용을 정리하였다.

본 연구는 그래프 과제가 제시되었을 때, 학생

들의 공변 추론 수준을 두 이론 체계를 사용하여 분석하는 것이 목적이기 때문에, 과제별로 학생들의 공변 추론 수준을 확인하였다. 각각의 과제를 분석한 이후에 모든 과제를 종합하여 공변 추론 수준 사이의 관계를 분석하였다.

3. 과제소개

본 연구에서는 학생들이 두 변수사이의 다양한 공변 관계를 관찰할 수 있도록 변화율이 일정한 상황, 변화율이 변하는 상황에 대해 질적 그래프와 양적 그래프를 구성하는 과제를 제시하였다. 1차시에 학생 S가 결석하여 1차시에 사용한 과제를 2차시에 학생 S에게만 추가로 제공하였다. 과제는 <표 III-1>과 같은 순서대로 학생들에게 제시되었지만, 연구 결과는 학생들의 공변 추론 수준이 잘 드러나도록 양적 그래프, 질적 그래프의 순서대로 학생의 반응에 따라 분석하였다. 구체적인 과제 소개는 연구 결과에서 학생들의 과제 수행을 분석할 때 제시하도록 하겠다.

<표 III-1> 과제 제시 순서

제시 순서	그래프 유형	일 시	기타
[과제4]	질적	1차 5월 16일	학생S 결석
[과제4]		2차 6월 13일	학생S 참석
[과제3]			
[과제1]	양적		
[과제2]		3차 7월 11일	

IV. 연구 결과

1. 양적 그래프 과제를 해결하는 과정에서 드러나는 학생들의 특징

가. 변화율이 일정한 양적 그래프 과제 해결 과정 분석

아래에 제시된 과제는 변화율이 일정한 일차함수에 관련된 것으로, 시간에 따른 거리의 함수식이 주어졌을 때, 시간에 따른 속력의 그래프를 그리는 문제이다.

[과제1] 어떤 물체 위를 올라가는 개미가 이동한 시간 t초와 거리 $h$cm는 $h(t)=3t$인 관계를 만족한다. 이 때 시간에 따라 얼마나 빨리 가는지에 대한 그래프를 그려보아라.

학생 S는 [과제1]을 해결하기 위해 문제에서 주어진 함수식 $h(t)=3t$의 값을 $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식에 대입한 후, 그래프를 그렸다([그림 IV-1] 참고). 다음 <발췌문 1>은 학생 S의 문제해결에 대한 대화내용이다.

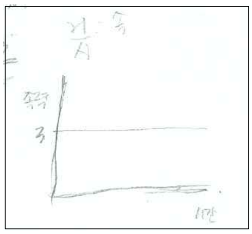
<발췌문 1>

학생 S: 시간에 따라 얼마나 빨리 가는 지이니깐. ①이것[3](x축)을 시간으로 두고 이것(y축)을 속력으로 두었는데 시간이 n이면 거리는 3배를 가는 거잖아요. 그러면 $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$이기 때문에 속력은 3^n씩 가니깐

교사: 다시 한 번 설명해줄래? 이해를 못해서 왜 갑자기 3의 n제곱...

학생 S: 속력으로 두었으니깐. 시간이 n초면 거리는 $3n$이잖아요. $\text{속력} = \text{시간} \times \text{거리}$이기 때문에, 아 $\text{거리} = \text{시간} \times \text{속력}$이기 때문에 $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$이기 때문에 그러면 그냥 3? 아니 그게 아니고... 그런데 계속 증가하면 3이면 ②시간이 계속 높아지고 거리가 높아지는데 ③속력이 3이라는 말은 계속 그냥 일정한데요.

3) 괄호안의 내용은 학생이 언급하지 않았지만 연구자들은 문맥상 괄호와 같은 내용일 것이라고 판단하였다.



[그림 IV-1] 학생 S의 [과제1]의 문제 해결

학생 S는 함수식을 잘못 적용하여 속력이 3^n이라고 말하였지만, 교사와의 대화를 통해 속력이 3^n이 아니라 3으로 일정하다는 것을 깨달았다. 그 후 시간에 따른 속력의 그래프를 올바르게 그릴 수 있었다. 학생 S는 $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식에 주목하여 구체적인 계산을 통해 문제를 해결하였다. <발췌문 1>의 ① “이것(x축)을 시간으로 두고 이것(y축)을 속력으로 두었는데”에서 알 수 있듯이, 학생은 좌표축을 시간과 속력으로 설정하고 문제를 해결하고 있다. 이와 같이 두 좌표축에 이름을 붙이는 것은 MA1의 행위이다. 또한, 문제에서 제시한 $h(t)=3t$의 그래프를 그리고 해석하는 과정에서 이를 <발췌문 1>의 ② “시간이 계속 높아지고 거리가 높아지는”으로 표현하고 있는 것으로 보아 두 변수의 방향을 조정하는 모습을 보이고 있다. 즉, MA2의 특징을 보이고 있다. $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식을 적용하여 그래프를 그렸지만, 학생 S는 x의 값의 변화량인 경과된 시간과 y의 값의 변화량인 경과된 거리를 공식에 적용하였다기보다는 구체적인 x의 값 n과 y의 값 $3n$을 $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식의 분모, 분자에 각각 적용한 것으로 보아 두 변수의 변화량을 조정하는 MA3의 특징이라고 보기 어렵다. 따라서 학생 S는 Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준 체계에서 2수준(L2. 방향수준)에 해당한다고 볼 수 있다.

한편, <발췌문 1>의 ② “시간이 계속 높아지고, 거리가 높아지는데”라는 표현은 Thompson과 Carlson(2017)의 ‘값의 전체적인 조정’ 수준의 특징이기도 하다. 시간과 거리의 변화관계를 전반적인 이미지를 통해 표현하고 있기 때문이다. <발췌문 1>의 ③인 “속력이 3이라는 것은 계속 일정한데요.”라는 표현은 시간과 거리를 곱셈적인 대상으로 이해하고 표현하기 보다는, 단순히 $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식에 대입한 결과로 곱셈적인 연결을 상상하지 못하였다고 봐야하고, 이 역시 ‘값의 전체적인 조정’ 수준의 특징으로 추측할 수 있다.

학생 K도 구체적인 함수식이 주어졌기 때문에 주어진 수치를 이용하여 문제를 해결하고 그래프로 표현하였다([그림 IV-2] 참고). 다음 <발췌문 2>는 학생 K의 과제해결에 대한 대화내용이다.

<발췌문 2>

학생 K: 속력은 $\frac{\text{거리}}{\text{시간}}$이니깐 h가 $3t$라 그랬으니깐 거리는 $3t$이고 시간은 t이니깐 이게(3을 가리키며) 속력인 거잖아요. 나누면 3. 속력

교사: 처음부터 이렇게 풀었어?

학생 K: 아니요. 그래프로 그렸습니다. 거리-시간 그래프를 그려서 이 관계($h(t)=3t$)가 성립한다고 했으니깐 t에다가 1넣으면 3이 나오니깐 3, 1 해서 이렇게((0, 0)과 (1, 3)을 연결하여 그린) 그리면 이런 그래프($h(t)=3t$의 그래프)가 나오니깐 시간이 1일 때 그래프가 3이면 나눠요. $\frac{\text{거리}}{\text{시간}}$로. 그러면 속력이 3이겠죠.

교사: 그 한 점만으로 알 수 있는 거야?

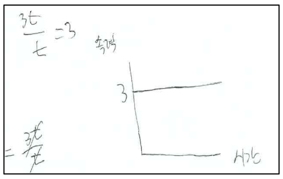
학생 K: 두 점이죠.

교사: 그니깐 두 점. 한 상황만 가지고 속력을 알 수 있는 거야?

학생 K: ①<u>직선의 그래프이니깐 어디를 점으로 잡든 간에 기울기가 같잖아요.</u>

교사: 그럼 $\frac{1}{2}$로 잡아도 똑같은 거야?

학생 K: 네. $\frac{1}{2}$이면 t에 $\frac{1}{2}$을 넣은 거잖아요. 거리는 $\frac{3}{2}$이고 시간은 $\frac{1}{2}$이니깐 $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$이니깐 나누면 3이 되거든요.



[그림 IV-2] 학생 K의 [과제1]의 문제 해결

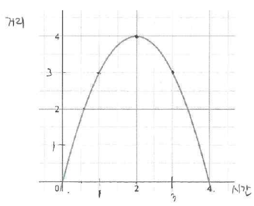
학생 K는 좌표평면 상의 두 좌표축을 시간과 속력으로 설정하였다. 이는 MA1의 특징이다. 두 변수의 변화의 방향을 조정하는 MA2의 특징은 찾을 수 없었지만, <발췌문 2>의 ① “직선의 그래프이니깐 어디를 점으로 잡든 간에 기울기가 같잖아요.”에서 기울기를 두 변수의 변화량을 조정하였다고 해석하면 MA3, 기울기를 두 변화량에 대한 몫으로 생각하고 평균변화율을 조정하였다고 해석하면 MA4라 볼 수 있다. [과제1]에서 학생 K는 정의역의 일정한 증가량에 대한 기울기를 계산했기보다는 $(0,0)$과 다른 한 점 사이의 시간과 거리의 변화량을 통해 x의 값의 변화량과 y의 값의 변화량을 계산한 것으로 보여 MA3의 행위라고 추측할 수 있다. 따라서 Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준으로는 3수준 (L3. 양적 조정 수준)에 해당한다고 판단하였다.

<발췌문 2>에서 알 수 있듯이, 학생 K는 속력을 구하기 위해서 어떤 점을 잡든 간에 두 점을 잡아 기울기를 표현한다고 하였지만, 두 점 중 한 점은 원점으로 고정되어 있다고 볼 수 있다. 즉, $(0,0)$과 다른 한 점의 변화량을 통해 속력을 계산하고 있다. 또한, $h(t)=3t$라는 함수식이 주어졌기 때문에, 주어진 문제는 1차함수라는 것과 t에 1을 대입하면 3이 나온다는 사실을 이용하여 $(0,0)$과 $(1,3)$을 좌표평면에 찍고 선을 연결하여 시간-거리 그래프를 그렸다. 비슷한 방식으로 $(1,3)$, $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, $(t,3t)$를 $\text{속력}=\frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식에 대입하여 시간-속력 그래프를 그렸다. 이산적인 순서쌍을 만드는 행동을 통해 Thompson과 Carlson (2017)의 ‘값의 조정’ 수준의 특성을 보였다.

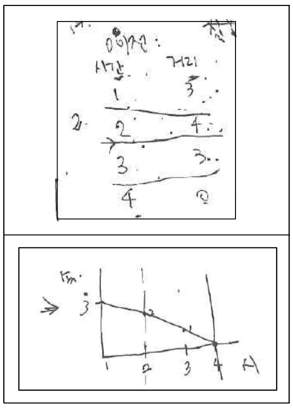
나. 변화율이 변하는 양적 그래프 과제 해결 과정 분석

아래에 제시된 과제는 변화율이 변하는 이차함수에 관련된 과제이다. 좌표축에 구체적인 수치가 있으며, 좌표평면에 격자점이 있는 시간에 따른 거리의 그래프가 주어졌을 때, 시간에 따른 속력의 그래프를 그리는 문제이다.

[과제2] 다음 그래프는 어떤 물체가 운동하는 과정을 시간에 따른 위치의 변화로 나타낸 것이다. 시간에 따른 속력의 그래프로 나타내시오.



학생 S와 학생 K는 [과제2]에 대해 서로 다른 형태의 그래프를 그렸다([그림 IV-3], [그림 IV-4] 참고). 다음은 학생 S의 문제해결 과정이다.



[그림 IV-3] 학생 S의 [과제2]의 문제 해결

학생 S는 속력을 계산하기 위해 경과된 시간 동안에 경과된 거리를 구하기보다는, [과제1]과 마찬가지로 한 점에 대한 정보만 이용하여 속력을 계산하였다. 즉, 그래프 상에 있는 값 중 $(1,3),(2,4),(3,3),(4,0)$의 4개의 순서쌍을 이용하여 $\text{속력}=\frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식에 각각의 순서쌍의 값을 대입한 후 속력을 구하였다.

그 후 좌표평면 상에 4개의 순서쌍을 점으로 표시하고, 점을 연결하여 감소하는 선형 함수로 그렸다. 다음 <발췌문 3>은 [과제2]의 문제해결에 대한 학생 S의 대화내용이다.

<발췌문 3>

학생 S: 시간이 1일 때 거리가 3이면, 속력이 3이잖아요. (시간이) 2일 때 (거리가) 4이고, (그럼 속력이) 2이잖아요. (시간이) 3일 때, (거리가) 3이고, (시간이) 4일 때, (거리가) 0라서 이렇게 했는데....

⋮

학생 S: 여기(x좌표축의 값이 1인 점)랑 여기(x좌표축의 값이 3인 점)랑 거리가 같잖아요.

교사: 1이랑 3일 때?

학생 S: 네. 시간을 하는 데 속력이 계속 감소하는 게 맞는 건지...

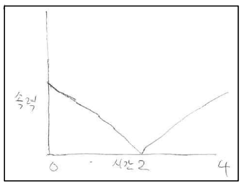
교사: 계산을 통해서 나오긴 했지만, 실제 같을까 하는 의심이 들었다는 거네? 어떨 거 같아?

학생 S: (x의 값이)3일 때랑, (x의 값이)1일 때랑, 같아야 되는 거 아니에요? 속력이? ①거리가 잘 가다가....어떤 충격 때문에 다시 돌아온다는 거니깐, 그게 똑같이 그래프로 만들어진다면, 여기는((2, 4)의 점) 어떤 속력이 어떤 충격으로 돌아올 때, 이거(x의 값이 3)랑 이거(x의 값이 1)가 같아야 된다고 생각해서....

좌표평면 상의 좌표축을 시간과 속력으로 표현하고 있으므로 MA1의 특성이 보인다. 또한, <발췌문 3>의 ① "거리가 잘 가다가....어떤 충격 때문에 다시 돌아온다는 거니깐"에서 알 수 있듯이, 두 변수의 변화 방향을 설명하고 있기 때문에, MA2의 특성이 있다고 판단된다. 따라서 Carlson 외(2002)의 공변 추론 체계에 따르면, 학생 S는 2수준(L2. 방향 수준)이다.

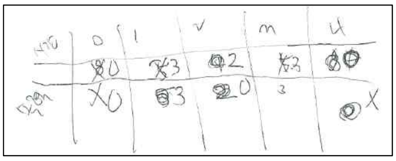
한편, 구체적인 수치가 주어진 문제 상황이기 때문에 x의 값과 y의 값을 순서쌍으로 표현을 하고, $\text{속력}=\frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ 공식을 사용하여 몇 개의 점을 계산하고, 그래프 상에 점을 찍고 연결하여 그래프를 작성하였다. 이는 '값의 조정' 수준에 해당하는 특성이다. Thompson과 Carlson(2017)에서는 Castillo-Garsow(2012)의 연구를 예를 들어 학생들이 점을 찍고 점을 선분으로 연결한 경우, 기껏해야 '덩어리 연속 공변' 수준이라고 하였다. 그러나 학생 S는 점과 점 사이의 구간에 있는 모든 값을 고려하였다기보다는 각 점에 대해서 구체적인 계산과 표현을 하였다. 이는 '덩어리 연속 공변' 수준이 아님을 의미한다.

학생 K는 문제를 처음 접하자마자, 주어진 수치적 정보와 함수식을 무시하고, 시간-거리 그래프의 형태만을 보고 [그림 IV-4]와 같이 시간-속력 그래프를 그렸다.



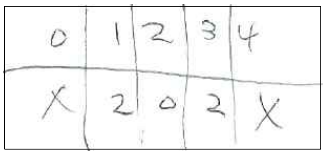
[그림 IV-4] 학생 K의 [과제2]의 문제 해결

그 후 주어진 수치를 그래프 표현에 맞추어 계산하였다. 변화율이 일정한 함수와 마찬가지로, 속력을 구하기 위해 원점과 특정한 점 사이의 평균변화율을 계산하고 있다. 그러나 시간이 2일 때의 속력처럼 변화율이 0인 점에서는 그 점 근방에서의 평균변화율을 계산하고 있어, [그림 IV-5]와 같이 2가지의 다른 계산방법을 사용하여 표를 작성하였다.



[그림 IV-5] 학생 K의 [과제2]의 수정 전 활동지

다음의 발췌문은 변화율이 0인 점과 변화율이 0이 아닌 점에서 변화율을 계산한 과정을 설명한 것이다. 학생 K는 이에 문제의식을 느끼고, 변화율이 0일 때 계산한 방법을 다른 점에 적용하여 [그림 IV-6]과 같이 해결하였다.



[그림 IV-6] 학생 K의 [과제2]의 수정 후 활동지

Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준틀로 학생 K의 문제해결과정을 살펴보면, 좌표평면의 좌표축을 시간과 속력으로 설정하였기 때문에 MA1의 행위를 찾을 수 있다. 문제에서 주어진 함수의 그래프에 대해 <발췌문 4>의 ① “이 거리-시간 그래프에서, (x의 값이) 2가 되었을 때, 그래프가 내려가요.”의 표현은 x의 값의 변화에 따른 y의 값의 변화 방향을 조정하는 것으로 볼 수 있다. 이는 MA2의 행위이다. 한편, [그림 IV-6]의 활동은 x의 1, 2, 3의 값에 대하여 각 자연수 값을 기준으로 2의 간격에 대한 속력을 나타낸다. 이는 MA3의 행위로 볼 수 있으나, MA4의 행위로 보기는 어렵다. 학생 K는 각 구간에 대한 평균변화율을 나타내기보다는, x의 값의 변화량과 y의 값의 변화량을 $\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$에 대입하여 계산한 결과이기 때문이다. 학생 K도 학생 S처럼 수치적인 값에 초점을 두어 계산하는 데 집중하였기 때문이다. 따라서 학생 K는 Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준에서 3수준(L3. 양적 조정수준)의 모습을 보였다.

또한, <발췌문 4>의 ②와 같이 “1만큼 갔을 때, 3만큼 가니깐”라는 표현은 단순히 $(1, 3)$의 값을 표현한 것이 아니라, x의 값이 0에서 1일 때, y의 값이 0에서 3이라는 의미로 사용했을 가능성이 있다. 이는 [과제4]의 문제 상황을 미루어보아도 알 수 있다. 따라서 학생 K는 Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론틀에 따르면 ‘덩어리 연속 공변’ 수준의 특성을 보였다.

<발췌문 4>

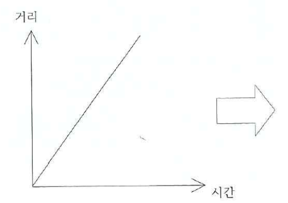
교사: (x의 값이) 2일 때, 속력은 얼마라는 거야?
학생 K: 0이요. ①이 거리-시간 그래프에서, (x의 값이)2가 되었을 때, 그래프가 내려가요.
교사: 내려가는 데 왜 0일까?
학생 K: 거리가 더 이상 증가하지 않아서요.
교사: 그게 무슨 말이야? 거리가 더 이상 증가하지 않는다는 게?
학생 K: 시간이 2일 때, 거리가 변하지 않아요. 평균속도가 0이요.
교사: 평균속도를 어떻게 구한 거야? 2일 때?
학생 K: 2에서 한 칸 뒤로 간 값과 한 칸 앞으로 간 값의 평균으로...
⋮
교사: 그럼 (x의 값이)1일 때는?
학생 K: 1일 때는 0과 2
교사: 0과 2를 넣었는데 어떻게 3이라는 숫자가 나온 거지?
학생 K: $\frac{\text{거리}}{\text{시간}}$이니깐 ② 1만큼 갔을 때, 3만큼 가니깐, 속력은 3. 시간이 1일 때, 속력이 3인 것은 맞는 거 같은데...
교사: 시간이 2일 때, 계산한 거랑, 좀 다르네?
학생 K: 그게 문제예요...
⋮
교사: 학생 K는 지금 무엇 때문에 어려움을 겪는 거 같아?
학생 K: 제 생각엔 시간이 2일 때, 속력이 0일거라 생각을 하는데...음...식으로 생각을 해보면, 2일 때, 속도가 0이 되는 식을 찾아보고 있습니다.

정리하면, 양적 그래프 문제에서 학생 S는 [과제1], [과제2] 모두 Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준에서 2수준(L2. 방향 수준)을 보였다. Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론 수준은 [과제1]에서 '값의 전체적인 조정' 수준, [과제2]에서 '값의 조정' 수준으로 보였다. 한편, 학생 K는 Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준에서 [과제1], [과제2] 모두 3수준(L3. 양적 조정 수준)을 보였다. Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론 수준은 [과제1]은 '값의 조정' 수준, [과제2]는 '덩어리 연속 공변' 수준을 보였다. 양적 그래프 과제는 구체적인 수치가 주어졌기 때문에, 학생들은 두 변수의 변화관계에 주목하고 표현하는 활동보다 공식이나 대수식을 이용하여 계산하는 것에 집중하는 경향이 있었다.

2. 질적 그래프 과제를 해결하는 과정에서 드러나는 학생들의 특징

가. 변화율이 일정한 질적 그래프 과제 해결 과정 분석

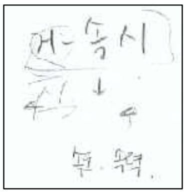
아래에 제시된 과제는 변화율이 일정한 일차함수에 관련된 과제로, 시간에 따른 거리의 그래프가 주어졌을 때, 시간에 따른 속력의 그래프를 질적으로 그리는 문제이다.

> [과제3] 다음은 시간에 따른 거리를 나타낸 그래프이다. 시간에 따른 속도 그래프가 어떻게 될지 상상하여 그려보아라.
>
> 
>

학생 S는 [과제3]이 제시되었을 때, 질적 그래프를 제대로 그리지 못하였다. 제시된 문제는 시간, 거리, 속력이라는 세 개의 요소와 관련되기 때문에, 시간에 따른 속도의 그래프를 그리기 위해서 거리 = 시간 × 속력 공식이 필요하다고 생각하였다. 구체적인 수치가 주어지지 않았기 때문에, 거리 = 시간 × 속력에 어떠한 숫자나 문자도 대입할 수 없었다. 대신 학생 S는 $\underset{\uparrow}{\text{거리}} = \underset{\uparrow}{\text{시간}} \times \underset{\downarrow}{\text{속력}}$ 와 같이 공식에 화살표를 사용하여 [그림 IV-7]처럼 증가와 감소를 표현하였다. 시간과 거리가 모두 증가하고 있다는 것을 알고 있기 때문에 등식이 성립하기 위해서 속력은 감소할 것이라고 생각하고 있다. 따라서 감소하는 그래프를 그렸다. <발췌문 5>는 문제를 해결한 후 교사와 학생 S의 대화내용이다.

<발췌문 5>

> 학생 S: (제시된 문제를 가리키며) ①거리가 점점 커지면 시간이 점점 늘어나잖아요.
> 교사: 거리가 커지면 시간이 늘어나?
> 학생 S: 그러면 거리는 점점 늘어 가는데, 시간도 점점 늘어가니깐 속도는....
> ⋮
> 교사: (학생 S가 해결한 그래프를 가리키며) 이 그래프에서 속도는 왜 감소하는 거야?
> 학생 S: 거리가 점점 빨라....거리가 점점 늘어가고, 시간은 점점 늘어나니깐.
> 교사: 거리가 늘어나고, 시간이 늘어나는 데, 속도는 왜 감소할까? 어떤 연관관계가 있지? 속도는 점점 작아져서...
> 학생 S: ②(속도는 점점 작아져서...)시간도 점점 늘어나요.
> ⋮
> 교사: 어느 점에서는 속도가 0인 시간이 있다는 거네?
> 학생 S: 그렇게 될 수가 없는데요?
> 교사: 속도가 왜 0이 될 수 없어?
> 학생 S: 속도가 이 만큼 갔을 때, 시간은 0이니깐,



[그림 IV-7] 학생 S의 [과제 3] 활동지의 일부

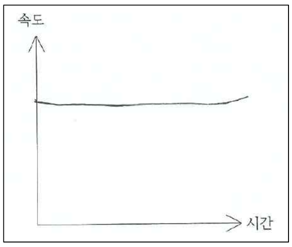
학생 S는 [과제1]의 양적 그래프를 올바르게 그렸기 때문에, 교사는 학생에게 [과제1]과 [과제3]을 비교하도록 하였다. 학생 S는 비교를 통해 질적 그래프와 양적 그래프가 동일한 문제임을 알고 [과제3]을 수정하였지만, 질적 그래프 자체에서 시간에 따른 속력의 의미를 여전히 이해하지 못하였다. 학생 S는 정규교육과정을 통해 1차 함수와 1차 함수의 기울기를 학습하였다. 그럼에도 불구하고 1차 함수에 해당하는 문제를 제시하였을 때, 기울기에 대한 의미가 부족하고 시간과 거리의 변화관계를 인식하지 못하였다.

또한 <발췌문 5>에서 알 수 있듯이, 시간에 따른 거리의 그래프에서 학생 S는 ①처럼 "거리가 점점 늘어나면, 시간은 점점 늘어난다."고 표현하고 있으며, 시간에 따른 속력의 그래프는 <발췌문 5>의 ②와 같이 "속도가 점점 작아지면, 시간은 점점 늘어난다."고 표현하고 있다. 이는 Carlson 외(2002)의 공변 추론 수준에서 MA2의 행위이며 따라서 2수준(L2. 방향 수준)에 해당한다. 이 표현은 또한 Thompson과 Carlson(2017)에서 '값의 전체적인 조정' 수준에 해당한다. 그러나 학생 S는 거리를 독립변수로, 시간을 종속변수로 표현하였다. 속도가 0인 경우에 대한 학생 S의 설명에서 명확히 드러난다. 교사는 속도가 0일 때 시간이 있는지의 여부를 묻자, 이를 속도가 어떤 양만큼 있을 때, 시간이 0인 경우로 설명하고 있다. 이렇듯 두 변수는 변화관계가 있다는 것을 이해하고 있지만, 거리에 따른 시간의 변화관계로 표현하고 있다. 우리가 일반적으로 말하는 독립변수와 종속변수를 바꾸어서 이해하고 있다.

학생 K는 [그림 IV-8]과 같이 그래프를 그리고 <발췌문 6>처럼 간단명료하게 [과제3]을 해결하였다.

<발췌문 6>

학생 K: ①시간이 갈수록 거리가 증가하는 데, 직선이잖아요. ②일정하게 증가했다는 소리니깐, 속도는 일정하겠죠. 그래서 시간이 지남에 따라서 속도는 변하지 않아서, 그래서 속도는 일정합니다.



[그림 IV-8] 학생 K의 문제 해결 활동지의 일부

<발췌문 6>의 ① "시간이 갈수록 거리가 증가하는 데"의 표현은 두 변수의 변화 방향을 조정하는 MA2의 행위를 나타내고 있으며, <발췌문 6>의 ②'일정하게 증가했다'는 표현은 입력값에 대한 산출값의 비를 머릿속으로 상상하고 표현한 말이다. 이는 입력값의 일정한 증가량에 따른 함수의 평균변화율을 조정하는 MA4의 행위로 판단할 수 있다. 따라서 학생은 4수준(L4. 평균비율 수준)으로 볼 수 있다.

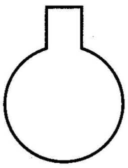
또한, <발췌문 6>의 ① "시간이 갈수록 거리가 증가하는 데"의 표현은 변하는 양의 값에 대한 전체적인 이미지를 형성하고, 양에 대한 개별적인 값들은 생각하지 않으므로 '값의 전체적인 조정' 수준의 특징을 보이고 있다. 그러나 속도가 일정하기 때문에 그래프를 직선으로 표현했

고, 입력값에 대한 산출값의 비를 통해 시간과 거리 사이의 곱셈적인 연결을 보였다. ‘값의 전체적인 조정’ 수준의 특징 중의 하나는 두 양의 값의 변화 사이에 비 곱셈적인 연결이기 때문에, ‘값의 전체적인 조정’ 수준보다는 높은 수준일 것으로 판단하였다.

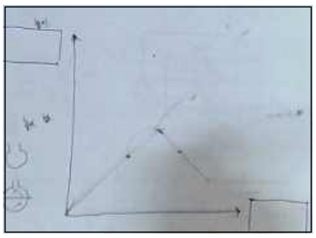
나. 변화율이 변하는 질적 그래프 과제 해결 과정 분석

변화율이 변하는 질적 그래프 과제는 구체적인 실생활 맥락의 상황이 주어졌을 때 그래프로 표현하는 것이다. 즉 [과제4]는 둥근 플라스크 모양의 병에 일정한 속도로 물을 넣는 상황이 주어졌을 때, x좌표축과 y좌표축에 들어갈 변량을 구하고, 이를 그래프로 표현하는 것이다. 이 문제는 학생 S와 학생 K의 문제해결 수준 차이가 가장 컸다.

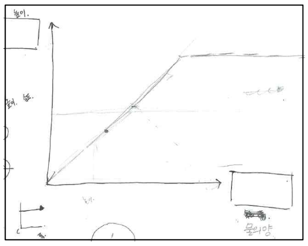
[과제4] 일정한 속도로 아래 용기에 물을 따를 때 용기에 담긴 물의 높이 변화를 그래프로 표현해 보고 그 이유를 제시하여라.



다음은 [과제4]에 대한 학생 S의 해결방식이다.



[그림 IV-9] 학생 S의 [과제4]의 수정 전 활동지



[그림 IV-10] 학생 S의 [과제4]의 수정 후 활동지

학생 S는 두 변량을 구하기 위해 여러 차례 수정하였다. 그래프를 그리는 데 있어 어려움을 경험하면서 수정한 것으로 보인다. 처음에 x좌표축은 속도, y좌표축은 높이로 설정하였다가([그림 IV-9] 참고), x좌표축을 폭, y좌표축을 높이, 결국에는 x좌표축은 물의 양(부피), y좌표축은 높이로 결정하였다([그림 IV-10] 참고). 그래프도 역시 한 차례 수정을 하였다. <발췌문 7>은 학생 S가 최종적으로 그래프를 수정한 이후의 대화내용이다.

<발췌문 7>

학생 S: (한 참 생각 후) 여기(x좌표축)를 물의 양으로 바꾸어요.
교사: 이것의(비커의 목 부분) 의미가 뭐야?
학생 S: ①높이가 점점 커....아. 높이가 일정. 아니구나. 점점 커지잖아요.
⋮
교사: 일정하게 차는 거야? 물이?
학생 S: 일정하게 차.....여기서 이 만큼(비커의 아랫부분) 찰 때랑, 이 만큼(비커 전체) 찰 때랑 물의 양은 더 커지잖아요. 반 개를 찰 때랑 한 개를 다 찰 때, ②물의 양은 더 커지는 데, 들어가는 양이 더 작아지는 거 아니에요?
교사: 물이 들어가는 양이 더 작아진다고?
학생 S: 네. 반절을 자를 때, 이 만큼(비커의 아랫부분) 들어가는 물의 양이랑 이 만큼(비커 전체) 들어가는 물의 양은 다르잖아요.
교사: 아까 말했던 거 다시 말하는 거지? 같은 높이에 대해서
학생 S, 교사 동시에: 들어가는 물의 양은 다르다.
교사: 그래서? 그것을 고려해서 그래프를 그린거야?

학생 S: 그래서 이렇게 반절을 잘랐을 때는 여기서부터 여기까지는(위쪽 반구를 가리키면서) 증,..감소하는 데, 이 원에서 크게 볼 때는...
교사: 뭐가 감소한다는 말이지?
학생 S: 높이가...

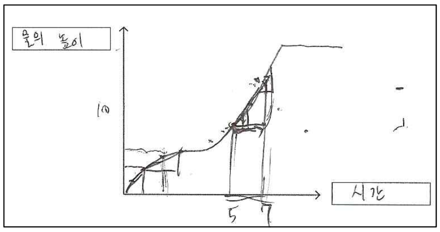
학생 S는 물의 양이 많아질 때 높이가 다르게 된다는 것을 인식하였지만, 구체적으로 높이가 어떻게 달라지는 지 설명하지 못하였다. 또한, y 좌표축을 높이로 설정하였지만, 설명하고 있는 내용은 용기의 폭이다. 물의 양에 따른 높이의 변화를 설명하기보다는, 물의 양에 따른 용기의 폭에 대해 설명하고 있다. 즉, 학생 S는 물의 양이 많아질수록 용기의 폭은 아랫부분부터 차례로 점점 커졌다가 작아졌다가 일정한 것으로 표현하고 있다. 둥근 플라스크의 목 부분에 대해 설명을 할 때, <발췌문 7>의 ① "높이가 점점 커....아. 높이가 일정. 아니구나. 점점 커지잖아요."라고 표현한 것처럼, 둥근 플라스크의 문제 상황을 보고 물의 양이 많아질수록 높이가 커진다는 것을 알고 답변을 하려다가, 자신이 그린 그래프에서는 높이를 일정하게 표현하였기 때문에, 잠시 멈추고 수정하여 대답하였다. 그래프에 대한 설명도 수정하기 전의 그래프에 대한 내용과 일치한다. 학생 S는 <발췌문 7>의 ② "물의 양은 더 커지는 데, 들어가는 양이 더 작아지는 거 아니에요"와 같이 변수의 방향을 설명하는 MA2의 행위를 찾아볼 수 있다. 그러므로 Carlson 외(2002)에서 2수준(L2. 방향 수준)에 해당한다고 판단하였다.

두 변수에 대한 전반적인 이미지를 통해 변화관계만 설명할 뿐 두 변수의 변화율을 표현하지 못한 것으로 미루어 두 변수에 대해 곱셈적이지 않은 연결을 한 것으로 보인다. 따라서 학생 S는 Thompson과 Carlson(2017)에서 '값의 전체적인 조정' 수준의 특징을 보이고 있다.

학생 K는 [과제4]에 대해 [그림 IV-11]과 같이 그래프를 그렸다. <발췌문 8>은 학생 K가 문제 상황을 그래프로 표현한 대화내용이다.

<발췌문 8>

학생 K: 용기 아랫부분에서는 물이 차오를수록...폭이 점점 넓어지기 때문에, 물이 차오르는 속도가 느려져요. 잠시만요... 그러다가 용기의 중심부에서 그 이상으로 올라가게 되면 올라갈수록 폭이 좁아지기 때문에 용기에 물이 차오르는 속도가 빨라지고, 목 부분에서는 다시 일정하게 가다가 넘치게 되요.
교사: 그럼 상황별로 설명을 해줄래?
학생 K: 여기 부분은...이제 용기의 아랫부분의 그래프이고, 시간이 지날수록 점점 높아지는...물이 차오르는 속도가 높아지는 것이니깐...용기의 중앙부의 윗부분이....



[그림 IV-11] 학생 K의 [과제4] 활동지의 일부

학생은 구체적인 수치가 주어지지 않은 상황에서 모든 입력값에서 발생하는 전체 과정을 상상하면서 표현하고 있다. 위의 첫 문단의 대화내용은 부피에 따른 높이의 변화관계를 속도 개념으로 설명하고 있다. 이는 입력값의 일정한 증가량과 함수의 평균변화율을 조정하는 MA4의 행위로 해석할 수 있다. 그러나 학생 K는 그래프 상에서 좌표축을 각각 시간과 물의 높이로 설정하여 시간에 따른 물의 높이의 그래프를 그리고, 마지막 문단의 대화내용처럼 시간에 따른 높이의 변화관계를 속도로 말하고 있다. 이와 같이 학생 K는 독립변수로 시간의 개념과 부피의 개

념이 혼재하고 있다. 이는 속도를 표현하기 위해서 학생 K는 시간의 개념이 필요하다고 보고 있으며, 통상적으로 접한 함수는 x좌표축을 시간으로 정하는 경우가 많기 때문에 습관적으로 x좌표축을 시간으로 생각하였을 가능성이 있다. 또한, 시간이 흐름에 따라 부피도 증가하기 때문에 학생은 부피와 시간을 같은 의미로 사용하였을 가능성이 있다. Thompson과 Carlson(2017)에서는 이를 한 양 안에 암묵적인 이미지로 다른 양이 포함된 것으로 보고 있다. 학생 K의 경우에 부피의 개념 안에 시간의 개념이 암묵적으로 포함되었을 가능성이 있다.

다음의 <발췌문 9>와 <발췌문 10>은 [과제4]를 평균변화율과 순간변화율과 관련지어 설명한 대화내용이다.

<발췌문 9>

교사: 여기를 5초라고 하자. 여기를 7초라고 써보겠어?([그림 Ⅳ-12] 참고) 그럼 5초일 때랑 7초일 때 중 어느 게 더 빨라?
학생 K: 7초일 때요. 기울기가...아니...그래프가 올라가면 더 가파르기 때문에..
교사: 그래프가 올라가면 기울기가 더 가파르기 때문에?
학생 K: ①<u>같은 기간 안에 주어졌을 때</u>, 가파를수록, 어쨌든, 늘어나는 길이가 더 속도가 빠르다는...
교사: 가파르다는 의미가 뭐야?
학생 K: ②<u>시간이 늘어날 때</u>, 높이가......가파를수록 ③<u>시간이 증가할 때</u>, 물의 높이가 증가하는 양이 많아지는 거겠죠. 시간이 지날 때, 물의 높이가 더 많이 증가할수록 그래프에서는 더 가파르게 표현이 되요.
교사: 그럼 시간이 흐르고 있어야 되겠네? 그러면?
학생 K: 네.

<발췌문 9>의 ①“같은 기간 안에 주어졌을 때”, ②“시간이 늘어날 때”, ③“시간이 증가할 때” 등과 같은 표현에서 알 수 있듯이 시간을 개별적인 단일한 수로 보는 것이 아니라 연속적인 하나의 덩어리로 보고 있다. 비슷한 방식으로 물의 높이도 하나의 덩어리로 보고 있다. 이렇듯 학생은 ‘덩어리 연속 공변’ 수준에 대한 표현을 사용하고 있다.

<발췌문 10>

학생 K: (잠시 생각하며.) 속도라는 게, 딱 그 위치의 속도를 정확하게 안게 아니라, 한 점과 한 점 사이에서 얼마나 이동했느냐를 따져서 속도를 구한 거 같더라고요. 그냥 점만 잡아서 구하면, 속도를 구할 수 있을 거 같아요.
⋮
교사: 아. 평균속도를 말하는 거야? 그럼 앞부분이 빨라? 뒷부분이 빨라? (변곡점을 기준으로 앞 부분과 뒷 부분을 구분)
학생 K: 뒷부분이 빠르겠죠? 이 부분을 잘라서 보면 이 부분이랑 이 부분(변곡점을 기준으로 앞부분에 두 점을 잡고 표현)이랑, 이 부분과 이 부분도(5와 7사이)...어....기울기가 가파르겠죠. 순간속도를 구하려면 두 점의 차이를 아주 좁게 만들 면은 구할 수 있지 않을까?
⋮
학생 K: (잠시 고민한다.) 음....되겠네요. 속도라는 게 시간이 흐르는 게 있어야지..구할 수 있는 건데...5초일 때, 딱, 그 순간의 속도를 구하기는 힘들 거 같아요. 어느 정도 시간이 흐르는 게 있어야..물의 높이의 변화, 거리의 변화가 있어...속도를...구할 수가...있어.... 정확하게 표현하려면 두 개의 점을 더 좁혀야 하는 데,....둘 사이의 점을 좁히면, 정확히 표현할 수 있겠죠. 아니...잠깐만.....네

<발췌문 10>에서도 학생은 흐르는 시간에 대해 이동한 거리를 고려해야 속도를 생각할 수 있음을 표현하고 있다. 그러나 교사와의 대화를

통해 한 점에서의 순간속도를 구할 수는 없지만, 평균속도를 구하는 방법과 동일하게 두 점을 잡고 그 두 점 사이를 아주 좁게 만들면 순간속도를 구할 수 있음을 생각하게 되었다. 이는 독립변수의 연속적인 변화와 함수의 순간변화율을 조정하는 MA5의 행위이다. 또한, 학생은 두 변수가 연속적으로 변하며, 두 변수의 변화가 동시에 발생하며 모든 구간에서 순간변화율을 인식하고 부드러운 곡선을 올바르게 그린 것으로 보아 '부드러운 연속 공변' 수준으로 생각할 수 있다. 그러나 '부드러운 연속 공변' 수준이 되기 위해서 두 변수는 모두 '부드러운 연속 변화' 수준이어야 한다. 즉, 각 변수 값의 변화를 구간을 증가시키거나 감소시키는 것으로 생각하며, 동시에 각 구간 안에서도 변수들이 부드럽고 연속적으로 변한다는 것을 생각해야 한다. 학생의 행위에서 이를 추측할 수 있는 근거가 부족하며, Thompson과 Carlson(2017)에서도 '부드러운 연속 공변' 수준을 판단하기 위한 설명의 구체성이 떨어진다. 따라서 '부드러운 연속 공변' 수준에 부합하는 지는 고민해볼 필요가 있다.

정리하면, 학생 S는 [과제3], [과제4] 모두 2수준(L2. 방향 수준)과 '전체적인 조정' 수준의 특성을 보였다. 학생 K는 [과제3]에서는 4수준(L4. 평균 비율 수준)과 '값의 조정'수준 이상일 가능성을 보였으며, [과제4]에서는 5수준(L5. 순간 비율 수준)과 '부드러운 연속 공변'수준일 가능성을 보였다.

3. 그래프 유형과 두 공변 추론 수준 이론과의 관계

양적 그래프 과제와 질적 그래프 과제에서 두 학생의 공변 추론 수준을 Carlson 외(2002)와 Thompson과 Carlson(2017)으로 분석한 결과를 정리하면 다음의 <표 IV-1>과 <표 IV-2>와 같다.

양적 그래프 [과제1]에서 학생 S는 Carlson 외.(2002)에 따르면 2수준(L2. 방향 수준), Thompson과 Carlson(2017)에 따르면 '값의 전체적인 조정' 수준을 보였다. 질적 그래프 과제에서는 과제에 관계없이 Carlson 외(2002)에서는 2수준(L2. 방향 수준), Thompson과 Carlson(2017)에서는 '값의 전체적인 조정' 수준으로 판단하였다. 이는 양적 그래프 [과제1]과 동일한 결과이다. 두 이론은 사용하는 용어가 달라 다른 의미인 것처럼 보였지만, 실제 학생들을 대상으로 분석할 경우 동일한 표현이나 행동에 대해 Carlson 외(2002)의 MA2와 Thompson과 Carlson(2017)의 '값의 전체적인 조정' 수준이 동시에 적용됨을 확인할 수 있었다. 즉, '값의 전체적인 조정' 수준은 함께 변하는 양의 값에 대한 전체적인 이미지를 형성하는 것으로 "이 양은 증가하며, 저 양은 감소한다."와 같이 표현된다. MA2는 증가하는 직선을 그리거나 두 변수의 변화 방향을 표현하는 것으로, 결국 두 변수를 증가나 감소로 표현하는 것이다. 따라서 그래프의 유형에 관계없이 Thompson과 Carlson(2017)의 '값의 전체적인 조정' 수준과 Carlson 외(2002)의 MA2는 분석과정에서 유사하다고 볼 수 있다. 그러나 [과제2]에서 학생 S는

<표 IV-1> 양적 그래프 과제에서 학생들의 공변 추론 수준

		과제	Carlson et al.(2002)	Thompson, & Carlson(2017)
양적 그래프	학생 S	[과제1]	2수준. 방향 수준	값의 전체적인 조정 수준
		[과제2]		값의 조정 수준
	학생 K	[과제1]	3수준. 양적 조정 수준	값의 조정 수준
		[과제2]		덩어리 연속 공변 수준

<표 IV-2> 질적 그래프 과제에서 학생들의 공변 추론 수준

		과제	Carlson et al.(2002)	Thompson, & Carlson(2017)
질적 그래프	학생 S	[과제3,4]	2수준. 방향 수준	값의 전체적인 조정 수준
	학생 K	[과제3]	4수준. 평균 비율 수준	값의 조정 수준 이상
		[과제4]	5수준. 순간 비율 수준	부드러운 연속 공변 수준일 것 같지만 구체적인 근거부족

Carlson 외(2002)에 따르면 2수준(L2. 방향 수준)이었지만, Thompson과 Carlson(2017)에 따르면 '값의 조정' 수준으로 분류되었다. 이는 양적 그래프 과제에서 Thompson과 Carlson(2017)이 Carlson 외(2002)보다 학생의 수준을 보다 세분화하여 표현할 수 있음을 시사한다.

학생 K의 양적 그래프 과제의 수준 구분 결과 역시 이를 뒷받침한다. 즉, Carlson 외(2002)에 따르면 과제에 관계없이 3수준(L3. 양적 조정 수준)이었지만, Thompson과 Carlson(2017)에 따르면 [과제1]은 '값의 조정' 수준, [과제2]는 '덩어리 연속 공변' 수준으로 범주화되었다. 따라서 양적 그래프 과제에서는 Thompson과 Carlson(2017)이 Carlson 외(2002)보다 학생의 수준을 구체화하였다고 볼 수 있다.

한편, 학생 K는 질적 그래프 과제에서 학생 S와 다르게 과제에 따라 다른 수준으로 범주화되었다. 즉, Carlson 외(2002)에 따르면 [과제3]에서는 4수준(L4. 평균 비율 수준), [과제4]는 5수준(L5. 순간 비율 수준)으로 분류되었다. 그러나 Thompson과 Carlson(2017)에 따르면 [과제3]은 '값의 조정' 수준보다 높을 것이라는 가능성만을 확인할 수 있었고, [과제4]는 '부드러운 연속 공변' 수준일 가능성을 확인했지만, 명확히 구체적인 증거를 제시하기 어려웠다. '값의 전체적인 조정' 수준은 함께 변하는 두 양의 값에 대한 전체적인 이미지를 형성하는 것뿐만 아니라 두 양의 값의 전체적인 변화사이의 비 곱셈적인 연결을 생각할 수 있어야 한다. 그러나 학생 K는 두 양의 값이 함께 변하는 전체적인 이미지를 형성하였지만, 두 양의 값 사이의 곱셈적인 연결을 상상하였기 때문에 '값의 전체적인 조정' 수준이라고 단정할 수 없다. 따라서 그 보다 높은 수준일 것이라는 예상만 할 수 있었다. 또한, '부드러운 연속 공변' 수준은 단순히 그래프를 부드럽고 연속적으로 변하게 그렸다고 '부드러운 연속 공변' 수준으로 단정 지을 수 없다. '부드러운 연속 공변' 수준이 되기 위해서 두 변수는 모두 '부드러운 연속 변화' 수준이어야 한다. 즉, 각 변수 값의 변화를 구간을 증가시키거나 감소시키는 것으로 생각하며, 동시에 각 구간 안에서도 변수들이 부드럽고 연속적으로 변한다는 것을 생각해야 한다. 극소량으로 변하는 것을 상상하면서 동시에 그 극소량 안에서도 변하는 것을 생각하는 것과 마찬가지이다(Thompson, 2011). 이론적으로는 이해되지만, 실제 학생을 어떻게 분석해야 할지 구체성이 부족하다. Carlson 외(2002)에서처럼 각 수준에 대해 학생들의 행위를 설명하였다면 수준분석이 가능하였겠지만, Thompson과 Carlson(2017)에서는 각 수준에 대한 설명만 있을 뿐, 이를 학생들에게 어떻게 적용해서 분석해야 하는 지는 설명하지 않았다. 따라서 연구자의 해석이 반영될 수밖에 없다. 학생 K는 구간에 대한 평균변화율에 대해 생각할 수 있고, 각 구간을 좁히면 한 점에서의 속도를 생각할 수 있다는 점에서 순간변화율도 생각할 수 있다. 즉, 학생 K는 [과제4]에서 Carlson 외(2002)에 따르면 가장 높은 수준인 5수준(L5. 순간 비율 수

준)이었기 때문에, 구체적인 근거없이 Thompson과 Carlson(2017)에서도 가장 높은 수준인 '부드러운 연속 공변' 수준으로 판단할 수 있다. 그러나 Thompson과 Carlson(2017) 자체로 학생의 수준을 구분하기에는 구체적인 설명이 부족하다. 다시 말하면, 질적 그래프에서 Carlson 외(2002)은 학생 수준을 명확히 범주화할 수 있었지만, Thompson과 Carlson(2017)의 수준틀은 학생 수준을 범주화하기 어려웠다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 공변 추론 수준에 관한 이론인 Carlson 외(2002)와 Thompson과 Carlson(2017)을 비교하고, 학생을 대상으로 한 실험을 통해 두 이론을 재조명하였다. 특히 그래프 상황에서 학생들의 공변 추론 수준이 어떠한지의 측면에 초점을 두어 문제해결 과정을 분석하였다. 이에 따른 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, 양적 그래프 과제에서 Thompson과 Carlson(2017)은 Carlson 외(2002)보다 학생의 수준을 세분화한다고 볼 수 있다. Carlson 외.(2002)의 수준틀에서 두 학생은 과제의 유형에 관계없이 학생 S는 2수준, 학생 K는 3수준으로 본 연구자들은 판단하였지만, Thompson과 Carlson(2017)에서는 과제의 유형에 따라 학생들의 수준이 다르게 분석되었다. 즉, 학생 S는 '값의 전체적인 조정' 수준과 '값의 조정' 수준, 학생 K는 '값의 조정' 수준과 '덩어리 연속 공변' 수준으로 판단하였다. 그 과정에서 Carlson 외(2002)의 2수준으로 판단된 학생의 행동은 Thompson과 Carlson (2017)에서는 '값의 전체적인 조정' 수준으로 분석되었다. 그러나 [과제2]에서 살펴본 바와 같이 Carlson 외(2002)에서 2수준으로 분류된 과제가 Thompson과 Carlson(2017)에서 '값의 조정' 수준으로 분류되어, '값의 전체적인 조정' 수준뿐만 아니라 그 상위 수준으로도 분류될 수 있었었다. 이는 양적 그래프 과제에서 Carlson 외(2002)로 학생의 수준을 파악하는 것보다 Thompson과 Carlson(2017)이 학생의 수준을 세부적으로 분석할 수 있음을 시사한다.

한편, Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론은 양적 추론을 기반으로 한다. Thompson은 수학에서 양적 추론을 중요하게 생각하기 때문이다. 양적 그래프의 '양'은 단순히 수를 의미하는 반면에, 양적 추론에서의 '양'은 수와는 다르다(Thompson, 1993). Thompson(1994b)은 양(quantity)을 개념적 실체라고 하였다. 즉, 양은 상황에 대한 인간의 이해이며, 인간은 대상에 대한 질(quality)을 인식할 때, 질의 측정가능성을 수반하는 방식으로 양을 생각하게 된다. 또한, 양은 도식적(schematic)이다. 이것은 대상, 대상의 질, 적절한 단위나 차원, 질에 수치적인 값을 부여하기 위한 과정으로 구성되기 때문이다. 대상은 인간에게 주어진 것이며, 대상의 질은 대상을 인식하는 주체에 의해 부여되는 것이다. 예를 들어, 어린이들은 자동차가 지나가는 것을 보고, 자동차를 대상, 움직임을 질로 생각할 수 있다. 그러나 이들은 질을 어떤 시간의 양 동안 움직인 거리로 생각하지 않을 것이다(Thompson, 1994b). 이와 같이 Thompson과 Carlson(2017)에서 양은 수를 포함하는 추상적인 의미이기 때문에, 양적 그래프 과제에서 학생들의 수준을 파악하는 데 유리한 측면이 있었을 것이다. 또한, 교육부(2015)에서는 함수를 변화하는 양 사이의 관계를 나타낸다고 말한 것처럼, 함수를 이해하는 데 있어 양에 대한 개념은 중요하다. 따라서 Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론 수준은 학생들의 수준을 분석하는 데 사용될 뿐만 아니라 양에 대한 학생들의 이해를 파악할 수 있다는 점에서 유용한 도구로 사용될 수 있다.

둘째, 질적 그래프 과제에서 Carlson 외(2002)는 학생의 수준을 자세히 파악할 수 있었지만, Thompson과 Carlson(2017)은 학생 수준을 범주화하기 어려웠다. Carlson 외(2002)는 그래프 상황에서 학생들의 공변 추론 수준을 연구하였다고 주장하였다. 그러나 연구자들은 그래프의 유형에 대해 언급하지 않았지만, [과제4]와 같이 질적 그래프를 구성하는 문항을 분석에 사용하였다. 따라서 질적 그래프 상황에서 Carlson 외(2002)를 토대로 학생들의 수준을 쉽게 파악했던 것은 당연한 결과였을 것이다.

그러나 학생 K는 Thompson과 Carlson(2017)에 따르면 [과제3]은 '값의 전체적인 조정' 수준 이상이라는 가능성만 파악하였다. '값의 전체적인 조정' 수준은 함께 변하는 두 양의 값에 대한 전체적인 이미지를 형성하며, 두 양의 전체적인 변화사이의 곱셈적이지 않은 연결을 상상하는 것이다. 그러나 학생 K는 두 양의 값에 대한 전체적인 이미지를 형성하였지만, 두 양의 값 사이의 곱셈적인 연결을 표현하였기 때문에 '값의 전체적인 조정' 수준에 정확히 일치하지 않는다. 또한 학생 K는 [과제4]에서 '부드러운 연속 공변' 수준일 것으로 예상되지만 구체적인 증거를 파악하지 못했다. 이는 '부드러운 연속 공변' 수준은 데이터를 분석할 때, 어떻게 적용해야하는지 설명이 모호한 측면이 있기 때문이다. Thompson과 Carlson(2017)에서는 [과제4]의 문항을 예로 들어 각 수준에 해당하는 학생들의 반응을 설명하였다. 이들에 따르면 '부드러운 연속 공변'수준에 있는 학생들은 물의 부피와 물의 높이가 각 구간을 부드럽게 통과하면서 변하고, 각 구간 안에서도 연속적이고 부드럽게 변한다는 것을 생각한다고 하였다. 우리는 구간들이 부드럽게 증가하면서, 그 구간 안에서도 부드럽고 연속적으로 변한다는 것을 이론적으로 상상할 수 있다. 그러나 학생이 문제해결 과정에서 이를 표현하고, 연구자가 발견하기란 쉽지 않다. '부드러운 연속 공변'의 이름처럼 단순히 부드럽고 연속적으로 그래프를 그리면 '부드러운 연속 공변' 수준으로 해석하기에는 연구자의 의도를 왜곡할 가능성이 있다.

이와 같은 연구 결과를 바탕으로 다음과 같이 제언하고자 한다. 첫째, 학생들은 두 변수의 변화관계를 파악하기 위해 질적 그래프를 구성하는 활동이 필요하다. 학생들을 분석한 결과 질적 그래프를 구성하는 활동이 양적 그래프를 구성하는 활동보다 두 변수의 변화관계를 표현하기 위한 언어 및 제스쳐가 활발하였다. 학생이 두 변수의 변화관계를 올바르게 알고 있더라도, 양적 그래프 과제는 구체적인 수치를 가지고 조작하는 활동에 치우쳐 두 변수의 변화관계를 높은 수준에서 표현하기에는 한계가 있었다. 이는 Leinhardt et al.(1990)에서 두 변수의 공변 관계를 파악하기 위해서는 관계를 수보다는 언어로 표현하는 것이 적절하다고 말했던 것을 뒷받침한다. 현재의 학교 교육은 양적 그래프를 해석하는 활동이 대부분이며, 질적 그래프로 구성하는 활동이 부족하다. 따라서 학생들에게 함수적 상황을 제시하고 질적 그래프를 구성하는 활동을 통해 공변적 사고를 할 기회를 제공해야 할 것이다.

둘째, 본 연구는 영재 학생을 대상으로 이론을 적용하고 분석하였지만, 다양한 수준의 학생들에 대해 적용하여 본 연구의 결과를 정교하게 하는 과정은 의미 있는 후속 연구의 한 방향이라 할 수 있을 것이다. 두 공변 추론 수준 이론은 본래 영재나 일반학생을 구분하지 않고 적용할 수 있는 이론이며 본 연구의 목적은 두 이론들이 어떻게 적용될 수 있는 지 실제 적용을 통해 상세히 밝히고자 한 사례연구이므로 그 연구 대상이 '영재'라는 사실이 큰 의미를 가진다고 할 수는 없다. 다만 영재는 일반적으로 최상위권에 속하는 학생을 지칭하므로 보다 일반 학생을 대상으

로 한 연구가 필요할 것이다.

셋째, Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론 수준 이론을 바탕으로 한 후속 연구가 필요하다. 앞에서 설명하였듯이 그래프를 부드럽고 매끄럽게 그렸다고 학생을 '부드러운 연속 공변' 수준으로 단정 지을 수 없다. 마찬가지로 그래프 상에 점을 찍었다고 '값의 조정' 수준으로 볼 수도 없다. 연구자의 임의적인 판단과 해석이 이루어지지 않도록, Thompson과 Carlson(2017)의 공변 추론 수준으로 올바르게 학생들을 분석할 수 있는 방법이 정립되어야 할 것이다. 이와 같은 후속 연구를 통해 공변 추론 수준을 올바르게 분석할 수 있는 토대가 마련되기를 기대한다.

참고문헌

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8].

김남희・나귀수・박경미・이경화・정영옥・홍진곤(2011). **수학교육과정과 교재연구**, 서울: 경문사.

모성준(2013). **함수적 상황에서 중학교 1학년 학생들의 공변 수준에 관한 사례연구**, 한국교원대학교 석사학위논문.

문혜선(2015). **함수적 상황과 그래프 사이의 번역활동에서 나타나는 고등학교 1학년 학생들의 특징분석-공변 추론 중심으로**. 한국교원대학교 석사학위논문.

서창범(2016). **학생들의 공변 추론 수준에 따른 함수 문제해결의 특징**. 한국교원대학교 석사학위논문.

신재홍・이중권(2009). 모의실험을 통한 두 예비교사의 공변 추론 이해에 관한 연구, **한국학교수학회논문집, 12**(4), 453-472.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: current state of understanding*, WISDOMe Monographs (Vol. 2, pp. 55-73). Laramie, WY: University of Wyoming.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rate of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Hattikudur, Shanta, Richard W. Prather, Pamela Asquith, Martha W. Alibali, & Eric J. Knuth (2012). Constructing graphical representations: Middle schoolers' intuitions and developing knowledge about slope and intercept. *School Science & Mathematics, 112*(4), 230–40.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1-64.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the annual meeting of the psychology of mathematics education* - North America. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Thompson, P. W. (1993). qunatitive reasoning, complexity, and additive structure. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 165-208.

Thompson, P. W. (1994a). Images of rate and operational understanding of the Fundamental

Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 229-274.

Thompson, P. W. (1994b). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Cahmberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*, WISDOMe Monographs(Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In English, L., & Kirshner, D. (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435-461). London: Taylor and Francis.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Analyzing Students' Works with Quantitative and Qualitative Graphs Using Two Frameworks of Covariational Reasoning

Park, JongHee (Graduate School, Korea National University of Education)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)
Lee, Soo Jin (Korea National University of Education)
Ma, Minyoung (Graduate School, Korea National University of Education)

This study examined two current learning models for covariational reasoning(Carlson et al.(2002), Thompson, & Carlson(2017)), applied the models to teaching two 9th grade students, and analyzed the results according to the types of graphs(a quantitative graph or qualitative graph). Results showed that the model of Thompson and Carlson(2017) was more useful than that of Carlson et al.(2002) in figuring out the students' levels in their quantitative graphing activities. Applying Carlson et al.(2002)'s model made it possible to classify levels of the students in their qualitative graphs. The results of this study suggest that not only quantitative understanding but also qualitative understanding is important in investigating students' covariational reasoning levels. The model of Thompson and Carlson(2017) reveals more various aspects in exploring students' levels of quantitative understanding, and the model of Carlson et al.(2002) revealing more of qualitative understanding.

* Key Words : function(함수), covariational reasoning(공변 추론), rate of change(변화율), graph(그래프)

논문접수 : 2016. 12. 7
논문수정 : 2017. 1. 25
심사완료 : 2017. 1. 27