

## 추상에서 구체로의 상승을 통한 삼각함수의 재구성

강 미 광 (동의대학교)

한 인 기 (경상대학교)<sup>†</sup>

### I. 서론

지식이 교사로부터 학생에게로 전달된다는 관점에서 학습 주체에 의한 지식의 능동적 구성이 강조되는 관점으로 교육의 방향이 바뀌어 가고 있다. 특히 2015개정 교육과정의 총론(교육부, 2015)에서는 추구하는 인간상으로 '기초 능력의 바탕 위에 다양한 발상과 도전으로 새로운 것을 창출하는 창의적인 사람(p.1)'을 꼽았으며, 교육과정 구성의 중점 중의 하나가 '교과 특성에 맞는 다양한 학생 참여형 수업을 활성화하여 자기주도적 학습 능력을 기르고 학습의 즐거움을 경험하도록 한다(p.3)'라고 하였다. 즉 2015개정 교육과정에서는 이미 정리된 지식을 잘 익히는 사람이 아닌 새로운 지식을 구성할 수 있는 창의적인 사람을 추구하며, 교사가 주도하는 교수-학습이 아닌 학생 스스로가 주도하는 학습 능력을 기를 것을 요구하고 있다.

이러한 시대적인 요청은 수학 교수-학습에서도 예외가 될 수 없다. 우리나라의 수학교육학 연구에서는 1990년대 후반부터 학습자에 의한 수학 지식의 구성에 대한 논의가 이루어져 오고 있다. 지금은 수학교육학의 연구뿐만 아니라, 현직교사 및 예비교사들의 교육에서도 구성적 관점에서의 수학 교수-학습이 강조되고 있다.

우리나라 수학교육학 연구에서는 구성주의와 관련하여 조작적 구성주의, 급진적 구성주의, 사회적 구성주의 등의 관점들, 개념들이 소개되었으며, 최근에는 한국수학교육학회의 연보로 '구성주의와 한국수학교육'이라는 책자가 출판되어 국내의 구성주의에 관련된 수학교육학 연

구들이 체계적으로 정리되기도 하였다.

이러한 수학교육학자들과 수학교사들의 노력을 통해, 수학적 지식의 본질 및 구성, 수학의 교수-학습 방법, 평가 등에서 능동적 학습자를 바탕으로 하는 새로운 구성적 관점들이 확산되고, 수학교실에서 여러 가지 변화들이 서서히 생겨나고 있다는 것은 가치롭게 평가해야 할 것이다.

그러나 수학적 지식의 구성 방향과 실제적인 구성의 사례들은 쉽게 찾아보기는 힘들다. 실제로 수학교육학 관련 서적들을 보면, 수학적 지식의 구성이 중요하며, 수학적 지식의 구성과 관련하여 수학적 의사소통, 사회화, 지식의 개인화, 문맥화 등의 중요성은 충분히 설명되어 있지만, 수학적 지식을 어떻게, 어떤 방향으로 구성해야 하는지, 수학적 지식의 구성에서 주의해야 할 것은 무엇인지, 어떤 문제들이 발생할 수 있는지 등과 같은 실제적인 구성 측면의 문제점들은 다양하게 논의되지 못했다.

그리고 구성주의에 대한 다양한 관점의 연구들, 예를 들면 국내의 구성주의 연구들은 심리학적 측면에서 많이 논의되었지만 논리적인 관점에서의 연구는 미흡한 실정이다. 특히 Vygotsky나 Lakatos 등과 같이 수학교육학 연구에 자주 인용되는 학자들은 변증법 논리에 기반하여 아동의 발달, 수학적 지식의 발달 등을 연구하였는데, 우리나라 수학교육학 연구에서는 변증법 논리에 바탕을 둔 연구들은 많지 않은 실정이다.

철학대사전(김익달, 1970, p.412)에서 '변증법적 논리학은 모든 개념을 운동과정에서 보는 발전의 논리라고 말할 수 있다'고 하였다. 즉 변증법은 변화와 발전에 대한 학문이라고 할 수 있다.

수학은 도형과 수량의 변화에 대해 연구하는 학문이며, 수학을 통해 학생들이 자신을 변화시키고 잠재능력을 발전시키는 것은 중요할 것이다. 이러한 수학 및 수

\* 접수일(2017년 1월 24일), 수정일(2017년 2월 8일), 게재확정일(2017년 2월 24일)

\* ZDM분류 : E44

\* MSC2000분류 : 97D20

\* 주제어 : 삼각함수, 지식의 재구성, 추상, 구체

† 교신저자

학 학습에 관련된 다양한 문제들의 연구에 있어, 변화와 발전을 연구대상으로 삼는 변증법의 관점은 의미있는 시사점을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구에서는 구성주의적 관점에서 수학적 지식의 실제적 구성의 방향에 대한 논의로서, 삼각함수 영역에서 수학적 지식의 실제적 구성의 사례를 구체적으로 제시할 것이다. 특히 변증법에서 논의되는 추상에서 구체로의 상승에 대한 문헌연구를 바탕으로, 추상에서 구체로의 상승에 따라 삼각함수에 대한 수학적 지식을 재구성할 것이며, 재구성 과정에 관련된 교수학적 논의를 제시할 것이다. 본 연구를 통해, '추상에서 구체로의 상승'이라는 새로운 지식 구성의 방향과 방법을 소개하고, 변증법의 개념들을 수학교육에 적용하는 가능성을 제시하며, 이를 통해 수학교육에서 변증법, 구성주의에 대한 논의가 더 활발하게 이루어질 수 있을 것이다.

## II. 이론적 배경

### 1. 변증법<sup>1)</sup>에서 추상과 구체의 의미

일상 언어생활에서 추상과 구체는 '추상적으로 말한 다, 피카소의 추상화, 언제 만날 것인지 구체적으로 말해라' 등과 같이 흔히 사용되는 개념들이다. 수학교육학에서는 피아제의 경험적 추상화, 반영적 추상화의 개념이 중요하게 연구되고 있다. 일상 언어생활에서의 추상, 구체의 개념은 변증법에서 추상, 구체의 개념과 구분된다.

우선, 일상생활에서 추상의 개념을 살펴보자. 국어사전(남영신, 2003, pp.2150-2151)에서 추상적(抽象的)은 '①날날의 대상에서 모양을 뽑아내고 관념적인 것만을 종합한 것임. ②(말이나 생각이) 현실 또는 구체적인 상태와 동떨어져 막연함'으로 설명하였고, 추상을 '(모양을 뽑아냄의 뜻으로) 모양은 없고 개념만 있는 것, 곧 개별적인 사물에서 모양을 뽑아내고 공통되고 관념적인 개념만 남기는 일 또는 그 작용'으로 기술하고 있다. 한편 교육학용어사전(서울대학교 교육연구소, 1999, p.699)에서

1) 논리학은 크게 형식논리학과 변증법으로 나눌 수 있으며, 이들은 사고의 형식과 법칙에 대해 다른 접근을 하고 있다. 형식논리학에서는 사고의 형식이 불변이며 고정적인 것으로 생각하고, 이에 관련된 법칙들을 연구한다. 변증법에서는 모든 대상들, 개념들을 발생, 성장, 이동, 변화의 관점에서 연구한다.

추상(abstract)이란 '존재하는 사물의 전체에서 분리시켜 지각하거나 생각할 수 있는 특성, 특징, 특질, 속성, 관계, 형태 등을 통칭할 때 사용되는 말'로 규정되며, 추상화는 '구체적 사물들의 공통된 특징, 즉 추상적 특징을 파악하여 인식의 대상으로 삼는 행위'로 설명하고 있다.

즉 추상은 어떤 대상으로부터 지각되는 공통된 관념적 특성, 관계, 형태 등을 뽑아내거나 분리시킨 결과에 관련되며, 추상에 이르는 사고조작인 추상화에는 '분석'이라는 사고조작이 포함된다. 결국 추상화가 진행될수록 어떤 대상의 실재로부터는 더 멀어지며, 추상화의 결과인 추상은 그 내용은 더 빈약해지게 된다.

한편 Davydov(2000, p.339)는 추상화와 관련하여, '대상들의 류(class)를 추출하고 이들을 분류하게 하는 추상화는 다소 복잡한 실세계의 경험적인 기술에서 필요하다.'고 하였다. 결국 이러한 추상화를 통해 대상들을 비교하고 분류하고 대상들의 포함관계를 밝힐 수 있는 것이다.

결국 추상화는 개념 형성에 밀접하게 관련된 수밖에 없다(개념은 형식논리학과 변증법의 관점에서 각각 다르게 취급되는데, 여기서의 개념은 변증법의 관점에서 말하는 실제의 개념은 아님. 변증법의 관점에서 개념은 뒤에서 기술할 것임). 강시중(1987, p.42)은 추상성을 '어떤 구체물의 집합이 있을 때 이질적(다른 점)인 요소는 전부 빼어버리고, 동질적(같은 점)인 요소만 취해서 만든 이상화된 개념'이라고 정의하면서, 개개의 사상에서 특수성을 버리고 공통성을 추상하여 만들어 낸 것을 개념으로 보는 관점에 동의하면서 '개념이란 추상을 의미하고, 또 지식을 의미하기 때문에 지식은 추상이며 구체일 수는 없다(p.89)'고 하였다. 이때 구체는 '사물이 실제 모양이나 형태를 갖추고 있는 일(남영신, 2003, p.245)' 또는 '구체적 개념은 추상적 개념이 지칭하는 속성 혹은 특징을 포함하고 있는 개체 혹은 사물을 나타내는, 또는 일 반화에 의해서 분류되지 않은 사물 혹은 개체를 나타내는 개념(서울대학교 교육연구소, 1999, p.141)'을 의미한다. 결국 구체는 추상화의 대상이 되는, 그러나 인지조작이 아직 수행되지 않은 자연 상태의 대상을 의미하고 있다(이러한 구체의 개념은 변증법에서는 다르게 정의하고 있으며, 뒤에서 이에 대해서 자세히 기술할 것임). 그러므로 강시중은 개념 형성이 구체에서 추상의 방향으로,

내용이 풍부한 대상으로부터 내용이 빈약한 추상의 방향으로 이루어진다고 보는 것이다.

이와 같은 개념의 형성 방향은 Freudenthal의 수학적 방향, 즉 '수학은 상식적인 내용이 체계화, 형식화되고 다시 그 형식은 다음 단계의 상식적인 내용이 되는 과정이 반복되는 활동이며, 따라서 내용과 관계가 풍부한 구조에서 빈약한 구조로 발달해 나아간다(우정호, 2004, p.382)'는 방향과도 일치한다. 이때 수학적 빈약한 구조로 계속 나아가면서 진행된다면, 수학적 빈약한 후에는 무엇이 남게 될까? 어떠한 수학적 과정이 진행될 수 있을까? 에 대한 물음은 수학적 과정과 관련하여 더 진지하게 논의되어야 할 것이다.

Ilenkov(1962, p.173)에 의하면, '형식논리학의 범위에서 추상과 구체의 관계에 대한 일반적인 형태의 물음은 제기되지도 않았고 해결되지도 않았다. ...단지 개념들을 추상적 개념과 구체적 개념으로 분류할 때에 형식논리학에서는 이 개념들에 대한 일정한 이해가 필요했다'고 하였다. 그리고 Ilenkov는 형식논리학에서 추상과 구체의 개념 자체에 대한 문제 설정과 연구가 이루어지지 못한 것은 이 문제가 철학적이고 인식론적인 것이기 때문에, 형식논리학의 영역 밖에 놓여있다고 생각했다.

형식논리학에서 구체적 개념은 실제로 존재하는 대상들, 현상들에 관련되며, 나무, 비행기, 친구 등이 구체적 개념의 예가 된다. 그리고 추상적인 개념은 대상 자체가 아니라 대상의 어떤 성질, 징표에 관련되며, 속도, 우정, 흰색 등이 추상적 개념의 예가 된다(Ilenkov, 1962). 살펴본 바와 같이, 형식논리학에서 추상과 구체에 대한 개념은 일상 언어생활에서의 것과 다르지 않으며, 강시중(1987)과 교육학용어사전(서울대학교 교육연구소, 1999)에서 논의된 개념, 개념 형성의 방향, 구체적 개념 등은 형식논리학과 같은 맥락으로 이해될 수 있을 것이다.

변증법에서 논의되는 추상과 구체의 의미와 역할, 개념의 형성 방향 등은 형식논리학과는 다른 측면이 있다.

변증법에서는 형식논리학에서와 같이 인식에서 추상적 지식의 역할을 인정한다. Kopnin(1969, p.185)에 의하면, '추상적 지식은 단편적이며, 감각-구체적이며 다면적인 지식에서 추상적인 지식으로의 옮김은 후속적인 인식을 위한 진척이 된다. 새로운 구체적인 것을 얻기 위해

서는 필요한 재료를 준비해야 한다. 이것을 추상적 지식이 하게 된다'고 하였다. 즉 변증법에서 추상적 지식은 단편성, 단면성을 의미한다. 형식논리학에서는 추상을 통해 개념형성이 완성되지만, 변증법에서는 추상은 개념형성의 출발점이며, 개념 형성의 씨앗이 된다.

살펴본 바와 같이, 이러한 변증법에서 추상에 대한 이해는 일상 언어생활이나 형식논리학의 추상 개념과 유사한 측면도 있지만, 다른 점도 있다. Davydov(2000)는 추상화를 경험적 추상화와 이론적 추상화로 구분하여, 경험적 추상화는 대상들의 공통인 것들의 추상화라 했고, 이론적 추상화는 대상의 본질, 핵심의 추출에 관련되며, 구체로의 상승의 근원이 되는 관계, 속성의 추출이 이론적 추상화라고 하였다. 결국 변증법에서의 추상은 Davydov의 이론적 추상화의 관점에서 이해되어야 할 것이다. 이때 어떤 대상의 본질인 단면적인 특성들, 추상들이 통일되어 전체성을 띠는 구체를 형성한다는 것이 추상과 구체에 대한 변증법적 이해의 바탕이다. 그러므로 변증법에서 추상, 구체에 대한 이해는 앞에서 살펴본 일상 언어생활이나 형식논리학의 그것과는 다른 측면으로 전개된다.

철학백과사전(Ilichev, Fedoseev, Kovalev & Panov, 1983, p.93)에 의하면, '변증법의 전통에 따르면 추상은 지식의 빈약성, 단편성으로 이해되며, 구체는 완전성, 내용의 풍부성으로 이해된다'고 하였다. 그리고 Mareev(1979, pp.4-5)에 의하면, '구체적인 것은 많은 정의들의 종합이며, 결과적으로 다양성의 통일이다. 사고에서 구체는 출발점이 아니라 종합의 과정이며 종합의 결과'라고 하였다. 즉 변증법에서 구체는 자연 상태의, 즉 분석 이전의 있는 그대로의 대상이 아니라, 분석(추상화)에 의해 얻어진 단편적인 특성들, 관계들, 형태들 등의 종합이며, 완전성을 띤 전체를 나타내는 개념이다. 그렇기 때문에, 변증법에서 구체는 추상을 전체로 하며, 얻어진 추상들의 통일을 통해 구성되는 유기적 연결성을 가지는 전체이다.

## 2. 추상에서 구체로의 상승

추상과 구체를 사고의 발달, 개념의 발달과 관련시킨 사람은 Hegel이다. 철학백과사전(Ilichev, Fedoseev, Kovalev & Panov, 1983, p.93)에 의하면, '추상과 구체의

개념을 처음으로 생각의 발달을 구별하는 징표로 이용한 사람이 Hegel이다. Hegel은 구체는 이성적 사고와 관련 지었고, 추상은 오성적 사고와 관련지었다. Hegel은 추상에서 구체로의 상승을 사고의 발달로써 이해했다.' 즉 Hegel은 사고는 정적이지 않고 동적으로 발달하는 것이며, 그 구체적인 방향을 추상에서 구체로의 상승으로 보았다.

Davydov(2000)는 Hegel의 이러한 관점을 발전시켜, 오성적 사고를 경험적 지식과 관련짓고 이성적 사고를 이론적 지식과 관련지으면서, 이론적 지식의 구성 방향으로 추상에서 구체로의 상승이 되어야 한다고 주장하였다.

한편 Hegel은 '추상적인 공통성(추상적인 단면성)은 공통성에 대한 표상의 한 형식에 불과하며, 아직 개념의 형식은 아니다. 개념의 형식은 구체적인 공통성, 많은 추상적인 정의들의 논리적으로 표현된 통일'이라고 하였다 (Ilenkov, 1971, p.259). 개념이 무엇인가에 대한 논의는 철학의 관점에 따라 다양할 수 있다. Hegel의 관점에서 보듯이, 변증법에서는 추상성을 개념의 특징으로 보지 않고, 추상성들의 통일인 전체성, 즉 구체성을 개념의 주된 특징으로 보고 있다. 결국 변증법에서 개념형성의 방향과 방법은 추상에서 구체로의 상승이라는 것을 알 수 있다.

추상에서 구체로의 상승의 특징에 대해 철학백과사전 (Ilichev, Fedoseev, Kovalev & Panov, 1983, p.93)에서는 '추상에서 구체로의 상승은 과학적인 인식과정의 방향성을 나타내는 것으로, 내용이 덜 풍부한 것으로부터 내용이 더 풍부한 지식으로의 이동을 나타낸다'고 하였다. 즉 추상에서 구체로의 상승은 대상들의 과학적인 인식, 탐구의 방법으로, 그 진행 방향은 Freudenthal이 주장한 수학화와는 반대가 된다. 추상에서 구체로의 상승은 추상의 빈약한 내용에서 구체의 풍부한 내용, 추상들의 통일, 개념으로의 이동이 된다.

한편 어떤 개념이나 체계가 발생하고 발달한다는 관점에서 보면, 추상에서 구체로의 상승에서 추상은 바로 개념이나 체계의 출발점, 원천, 기본관계가 되는 것이다. 이러한 측면에서 보면, 공리들을 출발점으로 하여 하나의 체계를 구성하는 연역적 방법과 추상에서 구체로의 상승이라는 방법은 서로 구분될 수 있다. 연역적 방법에

서 공리들은 증명하지 않고 참으로 수용되는 명제들로, 공리는 증명에서 무한후퇴의 사슬을 멈추는 역할을 하는 것이지, 어떤 체계에 대한 추상화의 결과는 아닌 것이다.

Davydov(2000, pp.355-356)에 의하면, '상승의 매커니즘은 출발점 관계에 포함된 여러 측면들 사이의 모순을 밝혀내는 것이고, 그 다음에는 좀더 구체적 추상에 포함된 모순을 밝히는 것'이라고 하였다. Davydov의 이러한 주장은 변증법의 기본 법칙들과 추상에서 구체로의 상승의 관계를 잘 표현하고 있다. 즉 변증법에서 대립들의 상호작용, 대립들을 더 넓은 맥락에서 통일하는 것을 모순이라 부르는 것을 감안하면, 모순은 추상에서 구체로의 상승의 각 과정을 구성하는 중요한 요소임을 알 수 있다.

한편 Kedrov는 추상에서 구체로의 상승을 인간의 인지 경로와 관련지으면서, 추상에서 구체로의 상승을 인지조작인 분석과 종합의 단계를 바탕으로 설명하였다. Kedrov(1979, p.12)에 의하면, '인간의 인지 경로는 직접적인 통찰, 분석, 종합으로 구성된다. 이 인지의 세 단계 각각에서 대상에 대한 아주 상이한 표상들이 쌓이게 된다. 처음에 이 표상들은 어렵꽂하고 애매하고 불명료하다. ...그 다음에 분석에 의해 대상의 개별적인 측면들이 추출되기 시작하면, 표상들은 추상적인 성격을 띤다. 이때 대상이 처음에 가졌던 것들, 즉 전체성과 구체성은 거의 완전히 제거된다. 마지막으로 종합으로 집어들면, 그러한 추상성은 대상에 대한 새로운 표상에 의해 극복되며, 부분들로부터 처음 주어진 것과 같은 대상을 재생산할 때까지 처음의 구체성이 발달을 향해 나아간다'고 하였다. 즉 어떤 대상, 체계의 재구성을 위해서는 초기의 구체성(어떤 대상 자체가 가지고 있는 재구성 이전의 구체성)을 분석을 통해 구성 요소들로 분해하고(이때 단면적 특징을 가진 추상이 얻어짐), 요소들을 종합하여 대상에 대한 재구성(초기 구체성에 비해 높은 수준의 구체성을 가진)에 이르게 된다.

특히 종합과 관련하여, Kedrov(1979, p.14)는 '분석 후에 역방향처럼 이동이 시작되는데, 즉 이동이 추상에서 구체로 상승한다. 이때 이 이동의 결과로, 이제 구체는 대상에 대한 혼돈된 표상이 아니라 다양한 정의들과 관계들의 풍부한 복합체이다. ...그러므로 사고에서 구체는 결합의 과정이고 종합이다'라고 하였다.

살펴본 선행연구들을 통해, 추상에서 구체로의 상승의 단계를 다음과 같이 정리할 수 있다. 첫째, 탐구하려는 대상 또는 체계를 구성 요소들로 분해하고, 단면성을 띤 추상적인 대립들을 추출한다. 둘째, 추출된 대립들 중에서 재구성을 위한 출발점 추상인 기본관계를 분석한다. 셋째, 기본관계로부터 출발하여 대립들의 통일, 즉 모순을 밝혀 탐구하려는 대상, 체계를 구체성을 띤 전체로 재구성한다.

### III. 연구방법

본 연구는 문헌연구로 세 부분으로 구성된다. 첫째는 형식논리학과 변증법에 대한 문헌연구로, 형식논리학과 변증법의 기본 개념들을 고찰하고, 변증법의 개념들을 바탕으로 추상에서 구체로의 상승을 분석하였다. 이를 통해, 모순을 통한 대립들의 통일이 추상에서 구체로의 상승의 바탕이며, 원동력이 됨을 알 수 있었다. 특히 추상에서 구체로의 상승을 위한 단계를 인조작인 분석, 종합의 관점에서 체계적으로 고찰하였으며, 이론 체계의 재구성을 위한 단계를 추출하였다.

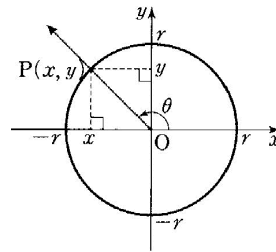
둘째는 삼각함수에 대한 다양한 문헌들을 고등학교 수학교과서로부터 대학교 수준의 미적분학 교재까지 고찰하여, 삼각함수의 정의, 삼각함수 등식들, 이들의 다양한 증명방법 등을 분석하였다. 이를 바탕으로 삼각함수 영역의 구성요소들, 대립들을 추출하였다. 그리고 추상에서 구체로의 상승에서 출발점 추상인 기본관계를 추출하였다(기본관계는 4장에 제시하였음). 본 연구에서 추출된 대립들은 삼각함수의 값들, 등식들, 대칭성(기함수, 우함수),  $x$ 축과의 교점, 평행이동, 주기성, 도함수, 그래프 개형 등이다.

셋째는 추출된 기본관계와 분석된 대립들(삼각함수의 값들, 등식들, 대칭성,  $x$ 축과의 교점, 평행이동, 주기성, 도함수, 그래프 개형 등)의 통일을 바탕으로 추상에서 구체로의 상승을 통해 삼각함수의 지식을 재구성하였다.

### IV. 결과 분석 및 논의

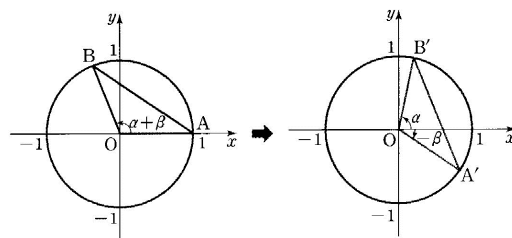
고등학교 미적분Ⅱ에서 삼각함수 단원은 호도법, 삼각함수의 정의, 삼각함수의 그래프, 삼각함수의 덧셈정

리, 삼각함수의 극한, 삼각함수의 미분 등으로 구성된다. 그런데, 미적분Ⅱ 교과서에서는 이들 내용사이의 연결성이 미흡하게 기술되어 있다. 예를 들어, 삼각함수는 [그림 1]에서  $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{x}{r}$ ,  $\frac{y}{x}$  (이때  $x \neq 0$ )가 반지름의 길이  $r$ 에 관계없이  $\theta$ 의 값에 따라 결정된다고 하면서,  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ,  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ,  $\tan\theta = \frac{y}{x}$  ( $x \neq 0$ )와 같이 정의하였다(우정호 외, 2014, p.69).



[그림 1] 삼각함수의 정의  
[Fig.1] Definition of trigonometric function

한편, 삼각함수의 덧셈정리는 회전과 두 점사이의 거리를 이용하여 도입하였다(우정호 외, 2014, p.96). [그림 2]에서 점  $A(1,0)$ 을  $\alpha + \beta$ 만큼 회전한 점을  $B$ , 두 점  $A, B$ 를  $-\beta$ 만큼 회전한 점을  $A', B'$ 이라 하였다. 이때  $A, B$ 의 좌표가 각각  $(1,0)$ ,  $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ , 그리고  $A', B'$ 의 좌표가  $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ ,  $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 임을 이용하여,  $\overline{AB}, \overline{A'B'}$ 을 구한 후에,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 를 유도하였다.



[그림 2] 삼각함수의 덧셈 정리  
[Fig.2] Addition theorem of cosine function

대부분의 수학교과서가 이러한 접근을 취하고 있다. 그런데, 삼각함수의 덧셈 정리의 증명에서 삼각함수의 정의는 점  $A, B, A', B'$ 의 좌표를 구할 때에만 사용되었다. 실제로 증명의 주된 방향과 삼각함수의 정의가 유기적으로 연결되었다고 보기는 어렵다.

특히 살펴본 삼각함수의 정의는 연역적 체계 구성을 위한 정의라는 것은 동의할 수 있지만, 삼각함수의 추상에서 구체로의 재구성을 위한 출발점이라는 데에는 다양한 이견이 있을 수 있다. 특히 Lakatos(1976)의 증명과 반박의 논리에서도 출발점 추상이 다면체나 다각형의 정의가 아니라, '모든 다면체에 대해  $v-e+f=2$ 이다'라는 추측이었다는 것은 주목할 만하다.

본 연구에서는 추상에서 구체로의 상승에 의한 삼각함수의 재구성의 출발점 추상인 기본관계의 분석을 위해  $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ 에 주목하였다. 이 등식에는 삼각함수, 삼각함수들 사이의 관계가 포함되어 있으며, 다양한 삼각함수 등식들의 증명에 활용되기 때문이다.

본 연구에서는  $\cos x$ 를  $f(x)$ 로,  $\sin x$ 를  $g(x)$ 로 추상화하여,  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에서 출발하여 삼각함수의 다양한 지식들의 재구성을 시도하였다 (이 등식은 Sahoo & Kannappan(2011)의 연구에서 함수 방정식으로 소개되었음). 여기서는 이 등식을 다음과 같이 수정, 보완하여 지식 구성을 위한 기본관계로 삼았다.

**기본관계:** 모든 실수에서 정의된 임의의 연속함수  $f(x), g(x)$ 에 대해 구간  $0 < x < 1$ 에서 부등식  $0 < xf(x) < g(x) < x$ 를 만족시키는 함수방정식  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ .

이 기본관계에서 출발하여 삼각함수의 값들, 등식들, 대칭성,  $x$ 축과의 교점, 평행이동, 주기성, 도함수, 그래프 개형 등의 개념들을 결합(종합), 통일(모순)을 바탕으로 추상에서 구체로의 상승에 의한 삼각함수의 재구성을 시도하였다.

먼저 기본관계에 포함된 함수들의 함숫값(기본관계에 대한 대립)을 기본관계와 결합시켜 이들의 통일을 밝혀 보자. 이 함수들은 일정한 값을 가지는가? 아니면  $x$ 값이 변함에 따라 함숫값도 함께 변하는가?

가령, 기본관계의  $g(x)$ 가 상수함수라고 가정하자. 즉  $g(x) = k$ (이때  $k$ 는 상수)라고 하자. 그러면  $g(k) = k$ 이고 1보다 작은 수  $x = \frac{1}{2}$ 에 대한 함숫값도  $g\left(\frac{1}{2}\right) = k$ 이다. 기본관계에서  $0 < x < 1$ 이면  $0 < g(x) < x$ 가 성립하므로  $0 < g\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ 이다. 따라서  $0 < k < \frac{1}{2}$ 이다. 한편,  $0 < k < 1$ 이므로 다시 부등식  $0 < g(k) < k$ 이 성립하고,  $g(k) = k$ 이므로  $k < k$ 라는 부등식이 유도된다. 이로부터  $g(x)$ 는 상수함수가 될 수 없다는 결론을 얻을 수 있다.

한편  $g(x)$ 가 상수함수가 아니라는 사실로부터  $f(x)$ 에 대한 정보도 탐구할 수 있다. 이를 위해 함수방정식  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에서  $x=y$ 로 두면,  $f(0) = (f(x))^2 + (g(x))^2$ 라는 관계식이 성립하므로  $(f(x))^2 = f(0) - (g(x))^2$ 이 얻어진다. 여기서  $f(0)$ 는 상수이고  $g(x)$ 는 상수함수가 아니므로  $f(x)$ 도 상수함수가 아니다. 결국,  $f(x), g(x)$ 는 상수함수가 아니다. 두 대립(기본관계와 함숫값)의 통일, 즉 모순을 성질 1과 같이 쓸 수 있다.

**성질 1.** 기본관계를 만족시키는 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 상수함수가 아니다.

성질 1은 기본관계에 대한 첫 번째 구체화의 결과이다. 이때 구체화는 대립인 기본관계와 함숫값의 개념이 결합(종합)되어,  $f(x)$ 와  $g(x)$ 에 대해 이 함수들이 상수함수가 아니라는 새로운 측면이 드러나게 된다. 즉 구체화되기 전의  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 기본관계에서 '실수에서 정의된 연속함수'였지만(성질 1보다 좀 더 추상화되고 좀 더 빈약한 내용을 가진 상태), 구체화를 통해 '실수에서 정의된 상수함수가 아닌 연속함수'로 더 풍부한 내용을 가진 방향으로의 구체화가 이루어졌다.

기본관계와 함숫값의 종합을 통해  $f(x), g(x)$ 에 대한 구체화를 더 진행하자. 이제 ' $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 특정한  $x$ 값에서 어떤 함숫값을 가지는가?'라는 물음과 관련하여 살펴보자. 이 물음에 대한 대답은 성질 2와 같이 얻어질 수 있다.

**성질 2.** (1)  $g(0) = 0$

(2)  $f(0) = 1$

**증명.** (1) 부등식  $0 < g(x) < x$ 의 양변에 극한을 취하면  $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이 성립하고,  $g(x)$ 는 연속함수이므로  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 이다.

(2)  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에서  $x$ 와  $y$ 를 0으로 두면,  $f(0) = (f(0))^2 + (g(0))^2$ 이 얻어진다. (1)에 의해  $g(0) = 0$ 이므로,  $f(0) = (f(0))^2$ 이 성립하고, 이로부터  $f(0)(f(0) - 1) = 0$ 이라는 사실을 알 수 있다. 그러므로  $f(0) = 0$  또는  $f(0) = 1$ 이다.

우선  $f(0) = 0$ 인 경우를 살펴보자. 등식  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에  $x=y$ 를 대입하면,  $f(0) = (f(x))^2 + (g(x))^2$ 이고,  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$ 이 유도된다. 그러므로  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = 0$ 인 상수함수가 되어야 한다. 그런데  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 상수함수가 아니므로, 결국  $f(0) = 0$ 이 아니다. 즉  $f(0) = 0$  또는  $f(0) = 1$ 에서  $f(0) \neq 0$ 이 성립하므로,  $f(0) = 1$ 이 된다.  $\square$

성질 2에서  $g(0) = 0$ 임을 밝히기 위해, 부등식  $0 < g(x) < x$ 의 양변에 극한을 취하고  $g(x)$ 가 연속함수라는 것을 이용했다.  $f(0) = 1$ 도 마찬가지로, 기본관계와  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 상수함수가 아니라는 것을 종합하였다. 결국  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 새로운 성질을 찾는다는 것은 대립들을 종합하여  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 다른 측면에 대한 정보를 추출한다는 것을 의미하며, 이것이 바로 대립들의 통일, 즉 모순이다. 그리고 이 과정은 기본관계를 구체화시키는 과정이기도 하다. 이때 한 가지 염두에 두어야 할 것은 대립들의 결합만으로는 지식의 재구성(모순)을 말하는데 충분하지 않다는 것이다. 대립들의 결합을 통해 더 넓어진 맥락에서 이 대립들이 연결된 전체가 되는 것, 이것이 바로 지식의 재구성이라 할 수 있다.

Lakatos의 증명과 반박의 논리에서 추측과 이것의 대립인 반례를 결합시켜 더 넓어진 맥락, 즉 이전의 추측과 반례를 아우르는 새로운 추측을 구성하는 것, 이것이 변증법에서 말하는 모순인 것이다. 이를 통해 단편적이고 빈약했던 추측이 구체적이고 내용이 풍부한 추측으로 발전하게 되는 것이다.

이제 기본관계를 만족시키는  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 상수함수가 아닌 연속함수이며,  $f(0) = 1$ 이며  $g(0) = 0$ 이라는 것이 드러났다. 지식을 구성한다는 것은 마치 작은 씨앗(추상적이고 내용이 빈약한)으로부터 싹이 돋아나 커다란 나무(구체적이고 내용이 풍부한)로 성장, 발전하는 유기적인 과정으로, 추상적인 관계로부터 다양한 개념들을 종합하여 구체성을 띤 전체를 구성한다는 것을 의미한다.

이제 기본관계를 만족시키는  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 상수함수가 아닌 연속함수이며,  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$ 을 만족한다. 이제 함수값의 변화 양상에 대해 살펴보자. 즉  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 함수값은  $x$ 의 변화에 따라 무한히 증가하는가? 또는 감소하는가? 아니면 유계인가?

**성질 3.** 모든 실수  $x \in \mathbb{R}$ 에 대해서 등식  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 이 성립한다.

**증명.**  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에서  $x=y$ 로 놓으면  $f(0) = (f(x))^2 + (g(x))^2$ 이 되고, 성질 2로부터  $f(0) = 1$ 을 대입하면  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 이라는 사실을 알 수 있다.  $\square$

성질 3으로부터 등식  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 이 성립함을 알았고, 이것은  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가  $|f(x)| \leq 1$ 이며  $|g(x)| \leq 1$ 인 유계함수라는 것을 의미한다. 뿐만 아니라,  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 에서 원의 방정식 또는 삼각함수 등이 기본관계와 관련될 수 있다는 것을 추측할 수 있다. 이러한 추측은 기본관계를 대립들의 통일을 통해 추상에서 구체로의 상승에서의 방향을 설정하는데 중요한 의미를 가진다.

원의 방정식이나 삼각함수는 대칭성을 가진다. 방금 전의 추측을 확인하기 위해  $f(x)$ ,  $g(x)$ 를 대칭성이라는 측면에서 탐구하자. 일반적으로 함수에서 대칭성은 기함수, 우함수의 개념으로 표현된다. 이것은 기본관계와 대칭성의 개념을 종합하여, 다음과 같이 구체화될 수 있다.

**성질 4.**

(1)  $f(x)$ 는 우함수이다.

(2)  $g(x)$ 는 기함수이다.

**증명.** (1)  $f(x)$ 가 우함수라는 것을 증명하기 위해서  $f(-x) = f(x)$ 을 보이면 된다.  $f(-x) = f(0-x)$ 이므로 기본관계  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에서로부터  $f(-x) = f(0-x) = f(0)f(x) + g(0)g(x)$ 라는 등식이 성립한다. 이 등식에서  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$ 라는 사실을 적용하면  $f(-x) = f(x)$ 임이 증명된다.

(2)  $g(x)$ 가 기함수라는 것을 증명하기 위해 등식  $g(-x) = -g(x)$ 임을 보이자.  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에  $f(-x) = f(x)$ 를 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x-y) &= f(-(x-y)) = f(-x-(-y)) \\ &= f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(-x)g(-y) \end{aligned}$$

한편,  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 이므로, 이로부터  $g(-x)g(-y) = g(x)g(y)$ 가 성립한다. 그런데  $g(x)$ 는 상수함수가 아니므로,  $g(a) \neq 0$ 인  $a$ 가 존재한다.  $g(-x)g(-y) = g(x)g(y)$ 라는 등식에  $y$ 대신  $a$ 를 대입하면  $g(-x)g(-a) = g(x)g(a)$ 이 성립하므로  $g(x) = \frac{g(-a)}{g(a)}g(-x)$ 이 된다. 이때  $x$ 대신  $-x$ 를 대

입하면  $g(-x) = \frac{g(-a)}{g(a)}g(x)$ 이므로 이 두 식을 연립하면 다음의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{g(-a)}{g(a)}g(-x) \\ &= \frac{g(-a)}{g(a)} \cdot \frac{g(-a)}{g(a)}g(x) = \left(\frac{g(-a)}{g(a)}\right)^2 g(x) \end{aligned}$$

즉  $g(x) = \left(\frac{g(-a)}{g(a)}\right)^2 g(x)$ 이므로  $\frac{g(-a)}{g(a)} = \pm 1$ 이다.

먼저  $\frac{g(-a)}{g(a)} = 1$ 이라고 가정하자. 그러면 등식

$$g(x) = \frac{g(-a)}{g(a)}g(-x) \text{로부터 } g(-x) = g(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x-(-y)) \\ &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(x)g(y) = f(x-y) \end{aligned}$$

라는 관계식이 성립한다.  $f(x+y) = f(x-y)$ 로부터, 임의의  $x, y \in \mathbb{R}$ 에 대해 다음을 알 수 있다.

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = f(y)$$

임의의  $x, y$ 에 대해  $f(x) = f(y)$ 인 것은  $f(x)$ 가 상수함수라는 것을 의미한다. 그러나  $f(x)$ 는 상수함수가 아니므로  $\frac{g(-a)}{g(a)} \neq 1$ 이다. 결국 등식  $\frac{g(-a)}{g(a)} = \pm 1$ 로부터  $\frac{g(-a)}{g(a)} = -1$ 이고  $g(x) = \frac{g(-a)}{g(a)}g(-x)$ 이므로  $g(-x) = -g(x)$ 가 성립한다.  $\square$

성질 4에 의해,  $f(x)$ 는 우함수,  $g(x)$ 는 기함수라는 것을 알았다. 즉  $f(x)$ 는  $y$ 축에 대한 대칭성을 가지며,  $g(x)$ 는 원점에 대한 대칭성을 가진다.

우리는 논의의 출발점에서  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 내용이 빈약한(추상적인) 기본관계만 가지고 있었지만, 기본관계가 다양한 개념들, 물음들과 결합되면서 새로운 관계와 특징들이 구체적으로 드러나면서 그 내용이 풍부해졌다.

결국  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 상수함수가 아니라  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$ 라는 성질을 가진 유계 함수라는 것, 그리고  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 을 만족시키며,  $f(x)$ 는 우함수이고  $g(x)$ 는 기함수라는 것까지 구체화되었고, 이들 성질들이 서로 연결되어 있음을 알게 되었다.

연속함수인  $g(x)$ 가 기함수이므로 원점에 대한 대칭성을 가지게 된다. 결국  $g(x)$ 의 그래프는 원점을 지나게 된다. 이것은 방정식  $g(x) = 0$ 이 해를 가진다는 것을 의미한다. 그러면 우함수인  $f(x)$ 는  $f(x) = 0$ 인 해  $x$ 가 존재하는가? 라는 방향으로 추상에서 구체로의 상승을 탐구할 수 있다.

이 물음에 대한 답을 통해 기본관계를 구체화하기 위해, 기본관계에  $y = -x$ 를 대입하고  $g(-x) = -g(x)$ 를 이용하자. 그러면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x)f(-x) + g(x)g(-x) \\ &= f(x)^2 - g(x)^2 \\ &= (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \end{aligned}$$

결국  $f(2x) = 0$ 일 필요충분조건은  $f(x) = -g(x)$  또는  $f(x) = g(x)$ 이다. 그러므로 이제  $f(x) = -g(x)$  또는  $f(x) = g(x)$ 을 만족하는  $x$ 가 실제로 존재하는지를 조사하면  $f(2x) = 0$ 의 근에 대한 정보를 찾을 수 있다.

여기서 한 가지 주목할 것은  $0 < x < 1$ 에서 기본관



계에 의해  $0 < xf(x) < g(x) < x$ 이 성립하므로  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 모두 0과 1사이의 양수인 값을 취하므로,  $f(x) = -g(x)$ 가 되는  $x$ 가  $0 < x < 1$ 에서는 존재하지 않는다는 것이다. 이제  $f(x) = g(x)$ 에 대해 살펴보자.

**성질 5.**  $f(x) = g(x)$ 인  $x$ 가 구간  $(0, 1]$ 에 존재한다.

**증명.**  $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 놓으면  $h(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1$ 이므로  $h(0) = 1 > 0$ 이다. 한편,  $0 < x < 1$ 에서 부등식  $xf(x) < g(x)$ 이 성립하므로, 극한을 취하면  $\lim_{x \rightarrow 1^-} xf(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ 가 유도된다.

이때  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는  $x = 1$ 에서 연속인 함수이므로,  $f(1) \leq g(1)$ 이 성립하며  $h(1) = f(1) - g(1) \leq 0$ 이 됨을 알 수 있다.

결국  $0 < x \leq 1$ 에서  $h(x)$ 는 연속이고  $h(0) > 0$ ,  $h(1) \leq 0$ 이므로, 중간값 정리에 의해  $h(a) = 0$ 되는  $a \in (0, 1]$ 가 존재한다. 즉  $f(a) = g(a)$ 인  $a$ 가 구간  $(0, 1]$ 에 존재한다.  $\square$

성질 5에서  $f(x) = g(x)$ 인  $x$ 가 구간  $(0, 1]$ 에 존재한다는 것을 알았다. 실제로 그러한  $x$ 를  $a$ 라 놓고, 등식  $(f(a))^2 + (g(a))^2 = 1$ 와  $f(a) = g(a)$ 를 연립하면,  $f(a) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 가 된다.  $a \in (0, 1]$ 에서  $f(a)$ 는 양의 값을 가지므로,  $f(a) = g(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

한편  $f(a) = g(a)$ 와 기본관계를 함께 생각하면,  $f(2a)$ 의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(a+a) &= f(a - (-a)) \\ &= f(a)f(-a) + g(a)g(-a) \\ &= (f(a))^2 - (g(a))^2 = 0 \end{aligned}$$

결국  $f(2a) = 0$ 이므로  $2a$ 는 방정식  $f(x) = 0$ 의 해가 된다.  $f(2a) = 0$ 이라는 것은 후에 성질 9에서 논의될  $f(x)$ 의 주기성과도 관련될 수 있다. 왜냐 하면, 함수의 주기는  $f(x) = f(x+p)$ 가 되는  $p$ 를 의미하며,  $p$ 를 구하기 위해서는 같은 값을 가지는  $x$ 값들을 조사해야 하기 때문이다.

여기서 논의되는 추상에서 구체로의 상승에 의한 지식의 재구성에서는 ‘내용이 빈약한 추상에서 내용이 풍부한 구체’로의 방향으로 재구성을 시도하고 있다.

Freudenthal의 수학화에서 통상적으로 언급되는 내용이 풍부한 구조에서 빈약한 구조로의 수학화와는 다른 방향인 것이다. 이제 성질 6을 살펴보자.

**성질 6.** 실수  $p \in \mathbb{R}$ 를  $f(x) = 0$ 을 만족하는 최소의 양수라 하면, 다음이 성립한다.

(1)  $p$ 는 구간  $(0, 2]$ 에 존재한다.

(2)  $f(p) = 0$ ,  $g(p) = 1$

**증명.** (1) 성질 5에서와 같이,  $a$ 를  $f(a) = g(a)$ 를 만족하는 구간  $(0, 1]$ 에서 존재하는 양수라 하고,  $p$ 를  $f(x) = 0$ 을 만족하는 최소의 양수라 하면,  $p \leq 2a$ 이고  $0 < a \leq 1$ 이므로  $0 < p \leq 2$ 이다.

(2)  $p \in \mathbb{R}$ 는  $f(x) = 0$ 을 만족하는 최소의 양수이므로,  $f(p) = 0$ 가 성립한다.  $f(p) = 0$ 이고  $(f(p))^2 + (g(p))^2 = 1$ 이므로  $g(p) = 1$  또는  $g(p) = -1$ 이다. 한편, 다음이 성립한다.

$$f\left(p - \frac{p}{2}\right) = f(p)f\left(\frac{p}{2}\right) + g(p)g\left(\frac{p}{2}\right) = g(p)g\left(\frac{p}{2}\right)$$

이때  $f\left(\frac{p}{2}\right) > 0$ ,  $g\left(\frac{p}{2}\right) > 0$ 이므로, 위의 등식에 의해  $g(p)$ 는 양인 실수가 되어야 한다. 따라서  $g(p) = \pm 1$ 로부터  $g(p) = 1$ 이 된다. 여기서  $p$ 는  $f(x) = 0$ 을 만족하는 최소의 양수이므로 관계식  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 로부터  $p$ 는  $g(x) = 1$ 을 만족하는 최소의 양수임을 알 수 있다.  $\square$

성질 5와 6에서는 앞에서 설정한 ‘ $f(x) = 0$ 인  $x$ 가 존재하는가?’라는 물음에 대한 답을 찾았다. 특히  $f(x) = 0$ 의 최소의 양수인 근의 위치에 대한 정보도 얻을 수 있었다.

이제  $f(x)$ 는 우함수이며  $f(x) = 0$ 인 근들 중 하나가  $(0, 2]$ 에 존재한다는 구체적인 정보를 알게 되었다. 이때 우함수라는 것,  $f(x) = 0$ 인 근들 중 하나가  $(0, 2]$ 에 존재한다는 것은  $f(x)$ 의 개념을 구성하는 구체적인 내용이라 할 수 있다. 이러한 내용이 풍부한 방향으로 지식을 구성하는 것이 추상에서 구체로의 상승의 방향이다.

한편 성질 6에서 얻어진  $f(p) = 0$ ,  $g(p) = 1$ 을 기본관계와 결합시키면, 성질 7을 얻을 수 있다.

**성질 7.** 실수  $p \in \mathbb{R}$  가  $f(x) = 0$ 의 한 근이면, 다음이 성립한다.

- (1)  $f(p-x) = g(x)$ ,  $f(x-p) = g(x)$   
 (2)  $g(p-x) = f(x)$ ,  $g(x-p) = -f(x)$

**증명.** (1)  $f(p-x) = g(p)g(x)$ 에서  $g(p) = 1$ 이므로  $f(p-x) = g(x)$ 가 성립하고  $f(x)$ 는 우함수이므로  $f(x-p) = f(-x+p) = g(x)$ 이다.

(2) (1)에 의해  $g(p-x) = f(p-(p-x))$ 이 성립하므로  $g(p-x) = f(x)$ 가 얻어진다. 그리고  $g(x)$ 는 기함수이므로  $g(x-p) = -g(p-x) = -f(x)$ 이다.  $\square$

$f(x-p) = g(x)$ 는  $f(x)$ 를  $x$ 축으로  $p$ 만큼 평행이동하면  $g(x)$ 가 된다는 것을 의미한다. 그리고  $g(x-p) = -f(x)$ 는  $g(x)$ 를  $x$ 축으로  $p$ 만큼 평행이동한 그래프와  $f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축에 대해 대칭이라는 것을 나타낸다.

처음에는  $f(x)$ ,  $g(x)$ 는 기본관계에서만 존재하여  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 상호관련성과 그 의미에 대해서는 더 알 수 없었다. 그러나 성질 7을 통해,  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 평행이동, 대칭 등의 개념을 매개로 하여 서로 연결되어 있음을 알 수 있다.

결국 기본관계에 대한 구체화의 과정에서  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 상호관련성이 드러났다. 이를 통해 '지식의 구성 과정'에는 구성 대상들의 상호관련성, 상호의존성을 규명하는 것이 그 요소로 포함됨을 알 수 있다.

**성질 8.** 다음 등식들은 서로 동치이다.

- (1)  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$   
 (2)  $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$   
 (3)  $g(x-y) = g(x)f(y) - f(x)g(y)$   
 (4)  $g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y)$

**증명.** (1)  $\Leftrightarrow$  (2)의 증명.

$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 에서  $y$ 대신  $-y$ 를 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x-(-y)) \\ &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \end{aligned}$$

이로부터 식 (1)은 (2)로 변형되며, (2)의 관계식에서  $y$ 대신  $-y$ 를 대입하면 (1)의 결과를 얻으므로 (1)과 (2)

는 동치이다.

(3)  $\Leftrightarrow$  (4)의 증명.

$g(x-y) = g(x)f(y) - f(x)g(y)$ 에서  $y$ 대신에  $-y$ 를 대입하면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x-(-y)) \\ &= g(x)f(-y) - f(x)g(-y) \\ &= g(x)f(y) + f(x)g(y) \end{aligned}$$

이제 관계식 (4)에서  $y$ 대신에  $-y$ 를 대입하면 같은 방법으로 (3)을 얻을 수 있다.

(1)  $\Rightarrow$  (3)의 증명.

두 함수의 변환식인  $f(p-x) = g(x)$ 에서  $x$ 대신  $x-y$ 를 대입하면  $f(p-(x-y)) = g(x-y)$ 이 성립하고 여기에  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ 와 성질 3의 결과를 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} g(x-y) &= f(p-(x-y)) = f((p-x) - (-y)) \\ &= f(p-x)f(-y) + g(p-x)g(-y) \\ &= g(x)f(y) - f(x)g(y) \end{aligned}$$

(3)  $\Rightarrow$  (1)의 증명.

두 함수의 변환식인  $g(p-x) = f(x)$ 에서  $x$ 대신  $x-y$ 를 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x-y) &= g(p-(x-y)) = g((p-x) - (-y)) \\ &= g(p-x)f(-y) - f(p-x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(x)g(y) \end{aligned}$$

이로부터 관계식 (1)이 얻어진다.  $\square$

성질 8에서 등식 (1)과 (2), 등식 (3)과 (4)가 서로 동치라는 것의 증명은  $f(x)$ 가 우함수,  $g(x)$ 가 기함수라는 것에 근거한다. 그리고 여기에 성질 7의 변환식  $g(p-x) = f(x)$ 을 추가하면, 등식 (1)과 (3)이 동치라는 것이 유도된다. 이를 통해  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에 대한 의미 있는 정보들을 얻을 수 있다.

성질 8로부터 얻을 수 있는 정보들 중의 하나는 이 동치인 등식들이 고등학교 수학교과서의 다음 항등식들과 같은 구조를 가진다는 것이다.

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

결국 성질 8에서 4개의 등식이 동치라는 것을 보였는데,

이것은 삼각함수 항등식들이 서로 동치일 가능성이 있음을 암시한다.

성질 8로부터  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 주기성에 대한 다음 성질을 알 수 있다. 즉  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의  $x$ 에 어떤  $p$ 값을 더하여 합숫값  $f(x+p)$ 를 구하면, 그 값이  $f(x)$ 인 그러한  $p$ 값을 생각할 수 있다.

**성질 9.** 실수  $p \in \mathbb{R}$  가  $f(p) = 0$ 을 만족하는 최소의 양수라 하면, 다음이 성립한다.

- (1)  $f(x+p) = -g(x)$ ,  $g(x+p) = f(x)$
- (2)  $f(2p+x) = -f(x)$ ,  $g(2p+x) = -g(x)$
- (3)  $f(3p+x) = g(x)$ ,  $g(3p+x) = -f(x)$
- (4)  $f(4p+x) = f(x)$ ,  $g(4p+x) = g(x)$

**증명.** (1)  $f(p) = 0$ ,  $g(p) = 1$ 이므로,  $f(x+p) = f(x)f(p) - g(x)g(p) = -g(x)$ 이 되며,  $g(x+p) = g(x)f(p) + f(x)g(p) = f(x)$ 이 된다.

(2)  $f(2p) = f(p)f(p) - g(p)g(p) = -1$ 이며(성질 8에 의해)  $g(2p) = g(p)f(p) + f(p)g(p) = 0$ 이 성립하므로, 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} f(2p+x) &= f(2p)f(x) - g(2p)g(x) = -f(x), \\ g(2p+x) &= g(2p)f(x) + f(2p)g(x) = -g(x) \end{aligned}$$

(3)  $f(3p) = -f(p) = 0$ 이고  $g(3p) = -g(p) = -1$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} f(3p+x) &= f(3p)f(x) - g(3p)g(x) = g(x), \\ g(3p+x) &= g(3p)f(x) + f(3p)g(x) = -f(x) \end{aligned}$$

- (4)  $f(4p) = 1$ ,  $g(4p) = 0$ 이므로 다음을 알 수 있다.
- $$\begin{aligned} f(4p+x) &= f(4p)f(x) - g(4p)g(x) = f(x), \\ g(4p+x) &= g(4p)f(x) + f(4p)g(x) = g(x). \end{aligned}$$

이로부터, 성질들이 성립함을 알 수 있다.  $\square$

성질 9에 의해, 실수  $p \in \mathbb{R}$  가  $f(p) = 0$ 을 만족시키는 최소의 양수이면  $f(4p+x) = f(x)$ ,  $g(4p+x) = g(x)$ 가 성립하므로 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 주기함수이며, 이때  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 주기는  $4p$ 보다 작거나 같게 된다. 그러므로 실수  $\mathbb{R}$ 에서의  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 부호는 결국 구간  $[0, 4p)$ 에서 두 함수의 부호에 의해 결정된다.

특히 성질 9의 (1)-(3)에 의해,  $[0, 4p)$ 에서의  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 부호는 구간  $[0, p)$ 에서  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 부호에 의해 결정될 수 있다. 이와 같이, 추상에서 구체로의 지

식의 구성에서는  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 내용들이 풍부해지며, 지식의 구성 이전에는 내용이 빈약한 기본관계로 존재했던  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 대립들과 이들의 통일을 통해, 이들에 대한 새로운 측면들이 밝혀졌다. 물론 어떻게 대립들을 통일하는가?(이것을 Lakatos의 관점에서 말한다면 제기된 반례에 대해 추측을 어떻게 개선하는가?)는 대립들에 따라 서로 다를 수밖에 없을 것이다. 그렇기 때문에 대립들의 통일은 수학적 탐구 활동의 중요한 부분이 될 것이다.

다음 성질 10에서는  $[0, p)$ 에서  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 부호에 관해 다룬다.

### 성질 10.

- (1) 구간  $[0, p)$ 에서  $f(x)$ 의 부호는 양이다.
- (2) 구간  $(0, p)$ 에서  $g(x)$ 의 부호는 양이다.

**증명.** (1)  $f(0) = 1$ 이고  $p \in \mathbb{R}$ 는  $f(p) = 0$ 을 만족하는 최소의 양수이므로 구간  $[0, p)$ 에서  $f(x)$ 의 부호는 양이다.

(2) 구간  $[0, p)$ 에서  $g(x)$ 의 부호를 구하기 위해,  $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ 에서  $g(x)$ 의 부호를 생각하자. 구간  $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ 에서  $0 < x \leq \frac{p}{2} < 1$ 이며 기본관계 부등식  $xf(x) < g(x)$ 이 성립한다. 따라서  $g(x) > 0$ 이다. 구간  $\left[\frac{p}{2}, p\right)$ 에서  $g(x)$ 의 부호를 생각하자.  $0 < x < \frac{p}{2}$ 일 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{p}{2}+x\right) &= g\left(\frac{p}{2}\right)f(x) + f\left(\frac{p}{2}\right)g(x) \\ &= f\left(\frac{p}{2}\right)(f(x) + g(x)) \end{aligned}$$

결국  $g\left(\frac{p}{2}+x\right) > 0$ 이며,  $(0, p)$ 에서  $g(x)$ 의 부호는 양이다.  $\square$

이제,  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 증감상태를 파악하기 위해 두 함수의 미분가능성을 조사하자. 이를 위해 먼저  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의  $x=0$ 에서의 미분가능성을 조사하자.

**성질 11.**

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1$ 이며  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하다.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$ 이며  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하다.

**증명.** (1)  $x=0$ 에서  $g(x)$ 가 미분가능함을 확인하기 위해  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$  이 존재하는지 조사하자.  $0 < x < 1$ 에서  $0 < xf(x) < g(x) < x$ 이 성립하므로 양변을  $x$ 로 나누면  $0 < f(x) < \frac{g(x)}{x} < 1$ 이 된다. 이제  $x=0$ 에서 우극한을 취하자. 그러면  $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} \leq 1$  이고  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$ 이다. 따라서

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = 1$ 이 성립하게 된다. 한편  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$  이므로  $x=0$ 에서  $g(x)$ 는 미분가능하고  $g'(0) = 1$ 이 된다.

(2)  $x=0$ 에서  $f(x)$ 의 미분가능성을 확인하기 위해서는  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$ 의 존재성을 조사해야 한다. 이를 위해,  $\frac{f(x)-1}{x}$ 의 분모와 분자에  $(f(x)+1)$ 을 곱하고  $(g(x))^2 = (f(x))^2 - 1$ 을 이용해 식을 변형하면 다음이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(g(x))^2}{x(f(x)+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-g(x)}{f(x)+1} \\ &= 1 \cdot \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

그러므로  $x=0$ 에서  $f(x)$ 의 미분가능하고 미분계수는  $f'(0) = 1$ 이다.  $\square$

이제 성질 8과 성질 11을 이용하여  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의

미분계수와 도함수를 구할 수 있으며, 이를 이용해 함수의 증감상태를 조사할 수 있다.

**성질 12.**

$$(1) \frac{d}{dx} f(x) = -g(x)$$

$$(2) \frac{d}{dx} g(x) = f(x)$$

**증명.** (1) 도함수의 정의와 성질 8을 이용하여 다음을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(h)-1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)g(h)}{h} \\ &= f(x) \cdot 0 - g(x) \cdot 1 = -g(x). \end{aligned}$$

(2)  $g(x)$ 에 대한 성질 8과 극한을 이용하면 다음과 같이  $g(x)$ 의 미분계수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(h)+f(x)g(h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)(f(h)-1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(h)}{h} \\ &= g(x) \cdot 0 - f(x) \cdot 1 = -f(x) \quad \square \end{aligned}$$

성질 12에서는  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 미분에 관련된 새로운 관계를 보여준다.  $f(x)$ 를 미분하면  $-g(x)$ 가 되며,  $g(x)$ 를 미분하면  $f(x)$ 가 된다는 것이다. 이것은 삼각함수에서  $y = \cos x$ 를 미분하면  $y' = -\sin x$ 가 되며,  $y = \sin x$ 를 미분하면  $y' = \cos x$ 이 된다는 것과 동일한 관계임을 알 수 있다.

이제  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 그래프들이 서로 만난다는 것(성질 5), 이동에 의한 포개짐(성질 7), 항등식에서의 관계(성질 8), 주기성(성질 9), 도함수에서의 관계(성질 12) 등에 의해 밀접하게 관련되어 있음을 알 수 있다. 이와 같이 기본관계와 대립들이 종합되면서 탐구대상의 다양한 특징이 드러났다. 이 과정을 탐구 대상의 구체화라고 부른다.

성질 12에서  $f'(x) = -g(x)$ ,  $g'(x) = f(x)$ 가 된다는 것을 알았다. 이제 성질 12를 이용하면 2계도함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}(-g(x)) = -f(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -g(x)$$

즉  $f''(x) = -f(x)$ ,  $g''(x) = -g(x)$ 가 성립한다. 그러므로  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 미분계수와 2계미분계수의 부호는  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 부호에 의해 결정된다. 각 구간에서  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 미분계수와 2계미분계수의 부호를 조사하면 함수의 증감상태와 그래프의 볼록성에 대한 정보를 얻을 수 있다.

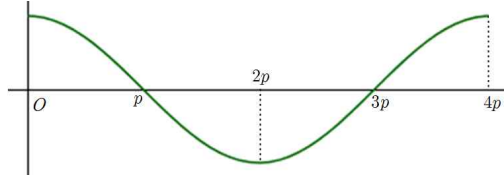
성질 9, 성질 11, 성질 12에 의해, 개구간  $(0, p)$ ,  $(p, 2p)$ ,  $(2p, 3p)$ ,  $(3p, 4p)$ 에서  $f(x)$ 와  $g(x)$  함수의 미분계수와 2계미분계수의 부호는  $f(x)$ 와  $g(x)$  함수의 부호에 결정된다는 것을 알 수 있다. 이제 이를 조사하면 함수의 증감상태와 그래프의 볼록성에 대한 [표 1]을 얻을 수 있다.

[표 1]  $f(x)$ 의 증감과 볼록성

[Table 1] Increase/decrease state, convexity of  $f(x)$

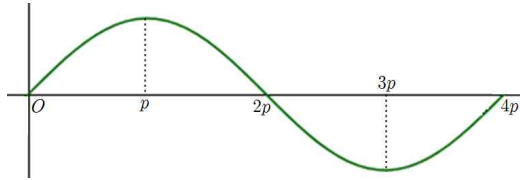
	$(0, p)$	$(p, 2p)$	$(2p, 3p)$	$(3p, 4p)$
$f(x)$	+	-	-	+
$f'(x)$	-	-	+	+
$f''(x)$	-	+	+	-
$f(x)$ 의 개형	위로 볼록, 감소	아래로 볼록, 감소	아래로 볼록, 증가	위로 볼록, 증가

$f(x)$ 는  $[0, 4p]$ 에서 [그림 3]과 같은 개형의 그래프를 가지며,  $f(x)$ 가 주기함수라는 것을 감안하면 실수 전체에서 이 모양이 반복된다는 것을 알 수 있다. 한편  $g(x)$ 의 그래프는  $[p, 5p]$ 에서  $g(x) = f(p-x)$ 에 의해  $f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축으로  $p$ 만큼 평행 이동한 그래프이고  $[0, p]$ 에서는  $g(4p+x) = g(x)$ 에 의해  $[4p, 5p]$ 에서의 그래프와 일치한다.  $g(x)$ 의 그래프는 [그림 4]와 같다.



[그림 3]  $f(x)$ 의 그래프 개형

[Fig. 3] Graph of  $f(x)$



[그림 4]  $g(x)$ 의 그래프 개형

[Fig. 4] Graph of  $g(x)$

성질 9에서 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대해  $f(x+4p) = f(x)$ ,  $g(x+4p) = g(x)$ 이 성립하므로,  $f(x)$ ,  $g(x)$ 는 모두 주기함수임을 알았으며, 그 주기가  $4p$ 보다 작거나 같다는 것도 알았다. 이제  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 주기를 구하자.

**성질 13.**  $p$ 를  $f(x) = 0$ 을 만족하는 최소의 양수라 하면, 다음이 성립한다.

- (1) 함수  $f$ 는 주기가  $4p$ 인 주기함수이다.
- (2) 함수  $g$ 는 주기가  $4p$ 인 주기함수이다.

**증명.** (1)  $r$ 은 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대해  $f(x+r) = f(x)$ 을 만족하는 최소의 양수라 하자. 즉  $r$ 을  $f(x)$ 의 주기로 하자. 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대해  $f(x+4p) = f(x)$ 이므로,  $r \leq 4p$ 임을 알 수 있다. 한편,  $r$ 은  $f(x)$ 의 주기이므로  $f(0+r) = f(0)$ 이 성립하고  $f(0+r) = f(r)$ ,  $f(r) = f(0) = 1$ 이 성립한다.

이제 구간  $(0, 4p)$ 에서  $f(x) \neq 1$ 을 보여  $4p \leq r$ 이라는 사실을 유도하자.

먼저  $0 < x < 2p$ 에서  $f'(x) = -g(x)$ 이 성립하므로  $f'(x) < 0$ 이고  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다. 그러므로  $f(x) < f(0) = 1$ 이다. 또한  $f(2p+x) = -f(x)$ 이 성립하며  $f(2p-x) = -f(-x) = -f(x)$ 이 되므로  $f(2p+x) = f(2p-x)$ 이다. 이것은  $f(x)$ 가  $x = 2p$ 에 대하여 대칭이라는 것을 의미한다. 그러므로  $f((0, 2p))$

$= f((2p, 4p))$ 이고,  $2p < x < 4p$ 에서  $f(x) < 1$ 이다. 즉,  $(0, 2p)$ 에서  $f(x) < 1$ 이고  $f(2p) = -1$ 이므로 구간  $(0, 4p)$ 에서  $f(x) < 1$ 이다. 결국  $f(0) = 1 = f(4p)$ 이고  $(0, 4p)$ 에서  $f(x) < 1$ 이므로  $4p \leq r$ 을 얻을 수 있다. 그러므로  $r = 4p$ 가 성립한다.

(2)  $g(x)$ 는 관계식  $f(x-p) = g(x)$ 에 의해  $f(x)$ 를  $x$ 축으로  $p$ 만큼 평행이동한 것이므로  $g(x)$ 의 주기는  $f(x)$ 의 주기와 같다. 즉, (1)에 의해  $g(x)$ 의 주기도  $4p$ 이다. □

성질 3에서의 등식  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 에 의해  $(f(x), g(x))$ 의 기하학적 의미는 단위원의 원주상의 점이라는 것을 알았다. 실제로  $\{(f(x), g(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ 의 그래프는 단위원  $S^1 = \{(u, v) | u^2 + v^2 = 1\}$ 이라는 것을 확인하자.

**성질 14.**  $\{(f(x), g(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ 의 좌표평면에서의 그래프는  $S^1 = \{(u, v) | u^2 + v^2 = 1\}$ 의 그래프와 같다.

**증명.** 임의의  $x \in \mathbb{R}$ 에 대해,  $h(x) = (f(x), g(x))$ 로 정의하자. 그러면  $h$ 는  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 인 함수이다.  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ 이 성립하므로,  $h(x)$ 를 생각하면,  $h(x) = (f(x), g(x)) \in S^1$ 이며  $h(\mathbb{R}) \subset S^1$ 이다.

이제  $S^1 \subset h(\mathbb{R})$ 을 보이자. 이를 위해,  $(u, v)$ 를  $S^1$ 상의 임의의 점이라 하자. 이때  $u$ 는  $-1 \leq u \leq 1$ 이며  $f: [0, 2p] \rightarrow [-1, 1]$ 는 전단사함수이므로  $f(x) = u$ 가 되는  $x$ 가 존재한다. 여기서  $(g(x))^2 = 1 - (f(x))^2 = 1 - u^2$ 이고  $u^2 + v^2 = 1$ 이므로  $(g(x))^2 = v^2$ 이 성립한다. 그러므로  $g(x) = v$ 이거나  $g(x) = -v$ 이다. 만약  $g(x) = v$ 이면  $h(x) = (f(x), g(x)) = (u, v)$ 이 되며,  $(u, v) \in h([0, 2p]) \subset h(\mathbb{R})$ 이다.

한편,  $g(x) = -v$ 이면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} h(4p-x) &= (f(4p-x), g(4p-x)) \\ &= (f(-x), g(-x)) = (f(x), -g(x)) = (u, v) \end{aligned}$$

결국  $(u, v) \in h(\mathbb{R})$ 이다. 이로부터  $S^1 \subset h(\mathbb{R})$ 이 성립하며,  $h(\mathbb{R}) = S^1$ 이 된다. □

함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에 대해 기본관계와 대립들(함숫값, 주기성, 볼록성, 원과의 관계, 도함수 등)의 통일을 살펴

보았다. 이로부터  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 삼각함수  $\cos x$ ,  $\sin x$ 와 거의 유사하다는 것을 알 수 있다. 이제 다음 성질을 통해,  $f(x)$ ,  $g(x)$ 와 삼각함수  $\cos x$ ,  $\sin x$ 의 상등가능성을 확인할 수 있다.

**성질 15.**  $(f(x), g(x))$ 는 단위원에서 점  $(1, 0)$ 을 시점으로 하여  $x$ 가 양의 실수이면 반시계 방향으로, 음의 실수이면 시계방향으로 도는 호의 길이가  $|x|$ 인 점의 좌표이다.

**증명.** 임의의  $x \in \mathbb{R}$ 에 대해,  $h(x) = (f(x), g(x))$ 로 정의하자. 그러면  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 는 연속함수이고,  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ 도 연속이므로,  $x=0$ 에서  $x=a$ (이때  $a \geq 0$ )까지  $S^1$ 상에 놓인 곡선  $h([0, a])$ 의 길이  $l$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^a \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{(-g(x))^2 + (f(x))^2} dx \\ &= \int_0^a 1 dx = a \end{aligned}$$

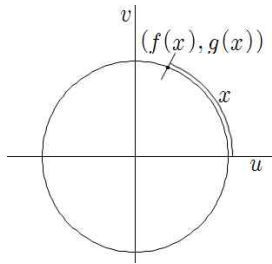
즉,  $x$ 가 양의 실수이면  $h(x) = (f(x), g(x))$ 는  $(1, 0)$ 에서 단위원  $S^1$  상의 호의 길이가 반시계 방향으로  $x$ 인 점의 좌표이다.

한편,  $x$ 가 음의 실수이면  $h(x) = (f(x), g(x))$ 에서  $(1, 0)$ 까지 단위원  $S^1$  상의 호의 길이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} l &= \int_x^0 \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx \\ &= \int_x^0 1 dx = -x = |x| \end{aligned}$$

그러므로  $x$ 가 음의 실수이면  $h(x) = (f(x), g(x))$ 는 단위원 상에서 점  $(1, 0)$ 를 시점으로 시계방향으로 도는 호의 길이가  $|x|$ 인 점의 좌표가 된다. □

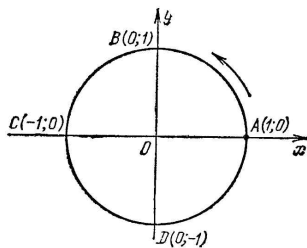
성질 15에서 살펴본  $(f(x), g(x))$ 를 [그림 5]와 같이 나타낼 수 있다. 이제, 앞에서 살펴본 성질들을 만족시키는 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 삼각함수와 일치한다는 것을 고찰할 수 있다.



[그림 5] 기본관계와 단위원  
[Fig. 5] Basic relation and a unit circle

이제,  $f(x), g(x)$ 가 삼각함수  $\cos x, \sin x$ 라는 논의를 구체화할 수 있다. 이를 위해, 삼각함수를 실수에서 원주로 보내는 함수로 정의하는 방법을 살펴보자.

Panchishkin & Shavgulidze(1986, pp.7-8)는 수직선을 단위원에 감는 사상  $P: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , 즉 실수의 집합에서 원주상의 점으로 보내는 사상을 도입하였다. 이때 감는 사상은 실수 0은  $S^1$  상의  $(1,0)$ 에 대응시키고 양인 실수는 반시계방향으로, 음인 실수는 반시계방향으로 감으며 실수  $t \in \mathbb{R}$  를  $(1,0)$ 에서  $S^1$  상을 따라 호의 길이가  $|t|$ 인 점과 대응시킨다([그림 6]). 이때 이 함수는 일대일대응은 아니다. 만약 점  $F = P_t \in S^1$  이면, 이 점은 수  $t + 2\pi, t - 2\pi$  와도 대응되며, 점  $F$ 에 대응되는 점  $P_t$ 는  $t + 2k\pi$ 의 형태가 된다(이때  $k$ 는 정수).

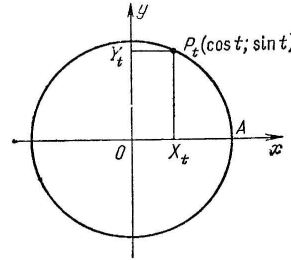


[그림 6] 함수  $P: \mathbb{R} \rightarrow S^1$   
[Fig. 6] function  $P: \mathbb{R} \rightarrow S^1$

이제, Panchishkin & Shavgulidze(1986, p.13)는 삼각함수를 다음과 같이 정의하였다([그림 7]).

**정의.** 감는 사상  $P$ 는 수  $t \in \mathbb{R}$  를 삼각함수 원의 점

$P_t$ 에 대응시킨다고 하자. 그러면 점  $P_t$ 의 종좌표  $y$ 를 수  $t$ 의 사인이라 부르며  $\sin t$ 로 쓴다. 그리고 점  $P_t$ 의 횡좌표  $x$ 를 수  $t$ 의 코사인이라 부르며  $\cos t$ 로 쓴다.



[그림 7] 삼각함수의 정의  
[Fig. 7] Definition of trigonometric functions

살펴본 Panchishkin & Shavgulidze(1986)의 접근과 유사한 접근을 Callahan, Cox, Hoffman, O'Shea, Pollatsek & Senechal(2005), Varberg, Purcell & Rigdon(2000) 등에서 찾아볼 수 있다.

Panchishkin & Shavgulidze에서 점  $P_t$ 의 좌표가 성질 15의  $(f(x), g(x))$ 이다. 즉 본 연구에서의 기본관계로부터 유도된 함수  $f(x), g(x)$ 의 성질들은 삼각함수의 정의로 연결되었다. 공리적 방법에서는 삼각함수의 정의로부터 삼각함수의 다양한 성질들이 연역되지만, 본 연구에서는 함수  $f(x), g(x)$ 를 포함한 기본관계로부터 대립들의 종합, 통일을 통해  $f(x), g(x)$ 에 관련된 다양한 성질들을 구체화하여, 결국 추상(기본관계)으로부터 구체로의 상승에 의해 삼각함수를 재구성할 수 있음을 보였다.

## V. 결론 및 제언

1990년대 후반부터 우리나라 수학교육학 연구에서 조작적 구성주의, 급진적 구성주의, 사회적 구성주의 등의 관점들, 개념들이 소개되기 시작하였다. 그러나 수학적 지식의 구성 방향과 구성의 실제적인 사례들에 대한 연구들은 지금도 찾아보기는 쉽지 않다. 본 연구에서는 변증법에서 논의되는 추상에서 구체로의 상승에 대한 문헌 연구를 바탕으로, 추상에서 구체로의 상승 방법에 따라 삼각함수에 대한 수학적 지식을 구성하였으며, 구성 과

정에 관련된 교수학적 논의를 제시하였다.

형식논리학과 변증법에서 논의되는 추상과 구체의 개념은 서로 다르다. 형식논리학에서는 추상을 개념 형성과 관련짓지만, 변증법에서는 추상은 아직은 개념과 관련지을 수 없으며, 추상은 개념 형성을 위한 출발점으로 여겨진다. 한편 형식논리학에서 구체는 실제로 존재하는 대상과 현상에 관련되며, 변증법에서 구체는 전체성, 내용의 풍부성의 특징을 가지는 것으로 이해된다. 그리하여 변증법에서 구체는 분석 이전의 자연적 대상이 아니라, 추상들의 종합(통일)을 통해 얻어지는 유기적인 전체성을 의미하며, 이때 개념 형성이 논의된다.

변증법에서 지식의 재구성은 추상에서 구체로의 상승으로 설명된다. 추상은 분석에 관련되며, 구체는 종합에 관련될 수 있다. 이를 바탕으로, 추상에서 구체로의 상승의 단계를 정리하면, 첫째 탐구하려는 대상을 분석에 의해 구성 요소인 대립들로 분해하며, 둘째 이 대립들 중에서 재구성을 위한 출발점 추상인 기본관계를 분석하며, 셋째 기본관계에서 출발하여 대립들의 통일을 통해 구체성을 띤 수학적 지식을 재구성하게 된다.

본 연구에서는 삼각함수에 대한 다양한 문헌들을 대상으로 삼각함수의 정의, 삼각함수 등식들, 이들의 다양한 증명방법 등을 분석하였다. 이를 바탕으로 삼각함수 영역의 구성요소인 대립들로 삼각함수의 값들, 등식들, 대칭성(기함수, 우함수),  $x$  축과의 교점, 평행이동, 주기성, 도함수, 그래프 개형 등을 분석하고, 추상에서 구체로의 상승에서 출발점 추상인 기본관계로 '실수에서 정의된 연속함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에 대해  $0 < x < 1$ 에서  $0 < xf(x) < g(x) < x$ 를 만족시키는 등식  $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ '을 추출하였다. 마지막으로 추출된 기본관계와 대립들의 통일을 바탕으로, 추상에서 구체로의 상승을 통한 삼각함수에 관련된 수학적 지식들의 재구성을 제시하였다.

본 연구에서 제시한 추상에서 구체로의 상승에 의한 삼각함수 지식의 재구성은 삼각함수의 정의로부터 시작하는 삼각함수 지식의 연역적 기술과는 다르다. 본 연구에서 시도하는 삼각함수 지식의 재구성은 수확화에서와 마찬가지로, 이미 잘 정리된 정의에서 출발하여 연역적 증명에 의해 수학적 지식을 체계적으로 기술하는 것이 아니라, 출발점 추상인 기본관계로부터 대립들의 통일인

모순을 중심으로 수학적 지식의 발생, 발달을 제시하려는 것이다. 여기서는 기본관계에서 출발하여 15개의 성질을 모순을 통해 구성하였고, 마지막으로 이 구성된 성질들이 삼각함수의 정의와 일치한다는 것을 기술하였다.

본 연구에서 기술한 추상에서 구체로의 상승을 통한 삼각함수의 재구성은 고등학교 수업에서 적용할 것을 목적으로 삼지는 않았다. 삼각함수에 관련된 지식들을 변증법의 이론적 바탕에서 재구성할 수 있음을 보여주는 데 연구의 초점을 두었다. 본 연구의 일부 성질들에 대해서는 고등학교 학생들이 스스로 탐구하여 발견하고 구성할 수 있는가라는 의문도 제기할 수 있을 것이다. 이러한 물음은 본 연구를 기반으로 하는 후속 연구에서 충분히 가치롭게 논의될 수 있을 것이다.

특히 본 연구를 통해 제시된 '추상에서 구체로의 상승'이라는 변증법의 지식 구성의 방향, 방법에 기반한 다양한 연구들을 기대하며, 이를 통해 수학교육에서 변증법, 구성주의에 대한 논의가 더 활발하게 이루어질 수 있기를 기대한다.

## 참 고 문 헌

- 강시중 (1987). *수학교육론*, 서울: 교육출판사.
- Kang, S.J. (1987). *Theory of Mathematics Education*, Seoul: Education Publ.
- 교육부 (2015). *초·중등학교 교육과정 총론*(교육부 고시 제2015-74호 [별책 1]).
- Ministry of Education (2015). *Curriculum of Elementary School and Secondary School*.
- 김익달 (1970). *철학대사전*, 서울: 학원사.
- Kim, I.D. (1970). *Dictionary of Philosophy*, Seoul: Hakwonsa.
- 남영신 (2003). *국어대사전*, 서울: 성안당.
- Nam, Y.S. (2003). *Dictionary of Korean*, Seoul: Seongandang.
- 서울대학교 교육연구소 (1999). *교육학 용어사전*, 서울: 하우동설.
- Institute of Education of SNU (1999). *The Dictionary of Educational Studies*, Seoul: Haudongset.
- 우정호 (2004). *수학 학습-지도 원리와 방법*, 서울: 서울대 출판부.
- Uoo, J.H. (2004). *Principles and Methods of Teaching-*



- Learning Mathematics*, Seoul: SNU press.
- 우정호 외 (2014). 미적분II, 서울: 두산동아.
- Uoo, J.H. etc. (2014). *Calculus II*, Seoul: Dusandong.
- Callahan J., Cox D., Hoffman K., O'Shea D., Pollatsek H., & Senechal L. (1995). *Calculus in Context*, Freeman.
- Davydov V. V. (2000). *Vidy Obobsheniya v Obuchenii*, Moscow: Pedagogicheskoe Obshestvo Rossii.
- Ilenkov E.V. (1962). Ponimanie Abstraktnogo i Konkretnogo v Dialektike i Formalnoi Logike, In Kedrov B.M.(ed.), *Formy Myshleniya*, Moscow: Izd. Akademii Nauk.
- Ilenkov E.V. (1971). Dialektika Abstraktnogo i Konkretnogo, In Rozental M.M.(ed.), *Istoriya Marksistskoi Dialeтики*, Moscow: Mysl.
- Ilichev L.F., Fedoseev P.N., Kovalev S.M. & Panov V.G. (1983). *Filosofskii Entsiklopedichskii Slovar*, Moscow: Sovetskaya Entsiklopediya.
- Kedrov B.M. (1979). *Protivorechivost' Poznaniya i Poznanie Protivorechniya, Dialekticheskoe Protivoretie*, Moscow: Politizdat.
- Kopnin P.V. (1969). *Filosofie Idei i Logika*, Moscow: Nauka.
- Lakatos I. (1976). *Proofs and Refutations*, New York: Cambridge University Press.
- Mareev S.N. (1979) *Dialekticheskaya Logika i Razvitie Sovremennoi Nauki*, Moscow: Znanie.
- Panchishkin A.A., Shavgulidze E.T. (1986). *Trigonometricheskie Funktsii v Zadachah*, Moscow: Nauka.
- Sahoo P.K. & Kannappan P. (2011). *Introduction to Functional Equations*, New York: Chapman and Hall/CRC.
- Varberg D., Purcell E. J. & Rigdon S. E. (2000). *Calculus*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall International, Inc.

## A Study on Reconstruction of Trigonometry Based on Ascent from the Abstract to the Concrete

**Mee Kwang Kang**

Department of Mathematics, Dongeui University

E-mail : mee@deu.ac.kr

**Inki Han<sup>†</sup>**

Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University

E-mail : inkiski@gnu.ac.kr

In this article we study a reconstruction of mathematical knowledge on trigonometry by the method of ascent from the abstract to the concrete from the pedagogical viewpoint of dialectic.

The direction of education is shifting in a way that emphasizes the active constitution of knowledge by the learning subjects from the perspective that knowledge is transferred from the teacher to the student. In mathematics education, active discussions on the construction of mathematical knowledge by learners have been going on since the late 1990s. In Korea, concepts and aspects of constructivism such as operational constructivism, radical constructivism, and social constructivism were introduced.

However, examples of practical construction according to the direction of construction of mathematical knowledge are very hard to find. In this study, we discuss the direction of the actual construction of mathematical knowledge and suggest a concrete example of the actual construction of trigonometry knowledge from a constructivist point of view. In particular, we discuss the process of the construction of theoretical knowledge, the ascent from the abstract to the concrete, based on the literature study from the pedagogical viewpoint of dialectic, and show how to construct the mathematical knowledge on trigonometry by the method of ascent from the abstract to the concrete.

Through this study, it is expected to introduce the new direction and new method of knowledge construction as 'the ascent from the abstract to the concrete', and to present the possibility of applying dialectic concepts to mathematics education.

---

\* ZDM Classification : E44

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D20

\* Key words : Trigonometry, reconstruction of mathematical knowledge, abstract, concrete

† Corresponding author