대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 1, 1 ~ 22. Feb 2017

구간에서의 변화율에 대한 인식과 표현에 대한 연구

이 동 근* · 신 재 홍**

본 연구에서는 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 학생들이 함숫값의 변화를 인식하는 과정에서 어떠한 변화율 개념을 가지고 있는지 확인하고, 변화율 개념에 따라 어떻게 구간에서 함수의 변화를 인식하고 표현하는지에 대하여 6차시에 걸친 교수실험을 실시하였다. 그 결과 학생들이 함수의 변화를 분석하는데 변화율 개념을 이용되기는 하지만, 학생들의 변화율에 대한 인식과 표현이 다양하고 이에 따라 평균변화율에 대한 인식에 있어서도 차이가 나타나는 것으로 관찰되었다. 다만 이 차이를 질적인 수준차로 보아야할 것인지에 대하여는 추후 연구가 필요할 것으로 보인다. 본 연구는 변화율에 대한 학생의 인식을 세밀하게 조사한 연구로써 향후 변화율 관점에서의 미분학습에 대한 연구에 기초자료가 될 것으로 기대된다.

I. 서 론

2009 개정 교육과정의 미적분 I 과목에서 변화율은 평균변화율과 순간변화율로 소개되고 있으며, 순간변화율의 경우 평균변화율의 극한으로 정의하고 도형 위 한 점에서의 접선의 기울기로 도입된다. 특히 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 새로운 도함수 $f'(x)$를 $f'(x)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$로 정의해서 순간변화율을 평균변화율의 극한으로 설명하고, 이 도함수의 함숫값을 함수 $f(x)$의 해당 점에서의 접선의 기울기인 미분계수로 도입한다.

연속과 극한 개념은 Galilei 이후 연속적인 운동의 변화를 관찰하는 동역학적인 관점에서 시작된 개념이며, 미분계수 역시 변하는 두 양사이의 변화율에 대한 극한이므로 속성상 동적인 변화와 관련된 개념으로 볼 수 있다(이진호, 2005; 정연준, 김재홍, 2008; 정연준, 강현영, 2008). 그러나 동적인 속성은 순간의 변화를 이해하는데 오히려 어려움의 원인이 되기도 하는데, Newton 역시 '궁극의 비(ultimate ratio)'를 언급하면서 거리와 시간의 비에서 시간의 변화가 전혀 없는 상태에서의 동적인 속성의 속도를 설명하는데 어려움을 겪었다(Boyer, 1959). 반면 동적인 속성이 제거된 상태에서의 미분계수에 대한 이해는 순간변화율에 대한 인식 장애보다는 상대적으로 덜 한 것으로 보인다. Fermat, Descartes, Barrow 등은 동적인 속성이 배제된 '도형 위의 한 점에서의 접선 구하기 문제'에서 접선을 구하는 것에 집중하였는데(Boyer, 1959; Eves, 1982), Fermat, Descartes, Barrow 등의 접점에서의 접선을 구하는 과정은 현대적으로 해석을 할 때 형식적인 도함수의 정의나 미분계수를 구하는 과정과 맞아떨어지는 부분이 많다.

그러나 이들의 방식은 $f(x+h)-f(x)=hc$에서 h에 0을 바로 대입하면 '$0=0$'이라는 항진명

* 문정고등학교, jakin7@hanmail.net (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)

제가 되기 때문에 이를 피하기 위하여 h로 양변을 나눈 다음 $h=0$을 대입하여 접점에서의 기울기의 값을 구하는 방식이다. 이는 $x=a$에서 변화율의 극한이라는 미분계수의 정의 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 대수적으로 h를 처리하는 것과 결과적으로는 같을 수 있지만 인식 방법에 있어서는 차이가 있다(Boyer, 1959; Eves, 1982; Klein, 1953). 그럼에도 불구하고 동적인 속성을 정적인 관점에서 연구를 진행하였다는 점에서 의미가 있다.

정적이고 형식적인 극한 개념이 완성됨에 따라 도함수를 대수적으로 정의(단, 극한에 의한 도함수의 대수적 정의에는 변화율의 극한으로 표현되어있어 일반적인 대수식과는 구분된다.)하게 되었으며, 이를 통하여 도함수를 이용하여 대수적으로 함수를 분석하는 것이 가능해졌다. 현 교육과정에서 함수의 극한 학습 이후 미분을 학습하는 구성 방식이나 평균변화율에서 극한 개념을 도입하여 순간변화율을 도입한 다음 도함수를 정의해서 대수적으로 함수를 분석하는 구성 방식은 이러한 역사발생 과정이 재구성 되어 반영된 것으로 보인다. 이때 순간변화율을 인식하는 과정에서 학생들이 어려움을 겪게 되는데(Boyer, 1959; Thompson, 2008), 극한 개념에 대한 이해가 이러한 문제점을 해결할 수 있다(Zandieh, 2000)는 접근도 있지만 평균변화율에서 순간변화율을 구성하는 방식이 학생들에게 자연스러운 방법인지에 대한 고민이 우선될 필요가 있다.

한편 Boyer(1959)는 도함수를 곡선이나 함수의 한 점에서의 성질을 나타내기 위해 쓰이는 수학적 도구라고 했는데, Boyer(1959)가 언급한 '한 점에서의 성질'은 그 점에서의 변화라는 관점에서 고민할 필요가 있다. 운동을 관찰하는 주체가 움직이는 물체의 순간적인 변화를 인식함에 있어, 그것을 측정하는 것과 관련된 최소한의 감각의 변화가 인지되지 않으면 관찰자는 해당 변화를 관찰할 수 없다. 대수적인 접근은 이러한 어려움을 피해갈 수 있도록 해주지만, 최근 연구결과들에 의하면 변화의 관점이 고려되지 않은 상태에서 대수적 연산에 치우친 미분학습에 대한 반성이 필요하다는 주장(김정희, 조완영, 2006; 신은주, 2006)과 더불어 변화율 관점에서 미분학습 지도의 필요성이 제기(Confrey & Smith, 1994; Ellis, 2011; Thompson, 1994; Zandieh, 2000)되고 있다. 이는 동적인 속성을 갖는 물체의 운동을 관찰함에 있어 정적인 관점에서 형식적으로 접근하게 되면서 발생하는 역설적인 상황에 대한 반성으로 보여 진다.

변화율 관점에서 함수의 변화를 관찰하는 것은 변화의 크기(변화량)가 아닌 변화의 세기(변화율)로 변화를 인식하는 것을 뜻하며, 변화율 관점에서 함수의 변화를 관찰하거나 미분 학습을 하기 위해서는 변화율 개념에 대한 이해가 선행되어야할 필요가 있다. Thompson(1994)에 의하면 변화율 역시 비의 개념이 반영적 추상화를 거친 것이므로 비율의 특수한 경우로 볼 수 있지만, '비의 값이 동치인 집합'으로 제한이 되는 비율 개념과 달리, 변화율은 비가 변하는 상황 혹은 비가 변하지 않는 상황 모두에 대하여 변화를 관찰할 수 있는 개념이다. Byerley, Hatfield와 Thompson(2012)는 학생들의 미분학습에서 비의 곱셈적 관점에 대한 경험이 변화율 개념을 포함한 미분개념의 이해에 도움이 된다고 언급하였다. 이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍(2016)도 교수실험을 통하여 농도가 변화는 상황에서 학생들이 동적인 비율 개념을 인식하는 과정을 드러냄으로써 '비와 비율' 개념과 변화율 개념을 구분하려고 했으며, '비와 비율' 개념이 변화율 개념의 수준 변화를 가져올 수 있고, 변화율 개념의 수준변화는 함수의 변화에 대한 인식에 영향을 줄 수 있다고 주장하였다. 그러나 변화율

개념의 수준에 대하여 논의하기 위해서는 본 연구와 같이 변화율에 대한 학생들의 인식과 표현에 대한 연구 자료의 축적이 필요하다.

지금까지의 논의를 바탕으로 학생들이 변화율을 이용해서 함수의 변화를 어떻게 인식하는 지에 대한 연구가 필요함을 알 수 있었다. 이러한 연구의 필요성에 따라서 본 연구에서는 6차시에 걸친 교수실험을 통하여 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 학생들이 함수의 변화를 인식하는 과정에서 어떠한 변화율 개념을 가지고 있는지 확인하고, 확인된 변화율 개념에 따라 구간에서의 평균변화율에 대한 인식과 표현을 조사할 것이다. 특히 본 연구는 학생의 공변 관점에서의 변화율 인식에 대한 연구로서 학생이 변화 양상을 변화율에 근거하여 분석할 수 있도록 과제를 제시하고 이 과정에서 드러나는 학생들의 변화율에 대한 인식탐구에 초점을 맞추고 있다. 이를 통하여 함수의 변화를 인식하는 과정에서 드러나는 변화율 개념에 대하여 세밀하게 분석하고 변화율 관점에서의 미분학습에 대한 시사점을 논하기로 한다. 비록 제한된 차시의 교수실험이기는 하지만, 본 연구는 학생들의 변화율에 대한 인식을 직접적으로 조사하였다는 점에서 의미가 있으며, 이러한 연구 자료의 축적은 추후 학습자의 미적분 학습 모델 구성에 중요한 기초연구가 될 수 있다.

본 연구는 앞서 언급한 연구목적에 따라 다음과 같은 연구문제를 갖는다.

- 학생들이 함수의 변화를 인식하고 표현하는 방식은 어떠한가?
- 학생들이 변화율 개념을 바탕으로 구간에서의 평균변화율에 대한 인식과 표현은 어떠한가?

II. 선행 연구 고찰

1. 교육과정에서의 변화율

변화율은 공변 관계에서 변수들의 변화량의 비에 해당하는 값으로써(이동근 외, 2016), 고등학교 2학년 미분 단원 학습 과정에서 평균변화율과 순간변화율로 소개된다. 현 교육과정에서는 평균변화율과 순간변화율의 관계에 대하여, 할선의 기울기(평균변화율)의 극한값이 접선의 기울기(순간변화율)가 된다는 방식으로 도입하고 있다. 이에 대하여 임재훈, 박교식(2004)은 교육과정에서 접선을 도입하는 과정에서 기하학적 접선 개념과 함수적 접선 개념으로 구분하여 순간변화율을 접선의 기울기로 동일시하는 방식이 수정하기 힘든 1차 직관을 형성할 수 있음을 지적하였다. Orton(1983)도 할선의 극한에 대한 학생들의 반응에서 '할선이 점점 짧아지다가 없어진다.'고 언급한 사례 역시 같은 맥락에서 이해할 수 있다. 한편 강향임(2012)은 아리스토텔레스가 순간 속도를 부정하고 평균 속도만을 인정했다고 언급했는데, 이러한 역사적 사실은 평균변화율에서 순간변화율을 도입하는 현 교육과정의 방식과 유사한 것으로 보인다. 그러나 이러한 논의가 학생들의 인식과 동일한지에 대하여는 연구가 필요할 것으로 생각하며, 이러한 고민은 평균 변화율에서 순간변화율로의 전환과정에서 학생들의 인식에 대한 어려움은 없는지 살펴볼 수 있는 기회를 제공해줄 것으로 보인다. 한편 평균변화율 개념 자체에 대한 어려움에 대한 연구도 있는데, Orton(1984)은 직선에서의 평균변화율에 대한 인식과 달리 곡선에서의 평균변화율 인식에 어려움을 느끼는 것으로 보인다고 주장했다. 이와 같이 교육과정에서의 변화율 개념은 평균변화율과 순간변화율로 소개되고 있고, 평균변화율의 극한으로 순간변화율을 도입하고 있으

나, 변화율에 대한 학생들의 인식 과정에서 어려움이 발생할 수 있음을 확인할 수 있다.

2. 학생들의 변화율 개념 발달에 대한 연구

Hauger(1995)는 함수에 대한 변화율 지식의 유형을 총체적인(global) 변화율, 구간에서의(interval) 변화율, 한 점에서의(point-wise) 변화율의 세 가지로 구분하였다. 총체적인 변화율 지식은 전체적인 그래프의 경향과 모양을 이해하는 것으로 질적인 접근에 해당하며, 구간에서의 변화율 지식은 평균변화율에 해당하고, 한 점에서의 변화율에 대한 지식은 종속변수가 독립변수의 한 점에서 얼마나 빠르게 변화하고 있는지를 이해하는 것으로, 특정한 한 점에서의 순간변화율에 해당한다. 특히 한 점에서의 변화율에 대하여 학생들은 특정한 점에서 그래프에 대한 접선의 기울기를 추정하여 어림하기도 하고 독립변수의 전후 구간을 점점 좁혀가면서 순간적인 평균변화율을 계산하는 경우도 발견된다.

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen과 Hsu. E.(2002)는 역동적인 상황에서 두 개의 변화량에 대한 학생들의 이해를 분석하기 위하여 공변 추론(covariational reasoning)의 분석틀을 MA1에서 MA5까지 5개의 틀로 제시했는데, 여기서 MA4는 평균변화율로 변화를 인식하는 것이고 MA5는 순간변화율로 변화를 인식하는 것을 뜻한다. Carlson et al.(2002)은 공변수준을 언급하면서 평균변화율 보다 순간변화율에 대한 인식을 상위수준으로 보았다.

이외에 Azcarate(1991)의 경우도 원시적인 비에서 극한 단계의 비로 변화율 개념이 발달한다(문종은, 2014에서 재인용)고 했는데, 이 역시 원시적인 비는 평균변화율에 해당하고 극한 개념의 변화율은 순간변화율에 해당하는 것으로 볼 수 있다.

평균변화율과 순간변화율 외에도 비의 곱셈적 관점을 강조한 곱셈적 변화율(Confrey & Smith, 1994)과 동적인 비율 상황에서 변화율 개념을 논의한 이동근 외(2016)의 동적 변화율 개념 등의 변화율 개념이 연구되기도 하였다. Ellis(2011) 는 곱셈적 변화율을 지수적 증가의 이해에 대한 대안적인 접근방법으로서 제시하고, 연속변수와 공변의 중요성을 강조했다. 곱셈적 변화율이란 $\frac{f(x+\triangle x)}{f(x)}$의 비율 개념이며, 이 비가 $\triangle x$에 의존한다는 것을 이해하는 것이 지수함수를 이해하는데 핵심적인 것으로 보았다. Johnson(2012)의 경우는 전통적인 비(traditional ratio) 관점에서의 변화율의 문제점을 지적하고 공변 관점에서의 변화율에 대한 의미를 강조하였다. 전통적인 비(traditional ratio)의 관점은 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$를 연속적인 두 변수의 변화를 표현한 것으로 보기보다는 하나의 값으로 인식하는 것을 뜻한다. 이러한 전통적인 비의 관점에서 미분계수 $\lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에 대한 이해는 변화의 의미 보다는 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에 '$\lim_{x\to a}$'가 기계적으로 결합되어 극한값을 구하는 과정으로 인식될 수 있다. 반면 공변적 관점에서 변화율은 연속적으로 변하는 x와 $f(x)$사이의 관계에 근거하여 변화를 인식하는 것이며, 이러한 관점에서는 변화의 크기를 표현할 때 변화의 세기를 나타내는 변화율로 인식하고 표현하는 것이 가능하다.

한편 앞서 논의한 바와 같이 학생들의 변화율 개념 발달에 대한 연구들이 다양한 관점에서 접근하고 있기는 하지만, 공통적으로 구간에서의 변화와 한 점에서의 변화로 구분하는 공통점이 발견되며, 구간에서의 변화율을 평균변화율로 보는 경향이 있다. 그러나 학생들의 구간에서의 변화에 대한 인식 속에는 기존 교육과정에서의 평

균변화율과 구분되는 학생들만의 변화율 개념이 존재할 수 있으며, 평균변화율과 순간변화율의 관계 역시 교육과정의 구성과는 구분되는 학생들의 자연스러운 접근 방식이 존재할 수 있다. 따라서 이에 대한 연구는 기존 미분관련 학습에서 평균변화율을 시작으로 순간변화율로 도입하는 방식에 대하여 학생들이 어떠한 어려움을 경험하게 되는지 다양한 관점에서 이해할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

3. 매끄러운 추론(Smooth reasoning)과 덩어리 추론(Chunky reasoning)

Carlson et al.(2002)는 두 양 사이의 관계에 대한 변화를 인식하고 그 사이의 관계를 조정하는 정신적 활동을 공변 추론이라고 하였다. 이때 Castillo-Garsow(2012)는 역동적으로 변하는 함수적 상황에서 학생들이 공변 관계를 인식하는 방식은 이산적인 이해에서 연속적인 이해의 순서로 발전해간다고 하였다.

공변 관계를 이산적으로 이해하고 처리한다는 것은 연속적인 변화를 나타낸 함수적 상황에서 학생들이 정의역과 치역의 대응관계를 표로 구성하여 변화를 이해하는 방식에 해당한다 (Confrey & Smith, 1995; 이동근, 문민정, 신재홍, 2015). 그러나 Saldanha와 Thompson(1998)은 이러한 방식은 이산적인 값들의 변화만 다루게 되고 그 사이의 변화에 관심을 갖지 못하게 된다는 점을 지적하면서 연속적인 상황에서 변화를 인식하는 방식으로 적절치 않다고 주장하였다.

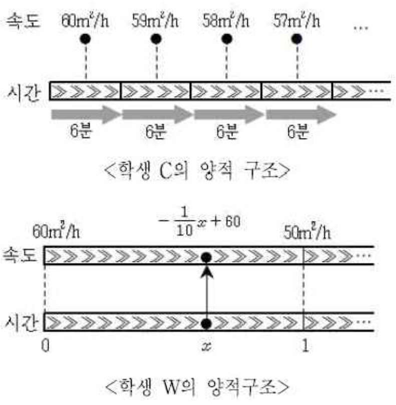
Castillo-Garsow(2012)는 학생들의 연속적인 변화에 대한 추론과정을 덩어리적인 이미지로 변화를 인식하는 것과 매끄러운 이미지로 변화를 인식하는 방식의 두 가지로 제시하였다. 마민영, 신재홍(2016)에서도 이에 대한 논의가 소개되어 있는데, 학생이 매일 아침 7시에 200원씩 용돈을 받는다고 할 때 용돈을 받기 시작한 순간부터 그 이후 10일까지 받은 용돈의 총 합에 대한 학생들의 반응을 살펴볼 수 있는 문제 상황이 제시되어있다. 이러한 문제 상황에서 학생들의 반응은 1) 시간의 변화를 이산적으로 보고 하루, 이틀, 삼일과 같이 하루씩 변해갈 때마다 200원씩을 더해가는 방식으로 용돈의 합을 구하는 것과 2) 시간의 변화를 이산적으로 보는 것은 동일하나 좌표평면에 용돈을 받은 직후 몇 일째인지를 x좌표로 표현하고 그 때까지 받은 용돈의 총합을 y좌표로 하여 점을 구성해서 좌표평면에 찍은 후에, 그 점들을 오른쪽 위로 향하는 연속적인 직선으로 구성하는 방식 및 마지막으로는 3) 비연속적인 계단 형태의 그래프로 구성하는 방식의 세 가지로 관찰 되었다.

여기서 첫 번째와 두 번째 방식으로 추론한 학생들의 경우는 연속적인 시간의 변화를 인식함에 있어 구간의 양 끝점에 해당하는 순간의 변화들만을 고려한 것으로 볼 수 있으며 특히 구간 내부에 해당하는 '하루와 이틀'의 사이 혹은 '이틀과 삼일' 사이의 변화를 고려하지는 않은 상태에서 전체적인 변화를 이해한 것으로 볼 수 있다. 반면 세 번째의 비연속적인 계단 형태의 그래프를 구성한 학생들의 경우는 시간의 연속적인 변화에 대하여 구간 내부의 변화를 고려한 것으로 볼 수 있는데, 이러한 학생들의 인식 방식에 대하여, Castillo-Garsow(2012)는 첫 번째와 두 번째에 해당하는 추론을 덩어리 방식으로 변화를 이해하는 것으로, 세 번째 방식에 해당하는 변화의 이해 방식을 매끄러운 방식으로 구분한 것으로 볼 수 있다. 본 연구에서는 덩어리적인 방식으로 연속적인 변화를 이해하는 추론방식을 덩어리 추론으로, 매끄러운 방식으로 연속적인 변화를 이해하는 추론 방식을 매끄러운 추론으로 표현할 것이다.

매끄러운 추론 방식은 변화를 계속 진행 중인

것으로 상상할 수 있으며, 이것은 변수를 단순히 잘게 나누어 상상하는 덩어리 추론과는 다른 방식으로 보아야한다. 덩어리적인 추론 방식은 잘게 나누어 생각하더라도 여전히 나누어진 구간 내부의 변화를 고려하는데 제한이 있는 사고인 반면 매끄러운 사고는 내부의 변화를 고려할 수 있을 뿐만 아니라 한 순간의 변화를 설명하는 것도 가능하다. 두 추론 방식은 변화를 관찰할 때 서로 다른 방식으로 표현될 수 있고 수학적인 결과물에서도 차이가 있을 수 있다(김채연, 신재홍, 2016).

김채연, 신재홍(2016)은 덩어리 추론을 하는 학생과 매끄러운 추론을 하는 학생을 대상으로 페인트 과제(벽면에 페인트를 칠하는 학생의 페인트를 칠하는 속도가 처음에는 $60m^2/h$이었다가 한 시간 뒤에는 $50m^2/h$로 줄었다고 했을 때 그 변화를 표현하는 과제)에서 학생들의 인식과 표현을 관찰한 다음 결과를 [그림 II-1]과 같은 도식으로 나타내었다. 덩어리 추론을 하는 C학생은 6분 간격(덩어리적)으로 $1m^2/h$만큼씩 감소하는 것으로 표현하였으나 6분 내부에서의 변화는 고려하지 못한 반면, 매끄러운 추론을 하는 W학생은 x라는 순간에서 페인트를 칠하는 속도를 대수적인 표현인 $\left(-\frac{1}{10}x+60\right)m^2/h$로 써서 그 순간의 매끄러운 변화를 표현하였다.



[그림 II-1] 페인트 과제에 대한 학생들의 반응 결과를 표현한 도식 (김채연, 신재홍, 2016)

한편 이동근 외(2015)의 연구에서는 실험대상 학생이 $y=x^2$과 $y=2^x$의 변화의 차이를 표현하는 과정에서 함숫값들의 차이에 해당하는 계차수열로 두 함수의 변화를 구분하는 장면을 소개하고 있는데, 이러한 방법 역시 덩어리 추론으로 해석 가능한 대목이지만, 이동근 외(2015)에서는 김채연, 신재홍(2016)에서 제시한 도식으로 해석되지 않는 부분이 있다. 이동근 외(2015)에서 학생들이 제시한 계단형태의 새로운 함수의 그래프는, 구간 내부의 변화를 인식한 다음 그 변화의 대푯값으로서 평균변화율을 함수의 그래프로 표현한 것으로 볼 수 있는 반면, [그림 II-1]의 경우는 6분 내부의 변화를 고려하지 못한 것을 나타낸 것이라는 차이가 있다.

Thompson(2011)의 경우는 연속적인 변화를 이해하는 방식으로 덩어리적 방식과 매끄러운 방식을 재귀적으로 수행할 것을 제시하였다. 즉, Thompson(2011)은 덩어리적으로 사고하면서도 내부의 변화를 인식하는 것을 강조한 것으로 볼 수 있다.

연속적인 변화를 변화율 관점으로 이해할 때에도 덩어리 추론과 매끄러운 추론은 모두 고려해야할 방법이다. 변화율 관점에서 연속적인 변화를 이해하는 과정에서 학생들이 구간에서의 변화를 인식하는 것이 중요한데, 덩어리 추론의 경우 구간 내부의 변화를 고려하지 못하고 구간의 양 끝점에서의 변화만을 고려하는 문제가 발생할 수 있다. 반면 매끄러운 추론의 경우에는 변화를 이해함에 있어 매끄러운 변화로 인식하고 그 순간의 변화를 고려하여 표현할 것으로 예상된다. 따라서 학생들에게 연속적인 변화를 이해하는 과제를 제시하고 관찰하는 연구에서 덩어리 추론과 매끄러운 추론은 학생들의 반응을 이해하고 해석하는데 중요한 도구적 역할을 해줄 것으로 보인다.

III. 연구방법

1. 교수실험

연구자들은 본 연구의 교수실험을 위하여 초기 과제(학생들의 변화에 대한 인식을 관찰하기 위한 과제)를 공동으로 구성하고, 학생들 간의 의사소통만으로 해결되지 않는 상황에서만 개입하여 적절한 발문을 제시하는 방식으로 교수실험을 진행하였다. 또한 각 차시가 종료된 이후 다음 차시를 진행하기 전에 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 공동으로 분석하고 이를 토대로 합의 과정을 거쳐 다음 교수실험을 설계하였다. 이 때, 교수실험 진행은 교직경력 15년차인 수학교사가 진행하였으며, 또 다른 연구자 1명은 관찰자로 참여하여 교수실험의 완성도와 질을 높이고 방향성을 제시하는 역할을 하였다.[1] 본 연구에서 교수실험은 총 6차시(각 차시별 실험 시간은 60분 이상)으로 구성되었고, 참여 고등학생 세 명과 1학년 1학기 중간고사 이후인 5월 중순부터 시작하여 7월 초순까지 약 한 달여간 진행하였다. 본 논문에서는 교수실험에 참여한 세 명의 학생들이 전체 교수실험을 통하여 1) 함수의 변화를 인식하는 과정에서 드러나는 변화율 개념을 확인하고 2) 구간에서의 평균변화율 개념에 대한 인식을 살펴볼 것이다.

전체 교수실험의 진행 흐름은 연속적으로 변하는 두 변수가 관계를 맺고 있는 함수적 상황(거리함수와 농도의 변화)에 대하여 학생들의 연속적인 변화에 대한 인식과 표현을 살펴보았으며, 이후 이산적으로 변하는 문제 상황에 대한 학생들의 변화의 인식에 대한 특징을 살펴보았다. 다음으로 구간에서의 변화를 표현함에 있어, 덩어리 추론으로 접근하는 상황과 매끄러운 추론으로 접근하는 상황에 대한 활동을 세밀하게 관찰하면서 학생들의 변화율에 대한 인식과 표현상의 특징을 기술하였다. 이러한 교수실험의 진행 흐름을 정리하면 [그림 III-1]과 같다. 이때 음영으로 표시된 부분은 매끄러운 추론과 덩어리 추론 관점에서 과제를 제시하거나 학생들의 인식을 조사했을 때의 단계를 구분한 것이다.

[그림 III-1] 교수실험 진행 흐름

2. 연구 대상자의 특성 및 과제 소개

세 명의 학생은 서울 소재 일반계 고등학교 1학년 학생으로서 영찬의 경우는 전국연합모의고사 수학영역에서 1등급이었고, 호윤은 2등급, 준호는 4등급[2]이었다. 세 명의 학생들이 선택된 이유는 연구자가 평소 수업에서 관찰한 결과 대상 학생들이 자신들의 의견을 잘 표현할 수 있고 지필고사 수학 영역 등급이 서로 상이하기 때문이다. 질적 연구에서 연구 대상 학생이 자신의 견해를 적극적으로 개진하고 수학 성취도 수

1) 여기서 교수실험을 진행한 수학교사는 제 1저자를 의미하며, 관찰자로 참여한 연구자는 교신저자를 의미한다.
2) 영찬, 준호, 호윤은 연구에 참여한 세 명의 학생을 지칭하는 가명이다.

준이 상이할 경우 연구자가 많은 정보를 얻을 수 있다는 장점이 있다(이동근 외, 2016).

본 연구에서는 실험 대상 학생들의 변화율 개념 구성과정을 조사하게 되므로 사전에 학생들이 변화율 개념을 학습한 경험이 있는지 확인할 필요가 있었다. 이에 따라 교육과정에서 변화율 개념을 포함하고 있는 미분단원의 선행학습 여부를 조사하면 변화율 개념에 대한 선행학습 여부를 간접적으로 확인할 수 있을 것이라는 판단 하에, 연구자들은 학생들을 대상으로 미분 단원에서 등장하는 용어(평균변화율, 순간변화율, 연속함수, 미분계수, 접선, 도함수)를 들어본 경험이 있는 지에 대하여 질문을 하였다. 이에 대하여 세 명의 학생 모두 해당 용어를 들어본 적이 없다고 답하였다. 다만 교육과정에서 평균변화율과 순간변화율 개념의 실생활 소재로 도입 되는 평균속력과 순간속력의 용어에 대하여는 일부 학생들이 들어본 적이 있다고 답하였으나, 변화율 관점에서 시간과 거리의 연속적인 변화를 표현하는 용어로 설명하기 보다는 '중학교 때 과학 시간에 들었어요.'나 '일상 속에서 쓰이는 용어 아니에요?'라는 반응을 보였다. 이러한 사전 면담 결과를 바탕으로 연구자들은 세 명의 연구 대상자들이 미분개념과 연관된 측면에서의 변화율 관련 지식이나 학습 경험은 없는 것으로 판단하였다. 또한 전국연합모의고사 수학 영역으로 수학 수준을 구분하기는 하였으나, 이 기준이 본 연구에서 탐구하고자 하는 변화율 개념의 수준을 뜻하는 것은 아니다.

총 6차시의 교수실험에서 진행된 과제는 학생들의 변화에 대한 인식과 변화율 개념에 대한 관찰을 목적으로 연구자들이 합의하에 최초 과제를 설정한 이후 매 차시 교수실험 종료 이후 실험 자료(영상, 전사록, 회의 일지)를 근거로 협의를 거쳐 추가 과제를 결정하는 방식으로 구성하였다. 본 연구에서는 이들 과제 중에서 1) 함수의 변화를 인식하는 과정에서 학생들의 변화율 개념이 드러난 장면과 2) 구간에서의 평균변화율에 대한 학생들의 인식이 드러난 장면을 중점적으로 분석하였으며, 분석에 활용한 과제 9개를 <표 III-1>과 같이 정리하였다.

[1차시 과제]는 연속적으로 변하는 시간과 거리의 관계에 대하여 학생들의 변화에 대한 인식을 살펴보기 위하여 제시한 과제이며, [2차시 과제1]에서 제시된 농도가 변하는 상황 역시 연속적인 변화를 담고 있는 과제로 볼 수 있다. 선행

<표 III-1> 교수실험의 수업 과제

수업차시(일자)	과제	과제에 제시된 내용
1(2016.05.24.)	과제	거리함수가 $y=\sqrt{x}$ 일 때 학생들의 변화에 대한 인식과 표현
2(2016.05.26.)	과제1	농도가 변하는 상황에서 함수 $g(a)=\frac{a}{1+a}$ 의 변화에 대한 인식과 표현
2(2016.05.26.) 3(2016.05.31.) 4(2016.06.02.)	과제2	구간의 길이와 평균속도가 모두 다른 상황에서 평균속도에 대한 인식과 문제해결 방법에 대한 관찰 ※ 2차시, 3차시, 4차시에 동일한 과제가 학생들에게 제시되었음.
5(2016.06.06.)	과제1	등분할 된 소구간(소구간의 개수 : 2개)의 기울기 평균과 전체 구간의 기울기와의 비교
	과제2	등간격으로 분할 되지 않은 소구간의 기울기들의 평균과 전체 구간의 기울기와의 비교
	과제3	등분할 된 소구간(소구간의 개수 : 4개)의 기울기 평균과 전체 구간의 기울기와의 비교
6(2016.06.21.)	과제1	버스를 기다리는 평균시간을 구하는 문제를 통한 연속적인 양에 대한 추론 방식 관찰
	과제2	밑변의 길이가 같으면서 주어진 삼각형의 넓이와 동일한 넓이를 가지는 사각형에 대한 인식 관찰
	과제3	시간, 거리, 속력의 관계에서 평균변화율에 대한 인식 관찰

연구에 의하면 과제 상황이 연속적인 변화를 담고 있다 하더라도 이를 인식하는 학생들의 추론 방식은 덩어리 추론과 매끄러운 추론 등 다양하게 나타날 수 있으며, 본 연구에서는 그와 같이 연속적인 변화를 이해하는 학생들만의 독특한 인식과 표현에 대하여 관심을 갖고 살펴볼 것이다. [2차시 과제2]와 [5차시 과제]는 서로 다른 구간에서의 변화를 다루는 과제로서, 앞서 제시된 [1차시 과제]와 [2차시 과제1]과는 달리 이산적인 과제에 해당한다. 특히 [5차시 과제]의 경우는 덩어리적으로 추론을 함에 있어 구간을 등간격 혹은 그렇지 않은 경우와 같은 다양한 상황을 제시하면서 이산적인 과제 상황에서 변화를 인식하는 학생들의 인식과 표현을 살펴보기 위한 과제이다. 특히 과제 상황이 시간, 거리, 속력의 관계 속에서의 변화를 다루는 것인 만큼, 연구자들은 학생들이 구간에서의 변화를 평균속력으로 표현하게 될 것으로 예상했었으며 이를 통하여 학생들의 평균변화율에 대한 인식과 표현을 관찰할 수 있을 것으로 보았다. 한편 [6차시 과제]는 [5차시 과제]와 달리 시간, 거리, 속력의 관계 속에서 연속적인 변화를 내포하고 있는 과제에 해당하며 교수실험 측면에서 과제의 목표는 이전 [5차시 과제] 때와 동일하였다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

Confrey와 Lachance(2000)에 의하면, 교수실험은 자료수집 과정에서 사용될 교과과정의 내용이나 해당 과정에 대한 시간 분배를 미리 완벽하게 계획할 수 없다. 이에 따라 교수실험의 각 차시별 실험시간은 다를 수 있으며, 교육과정을 벗어나는 내용이라 하더라도 학생들의 활동 과정에서 연구자들의 협의 하에 필요하다고 판단되면 과제로 구성하여 제시할 수 있다. 즉, 본 연구에서는 아직 미적분 학습 경험이 없는 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 학생들의 구간에서의 변화율 개념에 대하여 교수실험을 통하여 관찰할 것이다. 교수실험에서는 이전의 교수실험 중 일어난 일들을 기반으로 하여 연구자들의 합의를 거쳐 다음 교수실험을 구성하게 된다. 따라서 연구자가 분명히 관심을 가지는 수학적 영역과 주제를 가지고 있다 하더라도 방향성에 대한 결정은 연구자가 아닌 학생들의 반응과 연구자들의 합의 결과를 우선적으로 고려하여 결정하게 된다. 또한 같은 이유로 세부적인 교과과정의 구성은 유연하게 조정 가능하며, 이러한 과정을 통하여 결과적으로 학생들의 실제 학습과정을 반영한 새로운 교과과정을 구성할 수 있게 된다.

본 연구에서는 3명 참여 학생에 대한 각 학생의 수학적 활동 및 기록을 촬영하기 위하여 비디오카메라 1대와 전체 교수실험을 담을 비디오카메라 1대로 수업을 촬영했으며, 별도로 녹음된 오디오자료와 함께 전사과정을 통해 자료 분석 작업에 사용되었다.

또한 학생들이 교수실험 동안 작성한 활동지, 연구자들이 작성한 현장노트, 다음 교수실험 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지도 수집되어 연구수행 과정 중 일어나는 교수학적 결정의 수정과 변화의 양상을 기록하고 이를 기초로 교수실험 중 발생했던 수정과 재구성의 이유를 ‘IV. 결과분석’ 부분에 함께 기술하였다.

Ⅳ. 결과분석

1. 연속적으로 변하는 함수적 상황에서 학생들의 변화율 개념

[1차시 과제]는, 공변 관점에서는 동일하지만 변화율 관점에서는 구분되는 두 함수 $y=x^2$과 $y=\sqrt{x}$ 에 대하여 학생들이 연속적으로 변하는

[1차시 과제]	같은 인도 위를 움직이는 두 사람 A, B에 대하여, A는 출발점에서 출발한 다음 t초 후에 출발점으로부터 이동한 거리를 $f(t)$라 할 때, $f(t)=t^2$만큼 이동하고, B는 출발점에서 출발한 다음 t초 후에 출발점으로부터 이동한 거리를 $g(t)$라 할 때, $g(t)=\sqrt{t}$만큼 이동한다. 시간에 따라 두 사람의 이동한 거리를 그래프로 나타내고, 두 상황에서의 변화를 표현해 보아라(자신이 생각하는 변화가 무엇인지 밝혀보시오.).

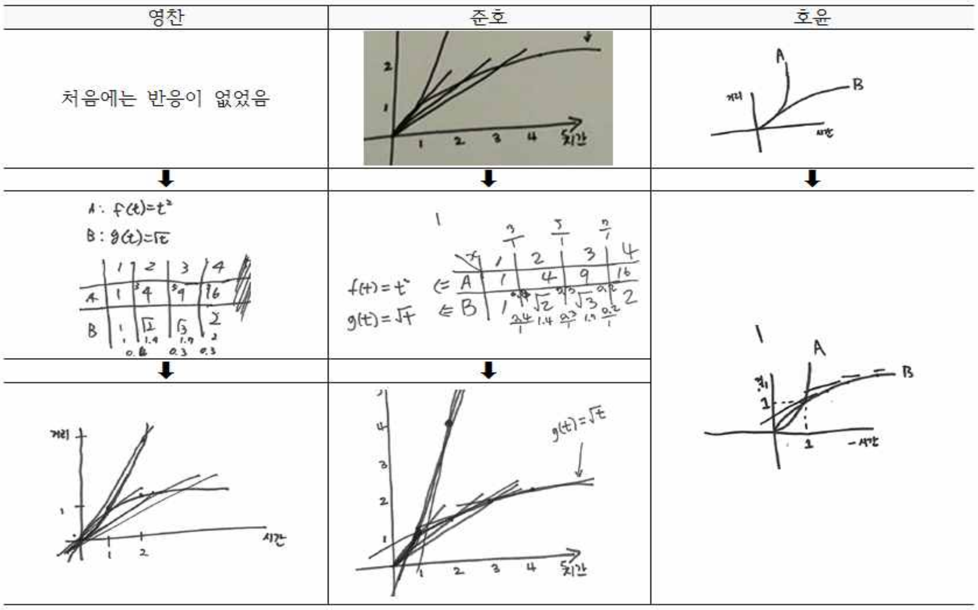
함수적 상황에서 학생들의 변화율 개념을 조사하기 위하여 연구자들이 최초 과제로 제시한 것이다. 이 과제에 대한 교사와 학생들 사이의 논의 과정을 통하여 세 학생이 함수의 변화를 인식하는 방식이 서로 다르다는 것을 확인할 수 있었다. $y=\sqrt{x}$의 변화에 대한 학생들의 인식 차이를 정리한 [그림 IV-1]에서 알 수 있듯이, 영찬과 준호의 경우는 처음에 $y=\sqrt{x}$에 대하여 $x=1,2,3$을 순서대로 대입하여 함숫값을 찾아서 대응표를 구성한 다음 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그렸고, 호윤의 경우는 대응표를 구성하지 않고 바로 $y=\sqrt{x}$에 해당하는 그래프를 제시하였다.

세 학생의 접근 방식을 세부적으로 살펴보면, 영찬의 경우 대응표에서 정의역의 원소에 대응되는 함숫값으로 점(x,y)를 구성하여 좌표평면에 찍은 다음, 해당 점들 각각에 대하여 원점과 이어서 직선을 그렸다. 그 다음 영찬은 그 직선들의 기울기가 점점 x축 쪽으로 가까워진다는 것으로 함수의 변화를 설명하였다. 준호의 경우도 처음에는 영찬의 방식과 동일한 방식으로 $y=\sqrt{x}$에서 정의역의 원소가 $x=1,2,3$일 때의 함숫값을 구한 다음 좌표평면에 점$(x,f(x))$을 찍어서 전체적인 그래프를 그렸다. 그런 다음 해당 점들과 원점을 이어서 함수의 변화를 표시하였으나, 이후 대응표에서 구간의 차이를 구해보고 나서는 구간의 양 끝에 있는 두 점을 잇는 직선들을 그렸다. 준호는 이렇게 구간의 양 끝점들을 이어서 구성한 직선들의 기울기가 감소한다는 것으로 함수의 변화를 설명하였다. 호윤은 다른 두 학생(영찬, 준호)과 달리 대응표를 구성하는 과정 없이 곧바로 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그린다음 곡선위의 점들에 대한 접선의 기울기가 점점 작아진다는 것으로 함수의 변화를 설명하였는데, 교사가 어떻게 대응표 없이 그래프를 그렸는지에 대한 질문에 대하여는 '머릿속으로 대응표를 구성해서 그렸다.'고 답을 하였다. 호윤의 반응에서 연구자들은 호윤이 변화를 인식하고 나서 그래프를 구성한 것인지 아니면 그래프를 구성하고 나서 변화를 인식한 것인지 확인하기 위하여 '점에서의 접선의 기울기가 점점 작아지기 때문에 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 곡선으로 그린 것인지'를 물어보았다. 교사의 질문에 호윤은 '그래프를 그리고 난 다음에 점들에서의 접선의 기울기가 감소한다는 것을 생각해냈다.'고 표현했다.

이상의 결과에서 세 학생의 $y=\sqrt{x}$의 변화를 인식하는 방식이 각각 다르다는 것을 확인할 수 있었으며, 이러한 학생들의 반응은 교육과정에서의 평균변화율이나 순간변화율과는 구분이 되는 학생들만의 고유한 표현 방식이므로, 본 연구에서는 이후 논의과정에서 영찬의 방식을 '누적평균변화율', 준호의 방식을 '구간평균변화율', 호윤의 방식을 '접점에서의 기울기'로 표현할 것이다. [그림 IV-1]은 $y=\sqrt{x}$의 변화에 대한 학생들의 인식 차이를 나타낸 것이다.

2. 구간에서 평균속도가 변하는 상황에 대한 영찬과 호윤의 문제 해결 과정에서의 차이와 변화율 개념

연속적인 변화를 담고 있는 함수적 상황(1차시 과제, 2차시 과제1[3])에서 학생들의 연속적인 변화에 대한 함수적 상황에서 변화에 대한 인식의



[그림 IV-1] $y=\sqrt{x}$ 의 변화에 대한 학생들의 인식 차이

차이가 서로 다르다는 것이 확인됨에 따라 연구자들은 아래의 [2차시 과제2]와 같이 전체 구간을 두 개의 구간으로 분할하여 각 구간마다의 평균속도가 다르게 주어진 과제(Byerley, Hatfield & Thompson, 2012)를 변형하여 학생들에게 제시하였다. 연구자들은 연속적으로 변하는 함수적 상황 $y=\sqrt{x}$ 에서 준호와 영찬은 세부적으로는 차이가 있지만 큰 틀에서는 덩어리 추론으로 접근한 것으로 볼 수 있는 반면 호윤은 매끄러운 추론의 방식으로 접근하는 차이를 보였기 때문에 [2차시 과제2]를 제시하였다. [2차시 과제2]의 경우는 두 개의 구간에 대하여 평균속도를 확인하는 과제로서 앞서 연속적으로 변하고 그래프의 형태가 곡선인 $y=\sqrt{x}$ 와 달리 구간별로 변화를 고려해야만 하고 직선형태의 그래프로 표현되는 과제이다. 연구자들은 [2차시 과제2]를 통하여 $y=\sqrt{x}$ 와 다른 과제 상황에서 학생들이 문제해결 과정 속에서 함수의 변화를 어떻게 인식하는지에 대하여 확인하기로 하였다.

[2차시 과제2]	자동차로 A지점에서 출발하여 90만큼 떨어진 B지점으로 가는데 평균속도가 40이었다. 다시 B에서 A로 돌아왔을 때, 즉 구간을 왕복한 거리 180의 최종 평균속도가 60이었다. 이때 B에서 A로 돌아오는 구간에서의 평균속도를 구하시오.

[2차시 과제2]는 지점 A에서 지점 B로의 평균속도와 지점 A에서 지점 B를 거쳐 다시 지점 A로 돌아오는 왕복운동에서의 평균속도가 주어졌을 때, 지점 B에서 지점 A로 이동하는 평균속도를 구하는 문제이다. 학생들의 과제에 대한 문제해결 과정을 살펴본 결과 [2차시 과제2]의 문제해결 과정에서도 덩어리 추론을 하는 영찬과 매끄러운 추론을 하는 호윤의 방식에서 차이가 발

3) [2차시 과제1]에서도 학생들의 연속적인 변화에 대한 함수적 상황에서 학생들의 변화에 대한 인식차이가 동일하게 관찰되었으나, 학생들의 인식차이에 대한 표현은 [1차시 과제]에 대한 분석만으로도 충분히 기술되었다고 판단하여 [2차시 과제1]에 대한 논의는 생략하였다.

견되었다. 영찬과 호윤의 문제해결과정에서의 차이는 다음과 같다.

가. 영찬의 문제해결 과정

지점 B에서 지점 A로 이동하는 평균속도를 x라 할 때, $\dfrac{180}{\dfrac{90}{40}+\dfrac{90}{x}}=\dfrac{180}{\dfrac{9x+360}{4x}}=\dfrac{720x}{9x+360}=60$의 방정식을 풀어서 $x=120$을 구하는데, 이는 총거리에 대한 총시간의 비를 구한 것으로 볼 수 있다. 연구자들은 영찬의 문제해결과정이 이전에 연속적인 변화를 표현한 함수적 상황에서 변화를 '누적평균변화율'로 인식하는 것과 매우 유사한 것으로 판단하였다.

나. 호윤의 문제해결 과정

호윤은 $\dfrac{180}{60}=3$과 같이 총 거리를 이동하는 과정에서의 평균속도로 총 거리를 나누어준 다음, 동일한 방식으로 지점 A에서 B로 이동할 때의 시간을 $\dfrac{90}{40}=2.25$와 같이 구하였다. 이후 3시간에서 2,25시간과의 차에 해당하는 0.75시간 동안 90이라는 거리를 가야하므로 $\dfrac{90}{0.75}=120$과 같이 계산하여 답을 구하였다. 호윤의 방식은 Byerley, Hatfield와 Thompson(2012)에서 비 개념의 곱셈적 관점이 잘 드러난 사례로 제시한 것과 동일한 접근 방식이다.

이와 같이 영찬과 호윤의 [2차시 과제2]의 문제해결과정을 관찰한 결과 영찬의 경우는 연속적인 함수의 변화를 인식하는 '누적평균변화율' 관점이 덩어리적인 변화를 포함하는 [2차시 과제2]에서도 유사하게 관찰되었고, 호윤의 경우 함수의 변화를 '접점에서의 기울기'로 인식하는 것이 특징이었는데, 이 문제해결과정에서 내포량을 구간의 변화를 표현하는 양으로 인식하고 있다는 것을 추가로 확인할 수 있었다.

3. 평균변화율과 순간변화율의 관계에 대한 인식 차이

연구자들은 [1차시 과제]에서 연속적인 변화에 대한 함수적 상황에서 학생들이 변화를 인식하고 표현하는 방식에 차이가 있다는 것을 확인하고 나서, 학생들에게 [2차시 과제1]과 같이 변화율이 변하는 함수적 상황을 제시하고 특정 구간에서 함수의 변화를 어떻게 인식하고 표현하는지 살펴보기로 하였다. 이 과제는 이동근 외(2016)에서 제시되었던 과제로서 일정한 물에 설탕을 넣은 다음 설탕물의 농도가 변하는 상황을 함수로 구성한 함수 $g(a)$에서의 변화를 관찰하는 과제이다. 본 연구에서는 해당 함수 $g(a)=\dfrac{a}{1+a}$에 대하여 정의역의 구간 $[1,2]$에서 변화를 표현하도록 학생들에게 제시한 다음에 그 반응을 관찰한 부분을 기술하였다.

[2차시 과제1]	x를 물, y를 설탕의 양이라 할 때, 농도는 $\dfrac{y}{x+y}$가 되고, 물과 설탕의 비는 $\dfrac{y}{x}$가 된다. 이 때 농도 식에서 분모 분자를 x로 나누어 주면 $\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$가 되며, $\dfrac{y}{x}=a$라 했을 때, $\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$ $=\dfrac{a}{1+a}=1-\dfrac{1}{1+a}$이 된다. $f(a)=a$와 $g(a)=1-\dfrac{1}{1+a}$의 변화를 비교하시오. (단, $a=\dfrac{y}{x}$이다.)

[2차시 과제1]에서 세 학생 모두 구간에서의 변화를 한 점에서의 변화와 관련지어 인식하는 것이 드러났으나, 덩어리 추론을 하는 영찬과 준호의 방식과 매끄러운 추론을 하는 호윤의 인식의 방식에서 차이가 관찰되었다. 세 학생의 구간에서의 변화율에 대한 인식의 차이를 살펴보면, 1) 준호와 영찬은 함수 $g(a)$에서 정의역의 구간 $[1,2]$에서의 기울기에 해당하는 값이 양 끝점에서의 접선의 기울기들의 차에 해당한다고 하였으며, 2) 호윤은 구간 [1,2]에서의 '접점에서의 기울기'들의 평균이 해당 구간에서 구간의 양 끝점을 이은 선분의 기울기와 같다고 추측하였다.

아직 미분 학습이 이루어지지 않은 고등학교 1학년 학생들이어서 학생들의 추측에 대하여 논리적인 확인하는 것에는 제약이 있었지만, [대화2]를 살펴볼 때 학생들 스스로가 실험도중 자연스럽게 1) 순간변화율에 해당하는 한 점에서의 접선의 기울기를 이용하여 구간에서의 기울기에 해당하는 평균변화율을 설명하려했다는 점과 2) 호윤이의 경우 구체적으로 순간변화율에 해당하는 값들의 평균으로 평균변화율에 해당하는 구간의 기울기를 언급하였다(호윤이 표현한 '접점에서의 기울기'가 교육과정에서 평균변화율의 극한으로 도입하는 순간변화율과 같은 개념이라고 확정할 수는 없지만, 호윤의 '순간변화율의 평균으로 평균변화율을 인식'하는 방식은, 교육과정에서 평균변화율과 순간변화율의 관계를 '평균변화율의 극한으로 순간변화율을 정의'하는 방식과는 다른 것으로 보인다.).

> [대화2]
> 교사: 준호 방식으로는 그것을 설명할 수 없나? 준호 방식은 조금 달랐던 것 같은데?
> 호윤: 똑같은 것 아니에요. 어차피 이 구간에서 두 점을 이은 선을 그으면 이 기울기는 여기 있는 무수히 많은 점들의 기울기의 평균 아니에요?
> 교사: 내가 이해가 잘 안되는데, 여기다가 그래프를 크게 그려서 다시 설명해봐.
> 호윤: 이 기울기가 이 무수히 많은 점들에
> 교사: 이 곡선위에 있는 점들?
> 호윤: 네, 그러니까 이 구간 사이에 있는 모든 점들의 접선의 기울기의 평균이 이 두 개를 이은 기울기 아니에요?

이후 교사와 학생들은 호윤이 제기한 추측에서 셀 수 없이 많은 점들에서의 '접선의 기울기'들에 대한 평균을 어떻게 계산할 것인지를 고민하였다. [대화3]에서 드러나듯이 이러한 고민에 대하여 준호와 영찬은 그래프 위에다 몇 개의 점을 직접 설정한 다음 기울기들을 직접 계산해서 확인할 것을 제안하였는데, 몇 개의 점을 택하는 방식에 있어서는 정의역의 원소들 중에서 등간격으로 원소를 택하여야한다고 주장하였다. 반면에 호윤은 다른 두 학생(준호와 영찬)이 몇 개의 점을 가지고 확인하자는 의견을 제시한 것에 대하여 어떠한 의사표현도 하지 않은 상태에서 고민하는 모습을 보였다. 이후 호윤은 등간격으로 분할하여 확인하자는 다른 학생들의 의견에 대하여 등간격이면 안될 것 같다고 자신의 의견을 제시하였다. 이때 호윤은 등간격으로 분할하여 살펴보면 안 되는 이유에 대하여도 언급하였는데, '점점 작아지는 것으로 해야 평균값이 나온다.'라든지 '기울기도 크다가 점점 작아진다.'라는 표현을 사용하여 등간격으로 분할하여 변화를 살펴보는 것에 반대한다는 자신의 견해를 분명히 밝혔다.

> [대화3]
> 교사: 이 점들 사이 간격은 같아야 해요?
> 준호: 네 일정해야하지 않을까요?
> 교사: 호윤이 생각은?
> 호윤: ....
> 교사: 그건 생각 안 해봤어요?

호윤: 네
영찬: 같은 것이 좋을 것 같아요.
교사: 계산을 편하게 하기 위해서? 의미상으로?
준호: 의미상으로!
영찬: 네 의미상으로.... 일정하게 나누어야 평균을 알 수 있지 않을까요? 계속 늘어나는지?
준호: 굳이 많은 점을 안 하고 일정한 간격으로 한 다음에 한정된 것으로 나누니까.
⋮
교사: ...그 값들의 평균을 내봤을 때 이 구간에서의 기울기와 같은지 확인해보면 되는 거지? 그지? 기울기를 그런데 폭을 뭐로 할 거야?
호윤: 근데 일정하면 안 되지 않아요? <u>점점 작아지는 것으로 해야 평균값이 나오는 것 아니에요?</u>
준호: 일정해야 평균이 되는 거 아니야
호윤: <u>기울기도 크다가 점점 작아지니까...</u>
준호: 등간격 이어야하는 거 아니에요?
교사: 등간격 이어도 작아지지?
호윤: <u>근데 작아지는 정도가 다르잖아요?</u>

특히 [대화3]에서 호윤의 표현 중 밑줄 친 부분들에 대하여, 연구자들은 호윤의 경우 구간에서의 연속적인 변화를 인식할 때 구간의 양 끝점에서의 변화만을 인식하는 것이 아니라 구간 내부의 변화까지도 고려하여 이해하기 때문에, 다른 학생들(준호와 영찬)처럼 구간으로 분할하여 내부의 변화를 고려하지 않은 상태에서 양 끝점의 변화만을 관찰하려는 것에 동의하지 못하는 것으로 판단하였다.

이처럼 구간에서의 접선의 기울기들의 평균과 구간의 양 끝점을 이은 직선의 기울기사이의 관계에 대하여 학생들의 접근 방식의 차이가 발견됨에 따라, 연구자들은 학생들이 제시한 방법을 따라가면서 구간에서의 평균변화율에 대한 학생들의 이해를 관찰하기로 하였다.

가. 평균변화율 의미에 대한 덩어리 추론 접근

호윤이 구간에서의 평균변화율을 구간에서의 순간변화율들의 평균이라고 강한 추측[4]을 제기한 이후, 준호와 영찬은 구간의 정의역을 등간격으로 분할한 다음 분할된 구간들에서 구간의 양 끝점을 그래프 위에 표시해서 각 소구간들에서의 기울기들의 평균값과 전체 구간의 기울기를 비교하겠다는 의견을 제시하였다.

학생들이 제시한 방법에 따라 교수실험 5차시에 [5차시 과제1], [5차시 과제2], [5차시 과제3]의 3개의 과제를 통하여 정의역의 구간 $[0,4]$에서 함수 $f(x)=x^2$의 소구간의 기울기들의 평균과 구간 $[0,4]$에서의 평균변화율을 비교하는 활동을 진행하였다. 즉 1) 정의역의 구간$[0,4]$를 등간격으로 분할하여 각 소구간에서의 기울기들의 평균을 구한 다음 구간$[0,4]$에서의 평균변화율과 비교하는 [5차시 과제1], [5차시 과제3]의 과정과 2) 동일한 함수와 동일한 구간에 대하여 등간격이 아닌 소구간으로 분할하여 각 구간들의 기울기의 평균을 구해서 구간$[0,4]$에서의 평균변화율과 비교하는 [5차시 과제2]의 문제해결 과정을 거쳤다.

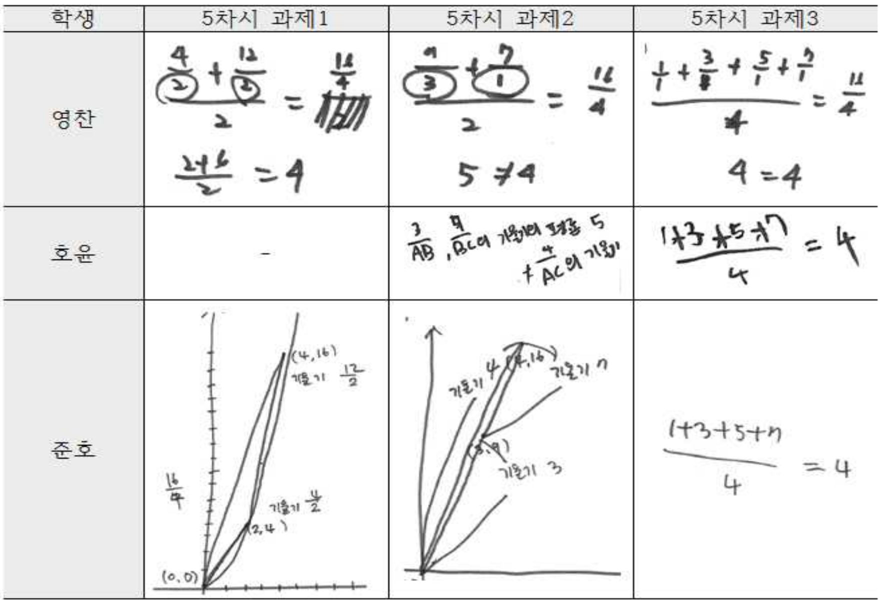
[5차시 과제1]	$f(x)=x^2$의 두 점 (0,0)과 (4,16)을 이은 직선의 기울기와 x축 위의 0과 4사이를 2등분 한 다음 그 점들을 x좌표로 갖는 함수 $f(x)$위의 점들을 순서대로 두 개씩 이은 선분의 기울기들의 평균값을 구해서 (0,0)과 (4,16)을 이은 직선의 기울기와 비교하시오. (교사와 같이 연습)
[5차시 과제2]	(0,0)과 $(3, f(3))$과 (4,16)에 대하여 같은 활동을 해서 두 개씩 이은 선분의 기울기들의 평균값을 구해서 (0,0)과 (4,16)을

4) 강한 추측이라 표현한 이유는 호윤이가 논리적으로 설명을 하지는 못하면서도 지속적으로 자신의 추측이 맞을 것이라는 생각을 바꾸지 않았기 때문이다.

	이은 직선의 기울기와 비교하시오.(등분 할 안한 경우에 대한 확인)
[5차시 과제3]	4등분 한 다음 그 점들을 x좌표로 갖는 함수 $f(x)$위의 점들을 순서대로 두 개씩 이은 선분의 기울기들의 평균값을 구해서 (0,0)과 (4,16)을 이은 직선의 기울기와 비교하시오.

해당 방식은 준호와 영찬이 제시한 방법이지만 과제 해결은 호윤까지 포함한 세 학생 모두 참여하였다. 학생들의 반응을 살펴보면, [그림 IV-2]와 같이 해당 구간의 기울기를 구하여 평균을 구한 다음 전체 구간의 기울기와 결과가 같은지를 확인하는 방식으로 접근하였다. 이 과정을 통하여 세 학생 모두 $f(x)=x^2$에 대하여 정의역의 구간 $[0,4]$를 등간격으로 분할하여 각 구간에서의 기울기들의 평균을 구한 다음 구간 $[0,4]$에서의 평균변화율과 비교한 결과가 서로 같다는 것을 확인하였고, 등간격이 아닌 경우는 소구간의 기울기들의 평균과 전체 구간의 기울기가 서로 같지 않음을 확인하였다.

그러나 이 과정 이후에도 호윤이의 경우는 동일한 문제에서 정의역의 구간 길이를 n등분해서 일정한 간격으로 떨어져있는 함수 $f(x)$ 위의 점들의 접선의 기울기 값들의 평균은 구간$[0,4]$에서의 평균변화율과 다를 것이라고 예측[5]하였는데, 이러한 표현을 근거로 미루어볼 때, 호윤은 등간격으로 분할하여 변화를 관찰하는 것에 대하여 다른 두 학생들과 달리 여전히 동의하지 못하는 것으로 보였다.



[그림 IV-2] 함수 $f(x)=x^2$의 구간에서의 평균변화율과 소구간의 평균변화율의 평균 비교

5) 호윤의 예측과 달리 수학적으로는 이 경우도 같은 값이 나오게 된다. 즉, 함수 $F(x)$에 대하여 구간 $[a,b]$를 n등분 했을 때,

$$\frac{\dfrac{F(b)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\cdots+F(x_2)-F(a)}{\dfrac{b-a}{n}}}{\dfrac{n}{1}}=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

가 성립함으로, 소구간들의 기울기들의 평균은 구간 $[a,b]$에서의 함수 $F(x)$의 평균변화율과 같음을 알 수 있다.

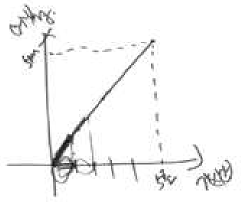
나. 평균변화율 의미에 대한 매끄러운 추론 접근

연구자들은 호윤이 다른 학생들(이산적인 방식으로 문제를 해결하는 준호와 영찬)이와 구분되는 반응을 보임에 따라, [6차시 과제1]과 [6차시 과제2]와 같이 연속적으로 변하는 함수적 상황을 다양하게 제시하여 호윤이 매끄러운 추론으로 접근하는 것에 자신감을 가질 수 있도록 기회를 제공하고 호윤의 반응을 살펴보았다.

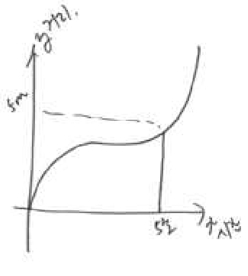
[6차시 과제1]	버스가 30분 만에 한 대씩 오는 정거장에서, 버스를 타기 위해 정거장에서 평균적으로 기다리게 되는 시간은 어떻게 구할지 이야기해보시오.
[6차시 과제2]	삼각형의 밑변의 길이와 가로의 길이가 같고 삼각형의 넓이가 같은 사각형의 높이는 얼마인가?

[6차시 과제3]	시간, 거리, 속력의 관계에 대한 그래프에 대하여 교사의 물음에 답하시오.

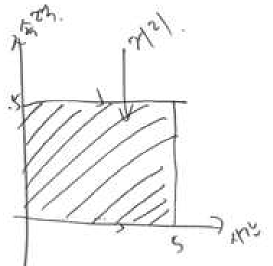
이때 [6차시 과제1]의 경우 교육과정에서는 확률과 통계 단원의 연속확률변수를 소개할 때 도입되는 과제로서 고등학교 1학년인 실험대상자들의 수준을 벗어나는 소재로 볼 수도 있지만, 교육과정을 벗어나더라도 직관적으로 연속적인 변화에 대하여 평균적인 변화를 이야기할 수 있는 소재라는 점에서 교수실험 과제에 포함 시켜서 진행하는 것으로 연구자들 간에 합의를 하였다. 위 과제들을 가지고 일련의 활동을 진행한 결과 학생들이 중학교에서 배운 '거리, 시간, 속력'의 관계 공식을 자주 언급함에 따라, 교사는 [6차시 과제3]과 같이 '속력 함수' 혹은 '거리 함수'에 해당하는 6가지 그래프를 제시하여, 학생



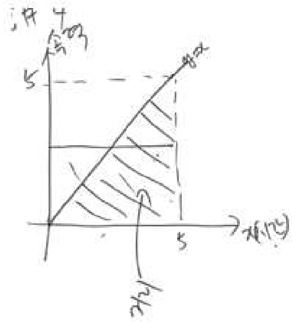
[그림1] 등속도 운동의 시간과 거리함수



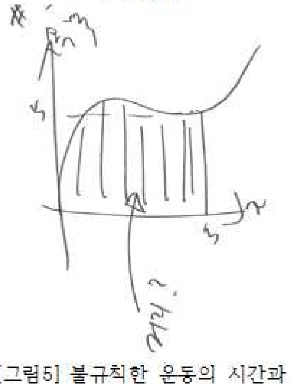
[그림2] 불규칙한 운동의 시간과 거리함수



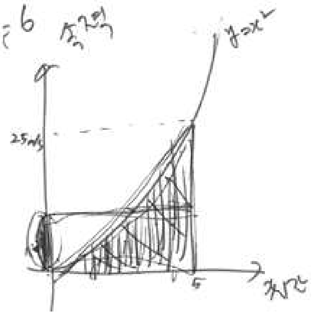
[그림3] 등속도 운동의 시간과 속력함수



[그림4] 등가속도 운동의 시간과 속력함수



[그림5] 불규칙한 운동의 시간과 속도함수



[그림6] 가속도가 일정하게 증가하는 운동의 시간과 속력함수

[그림 IV-3] 교사가 제시한 거리, 시간, 속력의 관계 적용이 가능한 6가지 경우

들의 속력함수에서 그래프 아래의 넓이에 대한 인식을 조사하였다. [그림 IV-3]에서 제시한 6가지 그래프는 모든 경우의 함수를 분류하여 제시한 것은 아니고, 변화가 일정한 것과 일정하지 않은 것을 기준으로 학생의 반응을 살펴보기 위한 몇 개의 자료를 제시한 것이다.

위 과제들을 가지고 일련의 활동6)을 진행한 결과 처음에 학생들은 중학교에서 배운 '거리, 시간, 속력'의 관계 공식을 시간과 거리의 함수에서 속력이 일정한 경우만 적용할 수 있다고 했으며([그림1]은 속력을 구할 수 있으나, [그림2]는 속력을 구할 수 없다고 함), 그 이유에 대하여 학생들은 논리적인 답변을 제시하지는 못하고 '그런 경우만 배웠다'고 답을 했었다.

이후 교사가 [그림3]의 등속도 운동을 하는 물체의 시간과 속력 그래프를 그리고 나서 '여기서는 무엇을 알 수 있어?'라고 묻자 학생들은 '거리'라고 답을 하였고, 이어서 교사가 [그림4]의 등가속도 운동을 하는 물체의 시간과 속력의 그래프($y=x$형태)를 제시하자 학생들은 여전히 그래프와 x축 사이의 넓이를 거리라고 표현하였다. 속력이 일정하지 않음에도 거리라고 생각하느냐는 교사의 지적에 '속력이 일정하게 변하기 때문에 괜찮다.'라고 답을 하였다.

다음으로 [그림4]의 등가속도 운동을 하는 물체의 시간과 속력의 그래프($y=x$)에서 구간[0,5]에서의 직선과 x축 사이의 넓이와 같은 넓이를 갖는 밑변의 길이가 구간[0,5]의 길이인 직사각형의 높이를 구하는 활동에서 학생들은 직사각형의 높이에 해당하는 값 2.5를 처음에는 넓이가 같게 되는 높이로만 인식하다가 해당 구간에서의 평균속력으로 인식의 변화를 보였다.

속력함수에서 구간에서 그래프 아래의 넓이와 동일한 넓이를 갖는 직사각형의 높이를 평균속력으로 인식한 이후에는 [그림5]나 [그림6]과 같이 '시간과 속도의 함수'의 그래프 모양이 직선이 아니어도 그래프와 x축 사이의 넓이를 구간에서의 이동거리로 인식하는 것이 관찰되었는데, 이 과정에서 특히 호윤은 '(깨달았다는 듯이)어 맞아요. 그런 것 같아요.'라든지 '이걸 이걸(급하게 표현함) 생각 못했어요. 제가 생각한 거 맞아요.'라고 하면서 이전과 구분되는 격한 반응을 보였다. 연구자들은 [대화4]의 밑줄 부분과 같은 호윤의 반응은 자신이 표현하고 싶었던 것을 교사가 적절하게 표현해준 것에 대한 강한 동의로 보았다.

[대화4]

교사: 난 여기서 호윤이 말 듣고 무슨 생각이 들었냐면 내가 한 것이 맞는지는 모르겠어. 평균속력이라고 했잖아. 평균속력이 계속 그 속력으로 간 거 아냐? 시간에 그 평균속력을 곱한게 거리일 것 아니야. 그러면 이 사각형과 삼각형의 넓이가 같게 되는 거라고 생각해서... 2.5가...

영찬: (깨달았다는 듯이)아.....(감탄사)

호윤: (깨달았다는 듯이)어 맞아요. 그런 것 같아요.

교사: 맞아요? 이게? 듣고 보니까 이거야? 니가 생각한게 이거야?

호윤: <u>이걸 이걸(급하게 표현함) 생각 못했어요. 제가 생각한 거 맞아요.</u>

아직 형식적인 미분과 적분을 학습한 단계는 아니어서 수식으로 입증한 것은 아니지만, 호윤의 접근 방식은 결과적으로 '구간에서의 평균변화율이 해당 구간의 모든 점에서의 접선의 기울

6) 시간, 거리, 속력의 관계 적용이 가능한 6가지의 그림은 교사가 한꺼번에 제시한 것이 아니라 학생들과의 교수실험 진행 중에 순차적으로 교사가 제시한 것이며, 이동근, 안상진, 김숙희, 신재홍(2016)에서 이 그림에 대한 학생들의 반응과 관련된 세밀한 관찰이 이루어졌으나 여기서는 본 연구의 논의와 관련된 평균변화율 인식 부분만을 간단하게 언급하기로 한다.

기 값의 평균'이라는 것을 보이는 것에 매우 근접한 것으로 보였다. 호윤의 반응을 수학적인 표현으로 정리해보면, $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$라 할 때, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$는 직관적으로 함수 $F(x)$의 구간 $[a,b]$에서의 접선의 기울기들의 합이 되는데, 이것들의 평균은 구간의 길이인 $b-a$로 나누어주는 것이므로 식으로 표현하면 $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$가 된다.

이는 의미상으로 구간 $[a,b]$에서 $y=f(x)$의 아래 넓이와 같아지는 직사각형의 높이를 상수 K라 할 때 K의 값을 구하는 것으로 볼 수 있으며, '직사각형의 넓이'와 '구간 $[a,b]$에서 $y=f(x)$의 아래 넓이'가 같다는 것을 식으로 표현하면, $\int_a^b f(x)dx = K(b-a)$가 된다. 여기서 얻어지는 식은 $K=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$가 되고, 이때 K는 함수 $f(x)$의 함숫값(높이의 순간순간의 변화의 값)들에 해당하는 평균값으로 볼 수 있다.

V. 논의 및 결론

실험에 참여한 세 학생들의 함수의 변화 인식 과정에서 나타나는 변화율 개념이 다른 것으로 관찰 되었다. 실험에서 제시한 함수적 상황은 다음과 같은 두 가지 과제였다.

1) $y=\sqrt{x}$와 $y=\frac{x}{1+x}$ 같은 연속적인 변화를 나타내면서 그래프가 곡선으로 표현되는 과제

2) [2차시 과제2]와 같이 구간의 길이와 평균속도가 모두 다른 상태로 그래프의 형태가 직선으로 표현되는 과제

교수실험의 진행은 $y=\sqrt{x}$와 $y=\frac{x}{1+x}$의 변화를 표현하는 과정에서 세 학생들이 '누적평균변화율', '구간평균변화율', '한 점에서의 접선의 기울기'의 방식으로 다르게 표현하는 것이 관찰됨에 따라 연구자들이 협의 하에 [2차시 과제2]와 같이 이산적으로 변화하는 과제 상황을 제시하여 학생을 관찰하는 순서로 이루어졌다. [2차시 과제2]는 Byerley, Hatfield과 Thompson (2012)에서 제시된 과제로서 주어진 시간과 거리를 이용하여 평균속력을 구할 때 그 평균속력의 의미 속에 중간의 변화를 인식하고 있는지 여부에 따라 Castillo-Garsow(2012)가 제시한 덩어리 추론과 매끄러운 추론을 확인하는 과제로 이용될 수 있다.

앞서 언급한 누적평균변화율 관점과 구간평균변화율 관점은 연속적인 변화를 표현한 관계식에 $x=1,2,3,\cdots$을 순차적으로 대입해가면서 함숫값을 구해서 좌표평면 위에 점으로 구성하는 방식이었다. 또한 이렇게 구성한 점들을 이용하여 원점과 이은 직선의 기울기가 줄어든다고 표현(누적평균변화율)하거나 이웃하는 점들끼리 선분으로 이어서 그 선분들의 기울기가 줄어든다고 표현(구간평균변화율)하는 방식은 구간 내부의 변화를 고려하기 보다는 구간의 양 끝점들만을 고려하여 변화를 이해하는 방식이므로 이산적으로 덩어리 추론과 깊은 관련이 있는 것으로 보인다. 한편 한 점에서의 접선의 기울기로 변화를 인식하는 방식은 매 순간마다 변하는 접선의 기울기를 이용하여 변화를 인식하고 표현하는 방식으로서, 매끄러운 추론과 유사해 보였다. 또한 [2차시 과제2]에서 한 점에서의 접선의 기울기로 변화를 인식하는 학생의 경우 덩어리 추론 방식을 보여준 다른 두 학생들과 달리 서로 다른 구간의 길이를 갖는 시간 변화에서의 평균속력을 구하는 과정에서 두 변수의 관계를 인식

(공변 관점)하여 문제를 해결하는 모습이 관찰되었는데, 이러한 학생의 반응은 Byerley, Hatfield과 Thompson(2012)에서도 제시되었다는 점에서 주목할 만한 부분이다. 해당 연구에서 공변 관점에 기반한 곱셈적 관점으로 비 개념을 구성한 학생의 접근 방식과 본 연구에서는 매끄러운 추론을 하는 학생의 문제해결 과정이 유사하다는 점은 추후 '공변 관점과 비 개념 및 변화율 개념의 관계'에 대한 연구에 도움이 될 것으로 보인다.

다음으로 함수 $y = \frac{x}{1+x}$의 변화를 설명하는 과정에서 '한 점에서의 접선의 기울기'로 변화를 인식하는 학생이 '구간에서의 접선의 기울기들의 평균이 구간에서 양 끝 점을 이은 선분의 기울기와 같다.'는 추측을 제기하였는데, 학생이 변화를 인식하는 방식인 '한 점에서의 접선의 기울기'의 의미가 교육과정에서의 순간변화율 개념과 동일하다고 볼 수는 없지만, 학생의 추측은 '평균변화율은 순간변화율들의 평균이다.'라는 의미를 매끄러운 추론을 하는 고등학교 1학년 수준에서 구성한 것으로 보인다.

한편 교수실험에서 교사와 학생들이 이를 해결하는 과정에서 학생들의 접근 방식의 차이가 관찰되었다. '누적평균변화율'과 '구간평균변화율' 관점으로 변화를 인식하는 두 학생은 전체 구간을 등간격의 소구간으로 분할하여 각 소구간 마다의 평균변화율을 구하여 그 값들의 평균을 구하는 방식으로 접근한 반면, '한 점에서의 기울기' 방식으로 함수의 변화를 인식하는 학생은 등간격으로 분할해서 접근하는 방식에 부정적인 견해를 보였다. 특히 [5차시 과제1], [5차시 과제2], [5차시 과제3]에서 등간격의 소구간으로 분할하여 기울기들의 평균을 계산한 결과가 전체 구간에서 양 끝점을 이은 직선의 기울기와 동일함을 확인한 이후에도, 학생은 해당 함수의 그래프에서 변하는 정도가 계속 변하기 때문에 등간격으로 분할하는 것이 적절한 방법이 아니라는 자신의 견해를 지속적으로 주장하였다. 여기서 연구자들은 덩어리 추론을 하는 학생에게 자연스러운 방식이 연속적인 변화에 대하여 매끄러운 이미지를 가지고 매끄러운 추론을 하는 학생에게는 자연스러운 접근 방법이 아닐 수도 있음을 확인하였다. 이러한 관찰결과는 매끄러운 추론과 덩어리 추론 방식의 차이는 수학적인 결과물에서도 차이를 보인다는 연구 결과 (Castillo-Garsow, 2012; 김채연, 신재홍, 2016)를 지지할 수 있다. 그리고 이러한 학생의 추측과 학생만의 독특한 접근 방식은 특정 개인에 국한된 사례일 수도 있지만, 역사발생과정에서 변화율 개념이 평균변화율에서 순간변화율로 발달해 온 것에 대하여 학생들의 발달 과정은 다를 수도 있으므로 학생들의 변화율 개념의 발달에 대한 지속적인 연구의 필요성을 시사해준다는 점에서 의미가 있다.

본 연구를 통하여 다음과 같은 두 가지 교육적 함의를 고려해볼 수 있다. 1) 미분계수의 역사발생과정에서는 평균변화율에서 순간변화율 개념 순서로 발달해온 것으로 보이지만, 학생들의 변화율 인식과정에 대한 조사 결과 순간변화율로 평균변화율을 이해하는 경우도 있으므로, 변화율 개념 발달 과정에 대한 보다 깊은 연구가 필요함을 알 수 있었다. 특히 2) 평균변화율과 순간변화율 개념의 연결 과정에서 극한 개념에 대한 이해의 어려움으로 미분계수 학습에서 여러 문제점이 제기가 되고 있는데, 학생들이 구간에서 함수의 변화를 인식하는 다양한 방식(누적평균변화율, 구간에서의 평균변화율, 한 점에서의 접선의 기울기)에 대한 이해는 향후 변화율 관점에서의 미분학습에 대한 연구에 기초자료가 될 수 있으며, 나아가 학습자의 미분학습 모델 설정에 도움이 될 수 있다.

참고문헌

강향임(2012). 수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화, **학교수학, 14**(4), 409-429.

김정희, 조완영(2006). 고등학생들의 미적분 개념 이해 및 오류유형 분석. **과학교육연구논총, 22**(1), 87-97.

김채연, 신재홍(2016). 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론의 차이가 문제 해결에 미치는 영향, **수학교육, 55**(3), 251-279.

마민영, 신재홍(2016). 중학생들의 함수의 그래프에 대한 이해와 발달, 학교수학, 18(3), 457-478.

문종은(2014). 융복합 수업에서 나타난 변화율 개념의 이해에 관한 연구, 이화여자대학교 대학원 박사학위 논문.

신은주(2006). 등가속도 운동에서 미적분의 기본 아이디어 학습 과정에 관한 사례연구, **수학교육학연구, 16**(1), 59-78.

임재훈, 박교식(2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, **수학교육학연구, 14**(2), 171-185.

이진호(2005). 라이프니츠의 무한과 무한소의 개념과 무한의 연산, **한국수학사학회, 18**(3), 67-68.

이동근, 문민정, 신재홍(2015). 이차함수에서 두 변량사이의 관계 인식 및 표현의 발달 과정 분석: 민선의 경우를 중심으로, **수학교육, 54**(4), 299-315.

이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍(2016), 변화율 관점에서 농도 변화에 대한 인식과 표현의 변화 과정에 대한 분석, **수학교육학연구, 26**(3). 333-354.

이동근, 안상진, 김숙희, 신재홍(2016), 거리함수와 속력함수에서, 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현의 변화과정에 대한 연구. **학교수학, 18**(4), 881-901.

정연준, 강현영(2008). 정적분의 무한소 해석에 대한 고찰, **학교수학, 10**(3), 375-399.

정연준, 김재홍(2008). 함수의 연속성 개념의 역사적 발달 과정 분석, **수학교육학연구, 23**(4), 567-584.

Boyer, C. (1959). **미분적분학사-그 개념의 발달,** 김경화 역, 서울: 교우사.

Byerley, C., Hatfield, N., & Thompson, P. W. (2012). Calculus Student Understandings of division and rate. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle & M.. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 358-363). Portland, Oregon: SIGMAA/RUME.

Calson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 5*(5), 352-378.

Castillo-Garsow-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*, WISDOMe Monographs (Vol. 2, pp. 55-73). Laramie, WY: University of Wyoming.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 135-164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education 26*, 66-86.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 215-238). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Eves, H. (1982). **수학의 위대한 순간들**. 허민, 오혜영 역, 서울: 경문사.

Hauger, G. S. (1995). Rate of change knowledge in high school and college students. p. 49. Washington, D.C. : ERIC Clearinghouse microfiches. ED392598.

Klein, M. (1953). **수학, 문명을 지배하다**, 박영훈 역, 서울: 경문사.

Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School, 13*(5), 23-26.

Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America* (Vol. 1, pp. 298-304). Raleigh, NC: North Carolina State University. Retrieved from http://bit.ly/1b4sjQE.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45-64) Morelia, Mexico. PME.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*, WISDOMe Monographs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103-122.

Students' Recognition and Representation of the Rate of Change in the Given Range of Intervals

Lee, Dong Gun (Moonjung High School)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

This study investigated three 10th grade students' concept of rate of change while they perceived changing values of given functions. We have conducted a teaching experiment consisting of 6 teaching episodes on how the students understood and expressed changing values of functions on certain intervals in accordance with the concept of rate of change.

The result showed that the students did use the same word of 'rate of change' in their analysis of functions, but their understanding and expression of the word varied, which turned out to have diverse perceptions with regard to average rate of change. To consider these differences as qualitatively different levels might need further research, but we expect that this research will serve as a foundational study for further research in students' learning 'differential calculus' from the perspective of rate of change.

* Key Words : covariational reasoning(공변 추론), function(함수), rate(비율), rate of change(변화율), average rate of change(평균변화율), instantaneous rate of change(순간변화율)

논문접수 : 2016. 11. 30
논문수정 : 2017. 2. 5
심사완료 : 2017. 2. 7