

## 초등학교 수학 교과서 및 익힘책에 제시된 변수 개념에 관한 분석

방 정 숙 (한국교원대학교)<sup>†</sup>

조 선 미 (한국교원대학교 대학원)

김 정 원 (신탄진초등학교)

### I. 서론

변수(variables)는 학생들이 대수와 관련된 학교 수학의 내용을 이해하는데 중요한 역할을 하는 기본 개념이다. 미국수학교사협회(NCTM, 2000)에서는 대수 표준(standards)의 하나로 학생들이 기호(symbol)를 이용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석할 수 있어야 한다고 규정하면서 변수 사용의 중요성을 강조하고 있다. 또한, 변수는 여러 수학적 아이디어를 연결하는 다목적 도구로 사용될 수 있다. 학생들은 문제 상황을 해결하기 위해 식을 세우는 활동을 하면서, 발견한 규칙을 일반화 하면서, 또는 함수적 관계를 탐구하면서 기호적 표기법인 변수의 사용을 경험하게 된다(Blanton, Levi, Crites & Dougherty, 2011).

따라서 학생들이 대수와 관련된 수학 학습을 성공적으로 학습해 나가기 위해서는 무엇보다도 먼저 변수의 의미와 역할을 정확히 파악하는 것이 중요하다. 간결한 형식으로 수학적 구조와 관계를 표현하는 것에 중점을 두고 있는 대수 학습에서 변수는 연산과 수를 조합하는 수학적 언어와 직접 관련되어 있기 때문이다(Blanton et al., 2011). 이를 위해 변수 개념에 관한 지도는 형식적인 기호의 지도가 아닌 기호화된 변수가 무엇을 의미하며 어떤 역할을 하는지에 중점을 두고 이루어질 필요가 있다. 이는 변수 개념의 지도에 있어 기호 표현과 그 기호에 대한 조작에 치중하기 보다는 변수의 개념과 변수 사

이의 관계에 중점을 두고 지도해야 함을 시사한다(김남희, 1997).

현행 교육과정에서는 중학교 1학년 <문자와 식> 단원에서 본격적으로 변수에 대한 개념이 도입되고, 여러 단원에서 변수의 다양한 측면이 모두 다루어지고 있다. 이에 따라 중등학교 학생들이 변수를 어떻게 이해하고 사용하는지에 관한 많은 연구가 이루어졌는데 그 결과를 살펴보면 상당수의 학생들이 변수의 다양한 의미와 역할을 제대로 파악하지 못하고 있으며 변수를 표현하고 사용하는 것에 어려움을 갖고 있음을 알 수 있다(김남희, 1992; 송옥빈, 2003; 임만석, 2007; Wagner, 1981). 이는 중학교에서 변수 개념이 도입될 때 충분한 안내가 이루어지지 않을 뿐 아니라, 학교 현장에서 변수를 지도할 때 변수의 개념과 그 관계에 관심을 두기보다는 단지 형식적 조작의 대상으로만 다루어 왔기 때문이다.

한편 초등학교 수학 교과서에서도 변수 개념과 관련된 내용이 비형식적으로 제시되고 있음을 확인할 수 있다(교육부, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d, 2015a, 2015b, 2015c, 2015d, 2016a, 2016b, 2016c, 2016d). 예를 들어,  $19 + \square = 28$ 과 같이 어떤 수를  $\square$ 로 나타내어 미지수를 구하는 활동을 하기도 하고, 나눗셈을 하고 검증하는 과정을  $\bullet \div \blacksquare = \blacktriangle \cdots \heartsuit, \blacksquare \times \blacktriangle + \heartsuit = \bullet$ 와 같이 변수 기호를 사용하여 일반화하고 있으며, 두 수 사이의 대응관계를 찾아 이를  $\square = 2 \times \triangle$ 로 나타내면서 변화하는 양 사이의 관계를 표현하고 있다(교육부, 2014b, 2014d, 2016c). 이는 중학교부터 변수 개념이 본격적으로 도입되기는 하지만, 초등학교에서도 변수 개념에 대한 이해를 신장시킬 수 있는 가능성이 존재한다는 것을 의미한다. 또한 형식적으로 변수를 지도하지는 않지만 실제적으로 변수 개념을 학습하고 있는 초등학교 학생들이 변수를 어떻게 학습하고 이해하는지가 중등학교에서의

\* 접수일((2017년 1월 23일), 수정일(2017년 2월 7일), 게재확정일(2017년 2월 24일)

\* ZDM 분류 : U22

\* MSC2000 분류 : 97U20

\* 주제어 : 변수, 미지수, 일반화, 관계, 교과서와 익힘책 분석  
<sup>†</sup> 교신저자

변수 개념 형성에 영향을 끼칠 수 있음을 시사한다(김남희, 1997).

최근에는 대수적 사고에 대한 관심이 높아짐에 따라 초등학교 수학에서부터 변수가 어떤 의미와 역할을 가지는지에 초점을 두고 지도할 필요가 있다는 주장이 제기되고 있다(Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens & Gardiner, 2015). 특히 Blanton 외(2011)는 변수의 의미를 정확하게 이해하고 변수를 사용한 식을 나타내는 것은 시간에 따라 발달하는 과정이므로, 어린 학생들이 대수 표기법에 관한 지속적인 상호작용을 좀 더 일찍부터 시작하여 대수적 사고의 발달에 도움을 줄 수 있다고 하면서 초등학교에서의 변수 학습 가능성을 강조한다. 이와 더불어 외국의 다양한 연구를 살펴보면 교사의 적절한 개입을 통해 초등학교 학생들도 충분히 변수를 이해하고 변수 표기를 시작할 수 있음을 알 수 있다(Blanton, Stephens, Kunth, Gardner & Isler, 2015; Brizuela et al., 2015; Carraher & Schliemann, 2007).

변수 개념에 대한 초등학교 학생들의 실태를 조사한 국내 연구들을 살펴보면, 학생들의 변수 개념에 대한 이해 정도 및 잠재성과 가능성을 보고하고 있지만, 변수 개념에 대한 이해를 신장시키기 위한 방안을 제시한 연구는 부족한 실정이다(강소희·방정숙, 2008; 하수현·이광호, 2011). 따라서 실제로 교과서에 반영되어 있는 변수 개념을 의미 있게 지도할 수 있는 구체적인 방안을 제시하고 적용해 보는 연구가 필요하며, 이를 위해서는 학생들의 변수 개념 이해에 많은 영향을 미치는 교과서를 분석해 볼 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 현행 초등학교 수학 교과서 및 익힘책에 제시된 변수 개념을 분석함으로써, 변수 개념에 대한 교수·학습 내용 및 순서를 알아보고, 변수 개념의 어떠한 면에 초점을 두고 있는지 파악하고자 한다. 이를 통해 실제 초등학교 현장에서 변수 개념을 지도할 때 어떤 측면에 중점을 두고 지도해야 하는가에 대한 시사점을 얻고 초등학교 학생들의 변수 개념 이해를 위한 효과적인 교수·학습방안의 토대를 마련하고자 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 변수 개념의 다면성

변수는 다양한 개념적 구조를 갖는 복합 개념으로 다각도로 접근되어야 한다(김남희, 1997). 수학적 맥락에서 서로 다른 양상으로 나타내는 변수 개념에 관한 분류는 다양한 관점에서 이루어지고 있는데 일반적으로 미지수, 일반화를 위한 도구, 변화하는 양 사이의 관계, 임의의 기호로 구분하여 살펴볼 수 있다(김남희, 1997; Blanton et al., 2011; Usiskin, 1988).

#### 1) 미지수

미지수로서의 변수 개념은 어떤 값을 대신하는 자리지기(placeholder)로 계산 조작, 대입의 의미가 강조되는 개념이다(김남희, 1997). 예를 들어 어떤 수를  $\square$ 로 두고  $\square + 12 = 20$ 과 같이 식을 세웠을 때, 이 식을 참으로 만드는 값을 구하기 위해 식을 조작하거나 여러 수를 대입해 보면서 변수  $\square$ 의 값을 구할 수 있다. 이와 같이 방정식을 참으로 만드는 하나의 고정된 값이 미지수로서의 변수 개념이다(Blanton et al., 2011). 한편 초등학교 수학 교과서에서는  $\square$ 나  $\bigcirc$ 에 들어갈 알맞은 값을 구하라는 문제가 많이 제시되는데 이 때 사용되는  $\square$ 나  $\bigcirc$ 의 의미는 이후 방정식에서 미지수로 사용되는 변수 개념과 같다고 할 수 있다(김남희, 1999). 이를 단순히 답을 써 넣는 빈 칸이라고 생각할 수도 있지만  $\square$ 의 값은 주어진 식을 만족하는 하나의 고정된 값을 가지기 때문에 미지수로서의 변수 역할을 한다고 볼 수 있다.

미지수로서의 변수는 연산에서의 위치에 따라 결과량 미지수( $a + b = \square$ ,  $a - b = \square$ ), 변화량 미지수( $a + \square = c$ ,  $a - \square = c$ ), 초기량 미지수( $\square + b = c$ ,  $\square - b = c$ )의 세 가지 유형으로 분류할 수 있다(Baroody & Coslick, 1998). 예를 들어, "과자 3봉지가 있는데 5봉지를 더 얻었다면 과자는 모두 몇 봉지인가?"라는 문제는 결과량 미지수와 관련이 있고, "과자 3봉지가 있는데 친구에게 몇 봉지를 더 얻어 8봉지가 되었다. 친구에게 얻은 과자는 모두 몇 봉지인가?"는 변화량 미지수를 구하는 문제이며, "친구에게 과자 5봉지를 얻어 모두 8봉지가 있다. 처음에 가지고 있던 과자는 몇 봉지인가?"와 같은 문제는 초기량 미지수와 관련된다.

#### 2) 일반화를 위한 도구

일반화를 위한 도구로서의 변수 개념은 특수한 예에

서 공통적인 성질을 발견하여 이를 모두 대표할 수 있는 값을 나타내고자 할 때 다루어지는 변수 개념이다(김남희, 1997). 예를 들어,  $2 + 3 = 3 + 2$ 와 같은 덧셈의 교환법칙을  $\blacksquare + \blacktriangle = \blacktriangle + \blacksquare$  또는  $a + b = b + a$ 로 일반화하면서 수학적 구조나 관계를 설명하기 위하여 많이 사용된다(Blanton et al., 2011). 또한 점, 선, 면과 같은 도형의 구성 요소를 구분하기 위해 점을 점 ㄱ, 점 ㄴ으로 나타내면서 임의의 대상을 동시에 고려하는 경우도 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념으로 생각할 수 있다(김남희, 1997).

한편 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념은 미지수로서의 변수 개념과는 구분되는데, 미지수로서의 변수 개념은 문제 상황에 맞는 고정된 값을 찾는 것에 초점을 맞추지만 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념은 일반화의 과정에서 관계를 통합적으로 나타내고자 하는 것에 관심을 두고 있기 때문이다.

3) 변화하는 양 사이의 관계

변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념은 실제로 변화거나 변하는 것으로 생각되는 대상을 나타내며 두 변수가 서로 영향을 주고받는 경우를 말한다(김남희, 1997). 특히 함수 학습과 관련이 깊은데 예를 들어,  $\diamond = 3 \times \square$ 에서  $\square$ 와  $\diamond$ , 또는  $f = 3 \times g$ 에서  $g$ 와  $f$ 로 나타내어지는 독립변수와 종속변수가 여기에 속한다(Blanton et al., 2011). 또한,  $y = mx$ 에서 변수  $m$ 은 변수  $x$ 와  $y$ 의 관계를 결정하는 매개변수로 이 또한 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수개념으로 분류할 수 있다(Usiskin, 1988).

변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념은 식을 만족하는 고정된 하나의 값을 구하는 데 목적이 있는 것이 아니고, 임의의 수를 대신하는 의미와도 관계가 없다. 이 변수 개념은 두 변수가 서로 관련지어 변한다는 점에서 앞의 두 변수 개념과 구별된다.

4) 임의의 기호

임의의 기호로 사용되는 변수 개념은 변수가 나타내는 대상에 대해 고려하지 않으며 변수의 조작만이 의미를 갖는다(Usiskin, 1988). 예를 들어  $y^2 + 5y + 6$ 과 같은 대수식을 간단히 하는 것과 관련이 있는데, 이는 방

정식에서 미지수를 구하는 것이나, 규칙을 발견하여 일반화하는 것과 관련이 없으며, 함수 관계가 아니기 때문에 독립변수나 종속변수의 개념도 적용되지 않는다는 점에서 앞서 언급한 변수 개념들과 구분된다(김남희, 1992).

이와 같이 변수의 개념은 매우 다양하고 이 개념을 정확하게 이해하는 것이 수학의 여러 가지 아이디어를 연결하고 경험하는데 도움이 됨을 알 수 있다. 다시 말하면 변수의 개념을 제대로 이해하지 못하는 것은 수학 학습에 있어 어려움을 초래할 수 있음을 뜻한다.

본 연구에서는 변수 개념을 [표 1]과 같이 미지수, 일반화를 위한 도구, 변화하는 양 사이의 관계로 한정하여 살펴보고자 한다. 앞서 살펴본 네 가지 변수 개념 중 ‘임의의 기호’와 변화하는 양 사이의 관계에서 함께 살펴본 ‘매개변수’는 초등학교 교육과정에서는 거의 다루지 않기 때문에 본 연구에서 제외하였다.

[표 1] 본 연구에서 다루는 변수 개념의 유형  
[Table 1] Types of variable concepts dealt in this study

변수 개념	변수 개념의 의미와 예시
미지수	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 방정식을 참으로 만드는 값</li> <li>• 어떤 값을 대신하는 자리지기</li> </ul> 예) $\square + 3 = 8$ 에서 $\square$
일반화를 위한 도구	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수학적 구조와 관계의 일반화</li> </ul> 예) $\blacksquare + \blacktriangle = \blacktriangle + \blacksquare$ 에서 $\blacksquare, \blacktriangle$
변화하는 양 사이의 관계	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 서로 관련된 두 양 사이의 관계</li> </ul> 예) $\square = 3 \times \diamond$ 에서 $\square, \diamond$

2. 교과서 분석 관련 선행연구 고찰

1) 변수 개념 관련 교과서 분석

본 연구와 관련하여 먼저 변수 개념에 초점을 두고 교과서를 분석한 선행 연구를 살펴보았다. 김남희(1997)는 제6차 교육과정에 따른 초등학교 및 중등학교 수학 교과서를 동적인 측면과 정적인 측면의 변수 개념에 따라 분석하면서 각 변수 개념이 초등학교 시기부터 중등학교 시기까지 어떤 지도 계열 아래 어떻게 도입되고 있는가를 살펴보고 변수 개념을 지도하는 데 있어 고려해야 할 전체적인 방향을 제시한다. 이를 통해 초등학교에

서 형성한 변수에 관한 개념이 중학교에서 이루어지는 본격적인 변수 학습에 영향을 끼치기 때문에, 이 시기의 변수 개념에 관한 지도가 매우 중요함을 강조하고 있다.

초등학교 수학 교과서에 제시된 변수 개념을 분석한 연구를 살펴보면, 우선 강소희·방정숙(2008)은 제7차 수학 교과서에 제시된 문자 유형을 미지수로써의 문자, 다가이름으로써의 문자, 패턴을 일반화하는 도구로써의 문자, 값의 변화로써의 문자로 구분하여 살펴보았다. 연구 결과, 교과서에서 문자가 주로 미지수의 개념으로만 다루어지고 있으며 주어진 대상이나 맥락에 대한 고려 없이 제시되고 있음을 문제점으로 지적하였다. 위의 두 연구에 따르면, 6차와 7차 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에서는 미지수로서의 변수가 주로 제시되었다는 것을 알 수 있다.

한편, 하수현·이광호(2011)는 2007 개정 교육과정이 적용된 1~4학년과 7차 교육과정이 적용된 5~6학년의 수학 교과서에서 변수 개념이 어떻게 제시되고 있는지 살펴보았다. 이 연구에서는 변수를 미지수, 패턴의 일반화, 양 사이의 관계의 3가지 측면으로 나누어 분석하였는데, 추가적으로 각각의 변수 개념을 해석, 조작, 기호화의 이해요소로 더욱 세분화하여, 어떤 부분이 비중 있게 다루어지고 있는지 분석하였다. 연구 결과, 전체적으로 전 학년에 걸쳐 패턴을 일반화하는 과정에서 변수에 대한 해석을 지속적으로 강조하는 데 반해, 미지수의 해석 및 패턴 일반화의 조작 및 기호화가 잘 이루어지고 있지 않았다. 이 연구는 변수 개념뿐만 아니라 이해요소를 세분하여 교과서를 더욱 상세히 살펴보았다는 의의가 있다.

김성에·김성준(2013)은 초등학교 수학 교과서에 제시된 문자와 식을 6차, 7차, 2007 개정 교육과정의 변화에 따라 분석하였다. 연구 결과 중 문자  $x$ 의 도입을 살펴보면, 7차 교육과정에서는 문자가 도입되지 않았으나 6차와 2007 개정에서는 방정식을 다루고 문자  $x$ 가 미지수로 도입된다. 2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에는 미지수로서의 문자  $x$ 가 도입되지 않고 있다는 점을 염두에 둔다면, 이와 같은 연구 결과는 초등 수학에서 문자  $x$ 가 매우 불규칙적으로 제시되고 있으며 문자 변수 사용에 대한 논의가 교육과정이 바뀔 때마다 이루어지고 있다는 것을 암시한다.

특히, 2007 개정 교육과정에서는 6학년 2학기 방정식 단원의 바로 다음에 제시되는 정비례와 반비례 단원에서 문자  $x$ 가 변화하는 양을 나타내는 변수로 제시되고 있다(교육과학기술부, 2011b). 이는 7차 교육과정에서는 문자  $x$ 가 중학교 1학년에 도입되어 초등에서는 문자  $x$ 가 전혀 다루어지지 않는다는 점을 감안한다면, 문자  $x$ 와 관련하여 교육과정 간에 차이가 있음을 알 수 있다.

선행 연구를 살펴보면, 각 교육과정마다 변수에 관한 교과서 분석이 이루어져 왔다는 것을 알 수 있다. 따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학 교과서에서 변수의 의미가 어떻게 다루어지는지 살펴보는 것은 의의가 있을 것이다. 또한 이러한 연구 결과는 본 연구의 초점 및 교육과정의 흐름과 관련지어 본 연구 결과를 이해하는데 시사점을 줄 수 있다.

## 2) 초기 대수적 관점에서의 교과서 분석

다음으로 본 연구의 바탕이 되고 있는 초기 대수적 관점에서 교과서를 분석한 연구를 살펴보았다. 범자연수와 연산에 관해 교과서를 분석한 방정숙·최지영(2011)은 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로 수와 연산의 성질, 연산 사이의 관계에 관해 다루고 있다. 특히 관계 및 일반화에 초점을 두고 교과서를 분석함으로써 동일한 성질이 학년에 따라 계열성 있게 지도되고 있는지, 수와 연산의 성질을 일반화할 수 있는 기회가 많이 제공되고 있는지를 알아보았다. 방정숙·선우진(2016)의 연구는 패턴의 구조를 분석하는 활동, 두 변수 사이의 관계를 탐색하는 활동, 일반화된 규칙을 추론하고 표현하는 활동에 초점을 두고 교과서에 제시된 패턴에 관한 지도 방안을 분석하였다.

이를 통해 일반화를 위한 도구, 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념을 분석할 때 어떤 측면에 초점을 두고 살펴보아야 하는지를 참고하고자 한다. 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념은 수와 연산의 관계 및 일반화와 관련이 되고, 패턴에서 두 변수 사이의 관계를 탐색하는 활동은 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념과 관련이 되기 때문이다. 이러한 선행 연구를 바탕으로 초기 대수적 관점에서 수학 교과서 및 익힘책에 제시된 변수 개념을 분석함으로써 초등학교 수학 수업에서 보다 의미 있게 변수 개념을 다룰 수 있는 토대를 마련하고자 한다.

### III. 연구 방법

#### 1. 분석 대상

본 연구에서는 앞서 언급한 세 가지 변수 개념인 미지수, 일반화를 위한 도구, 변화하는 양 사이의 관계를 중심으로 2009 개정 수학 교과서 및 익힘책의 내용을 분석하였다. 1학년부터 6학년까지의 모든 단원을 살펴보았으며, 해당 단원을 분석할 때 주요 학습 주제를 다루는 본 차시의 내용 뿐 아니라 단원 평가(공부를 잘했는지 알아봅시다)와 추가 활동도 함께 분석하였다. 추가 활동에는 문제 해결, 이야기 마당, 놀이마당, 체험마당이 해당된다.

#### 2. 분석 방법

초등학교 수학 교과서 및 익힘책에 제시된 세 가지 변수 개념과 관련하여, 어떤 내용을 어떠한 순서로 다루고 있는지, 또한 어떠한 측면에 강조를 두고 지도하고 있는지를 보다 명확하게 파악하기 위하여 [표 2]와 같이 분석의 내용 및 초점을 정리하였다. 먼저 학년에 따라 각 변수 개념이 어느 정도의 비중으로 나타나고 있는지에 관한 전체적인 경향을 파악하였다. 이를 위해 각 변수 개념이 어떤 학년과 단원에서 제시되고 있는지를 살펴보고 학년군별로 세 가지 변수 개념이 제시되는 유형의 특징을 분석하였으며 학년에 따라 변수 개념에 관한 수준의 상승이 체계적으로 이루어지는지를 알아보았다. 변수 개념이 한 번 등장하는 경우나 여러 번 등장하는 경우 모두 단원명을 한 번씩 기재하였고, 같은 단원에 여러 변수 개념이 등장할 경우에는 중복하여 제시하였다.

다음으로 변수 개념별 세부 분석을 실시하였다. 변수 개념의 특징에 따라 우선 미지수로서의 변수 개념은 서로 다른 값을 나타내는 미지수를 표현할 때 기호를 구분하여 사용하고 있는지, 미지수가 포함된 식의 구조가 다양하게 제시되고 있는지에 관해 알아보았다. 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념의 경우는 교과서 해당 차시에 일반화를 위한 발문이 제시되고 있는지, 변수 기호를 사용한 표현까지 제시되고 있는지를 분석하였는데 좀 더 자세한 분석을 위해 수와 연산의 성질, 연산간의 관계를 다룬 단원을 중심으로 살펴보았다. 이는 초등학교 수학

에서 수와 연산의 영역을 가장 많이 다루고 있으며 수학적 구조와 관계를 일반화하는 것이 대수적 사고와 관련이 깊기 때문이다(Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016). 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념의 경우 독립변수와 종속변수의 값을 어떻게 제시하고 있는지와 어떤 함수 유형을 주로 다루고 있는지를 중심으로 분석하였다. 함수 유형을 분석할 때는 본 차시의 주요 활동 및 단원 평가, 추가 활동에서 제시하고 있는 모든 함수 유형을 살펴보았으며 하나의 문제 상황에 내재된 함수 유형을 찾고 이를 한 개로 계산하였다.

[표 2] 변수 개념에 관한 교과서 및 익힘책 분석의 초점  
[Table 2] Focal points in analyzing mathematics textbooks and workbooks about variable concepts

분석내용	분석의 초점
공통	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 학년 간 연계성 있는 지도가 이루어지고 있는가?</li> <li>• 수학의 어떤 영역에서 주로 제시되고 있는가?</li> <li>• 본 차시에서 다루어지고 있는가? 추가 활동에서 다루어지고 있는가?</li> </ul>
미지수	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 서로 다른 값을 나타내는 미지수에 기호를 구분하여 사용하고 있는가?</li> <li>• 미지수가 포함된 식의 구조가 다양하게 제시되고 있는가?</li> </ul>
일반화를 위한 도구	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 일반화를 위한 발문이 제시되고 있는가?</li> <li>• 기호를 사용한 표현을 제시하고 있는가?</li> </ul>
변화하는 양 사이의 관계	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 독립변수와 종속변수의 값을 어떻게 제시하고 있는가?</li> <li>• 어떤 함수 유형을 다루고 있는가?</li> </ul>

이와 함께 각 변수 개념이 수와 연산, 도형, 측정, 규칙성, 확률과 통계와 같은 수학의 다섯 가지 영역 중 어떤 영역에서 주로 제시되는지, 그리고 본 차시에서 비중 있게 다루어지는지 혹은 추가 활동에서만 다루어지고 있는지를 함께 살펴보았는데 좀 더 심도 있는 분석을 위해 교과서 및 익힘책에 제시된 변수 개념을 모두 다루지는 않았다. 미지수로서의 변수 개념은 모르는 어떤 수를 □로 두고  $2 + \square = 5$ ,  $\square - 3 = 5$ 와 같은 형태로 사용되

는 변화량 미지수나, 초기량 미지수의 경우에 한하여 분석하였다. 그 이유는 계산한 결과나 문제에서 요구하는 알맞은 값을 □안에 넣는 형태인 결과량 미지수의 경우, 초등학교 교과서 및 익힘책의 거의 모든 단원에서 제시되고 있어 본 연구에서 전부 살펴보기에는 한계가 있다고 판단했기 때문이다. 또한 일반화를 위한 도구로 사용되는 변수 개념 중 선분 가, 점 ㄱ, 점 ㄴ과 같이 도형의 각 요소를 나타낼 때 사용되는 경우는 학년에 따른 수준의 차이를 알아보기에 부적합하다는 이유로 세부 분석에서 제외하였다. 각 변수 개념이 교과서 및 익힘책에 제시되는 총 시수를 분석할 때는 해당 변수 개념이 한 번이라도 제시되는 경우에 그 차시를 일 차시로 계산하였으며, 교과서의 분시 차시에서 제시되고 있는 경우에는 익힘책의 차시를 추가로 계산하지 않았다. 하지만 교과서의 분시 차시에는 제시되지 않고 익힘책에만 해당 변수 개념이 제시될 때에는 익힘책의 차시를 계산하여 총 시수를 분석하였다.

#### IV. 결과 분석 및 논의

본 장은 변수 개념에 따라 미지수, 일반화를 위한 도구, 변화하는 양 사이의 관계의 순서로 구성된다. 앞서

인급한대로 각 변수 개념별로 전체적인 경향을 살펴본 다음 학년군별로 어떤 특징이 있는지를 정리하였는데 특히 연계성 있게 지도되고 있는지에 주목하였다. 그 다음 각 변수 개념별로 주로 어떤 영역 또는 차시에서 제시되고 있는지를 분석하고 각 변수 개념의 특성에 맞게 좀 더 세부적인 분석을 실시하였다.

##### 1. 미지수

###### 1) 전체적인 경향

1학년~6학년의 수학 교과서 및 익힘책에 미지수로서의 변수가 제시된 단원을 정리하면 [표 3]과 같다. 앞서 언급한대로 해당 변수 개념이 한 번 등장하거나 여러 번 등장하는 경우 모두 단원명을 한 번씩 기재하였기 때문에 교과서에서 각 변수 개념이 차지하는 비중을 정확히 파악하기에는 부족하지만 전체적인 경향을 살펴보는 자료로 활용하고자 한다.

미지수로서의 변수 개념은 전 학년에 걸쳐 빠짐없이 등장하고 있으며 거의 모든 단원에서 사용되고 있다. 초등학교 시기는 □ 안에 알맞은 값을 계산하여 넣는 활동이 많이 제시되기 때문에 미지수로서의 변수 개념이 빈번하게 사용되는 것은 자연스러운 현상이라 할 수 있다.

[표 3] 미지수로서의 변수 개념이 제시된 단원 목록  
[Table 3] List of units including variables as the unknown

구분	1학년	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년
1학기	1. 9까지의 수 2. 여러 가지 모양 3. 덧셈과 뺄셈 4. 비교하기 5. 50까지의 수	1. 세 자리 수 2. 여러 가지 도형 3. 덧셈과 뺄셈 4. 길이 재기 5. 분류하기 6. 곱셈	1. 덧셈과 뺄셈 2. 평면도형 3. 나눗셈 4. 곱셈 5. 시간과 길이 6. 분수와 소수	1. 큰 수 2. 곱셈과 나눗셈 3. 각도와 삼각형 4. 분수의 덧셈과 뺄셈 5. 혼합계산	1. 약수와 배수 2. 직육면체 3. 약분과 통분 4. 분수의 덧셈과 뺄셈 5. 다각형의 넓이 6. 분수의 곱셈	1. 자기등과 각뿔 2. 분수의 나눗셈 3. 소수의 나눗셈 4. 비와 비율 5. 원의 넓이 6. 직육면체의 겹넓이와 부피
2학기	1. 100까지의 수 2. 여러 가지 모양 3. 덧셈과 뺄셈(1) 4. 시계 보기 5. 덧셈과 뺄셈(2) 6. 규칙 찾기	1. 네 자리 수 2. 곱셈구구 3. 길이 재기 4. 시각과 시간 6. 규칙 찾기	1. 곱셈 2. 나눗셈 3. 원 4. 분수 5. 들이와 무게 6. 자료의 정리	1. 소수의 덧셈과 뺄셈 2. 수직과 평행 3. 다각형 4. 어렵하기	1. 소수의 곱셈 2. 합동과 대칭 3. 분수의 나눗셈 4. 소수의 나눗셈 5. 여러 가지 단위 6. 자료의 표현	1. 쌍기나무 2. 비례식과 비례배분 3. 원기둥, 원뿔, 구 4. 비율 그래프 6. 여러 가지 문제

2) 학년군별 특징

미지수로서의 변수 개념에 관한 학년군별 예를 정리하면 [표 4]와 같다. 미지수로서의 변수 개념이 제시되는 유형은 □ 안에 알맞은 수 넣기, □ 안에 들어갈 알맞은 값을 계산하기(결과량 미지수), 모르는 수를 □로 두고 □의 값 구하기(처음량 미지수, 변화량 미지수)의 세 가지로 분류할 수 있는데 앞의 두 유형이 많은 부분을 차지하고 있다.

지하고 있다.

학년군별로 살펴보면, 1~2학년군에서는 주로 수와 연산 영역에서 미지수로서의 변수 개념을 다루고 있는데 예를 들어 '□ - 44 - □ - 46'과 같이 뛰어세기에서 □ 안에 알맞은 수를 넣는 활동, 한 자리 수 또는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 계산하여 알맞은 값을 구하는 활동을 제시하고 있다(교육부, 2016a, p.157). 또한 구체물을

[표 4] 교과서 및 익힘책에 제시된 미지수로서의 변수 개념의 예  
[Table 4] Examples of variables as the unknown presented in the mathematics textbooks and workbooks

학년군	교과서 및 익힘책에 제시된 예	
1~2	□ 안에 알맞은 수 넣기	<ul style="list-style-type: none"> <li>2156에서 백의 자리 숫자 □은 □을 나타낸다.</li> <li>뛰어세기 : □ - 44 - □ - 46, □씩 커진다.</li> <li>시간 또는 길이 : □시 □분, □m □cm</li> </ul>
	□ 안에 들어갈 알맞은 값 계산하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>한 자리 수의 덧셈과 뺄셈 : <math>7 + 5 = \square</math>, <math>6 - 3 = \square</math></li> <li>두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 : <math>72 + 25 = \square</math>, <math>56 - 30 = \square</math></li> </ul>
	모르는 수를 □로 두고 □의 값 구하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>한 자리 수의 덧셈과 뺄셈 : <math>5 + \square = 7</math>, <math>9 - \square = 5</math></li> <li>두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 : <math>19 + \square = 28</math>, <math>23 - \square = 14</math></li> </ul>
3~4	□ 안에 알맞은 수 넣기	<ul style="list-style-type: none"> <li>12345678에서 숫자 7은 □자리 숫자이고 □를 나타낸다.</li> <li>○포기씩 △줄 심으면 □포기 필요하다.</li> <li>각도 또는 길이 : 직각 □개, □°, □cm,</li> </ul>
	□ 안에 들어갈 알맞은 값을 계산하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>시간과 길이 계산 : <math>8\text{km } 500\text{m} + 7\text{km } 400\text{m} = \square\text{km } \square\text{m}</math></li> <li>자연수의 곱셈과 나눗셈 : <math>7 \times 18 = \square</math>, <math>162 \div 20 = \square \dots \square</math></li> <li>분수와 소수의 덧셈과 뺄셈 : <math>3\frac{4}{5} + 2\frac{2}{5} = \square\frac{\square}{5}</math>, <math>8.31 \pm 3.87 = \square</math></li> </ul>
	모르는 수를 □로 두고 □의 값 구하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>세 자리수의 덧셈과 뺄셈 : <math>\square + 268 = 902</math></li> <li>(한 자리 수) × (두 자리 수) : <math>\square \times 18 = 72</math></li> <li>분수와 소수의 덧셈과 뺄셈 : <math>\frac{\square}{\square} - \frac{7}{15} = \frac{13}{15}</math>, <math>\square + 3.87 = 8.314</math></li> <li>다각형 변의 길이 총합이 주어졌을 때 한 변의 길이 구하기 : <math>7 \times 2 + (\text{선분 } \square\text{의 길이}) \times 2 = 24</math></li> </ul>
5~6	□ 안에 알맞은 수 넣기	<ul style="list-style-type: none"> <li>합동과 대칭, 여러 가지 단위 : □쌍, □개, □배</li> </ul>
	□ 안에 들어갈 알맞은 값 계산하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>분수와 소수의 곱셈과 나눗셈 : <math>\frac{2}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{\square}{\square}</math>, <math>91.44 \div 4 = \square</math></li> <li>도형의 넓이, 부피 계산하기 : □cm<sup>2</sup>, □cm<sup>3</sup></li> </ul>
	모르는 수를 □로 두고 □의 값 구하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>분수와 소수의 곱셈과 나눗셈 : <math>\square \times 5 = 3\frac{1}{8}</math>, <math>\square \times 6 = 25.5</math></li> <li>비례식의 성질 이용하여 □ 구하기 : <math>4 : 5 = 16 : \square</math></li> <li>직사각형의 둘레가 20cm일 때 세로의 길이 구하기 : <math>(8 + \square) \times 2 = 20</math></li> </ul>

사용하여 '9 - □ = 6'나 '□ + 19 = 28'과 같이 모르는 수를 □로 둔 다음, □의 값을 구하는 활동이 다루어진 다(교육부, 2016a, p.97; 2016c, p.113).

3~4학년군에서는 수와 연산 영역에서 자연수의 곱셈과 나눗셈, 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈을 계산하여 알맞은 값을 구하는 활동을 제시하고 있으며, '□ × 18 = 72'와 같이 곱셈의 역연산인 나눗셈을 이용하여 □의 값을 구하는 활동(교육부, 2014b, p.29), 분수와 소수의 덧셈에서 □의 값을 구하는 활동이 다루어진 다(교육부, 2014e, p.82; 2014f, p.28). 한편 측정 영역에서는 다각형 변의 길이 총합이 주어졌을 때 한 변의 길이를 구하는 활동과 같이 모르는 수를 □로 둔 다음, □를 구하는 활동이 다루어지고 있다(교육부, 2014f, p.56).

5~6학년군에서는 수와 연산 영역에서 분수의 곱셈과 나눗셈의 값을 계산하는 활동을 다루고 있으며, 규칙성 영역에서 비례식의 성질을 이용하여 '4 : 5 = 16 : □'에서 □를 구하는 활동이 제시된다(교육부, 2015h, p.47). 측정 영역에서는 도형의 넓이와 부피를 계산하거나, 직사각형의 둘레가 20cm일 때 세로의 길이 구하기와 같이 모르는 수를 □로 둔 다음 □를 구하는 활동도 다루어지고 있다(교육부, 2015e, p.74).

미지수로서의 변수 개념이 학년에 따라 연계성 있게 지도되고 있는 예는 1학년 1학기 3단원 <덧셈과 뺄셈>과 2학년 1학기 3단원 <덧셈과 뺄셈>에서 살펴볼 수 있다. 이 두 단원에서는 모르는 어떤 수를 □로 표시하고 그 값을 구하는 활동을 두 학년에 걸쳐 제시하고 있는데 1학년에서는 덧셈, 뺄셈 상황에서 □가 있는 덧셈식과 뺄셈식을 만들어 보게 하고 구체물을 이용한 조작활동을 통해 학생들이 □의 의미를 이해하도록 지도하고 있으며(교육부, 2016a, pp.96-97), 2학년에서는 어떤 수를 □로 나타내어 덧셈식과 뺄셈식을 만든 다음 구체물, 수직선, 식 등을 이용하여 □의 값을 구해 보는 활동을 다루고 있다(교육부, 2016c, pp.112-119). 이를 통해 학생들이 덧셈과 뺄셈 상황에서의 변화량 미지수와 초기량 미지수에 관한 학습을 지속적으로 경험할 수 있다.

3) 세부 분석

미지수로서의 변수 개념이 수학의 어떤 영역에서 주로 제시되고 있는지를 분석한 결과는 [표 5]와 같다(변화량 미지수와 초기량 미지수에 한함). 수와 연산, 규칙

성, 측정의 세 영역에서 나타나고 있으며 도형이나 확률과 통계 영역에서는 제시되지 않고 있다. 특히 수와 연산 영역에서 28차시로 가장 많이 나타났으며, 4~6학년에서는 측정 영역에서 도형의 각의 크기나 선분의 길이 등을 구해 보는 문제를 제시하여 미지수를 사용한 식을 좀 더 다양하게 다루고 있다. 또한 규칙성 영역은 6학년에서만 나타나는데 1학기 4단원 <비와 비율>에서  $\square \times \frac{3}{4} = 30$ 과 같이 비율과 비교하는 양으로 기준량 구하기(교육부, 2015c, p.114), 2학기 2단원 <비례식과 비례배분>에서  $4 : 5 = 16 : \square$ 과 같이 비례식의 성질을 이용하여 □의 값 구하기 등의 활동을 통해 미지수로서의 변수 개념을 다루고 있다(교육부, 2015d, p.47).

[표 5] 미지수로서의 변수 개념이 제시된 영역 및 총 시수 [Table 5] Number of lessons by content areas dealing with variables as the unknown

구분	수와 연산	도형	규칙성	측정	확률과 통계	총 시수
1학년	3	-	-	-	-	3 (2)
2학년	4	-	-	-	-	4 (2)
3학년	8	-	-	-	-	8 (0)
4학년	7	-	-	5	-	12 (2)
5학년	4	-	-	5	-	9 (0)
6학년	2	-	4	5	-	11 (3)
총 시수	28 (4)*	-	4 (3)	15 (2)	-	47 (9)

\* 괄호 안은 총 시수 중 본 차시의 수를 나타냄

미지수로서의 변수 개념은 총 47차시 중 9차시만 본 차시에서 다루어지고 있으며 단원 평가나 익힘책에서 보충 또는 심화 활동으로 제시되는 경우가 대부분이었다. 예를 들어 □가 있는 덧셈과 뺄셈의 경우는 앞서 언급한 것과 같이 1, 2학년 두 학년에 걸쳐 본 차시에서 비중 있게 지도하고 있지만 곱셈과 나눗셈의 경우는 '□ × 18 = 72'와 같이 어떤 수를 □로 표시하고 그 값을 구하는 활동을 본 차시가 아닌 단원 평가나 익힘책에서 다루고

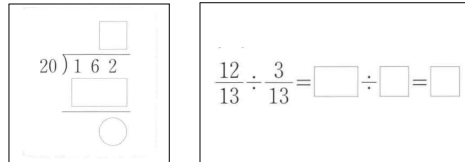


있어 미지수로서의 변수 개념 지도에 일관성이 부족함을 알 수 있다(교육부, 2014b, p.29). 어떤 수를 □로 두고 □의 값을 구하는 활동은 중학교에서 배우게 될 방정식의 기초가 되는 중요한 개념이라는 사실을 염두에 두었을 때, 현재 교과서에서 이를 본 차시에서 비중 있게 다루지 않고 단원평가나 익힘책에서 보충 또는 심화의 개념으로만 제시하고 있는 것은 재고의 여지가 있다.

한편, 미지수로서의 변수 개념을 좀 더 상세히 분석하기 위해 서로 다른 값을 나타내는 미지수를 구분하여 표현하고 있는가와, 미지수가 포함된 식의 구조를 다양하게 제시하고 있는지의 여부를 살펴보았다. 분석 결과 교과서 및 익힘책에서는 서로 다른 값을 나타내는 변수를 표현할 때 기호를 구분하지 않고 사용하는 경우가 많았다. 예를 들어, 2학년 2학기 2단원 <곱셈구구>에서는 '5 × □ = □'와 같은 문제를 제시하고 있으며(교육부, 2016g, p.38), 3학년에서 분수의 개념을 처음 학습할 때 '□/□'와 같이 서로 다른 값을 나타낼 수도 있는 분수의 분자와 분모에 같은 기호의 변수를 사용하고 있다(교육부, 2014a, p.201). 그러나 한 문맥 내에서 쓰이는 다른 기호의 변수는 같은 값을 가질 수는 있지만 같은 기호의 변수가 다른 값을 가질 수는 없기 때문에 서로 다른 값을 나타내는 변수를 제시할 때는 기호를 구분하여 사용할 필요가 있다(김남희, 1999).

이에 반해, [그림 1]과 같이 4학년 1학기 2단원 <곱셈

과 나눗셈>에서는 '162 ÷ 20 = □...○'로 제시하여 몫과 나머지를 □과 ○로 구분하여 사용하고 있으며(교육부, 2014c, p.49), 6학년 1학기 2단원 <분수의 나눗셈>에서는 자리수가 다른 미지수를 나타낼 때 □의 크기를 다르게 하여 구분하고 있다(교육부, 2015c, p.47). 이는 미지수로서의 변수 개념에 관한 발전 가능성을 엿볼 수 있는 부분이다.



[그림 1] 서로 다른 미지수에 서로 다른 기호를 사용한 예  
[Fig. 1] Examples using different symbols for different values

학년이 올라감에 따라 □가 있는 식을 다루는 연산과 수의 범위가 확장되고 있음을 알 수 있었다. 미지수로서의 변수 개념을 1~2학년에서는 주로 덧셈과 뺄셈에서만 다루지만 3학년부터는 곱셈과 나눗셈까지도 사용하며, 수의 범위도 범자연수부터 유리수까지 다양해지고 있다. 이와 같이 학년에 따라 다루는 연산이나 수의 범위는 다양해지고 있지만 □가 들어가 있는 식을 해결하는 방법에서는 학년에 따른 큰 차이가 없었다. 보통 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 이용하여 연산을 한 차례만 수행하면 해결할 수 있는 문제가 대부분이었으

[표 6] 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념이 제시된 단원 목록  
[Table 6] List of units including variables as a tool for generalization

구분	1학년	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년
1학기	3. 덧셈과 뺄셈	3. 덧셈과 뺄셈 4. 길이 재기	2. 평면도형	-	1. 약수와 배수 2. 직육면체 5. 다각형의 넓이	1. 각기둥과 각뿔 2. 분수의 나눗셈 4. 비와 비율 5. 원의 넓이 6. 직육면체의 겉넓이와 부피
2학기	3. 덧셈과 뺄셈(1)	-	2. 나눗셈 3. 원 5. 들이와 무게 6. 자료의 정리	1. 소수의 덧셈과 뺄셈 2. 수직과 평행 3. 다각형	2. 합동과 대칭 3. 분수의 나눗셈 6. 자료의 표현	3. 원기둥, 원뿔, 구

며, 5학년 1학기 5단원 <다각형의 넓이>에서 직사각형의 둘레가 20cm이고 가로 길이가 8cm일 때 세로의 길이를 구하기 위해 세로의 길이의 값을 □로 두고  $(8 + \square) \times 2 = 20$ 과 같은 식을 세우는 것과 같이 등식의 구조를 파악하여 문제를 해결할 수 있는 경우는 많지 않았다(교육부, 2015e, p.74).

2. 일반화를 위한 도구

1) 전체적인 경향

1학년에서 6학년까지의 수학 교과서 및 익힘책에 제시되어 있는 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념을 단원별로 정리해 보면 [표 6]과 같다. 미지수로서의 변수 개념에 비하면 제시되는 단원이 적은 편이지만 2학년 2학기, 4학년 1학기를 제외하고는 1학년부터 6학년까지 비교적 고르게 여러 단원에서 해당 변수 개념을 다루고 있다. 또한 1~2학년군에서는 4개, 3~4학년군에서는 8개, 5~6학년군에서는 12개의 단원에서 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념을 제시하고 있어, 학년이 올라감

에 따라 학생들이 특수한 사례에서 공통점을 찾고 이를 일반화하는 기회가 증가함을 알 수 있다.

2) 학년군별 특징

일반화를 위한 도구로서의 변수 개념에 관한 학년군별 예를 정리하면 [표 7]과 같다. 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념이 제시되는 유형은 수와 연산의 성질 및 연산간의 관계 일반화, 연산 방법의 일반화, 도형의 점, 선, 면 등과 같은 구성요소를 가리키는 방법의 일반화 등으로 분류할 수 있다.

학년군별로 살펴보면, 1~2학년군에서는 주로 수와 연산 영역에서 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념을 제시하고 있으며  $\heartsuit + 0 = \heartsuit, 0 + \heartsuit = \heartsuit$ 와 같이 덧셈에서의 0의 성질을 일반화하거나(교육부, 2016e, p.79),  $\blacksquare + \blacktriangle = \bullet, \bullet - \blacktriangle = \blacksquare, \bullet - \blacksquare = \blacktriangle$ 와 같이 덧셈과 뺄셈의 관계를 일반화하여 기호를 사용한 표현까지 다루고 있다(교육부, 2016g, pp.67-68; 2016f, pp.73-74).

3~4학년군에서는 3학년 1학기 2단원 <평면도형>, 3학년 2학기 3단원 <원>, 4학년 2학기 2단원 <수직과 평행>, 4학년 2학기 3단원 <다각형>과 같은 도형 영역에서 선분

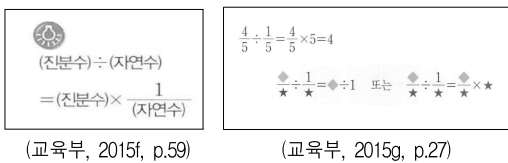
[표 7] 교과서 및 익힘책에 제시된 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념의 예  
[Table 7] Examples of variables as a tool for generalization presented in the mathematics textbooks and workbooks

학년군	교과서 및 익힘책에 제시된 예	
1~2	수의 성질 일반화	• 덧셈에서의 0의 성질 : $\heartsuit + 0 = \heartsuit, 0 + \heartsuit = \heartsuit$
	연산간의 관계 일반화	• 덧셈과 뺄셈의 관계 : $\blacksquare + \blacktriangle = \bullet, \bullet - \blacktriangle = \blacksquare, \bullet - \blacksquare = \blacktriangle$
	말하는 방법의 일반화	• 어림한 길이 말하는 방법 약속하기 : 약 □cm
3~4	연산 방법의 일반화	• 나눗셈의 검산 방법 : $\bullet \div \blacksquare = \blacktriangle \dots \heartsuit, \blacksquare \times \blacktriangle + \heartsuit = \bullet$
	비교하는 방법의 일반화	• 소수의 크기 비교 : $0.\heartsuit\star$ 와 $0.\triangle\circ\square$
	말하는 방법의 일반화	• 어림한 들이와 무게 말하는 방법 약속하기 : 약 □L, 약 □kg
	도형의 구성요소 나타내기	• 점 $\neg$ , 선분 $\neg$ , 각 $\neg$
5~6	연산 방법의 일반화	• 분수의 나눗셈 : $1 \div (\text{자연수}) = 1 \times \frac{1}{\text{자연수}}, \frac{\blacksquare}{\blacktriangle} \div \frac{\heartsuit}{\star} = \frac{\blacksquare}{\blacktriangle} \times \frac{\star}{\heartsuit}$
	도형의 넓이, 둘레, 부피 구하는 방법의 일반화	• 직사각형의 둘레 = {(가로) + (세로)} × 2, • 원의 넓이 = (반지름) × (반지름) × (원주율) • 직육면체의 겉넓이 = (합동인 세 면의 넓이의 합) × 2 • 원기둥의 부피 = (반지름) × (반지름) × (원주율) × (높이)
	평균 및 비율 등을 구하는 방법의 일반화	• 평균 = (자료 값의 합) ÷ (자료의 수) • 비율 = (비교하는 양) ÷ (기준량)
	도형의 구성요소 나타내기	• 면 $\neg$ , 모서리 $\neg$

그리고, 각 기호와 같은 기호의 사용이 제시되기 시작했는데 이는 1~2학년군에서는 동그라미, 세모, 네모로만 배웠던 도형을 원, 삼각형, 사각형으로 지칭하게 됨에 따라, 점, 선분, 각 등을 지칭하고 이들을 서로 비교할 수 있는 변수 개념이 필요하게 된 것이라 판단된다. 또한 규칙성 영역에서 처음으로 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념이 제시되고 있는데 3학년 2학기 6단원 <자료의 정리>에서 규칙을 찾아 이를 식으로 나타내는 활동을 지도하고 있다.

5~6학년군의 경우 이전 학년에 비해 학생들이 직접 특수한 사례에서 공통점을 찾고 이를 일반화하여 형식화하는 경우가 많았다. 예를 들어, 5학년 1학기 5단원 <다각형의 넓이>, 6학년 1학기 5단원 <원의 넓이>, 6학년 1학기 6단원 <직육면체의 겉넓이와 부피>, 6학년 2학기 3단원 <원기둥, 원뿔, 구>와 같은 측정 영역에서 도형의 둘레나 넓이, 부피 구하는 방법을 다루면서 학생들에게 먼저 특수한 몇 가지 사례를 통해 값을 구한 다음, 이를 일반화 하는 방법을 생각해 보도록 지도하고 있으며 6학년 1학기 4단원 <비와 비율>과 같은 규칙성 영역에서는 평균, 비율 구하는 방법을 일반화하여 제시하였다.

또한, 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념이 학년에 따라 연계성 있게 지도되고 있는 부분을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 5학년 2학기 3단원 <분수의 나눗셈>과 6학년 1학기 2단원 <분수의 나눗셈>에서는 분수의 나눗셈에 관한 연산 방법을 학습하고 이를 일반화하고 있는데 5학년과 달리 6학년에서는 [그림 2]와 같이 기호를 사용한 표현까지 제시하고 있다.



[그림 2] 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념의 예: 분수의 나눗셈

[Fig. 2] Example of variables as a tool for generalization: Fraction division

덧셈과 뺄셈의 관계를 학습하는 1학년 1학기 3단원 <덧셈과 뺄셈>에서는  $2 + 3 = 5$ ,  $5 - 3 = 2$ ,  $5 - 2 = 3$  과 같이 특수한 사례만 제시했지만 1학년 2학기 3단원

<덧셈과 뺄셈(1)>과 2학년 1학기 3단원 <덧셈과 뺄셈>에서는  $\blacksquare + \blacktriangle = \bullet$ ,  $\bullet - \blacktriangle = \blacksquare$ ,  $\bullet - \blacksquare = \blacktriangle$ 와 같이 기호를 사용한 표현까지 반복하여 제시하고 있다. 이 두 가지 사례는 학년이 올라감에 따라 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념에 관한 지속적인 경험을 제공하고 있을 뿐 아니라 그 수준도 높아지고 있다는 점에서 의미가 있다.

3) 세부 분석

일반화를 위한 도구로서의 변수 개념은 [표 8]과 같이 수와 연산, 측정, 규칙성, 확률과 통계 영역에서 제시되고 있다. 수와 연산 영역에서는 수와 연산의 성질을 일반화하기 위해서, 측정 영역에서는 도형의 둘레, 넓이, 부피 등을 구하는 방법에 대해 알아보고 이를 일반화하여 식으로 나타내는 데 해당 변수 개념을 사용하고 있다. 또한 (평균) = (자료 값의 합) ÷ (자료의 수), (비율) = (비교하는 양) ÷ (기준량)과 같이 확률과 통계, 규칙성 영역에서도 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념을 사용하고 있다(교육부, 2015c, p.107). 뿐만 아니라 총 53차시 중 본 차시에서 제시된 시수가 46차시로 비교적 본 차시에서 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념이 비중 있게 다루어지고 있다는 것을 알 수 있다.

[표 8] 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념이 제시된 영역 및 총 시수

[Table 8] Number of lessons by content areas dealing with variables as a tool for generalization

구분	수와 연산	도형*	규칙성	측정	확률과 통계	총 시수
1학년	5	-	-	-	-	5 (3)
2학년	2	-	-	2	-	4 (3)
3학년	3	-	-	2	3	8 (5)
4학년	2	-	-	-	-	2 (1)
5학년	6	-	-	6	1	13 (13)
6학년	5	-	6	10	-	21 (21)
총 시수	23 (17)	-	6 (6)	20 (20)	4 (3)	53 (46)

\* 선분, 가, 점 기호와 같이 사용된 경우는 제외함.

[표 9] 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념의 측면에서 살펴본 수와 연산의 성질, 연산 간의 관계  
 [Table 8] Properties of numbers and operations, relations among operations from the perspective on variables as a tool for generalization

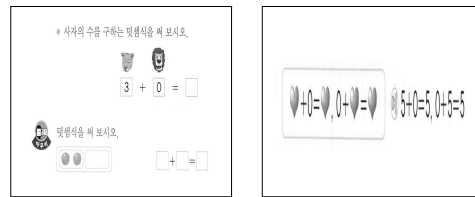
구분		일반화 관련 발문*	기호를 사용한 표현	관련 단위
수의 성질	덧셈에서의 0의 성질	△	○	1-1-3. 덧셈과 뺄셈
	곱셈에서의 0의 성질	○	×	2-2-2. 곱셈구구
	곱셈에서의 1의 성질	△	×	2-2-2. 곱셈구구
연산의 성질	덧셈의 교환법칙	△	×	1-1-3. 덧셈과 뺄셈
	덧셈의 결합법칙	△	×	1-2-3. 덧셈과 뺄셈(1)
	곱셈의 교환법칙	○	×	2-2-2. 곱셈구구
	곱셈의 결합법칙	-	-	-
	덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙	○	×	3-1-4. 곱셈 3-2-1. 곱셈
연산간의 관계	덧셈과 뺄셈	△	○	1-1-3. 덧셈과 뺄셈 1-2-3. 덧셈과 뺄셈(1) 2-1-3. 덧셈과 뺄셈
	곱셈과 나눗셈	○	×	3-1-3. 나눗셈
	덧셈과 곱셈	△	×	2-1-6. 곱셈
	뺄셈과 나눗셈	△	×	3-1-3. 나눗셈

\* 지도서에 관련 내용이 있지만 교과서에는 일반화 관련 발문이 없는 경우는 △로 표시함.

일반화를 위한 도구로서의 변수 개념의 경우, 교과서에서는 특수한 사례를 통해 학생들에게 일반화의 경험을 제공하고 익힘책에는 일반화한 식이나 기호화된 표현을 제시하는 방식으로 내용이 구성되어 있었다. 하지만 단원에 따라 일반화 관련 발문 및 기호를 사용한 표현의 제시 여부 측면에서 일관성과 연계성이 부족한 부분을 찾아볼 수 있었다. [표 9]는 이를 방정숙·최지영(2011, p.44)이 구분한 수와 연산의 성질, 연산 간의 관계 분석틀을 사용하여 정리한 것이다. 주목할 만한 것은 지도서에 관련 내용이 제시되어 있기는 하지만 교과서에 일반화를 위한 직접적인 발문이 없는 경우가 많았으며 기호를 사용한 표현은 덧셈에서의 0의 성질과 덧셈과 뺄셈간의 관계에서만 제시되고 있다는 것이다.

예를 들어, [그림 3]과 같이 덧셈에서의 0의 성질과 관련하여 해당 차시의 익힘책에는  $\heartsuit + 0 = \heartsuit$ ,  $0 + \heartsuit = \heartsuit$ 와 같이 기호를 사용한 표현을 제시하고 있지만(교육부, 2016e, p.79), 정작 교과서에 학생들에게 일반화를 할 수 있는 기회를 제공하는 직접적인 발문은 찾아볼 수 없었다(교육부, 2016a, p.92). 기호를 사용한 표현은 교과

서가 아닌 익힘책에만 제시되는 경우가 많았는데 익힘책은 가정에서 활용하는 자학자습용이기 때문에 학생들에게 기호를 사용한 일반화의 지도가 제대로 이루어지기 힘들다. 또한 이 성질은 수의 범위가 자연수에서 유리수로 확장될 때에도 적용되어야 하는데 1학년 1학기 3단원 <덧셈과 뺄셈>에서만 다루고 있어 학년에 따른 연계성이 부족하다고 판단된다(방정숙·최지영, 2011).



(교육부, 2016a, p.92)

(교육부, 2016e, p.79)

[그림 3] 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념의 예: 덧셈에서의 0의 성질

[Fig. 3] Example of variables as a tool for generalization: Property of 0 in addition

3. 변화하는 양 사이의 관계

1) 전체적인 경향

변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념을 단원별로 정리해 보면 [표 10]과 같다. 해당 변수 개념은 4~6학년의 일부 단원에서만 제시되고 있어 세 가지 변수 개념 중 교과서에서 차지하는 비중이 가장 적다는 것을 알 수 있다. 4학년에서는 2개, 5학년에서는 1개, 6학년에서는 4개의 단원에서 제시되고 있으며, 학년에 따라 학생들에게 변화하는 양 사이의 변수 개념을 경험할 수 있는 기회가 증가하는 경향을 파악할 수는 있지만 다른 변수 개념에 비해서는 부족한 편이다.

2) 학년별 특징

1~3학년에서는 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념은 제시되지 않고 있다. 규칙성 영역에서 규칙에 따라 빈 칸에 알맞은 모양이나 수를 채우는 활동이 제시되고는 있지만 하나의 변수로 이루어진 수 배열이 몇 씩 커지거나 줄어드는 활동에만 초점을 맞추고 있어 독립변수와 종속변수의 관계를 탐색하는 활동까지는 발전하지 못하고 있기 때문이다(방정숙·선우진, 2016).

[표 11]에서 알 수 있듯이 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념은 수와 연산 영역인 4학년 1학기 5단원 <혼합계산>에서 독립변수와 종속변수를 모두 고려

[표 10] 변화하는 양 사이의 관계로서의 변수 개념이 제시된 단원 목록

[Table 10] List of units including variables as the relationship between varying quantities

구분	1학년	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년
1학기	-	-	-	5. 혼합계산	-	1. 각기둥과 각뿔 4. 비와 비율 6. 직육면체의 겉넓이와 부피
2학기	-	-	-	6. 규칙과 대응	4. 소수의 나눗셈	5. 정비례와 반비례

[표 11] 교과서 및 익힘책에 제시된 변화하는 양 사이의 관계로서의 변수 개념의 예

[Table 11] Examples of variables as the relationship between varying quantities presented in the mathematics textbooks and workbooks

학년	교과서 및 익힘책에 제시된 예	
4	계산에서 규칙 찾기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 혼합 계산에서 규칙 찾기 : (뭇의 수) = 2 × (텐트의 수) + 2</li> </ul>
	두 수 사이의 대응관계 찾기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• □ × 20 = △, △ ÷ 20 = □</li> </ul>
5	계산에서 규칙 찾기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 소수의 나눗셈에서 규칙 찾기 : (소수) ÷ 5 = (소수), (소수) × <math>\frac{1}{5}</math> = (소수)</li> </ul>
6	도형에서 규칙 찾기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 각기둥의 꼭짓점, 면, 모서리의 수 사이의 규칙 찾기 : (각기둥의 꼭짓점의 수) = (한 밑면의 수) × 2</li> </ul>
	변화하는 두 수 비교하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (준이의 나이) = (동생의 나이) + 3,</li> <li>• (남학생의 수) ÷ (여학생의 수) = 2</li> </ul>
	두 수 사이의 대응관계 찾기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>y = x + 2</math>, <math>y = 2 \times x</math>, <math>x \times y = 2</math></li> </ul>

하는 활동을 제시하며 처음으로 나타나고 있다. 또한, 규칙성 영역인 4학년 2학기 6단원 <규칙과 대응>에서는 두 양 사이의 관계를 탐색하고 그 관계를 □, △를 사용하여 표현하는 활동이 단원 전체를 통해 이루어지고 있다. 5학년에서는 수와 연산 영역에서 계산 방법의 규칙을 찾아 (소수) ÷ (자연수)의 몫 구하기 활동을 통해 해당 변수 개념을 잠시 제시하고(교육부, 2015b, p.132), 6학년에서는 도형 영역에서 꼭짓점, 면, 모서리의 수 사이의 규칙을 찾는 활동(교육부, 2015c, p.29), 규칙성 영역에서 변화하는 값 비교하기 활동을 통해 두 양 사이의 관계를 나타내는 변수 경험의 기회를 제공한다(교육부, 2015c, p.101). 6학년 2학기 5단원 <정비례와 반비례>에서 두 수 사이의 관계를 탐색하고 규칙을 찾도록 한 다음, 그 관계를 표현하는 활동이 단원 전체를 통해 이루어지고 있는데 4학년 2학기 6단원 <규칙과 대응>과의 차이점은 □, △가 아닌 x, y를 사용하는 것과 반비례 관계까지 다루고 있다는 것이다.

이와 같이 공통된 개념을 학습하는 활동이 두 학년에 걸쳐 이루어지고 변수 사용의 수준도 높아지고 있다는 것은 학년에 따른 연계성 측면에서 매우 의미가 있다. 하지만 5학년에서는 해당 변수 개념이 2학기 4단원 <소수의 나눗셈>의 단원평가(공부를 잘했는지 알아봅시다)에서 잠깐 제시되고 있어 4학년과 6학년을 연결하는 역할에 부족하며, 6학년 1학기 1단원 <각기둥과 각뿔>, 4단원 <비와 비율>에서도 해당 변수 개념이 제시되고는 있지만 4학년에서 이미 두 수 사이의 관계를 기호 □, △를 사용하여 나타낼 수 있음을 배웠음에도 불구하고 규칙을 찾아 말로 나타내는 데 그치고 있어 변화하는 양 사이의 변수 개념에 관한 지속적인 경험을 제공하지 못하고 있다.

3) 세부 분석

해당 변수 개념이 수학의 어떤 영역에서 주로 제시되고 있는지, 그리고 본 차시에서 다루어지는지 아니면 추가 활동에서 다루어지는가에 초점을 두어 [표 12]와 같이 정리하였다. 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념은 수와 연산, 도형, 규칙성 영역에서 다루어지고 있는데 총 25차시 중 22차시가 규칙성 영역에 편중되어 있다. 이는 규칙성 영역이 대응과 비례 등 변화하는 양 사이의 관계를 다루는 영역이기 때문인 것으로 생각된다. 또한 다른 변수 개념과는 달리 4학년 2학기 6단원

<규칙과 대응>, 6학년 2학기 5단원 <정비례와 반비례>와 같이 단원 전체를 통해 해당 변수 개념을 제시하고 있다는 점이 특징이며 총 25차시 중 15차시를 본 차시에 서 비중 있게 다루고 있다.

[표 12] 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념이 제시된 영역 및 총 시수

[Table 12] Number of lessons by content areas dealing with variables as the relationship between varying quantities

구분	수와 연산	도형	규칙성	측정	확률과 통계	총 시수
4학년	1	-	6	-	-	7 (4)
5학년	1	-	-	-	-	1 (0)
6학년	-	1	16	-	-	17 (11)
총 시수	2 (1)	1 (0)	22 (14)	-	-	25 (15)

변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념을 다룰 때, 학년에 따라 독립변수와 종속변수의 규칙을 발견하기 위해 사용하는 방법을 [표 13]과 같이 분석하여 비교하여 보았다. 각 단원별로 변화하는 두 양 사이의 규칙을 찾기 위해 어떤 방법을 이용하는지, 독립변수와 종속변수의 값을 어느 정도까지 제시하고 있는지를 중심으로 살펴보았다. 이를 자세히 살펴보면, 같은 4학년 내에서도 1학기에는 독립변수의 값만 일부 제시하고 종속변수의 값은 제시하지 않은 반면, 2학기에서는 독립변수의 값을 전부 제시하고 종속변수의 값도 일부 제시하는 등 일관성이 부족하였다. 다만 5학년에서 다른 학년과 다르게 함수 기계 모형을 사용하고 있는 점과 6학년 2학기 <정비례와 반비례> 단원에서 ...과 같은 표현을 사용하여 독립변수와 종속변수의 값이 표에 제시되지 않은 다른 항에도 적용될 수 있음을 나타내고 있다는 점이 주목할 만하다(방정숙·선우진, 2016).

변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념에서 다루고 있는 함수 유형은 [표 14]와 같이  $y = x + b$ ,  $x + y = b$ ,  $y = ax$ ,  $x \times y = a$ ,  $y = ax + b$ 의 다섯 가지

[표 13] 독립변수와 종속변수의 규칙을 찾는 방법

[Table 13] Methods of finding out the function rule between independent and dependent variable

단원	두 변수 사이의 규칙을 찾는 방법	비고																																			
4-1-5. 혼합계산	<table border="1"> <tr> <td>텐트의 수</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>고정 몫의 수</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	텐트의 수	1	2	3				고정 몫의 수							<ul style="list-style-type: none"> <li>표 사용</li> <li>일부 독립변수의 값을 순차적으로 제시</li> <li>종속변수의 값을 제시하지 않음</li> </ul>																					
텐트의 수	1	2	3																																		
고정 몫의 수																																					
4-2-6. 규칙과 대응	<table border="1"> <tr> <td>시간(초)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>그림의 수</td> <td>20</td> <td>40</td> <td>60</td> <td>80</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	시간(초)	1	2	3	4	5	6	7	그림의 수	20	40	60	80				<ul style="list-style-type: none"> <li>표 사용</li> <li>전체 독립변수의 값을 순차적으로 제시</li> <li>일부 종속변수의 값 제시</li> </ul>																			
시간(초)	1	2	3	4	5	6	7																														
그림의 수	20	40	60	80																																	
5-2-4. 소수의 나눗셈		<ul style="list-style-type: none"> <li>함수 기계 모형 사용</li> <li>일부 독립변수와 종속변수의 값을 비순차적으로 제시</li> </ul>																																			
6-1-1. 각기둥과 각뿔	<table border="1"> <tr> <th>도형</th> <th>일면의 모양</th> <th>꼭짓점의 수</th> <th>면의 수</th> <th>모서리의 수</th> </tr> <tr> <td>가</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>나</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>다</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>라</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>마</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>바</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	도형	일면의 모양	꼭짓점의 수	면의 수	모서리의 수	가					나					다					라					마					바					<ul style="list-style-type: none"> <li>표 사용</li> <li>독립변수와 종속변수의 값을 모두 제시하지 않음</li> </ul>
도형	일면의 모양	꼭짓점의 수	면의 수	모서리의 수																																	
가																																					
나																																					
다																																					
라																																					
마																																					
바																																					
6-1-4. 비와 비율	<table border="1"> <tr> <th>나이</th> <th>올해</th> <th>1년 후</th> <th>2년 후</th> <th>3년 후</th> <th>4년 후</th> </tr> <tr> <td>준이</td> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>동생</td> <td>10</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	나이	올해	1년 후	2년 후	3년 후	4년 후	준이	13					동생	10					<ul style="list-style-type: none"> <li>표 사용</li> <li>독립변수와 종속변수의 값 일부 제시</li> </ul>																	
나이	올해	1년 후	2년 후	3년 후	4년 후																																
준이	13																																				
동생	10																																				
6-2-5. 정비례와 반비례	<table border="1"> <tr> <td>김치 통조림의 수 <math>x</math></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>.....</td> </tr> <tr> <td>무게 <math>y(g)</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>.....</td> </tr> </table>	김치 통조림의 수 $x$	1	2	3	4	5	.....	무게 $y(g)$						.....	<ul style="list-style-type: none"> <li>표 사용</li> <li>독립변수의 값만 순차적으로 제시</li> <li>종속변수의 값 제시하지 않음</li> <li>... 사용</li> </ul>																					
김치 통조림의 수 $x$	1	2	3	4	5	.....																															
무게 $y(g)$						.....																															

로 정리할 수 있다. 이 중  $y = ax$  유형은 4~6학년에서 모두 제시되며 전체 함수 유형 중 54.5%를 차지한다. 다음으로는  $x \times y = a$ ,  $y = x + b$ ,  $x + y = b$ ,  $y = ax + b$  순이며 각 함수 유형이 전체에서 차지하는 비율을 봤을 때 유형별로 균형 있게 골고루 제시되고 있지 않음을 알 수 있다. 또한 4학년에서는  $y = x + b$ ,  $y = ax$ ,  $y = ax + b$ 의 세 가지 함수 유형을, 5학년에서는  $y = ax$ 만을, 6학년에서는  $y = x + b$ ,  $x + y = b$ ,  $y = ax$ ,  $x \times y = a$ 의 4가지 함수 유형을 다루고 있는데 6학년이 전체의 76.4%의 비중을 차지하고 있어 각 함수 유형이 학년에 따라 연계성 있게 제시되고 있지 않다는 것을 알 수 있다. 다만, 학생들의 함수적 사고를 조사한 연구에서 덧셈 관계, 정비례, 반비례 순으로 학생들의 정답률이 높게 드러났다는 것을 염두에 두었을 때(김정원, 2014; 최지영·방정숙, 2012), 이러한 결과는 학년 수준

을 고려하여 함수 관계가 제시되었다고 생각할 수 있다.

[표 14] 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념에서 다루고 있는 함수 유형

[Table 14] Types of functions in dealing with variables as the relationship between varying quantities

구분	$y = x + b$	$x + y = b$	$y = ax$	$x \times y = a$	$y = ax + b$	총계 (%)
4학년	5	-	6	-	1	12 (21.8)
5학년	-	-	1	-	-	1 (1.8)
6학년	3	3	23	13	-	42 (76.4)
총계 (%)	8 (14.5)	3 (5.5)	30 (54.5)	13 (23.6)	1 (1.8)	55 (100)

## V. 결론 및 제언

본 연구에서는 미지수, 일반화를 위한 도구, 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념에 초점을 두고 2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서 및 익힘책을 분석하였다. 특히 변수 개념을 세 가지로 구분하고 각각을 학년별, 영역별로 상세히 다룸으로써 교과서에서 변수가 어떻게 다루어지고 있으며 분포되어 있는지를 이해할 수 있는 자료를 제공한다. 이와 같은 연구 결과를 바탕으로 다음과 같이 결론 및 제언을 제시한다.

첫째, 학년에 따른 수준의 변화와 연계성 있는 지도를 통해 각 변수 개념이 나타내는 대상이나 주어진 맥락에서 변수의 의미에 관해 생각해 볼 수 있는 경험을 제공할 필요가 있다. 변수를 기호로 표현하고 이를 조작하는 활동도 중요하지만 각 변수 기호들이 갖는 의미와 역할을 이해하는데 보다 중점을 두어야 한다(김남희, 1997; Blanton et al., 2011). 이를 통해 학생들은 변수의 본질과 그 의미를 충분히 경험할 수 있으며 변수 개념에 따라 하나의 고정된 값이 식을 만족하는 경우도 있고, 임의의 수를 대표할 수도 있으며, 두 양의 값이 서로 관련지어 변하는 경우도 있다는 것을 자연스럽게 이해할 수 있다. 초등학교에서의 변수 개념은 중학교에서 본격적으로 학습하게 될 변수 개념의 기초가 된다. 미지수로서의 변수 개념은 방정식을 배우는데 기반이 되고, 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념은 중학교에서 연산의 성질 등을 일반화 하면서 변수 기호로 바로 도입이 되며, 변화하는 양으로서의 변수 개념은 중학교에서 배우게 되는 함수 학습과 관련이 깊다. 따라서 각 변수 개념은 학생들의 발달 수준에 맞게 학년에 따라 수준이 높아지면서 그 의미와 역할을 고려할 수 있도록 지속적으로 다루어져야 한다. 이는 보다 높은 수준의 수학 학습을 위한 토대가 될 것이며 학생들은 이러한 체계적인 변수 학습을 통해 변수 개념에 관한 의미 있는 경험을 할 수 있다.

둘째, 각 변수 개념을 수학 교과서에서 제시하고 있는 다섯 가지 영역에서 균형 있게 다룸으로써 다양한 문제 상황을 제공할 필요가 있다. Usiskin(1988)은 이러한 변수 지도를 통해 학생들이 변수가 '수'만을 대신하고 있다는 오개념을 바로잡을 수 있음을 밝히고 있다. 이와 관련하여 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념을 수와

관련한 연산의 성질을 일반화하고, 일반화된 성질을 이용하여 문제를 해결하는 경우와 같이 수를 대상으로만 하는 문제 상황에 한정하지 않고 도형, 규칙성, 측정, 확률과 통계 영역에서 여러 사례와 함께 다루고 있는 것은 주목할 만한 일이다. 학생들은 다양한 문제 상황에서 일반화와 특수화의 경험을 통해 일반화를 위한 도구로 사용되는 변수의 역할과 의미를 더 완전하게 이해할 수 있다(김남희, 1997). 또한 변수 개념은 특정 내용 영역에만 관련된 내용이 아니며, 중학교 이후 수학 학습에서 변수 사용은 매 차시마다 빈번하게 이루어지므로 초기 대수를 학습하는 단계로서 초등학교 교과서에서는 변수 개념을 내용 영역에 관계없이 지속적으로 다루려는 노력이 필요하다(하수현·이광호, 2011).

셋째, 미지수로서의 변수 개념을 사용할 때 기호를 맥락과의 연결 없이 모두 □로 통일하고 있어 기호 사용에 대한 교수학적 주의가 필요하다. 아직 변수에 대한 개념이 제대로 성립되지 않은 초등학교시기에, 예를 들어  $5 \times \square = \square$ 와 같은 변수의 사용은 학생들에게 변수에 관한 잘못된 개념을 심어줄 수도 있으며, 본격적으로 변수를 사용하게 되는 중학교에 가서  $5 \times x = x$ 와 같은 오류를 범하게 할 수도 있다. 따라서 □, △, ○와 같이 다양한 기호를 사용하여 구분하거나, 자릿수의 크기에 따라 □의 크기에 변화를 두는 등의 의식적인 노력이 요구된다. 이를 통해 같은 값을 가지는 변수를 다른 기호로 표현할 수는 있지만, 같은 기호를 사용한 변수는 동일한 식에서 항상 같은 값을 가진다는 변수의 성질을 초등 수준에서부터 자연스럽게 경험할 수 있도록 해야 한다(김남희, 1997).

넷째, 일반화를 위한 도구로서의 변수 개념을 지도할 때 일반화에 관한 발문과 함께 기호를 사용한 표현을 일관성 있게 제시할 필요가 있다. 앞서 살펴본 바와 같이 수학의 다양한 영역에서 일반화를 시도하고 있음에도 불구하고 교과서에는 일반화에 관한 발문이 제시되지 않는 경우가 많았다. 관련 내용이 지도서나 익힘책에 언급되어 있는 경우도 있지만 교과서에 제시되어 있지 않다면 교사가 이 부분을 간과할 가능성이 높으며, 익힘책은 가정에서 활용하는 자학자습용이기 때문에 학생들에게 일반화에 관한 지도가 제대로 이루어지기 힘들다. 또한 최근의 연구는 초등학생들도 '임의의'라는 일반적인 개념



을 이해하는 데 무리가 없으며 변수 기호를 사용한 일반화도 가능하다는 사례들을 제시하고 있다(최지영, 2011; Blanton et al., 2015). 이에 따라 1학년부터 교과서에 ‘활동을 통해 알게 된 것은 무엇입니까?’, ‘덧셈과 뺄셈의 관계를 이야기해 보시오.’와 같이 일반화에 관한 발문을 제시하여 규칙을 발견하고 이를 말로 표현해 보는 활동을 제공할 필요가 있다. 이와 함께 기호를 사용한 일반화까지 도출해 보고 이러한 기호가 왜 사용되었는지 생각하면서 실제로 수를 넣어보는 경험을 통해 기호가 임의의 수를 대신하고 있음을 깨닫게 한다면 중학교에 가서  $a + b = b + a$ 와 같은 문자를 사용한 일반화된 표현이 본격적으로 도입될 때 그 의미를 파악하고 활용하는데 도움이 될 것이다(김남희, 1999).

다섯째, 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념을 지도할 때는 되도록 독립변수와 종속변수의 값을 모두 고려해 볼 수 있는 기회를 제공해야 한다. 현행 초등학교 교과서에서는 변화하는 양 사이를 나타내는 변수 개념은 4학년 때부터 제시되고 있는데 이는 3학년 때까지는 두 변수를 고려하지 않고 종속변수의 변화에만 초점을 맞추기 때문이다. 또한 4~6학년의 경우에도 독립변수의 값을 미리 제시하고 학생들에게 종속변수의 값만 기록하도록 하는 경우가 많아 학생들이 변화하는 두 양의 관계를 경험하기가 쉽지 않다. 하지만 초기 대수적 관점에서 진행된 많은 연구는 1~3학년 학생들도 두 양 사이의 관계를 인지할 수 있으며 이를 표현하기 위해 변수를 사용할 수 있음을 밝히고 있다(Brizuela et al., 2015; Carraher & Schliemann, 2007). 이에 따라 1~3학년 학생들에게도 변화하는 두 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념을 경험할 수 있는 기회를 제공해야 함은 물론, 4~6학년 학생들에게는 독립변수와 종속변수의 값을 모두 고려할 수 있도록 내용을 재구성할 필요가 있다. 또한 2009 개정 수학과 교육과정에서는 함수 유형을  $y = x + b$ ,  $y = ax$ 에 한해 다루도록 하고 있는데(교육과학기술부, 2011a), 4학년에서  $y = ax + b$ 의 함수 유형이 제시된 것은 문제 상황과 제시되는 방식에 따라 초등학교에서도 이와 같은 함수 유형의 학습이 가능하며 초등학교 교과서에서도 함수 유형을 좀 더 다양하고 골고루 다룰 필요가 있음을 말해준다(방정숙·선우진, 2016).

이상의 내용을 종합해 볼 때, 초등학교 수학 교과서

및 익힘책에는 변수가 명시적으로 드러나 있지는 않지만 학생들의 변수 개념 형성에 상당한 영향을 줄 수 있는 내용 요소들이 곳곳에 녹아 있음을 알 수 있다. 이는 중학교부터 변수 개념이 본격적으로 도입되기는 하지만, 초등학교에서도 변수 개념에 대한 이해를 신장시킬 수 있는 가능성이 열려있다는 것을 시사하며, 동시에 학생들의 변수 개념 이해를 위한 교사의 인식 및 노력이 추가적으로 필요함을 의미한다. 이에 본 연구가 부족하나마 초등학생들의 변수 개념 지도와 관련한 문제점을 파악하고 올바른 변수 개념의 지도를 위한 방안을 고안하는데 도움이 될 수 있기를 기대한다.

## 참 고 문 헌

- 강소희, 방정숙 (2008). 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해에 대한 실태 조사, 학교수학, 10(2), 139-154.
- Kang, S.H. & Pang, J.S. (2008). A survey on the comprehension of letters of sixth grade elementary school students, *School Mathematics* 10(2), 139-154.
- 교육과학기술부 (2011a). 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8].
- Ministry of Education and Science Technology (2011a). *Mathematics curriculum*, Ministry of Education and Science Technology #2011 361 [Separate volume 8].
- 교육과학기술부 (2011b). 수학 6-2, 서울: 두산동아.
- Ministry of Education and Science Technology (2011b). *Elementary mathematics 6-2*, Seoul: Doosan Dong-A.
- 교육부 (2014a). 수학 3-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2014a). *Elementary mathematics 3-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2014b). 수학 3-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2014b). *Elementary mathematics 3-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2014c). 수학 4-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2014c). *Elementary mathematics 4-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2014d). 수학 4-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2014d). *Elementary mathematics 4-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2014e). 수학 익힘책 4-1, 서울: 천재교육.

- Ministry of Education (2014e). *Elementary mathematics workbook 4-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2014f). 수학 익힘책 4-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2014f). *Elementary mathematics workbook 4-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015a). 수학 5-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015a). *Elementary mathematics 5-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015b). 수학 5-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015b). *Elementary mathematics 5-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015c). 수학 6-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015c). *Elementary mathematics 6-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015d). 수학 6-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015d). *Elementary mathematics 6-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015e). 수학 익힘책 5-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015e). *Elementary mathematics workbook 5-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015f). 수학 익힘책 5-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015f). *Elementary mathematics workbook 5-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015g). 수학 익힘책 6-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015g). *Elementary mathematics workbook 6-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2015h). 수학 익힘책 6-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2015h). *Elementary mathematics workbook 6-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2016a). 수학 1-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education. (2016a). *Elementary mathematics 1-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2016b). 수학 1-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2016b). *Elementary mathematics 1-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2016c). 수학 2-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2016c). *Elementary mathematics 2-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2016d). 수학 2-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2016d). *Elementary mathematics 2-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2016e). 수학 익힘책 1-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2016e). *Elementary mathematics workbook 1-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2016f). 수학 익힘책 2-1, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2016f). *Elementary mathematics workbook 2-1*, Seoul: Chunjae Education.
- 교육부 (2016g). 수학 익힘책 2-2, 서울: 천재교육.
- Ministry of Education (2016g). *Elementary mathematics workbook 2-2*, Seoul: Chunjae Education.
- 김남희 (1992). 변수개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 석사학위논문, 서울대학교.
- Kim, N.H. (1992). *The study of the notion of variable and the understanding of algebraic expressions*. Master's thesis, Seoul National University
- 김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습 지도 방향 탐색. 박사학위논문, 서울대학교.
- Kim, N.H. (1997). *Didactical analysis of variable concept and search for direction of its learning-teaching*. Doctor's thesis, Seoul National University.
- 김남희 (1999). 학교 수학의 변수 개념 학습과 관련된 몇 가지 지도 문제에 대하여, 학교수학 1(1), 19-37.
- Kim, N.H. (1999). On some teaching problems related to the learning of variable concept in school mathematics, *School Mathematics 1(1)*, 19-37.
- 김성애, 김성준 (2013). 초등수학 교과서에 제시된 문자와 식 내용 분석: 6차와 2007 개정 교육과정을 중심으로, 한국초등수학교육학회지 17(1), 105-128.
- Kim, S.H. & Kim, S.J. (2013). Analysis on letter and expressions in the elementary mathematics textbooks, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 17(1)*, 105-128.
- 김정원 (2014). 초등학교 학생들의 함수적 사고의 특징 및 지도 방향 탐색. 박사학위논문, 한국교원대학교.
- Kim, J.W. (2014). *An investigation of the characteristics and instructional implications of functional thinking for elementary school students*. Doctor's thesis, Korea National University of Education.
- 방정숙, 선우진 (2016). 초등학교 수학 교과서에 제시된 패턴 지도방안에 대한 분석, 초등수학교육 19(1), 1-18.
- Pang, J.S. & Sunwoo, J. (2016). An analysis on teaching methods of patterns in elementary mathematics textbooks, *Education of Primary School Mathematics 19(1)*, 1-18.

- 방정숙, 최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석, *수학교육* 50(1), 41-59.
- Pang, J.S. & Choi, J.Y. (2011). An analysis of the whole numbers and their operations in mathematics textbooks: focused on algebra as generalized arithmetic, *The Mathematical Education* 50(1), 41-59.
- 송옥빈 (2003). 중학교 3학년 학생들의 변수 개념 이해 및 인지적 장애에 대한 연구. 석사학위논문, 한국교원대학교.
- Song, W.B. (2003). *A study on understanding concerning the concept of variable and cognitive obstacles in middle school third year students*. Master's thesis, Korea National University of Education.
- 임만석 (2007). 중학교 2, 3학년 학생들의 변수 개념에 대한 이해 실태 분석. 석사학위논문, 한국교원대학교.
- Yim, M.S. (2007). *A study on the actual state of middle school 2nd and 3rd grader understanding of concept of variables*. Master's thesis, Korea National University of Education.
- 최지영 (2011). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 향상을 위한 교수 학습방향 탐색. 박사학위논문, 한국교원대학교.
- Choi, J.Y. (2011). *Research on the teaching and learning to foster algebraic reasoning ability for elementary school students*. Doctor's thesis, Korea National University of Education.
- 최지영, 방정숙 (2012). 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사, *학교수학* 14(3), 275-296.
- Choi, J.Y. & Pang, J.S. (2012). An Analysis of Elementary School Students' Understanding of Functional Relationships, *School Mathematics* 14(3), 275-296.
- 하수현, 이광호 (2011). 초등학교 6학년 학생들의 변수 개념 이해에 관한 사례 연구, *수학교육* 50(2), 213-231.
- Ha, S.H. & Lee, G.H. (2011). Case study on the 6th graders' understanding of concepts of variable, *The Mathematical Education* 50(2), 41-59.
- Baroody, A.J., & Coslick, R.T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B.J. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In B.J. Dougherty & R.M. Zbiek (Eds.), *Essential understandings series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Blanton, M., Stephens, A., Kunth, E., Gardner, A., & Isler, I. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention on the third grade, *Journal for Research in Mathematics Education* 46(1), 39-87.
- Brizuela, B.M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A.M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas, *Mathematical Thinking and Learning* 17, 34-63.
- Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S.F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*, New York: Springer. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: The Author.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12: 1988 Yearbook* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable, *Journal for Research in Mathematics Education* 12(1), 107-118.

## An Analysis of Variable Concept in the Elementary Mathematics Textbooks and Workbooks

**JeongSuk Pang<sup>†</sup>**

Department of Elementary Education, Korea National University of Education

E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

**Sunmi Cho**

Graduate School of Korea National University of Education

E-mail : [halifax01@naver.com](mailto:halifax01@naver.com)

**JeongWon Kim**

Sintanjin Elementary School

E-mail : nymph019@hanmail.net

The concept of variable is a big idea to develop algebraic thinking. Variable has multiple meanings such as the unknown, a tool for generalization, and the relationship between varying quantities. In this study we analyzed in what ways the meanings of variable were presented in the current elementary mathematics textbooks and workbooks. The results showed that the most frequent meaning of variable was 'the unknown', 'a tool for generalization', and 'the relationship between varying quantities' in order. A close look at the results revealed that the same symbol was often used in representing different values of variable as the unknown. In taking variable as a tool for generalization, questions to provoke generalization were sometimes included not in the textbooks but in the teachers' manuals. The main focus in dealing with variable as the relationship between varying quantities was on finding out the dependent values compared to the independent ones. Building on these results, this study is expected to suggest implications for how to deal with variable concept in elementary mathematics instructional materials.

---

\* ZDM Classification : U22

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U22

\* Key words : variable, unknown, generalization, relationship,  
analyzing textbooks and workbooks

† Corresponding author