韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2017.56.1.63
2017. 02. 제 56권, 제 1호, 63-80.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2017, Vol. 56, No. 1, 63-80.

고등학교 기하와 벡터 과목에서 풀이과정 서술의 오류 분석

황 재 우 (대전가오고등학교)
부 덕 훈 (충남대학교)†

Ⅰ. 서론

2009 개정 교육과정에 따르면 수학과의 목표는 수학의 개념 원리 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르며 수학적 문제 상황을 수리 논리적 사고를 통하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과로 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011). 이 중 '기하와 벡터'는 일반적인 고등학생이 배우는 수학 과목 중 가장 어렵다고 여겨지는 과목으로, '미적분Ⅰ'과 '미적분Ⅱ'의 내용을 이해한 학생이 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목이다(교육과학기술부, 2011).

앞으로 도입되는 2015 개정 수학과 교육과정에서 기하와 벡터 과목은 '기하'로 과목 명칭이 변경되며, 공통과목인 '수학'을 학습한 후, 기하적 관점에서 심화된 수학 지식을 이해하고 기능을 습득하기를 원하는 학생들이 선택할 수 있는 진로 선택 과목으로 지정되어 이차곡선, 평면벡터, 공간도형과 공간좌표의 3개 핵심 개념 영역으로 구성된다(교육부, 2015). 교육부(2015)는 이 과목의 목표를 '사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 이차곡선, 평면벡터, 공간도형과 공간좌표에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다', '수학적으로 추론하고 의사소통하며 창의·융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다', '수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 역할과 가치를 이해하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실전 능력을 기른다'로 제시하고 있다. 즉, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학적 추론, 의사소통, 창의·융합형 사고의 중요성을 더욱 강조하고 있다.

서술형 문항은 수학적 추론과 의사소통 능력을 기르고 평가하기에 적절하다. 기존의 정답만을 요구하는 평가와 달리, 서술형 평가는 학생들의 인지적, 과정적 지식을 모두 요구하는, 즉 수와 양에 대한 추론, 공간적 추론, 논리적 추론, 기호적 추론, 도식적 추론, 인과관계에 대한 추론 등 다양한 수학적 사고를 하는 것을 의미하는 '수학을 하는 것(doing mathematics)'을 수행하도록 하여 학생들의 사고능력, 수행능력을 향상시키는 것을 목적으로 한다(김래영·김구연·노선숙·김민경·전지훈·김기영·이민희, 2012). 서술형 평가를 통해 학생들의 사고력과 문제해결력을 평가하고 교사는 평가 결과를 이용하여 학생들이 어떤 어려움을 겪고 있는지 또한 어떤 오류를 범하고 있는지 파악할 수 있으며 이를 교수학습 과정에 반영해야 한다(한경민·고상숙, 2014). 하지만 학생들은 수학문제를 풀 때 많은 오류를 범하고 있으며 이러한 오류의 많은 부분은 어떤 규칙성이 있는 것으로 밝혀졌다. 이러한 오류의 규칙성을 분석하여 오류를 정확히 파악하고 학생이 어려움을 느끼는 단계를 알아낼 수 있다면 자연스럽게 적절한 재교육이나 처방지도가 이루어질 수 있다(노영아·안병곤, 2007).

Schoenfeld(1985)에 의하면 수학을 배우는 학생들에게서 다양한 범위에서의 일관된 오류 양상이 존재하고 있음이 지적되고 있다. 이러한 경우, 교사에게 필요한 지도활동은 올바른 내용의 반복적인 지도가 아니라 그 학생이 보이고 있는 오류를 추출해서 이를 근본적으로 제거시키는 방식의 지도이어야 한다(임지현·최창우, 2016).

---

* 접수일(2016년 10월 25일), 수정일(1차: 2016년 12월 05일, 2차: 2017년 1월 16일), 게재확정일(2017년 2월 11일)
* ZDM분류 : E5
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 기하와 벡터, 풀이과정, 서술형 문제, 오류 유형
* 이 논문은 충남대학교 학술연구비의 지원을 받았음
† 교신저자

학생들의 수학문제 해결과정에서 나타나는 오류를 분석하는 것의 중요성에 대하여 문혜영・김응환(2011)은 다음과 같이 설명한다. 첫째, 학생들의 수학적 지식에 대한 이해 정도 및 인지 상태를 아는데 유용한 정보를 제공한다. 둘째, 문제해결과정에서 학생들에게 발생할 오류를 미리 파악하여 오류를 사전에 예방할 수 있다. 셋째, 학습실패의 원인을 찾아 피드백함으로써 개념을 재정립하고 같은 오류가 반복되지 않도록 하여 학습효과를 높인다. 넷째, 교수에 도움이 되는 효과적인 정보를 제공한다. 다섯째, 오류의 유형 및 빈도수는 교육과정 계획과 평가문항 개발 및 난이도 조절에 도움이 되는 정보를 제공한다. 그리고 한경민・고상숙(2014)은 오류 유형의 분석 연구를 통하여 학생들이 보이는 오류의 유형, 빈도, 나아가 그 원인을 교사가 파악하여 차후 수업에 반영한다면 학생들의 오류를 방지하고, 학생들의 반성적 사고를 촉진시킬 수 있기 때문에 유효한 과정이라고 하였다.

서술형 풀이의 오류 분석에 대한 본 연구의 결과가 고등학교 기하와 벡터과목의 교육계획을 수립하고 서술형 평가 도구의 개발과 활용에 기여하여 학생들의 서술형 답안 작성 능력 향상을 가져올 것으로 기대한다.

II. 이론적 배경

수학과의 서술형 문제해결 과정에서 다양한 이유로 다양한 형태의 오류가 학생들의 답안에 나타나고 있다. 이러한 오류의 유형을 분류하여 오류의 발생을 줄이려는 노력은 계속 되어왔으며 이와 관련된 다양한 형식의 연구가 진행되고 있다.

인지심리학의 관점에서의 오류발생 분석, 교수활동의 전문성을 부여하기 위하여 만들어진 개념인 PCK를 바탕으로 하는 분석틀 개발, 오류 답안의 형태를 분류하여 오류발생 원인을 진단하는 연구결과를 찾아볼 수 있다.

김부미(2004)는 수학적 오류는 수학적 오개념으로 인한 잘못된 수행뿐만 아니라 학생들이 자신의 인지구조 속에 옳은 개념을 갖고 있으나 문제해결과정에서 이를 잘못 인출하여 옳지 않은 수행을 보이는 것이라 주장하고, 중학교 2학년 학생들이 증명문제를 해결해가는 과정에서 나타나는 오류를 학생들의 인지구조와 관련하여 Pauscal-Leone의 신피아제 이론을 바탕으로 인지심리학의 관점에서 분석하였다. 오류의 분석과정에서 Schoenfeld의 구조분석단계모형과 퍼지인지 맵을 활용하여 학습과정에서 나타나는 다양하고 복잡한 지식 상태를 인과성에 중점을 두고 행렬이나 네트워크로 나타내었으며, 여러 개의 행렬을 결합하여 표현함으로서 오류를 분석하고 오도 요인을 진단하였다. 또한 이용하・박지현(2011)는 교사의 교수활동의 전문성을 부여하기 위하여 만들어진 개념인 PCK (Pedagogical Content Knowledge)를 바탕으로 중학교 함수영역의 학습에서 나타내는 오개념과 오류를 분석하여 두 가지 범주로 분석틀을 작성하였다. 범주 C(Content)는 학생들이 학습내용을 받아들일 때 잘못 이해하여 생기는 선언적 지식 측면의 오개념으로, '함수의 정의에 대한 오개념(C-1)', '함수의 그래프에 대한 오개념(C-2)', '함수의 대수적 표현에 대한 오개념(C-3)'으로 분류하였다. 범주 P(Process)는 학생들이 인지구조에 정착된 지식을 인출하는 과정에서 발생하는, 절차적 지식 측면에서의 오류를 의미하며 '정의와 정리의 부적절한 사용에서 오는 오류(P-1)', '번역 능력의 부족에서 오는 오류(P-2)', '기초 연산 능력의 부족에서 오는 오류(P-3)'로 분류하였다. 박효진(2008)은 중학교 문자와 식 단원의 문제 해결과정에서 발생하는 오류의 유형으로 '이해의 오류', '처리기술의 오류', '실수나 부주의로 인한 오류', '애매모호한 오류' 등 4가지 유형으로 분류하였으며, '이해의 오류'에 해당하는 경우, 즉, 문제에 대한 기본지식 및 기본 개념과 원리를 모르거나 문제를 잘못 이해하여 표현상의 오류를 범하는 경우가 가장 많이 나타난다고 분석하였다. 그리고 조윤동・고호경(2015)은 중학교 3학년 '문자와 식', '함수'영역의 국가수준 학업성취도 평가의 서답형 2문항의 문제해결 과정을 다양한 기준으로 분류하여 분석하였다. 문항별로 '도입식, 중간식, 답의 유무', '도입식의 유형', '도입식, 중간과정의 정오', '등식인 도입식의 오류 형태', '풀이 과정의 오류 형태', '답의 유형' 등 다양한 기준에 따라 각 유형에 대한 백분율을 구하였다. 이로부터, 학생들이 함수, 대수식, 다항식 등의 개념을 구별할 수 있도록 지도하는 것이 필요하며 학생들에게 보이는 오류를 분석하는 1차적인 연구에 더하여 오류의 분석 결과를 적극적으로 교수・학습 상황에 접목시킬 필요가 있다고 주장하였다.

황재우・부덕훈(2015)은 중학교의 기하 증명에서 발

생하는 오류의 유형을 분석하였으며 ‘논리적 타당성 결여’, ‘추론능력/지식의 부족’, ‘의사소통 불명확’, ‘기술상의 오류’, ‘문제 파악 실패’ 등 5가지 대유형으로 분류하고 이를 세부적으로 ‘논리적 비약’, ‘요소의 타당성 미확보’, ‘비논리적 전개’, ‘증명 미완성’, ‘불필요한 요소’, ‘잘못된 요소 이용’, ‘지식 부족’, ‘근거 없는 진술’, ‘결론 미진술’, ‘문자의 의미 불명’, ‘불필요한 기술’, ‘표현의 부정확’, ‘기호 또는 용어의 혼동’, ‘잘못된 단어 사용’, ‘가정 이해 부족’, ‘유사 문제로 오인’ 등의 16가지의 세부유형으로 나누었다. 서술형 평가의 답안 분류결과 가장 빈도가 높은 오류유형으로 대유형은 ‘논리적 타당성 결여’가, 세부유형은 ‘문자의 의미 불명’으로 나타났다고 분석하였다.

대학의 경우에도 오류의 유형을 분석하여 학력증진에 활용하는 경우가 있다. 대학입시에서 수시모집 합격자 중 신청자를 대상으로 하는 기초학력 진단평가를 실시하고 평가결과를 반영하여 입학 전 48시간 동안 기초수학 특강을 진행하는 경우가 흔히 있다. 임연휘・표용수(2013)는 진단평가에서 나타나는 오류를 분석하여 ‘그림으로 답한 오류’, ‘서술표현이 부족한 오류’, ‘유사개념에 의한 오류’, ‘문제의 이해부족에 따른 오류’, ‘기초개념 이해부족에 따른 오류’, ‘문제해결력 결핍에 따른 오류’ 등 6가지 유형으로 분류하였다. 특강 후 최종평가 결과를 오류 유형에 따라 분석한 결과 기초수학 특강이 기초학력 증진에 상당한 효과가 있었다고 분석하였다.

고등학교의 경우에도 자기평가, 정답률을 이용한 영역별 상관관계 분석 등 다양한 형식으로 학생들에게 나타나는 오류의 발생 원인을 분석하고 있다.

황혜정・김명수(2014)는 고등학교 학생을 대상으로 문자와 식, 수와 연산 영역의 3문항을 근원문제, 동치문제, 유사문제, 동형문제로 개발하여 오답원인을 학생들이 스스로 판단하는 자기평가를 실시하였으며 이러한 과정에서 학생들의 수학학습에 대한 흥미도와 자신감에 대한 긍정적인 영향을 미치게 됨을 발견하였다. 특히 학생들의 근원문제의 풀이과정에서 발생하는 오류의 원인을 ‘문자사용의 축소’, ‘올바른 식의 구축’, ‘간단한 등식으로서의 변형’, ‘계산과정의 이해’, ‘정확한 개념 이해’, ‘올바른 문제 해석’ 등으로 나누어 분류하여 자기평가에 활용하였다. 권주희・양성호・이경언(2015)는 고등학교 학습부진아를 대상으로 수학 성취도 검사와 학생 면담을 실시한 결과, 수학학습 부진아들이 문제를 풀이할 때 저지르는 오류의 원인을 ‘이해의 문제’, ‘기술의 문제’, ‘정의적인 영역의 문제’로 분류하였으며, 이해의 문제는 기본개념을 모르는 경우, 풀이 알고리즘을 형성하지 못한 경우, 오개념이 형성된 경우, 문제에서 요구하는 것이 무엇인지 인지하지 못한 경우, 부정확한 공식을 적용하여 풀이한 경우 등에서 나타나고, 기술의 문제는 풀이를 정리하여 쓰지 않거나 생략해서 문제 해결 과정에서 오류를 범하는 경우, 그리고 정의적인 영역의 문제는 계속된 실패의 기억으로 자신감이 낮으며 문제를 읽기도 전에 무의미하게 답안을 작성하는 모습으로 나타난다고 하였다.

기하와 벡터의 내용에 대한 오류유형의 분류 및 분석으로, 김범석(2009)은 고등학교 3학년을 대상으로 공간도형의 문제해결에서 나타나는 수학적 오류 유형을 ‘수학적 개념의 이해과정에서 오는 오류’, ‘공간능력의 과정에서 오는 오류’, ‘일반적인 오류’ 등 세 유형으로 크게 분류하고, ‘꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각에 관한 오개념’ 등 공간도형에 관련된 등 구체적인 사항에 대한 세부 유형 11가지로 분류하였다. 문항별로 세부유형에 따른 오류의 발생 원인을 분석하였으며 교수학적 시사점을 제시하였다. 또한 한경민・고상숙(2014)은 고등학교 기하와 벡터의 내용 중 원의 방정식에 대한 서술형 평가에서 나타나는 오류를 ‘부적절한 논리적 추론’, ‘풀이과정의 생략’, ‘기술적 오류’, ‘잘못된 결론’, ‘잘못된 정리의 사용’, ‘시각적 오류’ 등 6가지 유형으로 분류하였으며 문항별로 오류유형별 오답률을 분석하였다. 이러한 6가지의 오류유형 중 ‘부적절한 논리적 추론’이 가장 높은 비율로 나타났으며 이는 수학적 개념을 완벽하게 정립하지 못하고 부적절한 추론을 통해 문제를 해결했기 때문에 발생된 것이라고 분석하였다.

선행연구에서는 두 가지의 오류유형 분류방법을 찾을 수 있었다. 이용하・박지현(2011)이 제시한 PCK를 바탕으로 한 두 가지 범주의 오류형태 즉, 학생들이 학습내용을 받아들일 때 잘못 이해하여 생기는 지식 측면의 오류 분류(범주 C)와 인지구조에 정착된 지식을 인출하는 과정에서 발생하는, 절차적 지식 측면에서의 오류 분류(범주 P)가 그것이다. 조윤동・고호경 (2015)의 경우 또는 김범석(2009)의 경우처럼 범주 C의 방법을 사용하여 특정 단원에서 학생들의 오답의 내용을 기준으로 오류

유형을 분류한 경우도 있었으나 황재우・부덕훈(2015)의 경우처럼 범주 P의 방법을 사용하여 오류 유형을 분류한 경우가 많았다. 이 경우에도 학습 영역에 따라 오류 유형의 명칭이 다른 경우가 있었지만 '추론능력 부족' 또는 '부적절한 논리적 추론' 그리고 '기술상의 오류' 등은 공통적으로 나타나는 오류 유형이었다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 절차

본 연구에서는 2015년 대전 소재의 일반계 고등학교 3학년 1학기 자연계열 학생을 대상으로 하였다. 남녀학생 각 2학급 총 4학급으로 재적인원은 140명이었으나, 직업학교 등교, 입시설명회 참석 등으로 인한 결시자를 제외하고 1차 시험에는 91명, 2차 시험에는 80명이 응시하였다. 대상 학생들은 2007 개정 교육과정을 적용받는 학생들로, 이전 학기(2학년 2학기) 4단위에 걸쳐 '기하와 벡터' 전 범위를 이미 학습하였다. 이 연구를 위하여 학생들에게 중・하 수준의 서술형 문항으로 구성된 시험을 5월과 7월에 각 1회씩 실시하였다.

제1회 시험은 일차변환과 포물선의 성질에 대한 내용을 다루었으며, 다음의 4문항으로 구성하였다.

1-1. 변환 $f:(x,y)\to(ax+by, bx+c)$가 점 $(2,3)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 일차변환일 때, 세 상수 a,b,c의 값을 구하시오.

1-2. 일차변환 $f:(x,y)\to(kx,ky)$ $(k>1)$에 의하여 점 P가 점 Q로, 점 Q는 점 R로 옮겨진다. $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=1:2$ 가 성립할 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, 점 P는 원점 O가 아니다.)

1-3. 포물선 $(x-1)^2=4(y-m)$의 초점이 $(1,3)$이다. 이 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

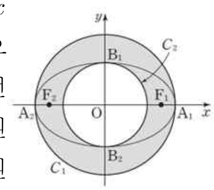
1-4. 점 $(-2,0)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는?

제2회 시험은 타원과 쌍곡선의 성질에 대한 내용을 다루었으며, 다음의 4문항으로 구성하였다.

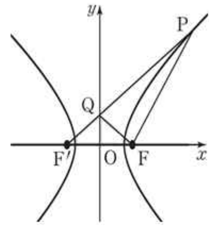
2-1. 타원 $5x^2-30x+y^2+4y+44=0$의 두 초점의 좌표를 구하시오.

2-2. 두 꼭짓점이 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(-2,0)$인 쌍곡선이 제1사분면 위의 두 점 $(4,3)$, $(3,k)$를 지날 때, 실수 k의 값을 구하시오.

2-3. 그림과 같이 x축 위의 두 점 $\mathrm{F}_1(4,0)$, $\mathrm{F}_2(-4,0)$을 초점으로 하는 타원의 네 꼭짓점을 A_1, B_1, A_2, B_2이라 하자. x축 위의 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$를 지름으로 하는 원을 C_1, y축 위의 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$를 지름으로 하는 원을 C_2라 할 때, 원 C_1과 원 C_2로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이는?



2-4. 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 위의 한 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 선분 PF'과 y축의 교점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$일 때, 점 Q의 y좌표는?



학생이 서술한 풀이를 보고 사고과정을 파악하기에 용이한 문항을 사용하기 위하여, 학생들이 문제의 해결과정을 서술하는 데 많은 어려움이 발생할 것으로 예상되는 부분인 '공간도형'과 '벡터'에 대한 문항은 연구의 범위에서 제외하였다. '일차변환과 행렬'은 2009 개정 교육과정에서 고급수학으로 이동하였으나 시험을 실시할 당시인 2015학년도에는 '기하와 벡터' 과목에 포함되어 있었으며, 학생의 인지적 특성을 파악한다는 면에서는 '이차곡선' 단원과 마찬가지로 의미 있다고 판단되므로 해당 2문항도 오류 분석의 범위에 포함하였다.

문항은 EBS 수능특강 기하와 벡터(김민경・김의석・이병헌・이직현, 2015)에서 인용하되, 일부 문항은 약간의 수정을 가하였다. 수능특강을 인용한 이유는 두 가지로 설명할 수 있다. 첫째, 수능특강은 대학수학능력시험 연계교재로 이용될 만큼 검증된 교재로, 평가의 타당도와 문항의 질을 높이기 위하여 이를 인용하였다. 둘째, 수능특강이 수업시간에 교재로 사용되었고, 이 중 몇 개

의 문항이 정기고사에서 선다형으로 출제되었다. 그 중 정답률이 40%이상인 문항들을 골라 본 연구의 서술형 시험에 출제하였다. 이는 많은 학생들이 풀이과정의 서술을 시도할 수 있도록 하여 오류 유형과 빈도를 파악하는 것이 의미 있을 정도로 충분한 양의 답안을 얻어내기 위함이었다.

시간은 제한을 두지 않았으며, 회당 20~30분이 소요되었다. 평가 결과는 성적에 반영하지 않으며, 주어진 그림에 표시한 것은 답안으로 인정하지 않고 답란에 올바르게 작성한 것만 채점함을 사전에 공지하였다.

2. 분석 대상 답안의 선정 기준

다음 답안은 오류유형 분석 대상에서 제외하였다.

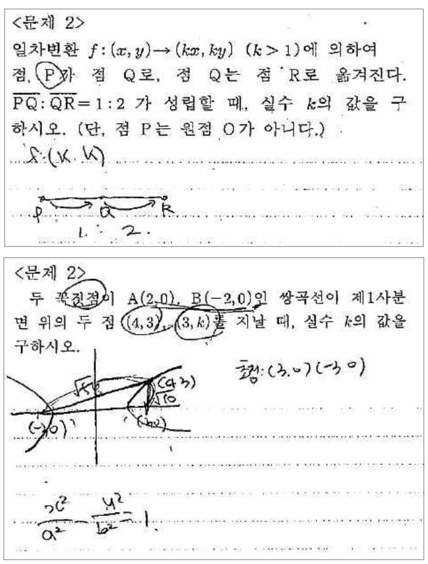
① 백지 답안

② 풀이 과정이 전혀 없고, 틀린 답만 있는 답안

③ 학생의 사고를 파악할 수 없는 답안

④ 완벽한 풀이가 이루어진 답안

①~③은 풀이를 시도하지 못한 답안이므로 오류의 유형을 따지는 것이 의미 없다고 판단하였다. 반면 ④는 분류할 만한 오류가 전혀 발생하지 않았기에 오류 분석 대상에서 제외하였다.



[그림 1] 학생의 사고를 파악할 수 없는 답안의 예

[Fig. 1] Answers that don't show the student's thought

'②'와 '③'을 합한 비중은 문항당 3~10건으로 높지 않으며, '③'에 해당하는 실제 답안의 예는 [그림 1]과 같다. 이러한 원칙에 따라 문제의 풀이 과정과 직접 관련 있는 내용이 작성된 경우만 '문제 풀이를 시도한 답안'으로 인정하고, 이를 대상으로 오류 유형을 분석하였다.

3. 오류 유형 분석의 절차 및 기본 원칙

학생의 답안 서술의 오류 유형을 분석하는 연구에서, 한 문항의 답안에 여러 오류가 있을 경우 뒤에 나타난 오류가 반드시 선행 오류에 기인한다고 단정 짓기는 어려우므로 각 오류를 개별 분석하여야 하며, 답안 전체의 표면적인 특성이 아니라 각 오류의 원인이 된 사고과정에 따라 오류를 분류하여야 실질적으로 수업 개선에 도움을 줄 수 있다(황재우 · 부덕훈, 2015).

황재우 · 부덕훈(2015)의 중학생의 기하 증명 서술에서 발생하는 오류의 유형 분류 방법을 상당 부분 차용하였으나, 중학생과 고등학생의 사고 수준의 차이와 증명과 문제해결이라는 행동 영역의 차이를 고려할 때 오류 유형을 새로 분류하는 것이 필요하였다. 특히 기하와 벡터 과목의 서술형 풀이 데이터를 분석해 본 결과, [표 1]과 같이 오류유형 분류를 수정하게 되었다.

[표 1] 유형 분류 비교

[Table 1] Types of errors comparison

선행 연구*	본 연구
추론능력/지식 부족	내용지식 부족
	방법상의 오류
논리적 타당성 결여	타당성 결여
의사소통 불명확	표현 미숙
기술상의 오류	
문제 파악 실패	유사 문제로 오인

* 황재우 · 부덕훈(2015)

지식이나 추론능력의 부족을 논리적 타당성 결여보다 앞에 두는 것으로 분류기호를 수정하는 것이 편리하게 느껴졌다. 또한 추론능력의 부족과 지식의 부족은 같은 항목으로 묶기에는 근본적이고 뚜렷한 차이가 있었다. 즉, 문제를 풀기 위한 내용적 지식이 없는 것과, 문제의 해결 방법을 찾지 못하는 것은 문제를 풀지 못하게 하는 서로 다른 두 가지 원인이라고 볼 수 있었다. 문제해결

방법을 제대로 실행하지 못한 것을 ‘추론 능력의 부족’이라고만 할 수는 없어 분류 명칭을 수정하였다. 반대로 ‘의사소통 불명확’과 ‘기술상의 오류’는 명제의 증명이 아닌 문제의 해결에서 뚜렷이 구별되지 않아 ‘표현 미숙’이라는 하나의 분류로 통합하였다.

세부 유형은 많은 수정을 가하였다. ‘계산 오류’라는 분류는 새로 만들어야 했고, ‘가정 이해 부족’을 삭제하면서, 적어도 본 연구에서 얻어진 데이터에서 ‘문제 파악 실패’의 세부유형으로는 ‘유사 문제로 오인’밖에 남지 않게 되었다. 이외에도 실제 데이터에서 발견되는 사례에 맞추어 세부적으로 많은 변화를 가하였다.

오류를 분석하고 코딩하는 구체적인 과정은 다음과 같다. 각 문항별로 모든 학생의 답안을 읽으면서, 앞서 말한 기준에 따라 분석 대상 답안인지 여부를 판별하였다. 그 후 답안에 나타난 모든 오류의 위치를 메모하고, 이와 동시에 빈번하게 나타나는 오류가 어떤 것인지도 메모하였다. 이러한 과정을 통해 각 문항에서 빈번하게 발견되는 오류에 어떤 것이 있는지를 일목요연하게 나타내는 자료가 작성되었고, 발견된 오류들을 유형으로 분류하고 분류기호를 부여하였다.

답안에서 발견된 모든 오류를 분류할 수 있는 틀이 완성된 후, 연구진의 논의를 통하여 대유형-세부유형-실제 사례의 포함관계 중 일부가 타당하지 않은 경우 분류 틀을 다시 수정하고, 수정된 틀에 따라 모든 오류를 분류하는 과정을 반복하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 오류 유형 분석 결과

학생의 답안을 분석한 결과, 오류를 [표 2]와 같은 5개의 대유형 및 13개의 세부유형으로 분류할 수 있었다. 그리고 오류의 유형에 따라, 선다형 또는 단답형으로 변별할 수 있는 오류와 그렇지 않은 오류가 있다.

내용지식 부족(A), 방법상의 오류(B)는 선다형 또는 단답형으로도 변별할 수 있는 오류, 즉 문항 형식과 관계없이 정답을 구할 수 없게 되는 오류의 범주이다.

내용지식 부족(A)은 시험을 실시하기 전에 학습내용을 충분히 습득하지 못하여 문제 해결이 애초에 불가능했던 경우를 말한다. 예를 들어, 포물선의 방정식을 보고 초점과 꼭짓점의 좌표를 알아내지 못하는 경우 등이 이에 포함된다.

방법상의 오류(B)는 문제 해결전략을 수립하고 실행하는 과정에 실패한 경우를 말하며, 풀이 미완성, 정답조건 누락, 계산 오류 등의 형태로 나타난다. 이 중 풀이 미완성을 원인에 따라 문제에서 구하는 것을 제대로 파악하지 못하고 섣부르게 풀이를 종료한 경우, 몇 가지 사실을 알아낸 뒤 문제해결방법을 떠올리지 못한 경우, 내용지식 부족(A)과 동시에 나타나는 경우의 세 가지로 분류할 수도 있다.

[표 2] 오류 유형 분류
[Table 2] Types of errors

A: 내용지식 부족	
	(A) 내용지식 부족
B: 방법상의 오류	
	(B1) 풀이 미완성
	(B2) 정답조건 누락
	(B3) 계산 오류
C: 타당성 결여	
	(C1) 근거 없음
	(C2) 근거 부족
	(C3) 비논리적 방법
D: 표현 미숙	
	(D1) 임의의 기호
	(D2) 문자의 의미 불명
	(D3) 그림에 의존
	(D4) 잘못된 기호 사용
	(D5) 불명확한 표현
E: 유사 문제로 오인	
	(E) 유사 문제로 오인

타당성 결여(C), 표현 미숙(D)은 풀이과정 서술에서의 흠을 분류한 것으로, 선다형이나 단답형 문항으로는 알아낼 수 없는 부분이다. 어느 정도 수학을 성공적으로 학습한 학생들이 서술형 문항을 어렵게 느끼는 원인으로, 본 연구의 목적과 직접 연관되어 있는 오류이다.

타당성 결여(C)는 정답을 유도하기 위한 제대로 된 논증 과정을 거치지 못한 경우를 말한다. 이러한 오류가 발생한 경우, 선다형이나 단답형이었다면 정답으로 처리되었겠지만 실제로 학생이 문제를 풀었다고 말하기 어려우며, 서술형에서는 감점요인이 된다. 세부적으로는 답을

구한 근거가 전혀 없는 경우, 풀이과정 일부에서 근거가 부족한 경우, 풀이방법의 논리성을 확보하지 못한 경우로 나뉜다. 근거 부족(C2)에 해당하는 경우로는 풀이과정에서 중요한 내용이 생략되어 논리적 비약이 생긴 경우와, 정답의 제한조건이 있음을 알고도 이를 표기하지 않은 경우가 있다. 후자의 경우 정답조건 누락(B2)과 형태는 비슷하나, 실제로 정답을 잘못 구하였는가, 단순히 표기를 누락하였는가에 따라 명확히 구분된다.

표현 미숙(D)은 자신의 생각을 답안 내에 제대로 표현해 내지 못하거나 나름대로의 방법으로 기호 등을 남용하는 것을 말한다. 이대현・박배훈(2002)은 수학 교수-학습의 문제해결 과정에서 시각화된 표상은 수학적 개념・원리・법칙에 대한 직관적 인지의 즉시성과 자명성을 창안해내는데 필수적인 요소이지만 시각화된 표상이 수학적 사실의 획득이나 문제해결 과정에서 오류를 야기할 수도 있으므로 수학적 사실의 시각화가 명확하고 체계적인 개념적 분석을 통해 이루어져야 한다고 하였다. 따라서 정의되지 않은 기호를 임의로 만들어 사용한 경우, 문자를 사용하면서 그 의미가 명확히 드러나지 않은 경우, 답안에 정확히 표현해야 할 것을 그림으로 대체한 경우, 기호를 원래 의미와 다르게 사용한 경우, 의미가 명확하지 않아 다른 사람이 이해할 수 없을 만한 표현을 쓴 경우 등이 이러한 오류에 속한다.

유사 문제로 오인(E)은 본 연구에서 나타난 문제 파악 실패의 특별한 경우로서, 학습한 기억이 오히려 문제 파악을 방해한 경우를 말한다. 분류 방법상 앞의 네 가지 오류유형과는 근본적으로 다른 성격을 지니며, 실제로 학생의 학습과정을 알고 있는 교사만 파악할 수 있다. 일반적으로 유사 문제로 오인(E)은 오답의 원인이 될 것으로 보이나, 경우에 따라 그렇지 않을 때도 있다.

2. 문항별 답안에서 나타난 오류 분석

각 문항별로 풀이를 시도한 학생과 정답을 맞힌 학생의 인원수, 오류 인원 및 각 오류의 횟수를 세어 표로 나타내었다. '계산 맞음'이란 풀이과정을 고려하지 않고 얻어진 결과 값을 맞게 구한 학생의 수를 뜻한다. 또한 '완벽한 풀이'란 시험 후 오류를 분석한 결과 어떠한 오류도 발견되지 않은 답안을 말한다. '오류 인원'은 '풀이를 시도'한 인원에서 '완벽한 풀이'를 한 인원을 제외한 분석대상 인원을 뜻한다. '오류 횟수'는 해당 문항의 모든 오류의 횟수의 합이며, 한 개의 답안에 여러 오류가 있을 경우 모든 오류를 개별 분석하였기 때문에 오류 인원보다 오류 횟수가 더 많은 경우가 흔하다.

1) 문항 1-1에 대한 분석

문항 1-1은 풀이 과정이 짧은 기초 문제인 만큼, 기본적인 내용을 알고 있다면 풀이에 큰 어려움을 겪지 않을 만한 문제로서 가장 많이 나타나는 오류는 내용지식 부족(A)이다.

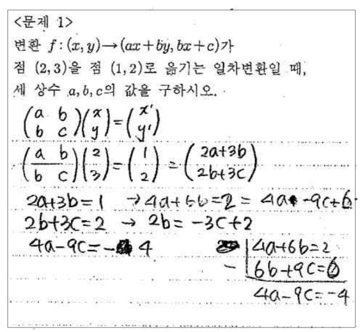
이 문항에서 내용지식 부족(A)과 계산 오류(B3) 이외의 오류는 높은 빈도로 나타나지 않았으며, 계산이 맞은 학생 중 대부분은 풀이에도 오류가 없었다.

[표 3] 문항 1-1 오류 빈도
[Table 3] Frequency of errors in problem 1-1

풀이를 시도	계산 맞음	완벽한 풀이	오류 인원 (분석대상)	오류 횟수
87	60	52	35	38

A	B3	E	B1	C2	D4	C1
20	6	4	3	2	2	1

내용지식 부족(A)은 하위권 학생들에게서만 발견될 것으로 예상하였으나, 변환 f가 일차변환이라는 조건이 주어져 있음에도 $c=0$임을 알아내지 못한 경우가 중상위권 학생의 답안에서도 종종 발견되었다.



[그림 2] 문항 1-1에 대한 학생의 풀이 예시
[Fig. 2] Example of student's answer for (1-1)

[그림 2]와 같이 $bx+c$를 $bx+cy$로 잘못 인식한 경우도 발견되었는데, 이는 유사 문제로 오인(E)한 것에

해당한다. 일차변환의 식을 행렬로 표현하여 계산하는 문제를 흔히 다루다 보니, 학생은 본 문항도 당연히 그와 같은 유형일 것이라고 섣불리 판단한 것으로 보인다.

2) 문항 1-2에 대한 분석

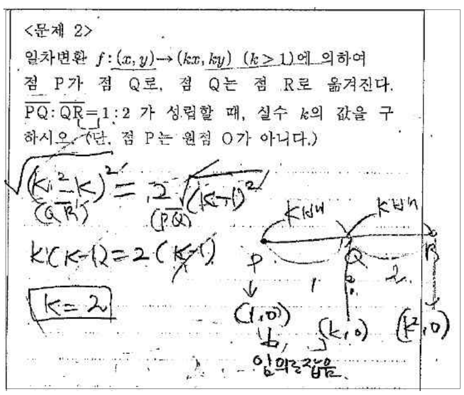
문항 1-2의 풀이에서는 근거 부족(C2)이 두드러지게 나타났고, 풀이 미완성(B1), 잘못된 기호 사용(D4), 근거 없음(C1)이 그 뒤를 이었다

[표 4] 문항 1-2 오류 빈도
[Table 4] Frequency of errors in problem 1-2

풀이를 시도	계산 맞음	완벽한 풀이	오류 인원 (분석대상)	오류 횟수
47	34	0	47	52

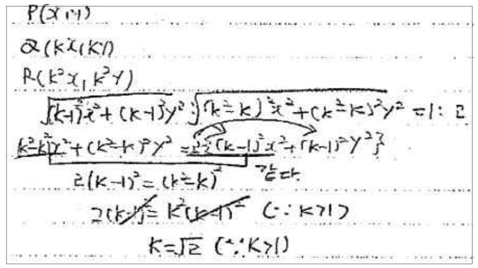
C2	B1	D4	C1	B3	C4	A
24	7	6	5	4	4	2

[그림 3]에서 점 P의 좌표를 임의로 잡은 것은 일반성이 결여된 풀이이며, 이는 비논리적 방법(C3)에 해당된다. 간단한 예를 통하여 아이디어를 얻는 것은 훌륭한 문제해결전략일 수 있으나, 그럴듯한 추론에는 논리적인 증명이 뒤따라야 한다. 그러나 예시에서 학생은 자신의 아이디어의 일반화 가능성을 보이지 않았다.



[그림 3] 문항 1-2에 대한 학생의 풀이 예시 (1)
[Fig. 3] Example (1) of student's answer for (1-2)

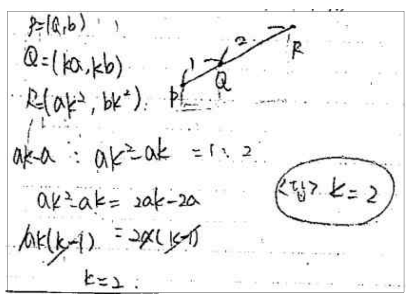
[그림 4]에서는 양변을 제곱할 때 상수 2를 제곱하지 않은 계산 오류(B3)가 발생하였다. 제시된 사례 외에도 양변을 제곱하거나 완전제곱을 계산할 때 오류가 발생한 경우가 많이 발견되었다. 따라서 교사는 곱셈이나 제곱을 할 때 상수를 놓치지 않고 완전제곱을 전개할 때 실수를 하지 않도록 학생에게 주의시켜야 한다. 한편 간단한 방법이 있는데도 너무 복잡한 계산이 필요한 방법을 사용한 것에도 원인이 있으므로, 간단한 식을 사용할 수 있는 방법을 학생 스스로 다시 생각해 보게 하는 것도 필요하다.



[그림 4] 문항 1-2에 대한 학생의 풀이 예시 (2)
[Fig. 4] Example (2) of student's answer for (1-2)

[그림 5]에서는 $\mathrm{P}=(a,b)$라는 표기가 보이는데, 이는 기호 '='을 잘못 사용(D4)한 것이다. 점의 좌표를 표시할 때에는 기호 '='이 사용되지 않음을 명확히 일러줄 필요가 있으며, 특히 자연계열 학생들은 점의 표기와 벡터의 표기의 차이를 분명히 알고 사용하도록 가르쳐야 한다.

또한 a와 $k-1$을 소거하는데 성공하였으나 그 과정에서 필요한 $a\neq 0$, $k\neq 1$이라는 조건을 표기하지 않았고, 이는 근거 부족(C2)에 해당한다. 양변을 같은 수로 나눌 때에는 0으로 나누는 것이 아님을 반드시 확인하여야 하는데 이 과정을 생략하는 것은 학생들이 흔히 하는 실수이므로 주의가 필요하다.



[그림 5] 문항 1-2에 대한 학생의 풀이 예시 (3)
[Fig. 5] Example (3) of student's answer for (1-2)

3) 문항 1-3에 대한 분석

문항 1-3의 풀이에서는 표현 오류가 특히 많이 발견되었다. 학생이 풀이과정을 서술하기 곤란해 하는 정도가 다른 유형의 문제에 비하여 그래프를 그려서 해결하는 유형의 문제에서 더욱 심각해지는 것으로 보인다.

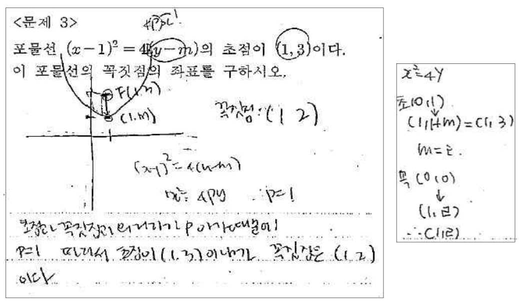
[표 5] 문항 1-3 오류 빈도
[Table 5] Frequency of errors in problem 1-3

풀이를 시도	계산 맞음	완벽한 풀이	오류 인원 (분석대상)	오류 횟수
56	46	7	49	71

C2	D1	D4	A	D3	D2	D5	C1	C4
15	13	12	10	9	7	2	2	1

문항지에 그림을 그릴 공간과 답안을 작성할 공간을 따로 제공하여 주었는데, 많은 학생들이 이 공간을 편리하게 활용하지 못하였다. 학생생활기록부에 반영되는 시험에 이와 같은 유형의 문제를 서술형으로 출제하려면 타당성을 신중하게 판단해야 할 것으로 보인다.

임의의 기호(D1), 문자의 의미 불명(D2), 그림에 의존(D3), 잘못된 기호 사용(D4) 등 표현 미숙(D)에 해당하는 오류들이 모두 많이 나타났으며, 근거 부족(C2)과 내용지식 부족(A) 또한 높은 빈도로 나타났다.

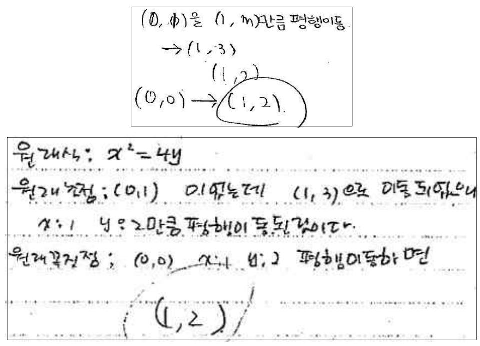


[그림 6] 문항 1-3에 대한 학생의 풀이 예시 (1)(2)
[Fig. 6] Example (1)(2) of student's answer for (1-3)

[그림 6]의 예시(1)에서는, 상당부분 타당한 방법으로 풀이한 것 같지만, 포물선의 형태와 꼭짓점, 초점의 위치를 그림으로만 표현하였다.(D3, 그림에 의존)

[그림 6]의 예시(2)에서는 평행이동에 대한 언급이 화살표로 대체되어 있는데, 이는 근거 부족(C2)에 해당한다. 화살표는 평행이동을 뜻하는 기호가 아닐 뿐 아니라 어느 방향으로 얼마나 평행이동하는지의 정보가 담겨 있지 않다. 또한 점의 좌표를 나타내면서 벡터 기호 $(1,m+1)=(1,3)$을 사용하는 오류(D4, 잘못된 기호 사용)를 범하였다.

[그림 7]의 두 가지 예시를 보면, 평행이동을 표현할 때 벡터의 성분 표현을 학생 나름의 방식으로 차용하였는데, 이는 공인되지 않는 표현 방법이다(D1, 임의의 기호). 이 외에도 'x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동'이라는 표현을 학생별로 다양하게 나타내는 것이 보인다. 새로운 기호를 창안하는 것은 격려할 만한 일이지만, 시험의 답안에서만큼은 공인된 기호를 사용하는 것이 필요하다는 것을 학생은 인지하여야 한다.



[그림 7] 문항 1-3에 대한 학생의 풀이 예시 (3)(4)
[Fig. 7] Example (3)(4) of student's answer for (1-3)

또한 예시(3)에서 $(0,1)$, $(0,0)$이라는 두 점이 왜 등장하였는지에 대한 설명이 나타나 있지 않으므로, 근거 부족(C2)도 지적할 수 있다.

예시(4)에서는 '원래'라는 표현이 여러 번 등장하는데, 이는 불명확한 표현(D5)에 해당한다. $x^2=4y$는 '원래'가 아니라, 주어진 포물선과 같은 모양의 다른 포물선일 뿐인데, 마치 $x^2=4y$을 평행이동해야만 주어진 포물선이 탄생할 수 있는 것처럼 생각한 것으로 보인다.

이 외에도, 초점과 꼭짓점에 대한 이해가 부족하여 m의 값을 3으로 구한 경우(A, 내용지식 부족), 포물선 방정식의 기본형 $x^2=4py$를 오해하여 p라는 문자에 '초점과 꼭짓점 사이의 거리'라는 의미가 담겨 있는 것처럼 사용한 경우(D2, 문자의 의미 불명)가 발견되었다.

4) 문항 1-4에 대한 분석

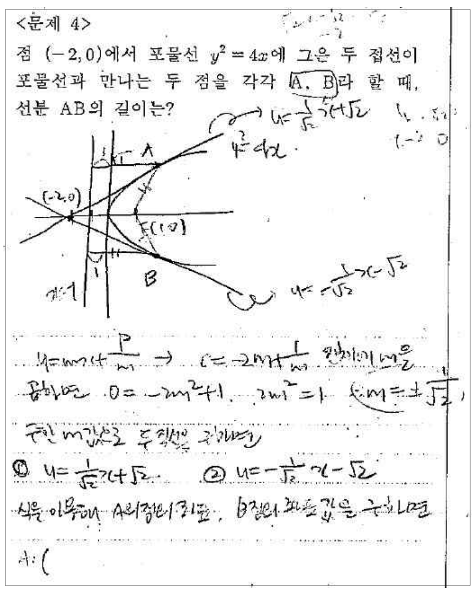
문항 1-4 또한 계산이 맞은 학생 수에 비해 풀이를 완벽히 서술한 학생이 많지 않았다. 가장 많이 나타난 오류는 문자의 의미 불명(D2)이었으며, 잘못된 기호 사용(D4)과 풀이 미완성(B1), 근거 부족(C2), 그림에 의존(D3) 또한 높은 빈도로 나타났다.

[표 6] 문항 1-4 오류 빈도
[Table 6] Frequency of errors in problem 1-4

풀이를 시도	계산 맞음	완벽한 풀이	오류 인원(분석대상)	오류 횟수
43	32	8	35	69

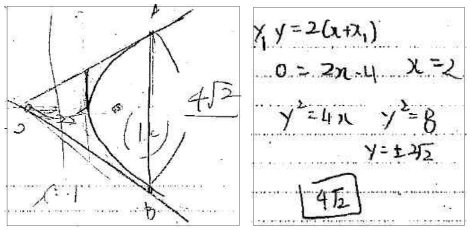
D2	D4	B1	C2	D3	E	B3	A	C1
26	11	9	9	7	3	2	1	1

[그림 8]에서는 m과 p라는 의미 불명의 문자가 도입(D2)되었는데, 이 과정에서는 '기울기가 m인 접선의 방정식'이라는 설명을 추가하여야 한다.



[그림 8] 문항 1-4에 대한 학생의 풀이 예시 (1)
[Fig. 8] Example (1) of student's answer for (1-4)

또한 두 점 A, B의 좌표를 구해야 한다고 서술한 뒤 이를 실행하는 것을 포기하였다(B1, 풀이 미완성). 시험 당시 시간제한을 두지 않고 충분한 시간을 주었음을 감안할 때, 계산과정이 다소 길어질 것이 예상되자 스스로 사용한 방법에 대한 확신이 없었던 것으로 보인다. 하지만 이 답안에서 학생이 사용한 방법은 실제로 좋은 해결방법이었으며, 학생이 조금만 끈기를 가졌다면 충분히 해결할 수 있었다. 특별히 더 간단한 풀이가 떠오르지 않거나 실제로 계산과정이 필요한 문제일 때에는 끈기를 갖고 풀이를 완성하도록 지도하여야 한다.



[그림 9] 문항 1-4에 대한 학생의 풀이 예시 (2)(3)
[Fig. 9] Example (2)(3) of student's answer for (1-4)

[그림 9]의 예시(2)는 근거 없음(C1)의 전형적인 예이다. 문제를 그림으로 어느 정도 표현하기는 하였지만, 정답인 $4\sqrt{2}$가 어떻게 나오게 되었는지에 대한 정보가 전혀 나와 있지 않다. 수업 시간과 정기 고사를 통해 같은 문제를 반복적으로 다루면서도 풀이를 이해하기보다는 정답만 기억하였거나, 혹은 풀이과정을 써야 할 필요를 알지 못한 것일 수 있다.

[그림 9]의 예시(3)을 보면 문자 x, y와 x_1, y_1의 의미를 밝히지 않았으며(D2, 문자의 의미 불명), 그 결과 답안을 작성하는 학생 스스로도 문자를 혼동하고 말았다. 의사소통을 위해서나, 학생이 자신의 풀이과정을 명확히 인식하기 위해서 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓는다는 말을 첫 줄에 반드시 쓰도록 해야 한다.

또한 $y=\pm 2\sqrt{2}$ 다음에 곧바로 정답 $4\sqrt{2}$가 나왔는데(C2, 근거 부족), A, B의 좌표와 같이 논리적 구조상 꼭 필요한 내용은 풀이과정에서 빠뜨리지 않도록 지도해야 한다.

이 외에, 직선 AB가 포물선의 초점을 지난다고 생각하여 틀린 경우(E, 유사 문제로 오인), 무엇을 묻는 문제인지 망각하고 두 점 A,B의 좌표를 구하는 것으로 풀이를 끝낸 경우(B1, 풀이 미완성) 등이 발견되었다.

5) 문항 2-1에 대한 분석

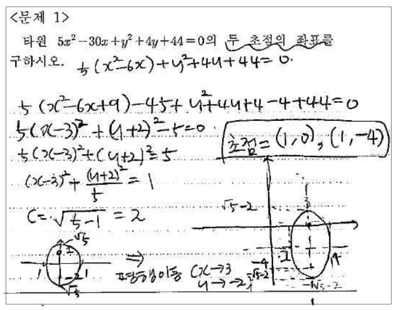
문항 2-1은 기본 문제에 해당함에도 불구하고 많은 학생들이 실패를 경험하였고, 특히 풀이를 완벽하게 쓴 학생은 매우 적었다. 타원의 초점과 평행이동이라는 두 가지 핵심개념의 습득을 요구한다는 점에서 실제 학생들에게는 어렵게 느껴진 것으로 보인다.

[표 7] 문항 2-1 오류 빈도
[Table 7] Frequency of errors in problem 2-1

풀이를 시도	계산 맞음	완벽한 풀이	오류 인원 (분석대상)	오류 횟수
74	40	6	68	76

C2	A	D1	B1	B3	D3	D2	D4	D6
22	15	13	11	9	3	1	1	1

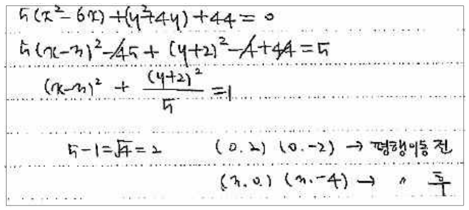
답을 구하지 못하게 되는 오류인 내용지식 부족(A)과 풀이 미완성(B1), 계산 오류(B3)도 많았으며, 답을 구한 학생들의 경우에도 근거 부족(C2), 정의되지 않은 임의의 기호 사용(D1) 등의 오류를 범하였다.



[그림 10] 문항 2-1에 대한 학생의 풀이 예시 (1)
[Fig. 10] Example (1) of student's answer for (2-1)

[그림 10]의 예시(1)에서는, 문항 1-3에서 나타난 것과 같은 원인으로 평행이동을 표현하는데 화살표를 이용한 임의의 기호(D1)가 사용되었고, 타원의 초점의 위치를 그림에만 표시(D3)하였다. 또한, 풀이과정을 대부분 이해한 것으로 보임에도 불구하고 틀린 답을 구하였는데, 생각 과정을 필기로 정리하지 못하고 머릿속으로 계산하다가 실수를 한 것으로 보인다(B3, 계산 오류).

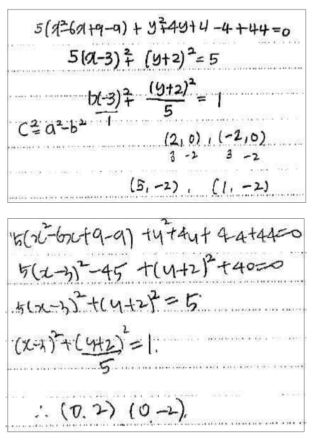
[그림 11]의 예시(2)에서는 문항 1-3에서와 비슷한 형태로 '평행이동 전'이라는 불명확한 표현(D5)이 발견되고, 정작 필요한 내용인 '어떤 도형을 어떻게 평행이동하는지'가 나와 있지 않다(C2, 근거 부족). 평행이동은 문제에서 지시한 것이 아니라 학생 자신이 계획한 것이므로 '평행이동 전'이라는 표현 대신, 평행이동에 대한 정확한 내용을 적어 주어야 함을 이해시켜야 한다.



[그림 11] 문항 2-1에 대한 학생의 풀이 예시 (2)
[Fig. 11] Example (2) of student's answer for (2-1)

[그림 12]의 예시(3)에서는 풀이가 끝나지 않았는데 성급히 결론을 지어 오답을 구하였다(B1, 풀이 미완성). 식을 완전제곱 꼴로 정리한 후, 주어진 타원과 합동이며 중심이 원점인 타원의 초점을 구하였다. 하지만 이후 이것을 평행이동하여 정답을 구하는 과정을 빠뜨렸다.

[그림 12]의 예시(4)에서는 어떤 타원을 얼마나 평행이동시키겠다는 계획이 제대로 적혀 있지 않은데다가(C2, 근거 부족), 원점을 중심으로 하는 타원의 초점을 잘못 구하였다(A, 내용지식 부족). 타원이나 쌍곡선의 방정식을 보고 초점이 x축과 y축 중 어디에 있는지 판단하는 것은 이차곡선을 처음 학습할 때 학생들이 많이 헷갈려하는 부분이므로 지도할 때 유의하여야 한다.



[그림 12] 문항 2-1에 대한 학생의 풀이 예시 (3)(4)
[Fig. 12] Example (3)(4) of student's answer for (2-1)

이외에, 완전제곱식으로 고치는 과정에서 잘못 계산한 경우(B3, 계산 실패)가 여럿 있었다. 또한 완전제곱꼴로 고친 후 또는 평행이동하기 직전에 중단한 사례가 많이 발견되었는데, 타원의 초점을 구하는 기본문제임을 감안할 때 이는 풀이 미완성(B1)과 함께 내용지식 부족(A)이 동시에 나타난 경우로 분류할 수 있다.

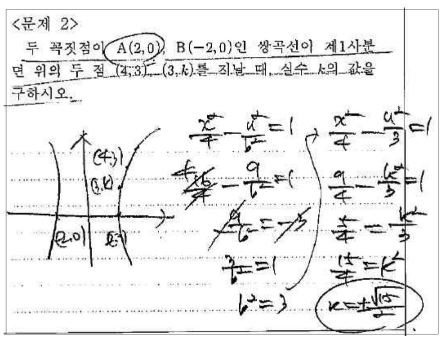
6) 문항 2-2에 대한 분석

문항 2-2는 쌍곡선의 방정식을 세우는 문제인데, 근거 부족(C2), 정답조건 누락(B2), 내용지식 부족(A) 순으로 많은 오류가 나타났다.

[표 8] 문항 2-2 오류 빈도
[Table 8] Frequency of errors in problem 2-2

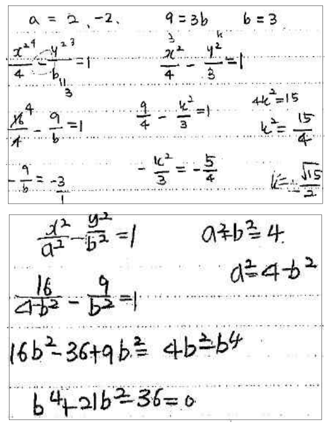
풀이를 시도	계산 맞음	완벽한 풀이	오류 인원 (분석대상)	오류 횟수
48	36	7	41	41
C2	B2	A	C1	B3
25	6	5	4	1

[그림 13]에서 학생은 거의 모든 과정을 맞게 풀이하였으나, $(3,k)$가 제1사분면의 점이라는 것을 문제 파악 단계에서 놓쳤거나 문제 풀이 도중 망각하였다. 이는 정답조건 누락(B2)에 해당한다.



[그림 13] 문항 2-2에 대한 학생의 풀이 예시 (1)
[Fig. 13] Example (1) of student's answer for (2-2)

[그림 14]의 두 가지 예시도 비슷한 오류로 보이지만, 양수 k의 값만 답으로 적어 정답이 맞았다는 것이 결정적인 차이점이다. 이는 근거 부족(C2) 중 조건표기를 빠뜨린 경우로 볼 수 있다. 예시(3)에서는 처음부터 쌍곡선의 방정식을 잘못 세웠다(A, 내용지식 부족). 점 A, B는 초점이 아니라 꼭짓점이므로, 학생이 세운 방정식에서 $a^2=4$인데 $a^2+b^2=4$라는 식을 세웠다. 타원이나 쌍곡선의 방정식에서 꼭짓점과 초점이 어떻게 나타나는지는 핵심 학습목표이므로 철저한 지도가 필요하다.



[그림 14] 문항 2-2에 대한 학생의 풀이 예시 (2)(3)
[Fig. 14] Example (2)(3) of student's answer for (2-2)

7) 문항 2-3에 대한 분석

문항 2-3은 문제의 길이에 비하면 쉬운 문제였기 때문에 풀이를 시도한 학생은 모두 답을 맞게 계산하였다. 그러나 문자의 의미 불명(D2)이 매우 많이 나타났고, 근거 없음(C1)도 높은 빈도로 나타났다.

[표 9] 문항 2-3 오류 빈도
[Table 9] Frequency of errors in problem 2-3

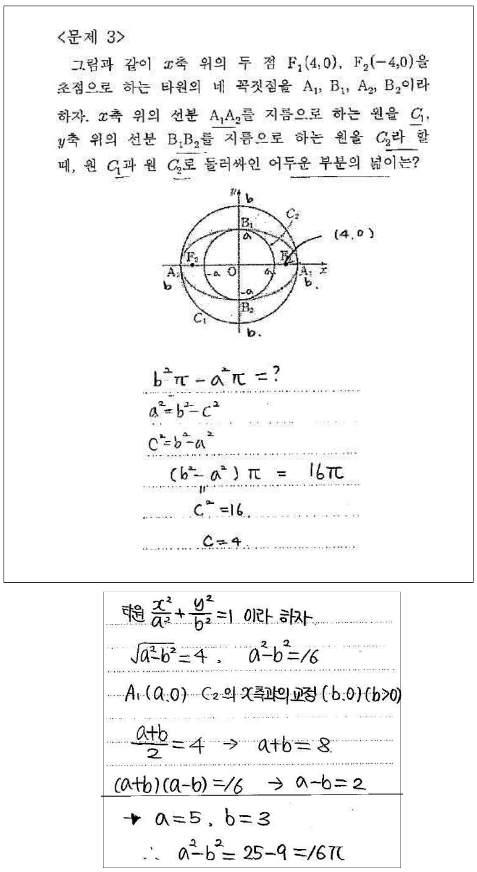
풀이를 시도	계산 맞음	완벽한 풀이	오류 인원 (분석대상)	오류 횟수	
55	55	13	42	47	
D2	C1	E	C4	D4	D3
22	9	9	4	2	1

검사지의 다른 문항과 달리, 본 문항은 '수능 특강' 교재에 수록되어 수업 시간에 다루었던 문항과 동일하지 않은 문항이었는데, 학생이 문제를 급히 읽고 전에 보았던 문제와 같은 것으로 생각한 경우(E, 유사한 문제로 오인)도 나타났다.

[그림 15]의 예시(1)과 같이 문자 a, b를 그 의미를 밝

히지 않고 쓴 경우(D2, 문자의 의미 불명)는 매우 많이 발견되었다. 타원의 방정식을 관례적으로 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라고 표기하기 때문에 $a(b)$라는 문자에 마치 '꼭짓점의 $x(y)$좌표 중 양수인 것'이라는 의미가 자동으로 주어지는 것처럼 오해한 것으로 보인다.

[그림 15]의 예시(2)는 유사한 다른 문제로 오인(E)한 경우이다. '수능 특강'에 있던 문제에는 '선분 B_1B_2를 지름으로 하는 원과 x축 양의 방향의 교점 D_1에 대하여 선분 A_1D_1의 중점이 점 F_1'인 것으로 주어져 있었고, 이로부터 $a=5$, $b=3$이라는 값을 구하는 것도 가능했다. 그러나 본 문항에서 이 조건은 참이 아니다.


<문제 3>

그림과 같이 x축 위의 두 점 $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$을 초점으로 하는 타원의 네 꼭짓점을 A_1, B_1, A_2, B_2이라 하자. x축 위의 선분 A_1A_2를 지름으로 하는 원을 C_1, y축 위의 선분 B_1B_2를 지름으로 하는 원을 C_2라 할 때, 원 C_1과 원 C_2로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이는?

$b^2\pi-a^2\pi=?$
$a^2=b^2-c^2$
$c^2=b^2-a^2$
$(b^2-a^2)\pi=16\pi$
$c^2=16$
$c=4$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라 하자
$\sqrt{a^2-b^2}=4$, $a^2-b^2=16$
$A_1(a,0)$ C_2의 x축과의교점 $(b,0)(b>0)$
$\frac{a+b}{2}=4 \rightarrow a+b=8$
$(a+b)(a-b)=16 \rightarrow a-b=2$
$\rightarrow a=5,\ b=3$
$\therefore a^2-b^2=25-9=16\pi$

[그림 15] 문항 2-3에 대한 학생의 풀이 예시 (1)(2)
[Fig. 15] Example (1)(2) of student's answer for (2-3)

이외에, 풀이과정을 전혀 쓰지 않고 답만 쓴 경우(C1, 근거 없음)도 많았다. 이 문항에서 이 오류가 발생한 경우 문제를 제대로 파악하지 못하였을 가능성도 있으나, 그 여부에 관계없이 기존에 학습한 문항의 정답을 외워서 그대로 썼다는 점에서 근거 없음(C1)으로 분류할 수 있다.

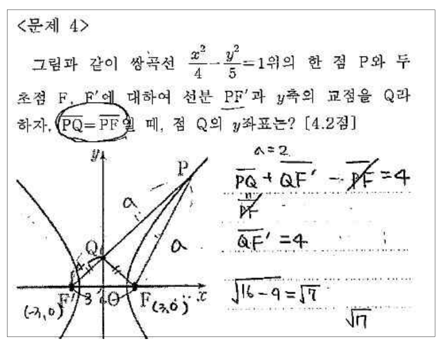
8) 문항 2-4에 대한 분석

문항 2-4에서는 학생별로 다양한 오류가 발생하였다. 근거 부족(C2)이 가장 많고, 그 다음은 그림에 의존(D3), 문자의 의미 불명(D2), 풀이 미완성(B1)의 순서로 많이 나타났다.

[표 10] 문항 2-4 오류 빈도
[Table 10] Frequency of errors in problem 2-4

<table>
<tr><th colspan="2">풀이를 시도</th><th colspan="2">계산 맞음</th><th colspan="2">완벽한 풀이</th><th colspan="2">오류 인원 (분석대상)</th><th colspan="2">오류 횟수</th></tr>
<tr><td colspan="2">50</td><td colspan="2">40</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">46</td><td colspan="2">74</td></tr>
<tr><td>C2</td><td>D3</td><td>D2</td><td>B1</td><td>C1</td><td>D4</td><td>A</td><td>B3</td><td>C3</td><td>C4</td></tr>
<tr><td>22</td><td>15</td><td>12</td><td>11</td><td>6</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

[그림 16]과 같이 $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$임을 서술 없이 곧바로 이용한 경우(C2, 근거 없음)가 많았다. 이 오류를 범한 학생 22명 중 16명은 4문항 모두, 나머지 6명은 3문항의 정답을 맞혔다. 이 점을 볼 때, $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$는 '너무 당연하기 때문에 쓸 필요가 없다'고 생각한 것으로 보인다. 하지만 이 내용은 '쌍곡선의 정의를 사용한다'는 논리의 근거로서 반드시 있어야 하는 중요한 내용이다.


<문제 4>

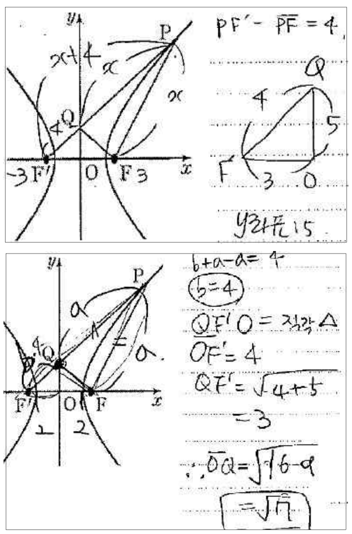
그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$위의 한 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 선분 PF′과 y축의 교점을 Q라 하자. $\overline{PQ}=\overline{PF}$일 때, 점 Q의 y좌표는? [4.2점]

$a=2$
$\overline{PQ}+\overline{QF'}-\cancel{\overline{PF}}=4$
$\overline{QF'}=4$
$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$
$\sqrt{7}$

[그림 16] 문항 2-4에 대한 학생의 풀이 예시 (1)
[Fig. 16] Example (1) of student's answer for (2-4)

[그림 17]의 예시(2)에서는, 선분기호를 빠뜨린 것(D4, 잘못된 기호 사용) 외에 피타고라스정리를 잘못 적용(B3, 계산 오류)하는 결정적인 실수가 발견된다. 세 변의 길이가 각각 $3, 4, 5$인 직각삼각형은 반드시 빗변의 길이가 5여야 하는데, $3:4:5$라는 비율에만 집착하여 빗변의 길이가 4일 때 높이를 5라고 계산하는 실수이다. 본 평가에서는 이러한 실수가 많이 나오지 않았지만, 실제 수업이나 면담에서는 흔하게 발견되는 실수이므로 주의가 필요하다.

또한 [그림 16] 및 [그림 17]의 예시(2)에서, 두 초점의 x좌표가 각각 3과 -3이라는 사실과 피타고라스 정리를 이용하여 답을 구한다는 것을 그림으로만 표현하였다(D3).



[그림 17] 문항 2-4에 대한 학생의 풀이 예시 (2)(3)
[Fig. 17] Example (2)(3) of student's answer for (2-4)

[그림 17]의 예시(3)에서, 문자 a, b의 뜻을 그림에만 표시하였다.(D2) 문제에 주어지지 않은 문자를 사용할 때에는 반드시 '$\overline{PQ}=a$, $\overline{QF'}=b$라고 하자.'와 같이 분명한 말로 정의해 주어야 의사소통이 가능함을 학생이 이해하도록 하여야 한다.

또한 'QF'O =직각△'와 같이 기호 '='과 기호 '△'을 정해진 쓰임새와 다르게 사용하고 있다(D4, 잘못된 기호 사용). 중학생 뿐 아니라 고등학생도 주격조사 '은', '는'을 기호 '='와 동일시하는 경향이 있는데, 바뀐 교육과정에서도 고등학교에는 집합을 다루는 만큼, 세 가지 기호 $\in$, $\subset$, $=$의 의미를 정확히 구분하여 사용하여야 하며, 학생이 주격조사를 함부로 '='으로 대체하지 않도록 주의시켜야 한다. 또한 △은 세 점으로부터 삼각형을 특정하는 기호로서, '직각삼각형' 등의 용어의 일부인 '삼각형'이라는 단어를 기호 △로 대체할 수는 없다는 것도 인식시켜야 한다.

3. 평가 결과 분석

총 2회 8문항의 풀이를 분석한 결과를 전체적으로 살펴보면 아래의 두 표와 같이 정리할 수 있다.

[표11]은 각 문항별로 풀이를 시도한 학생과 계산이 맞는 학생의 인원수 및 전체(91명 또는 80명)에 대한 비율을 나타낸 표이다. 합계의 비율은 684개(91명×4문항 + 80명×4문항)의 답안을 기준으로 한 비율을 나타낸다.

[표 11] 문항별 풀이 시도 및 정답 비율
[Table 11] Percentage of trial and correct answers

문항 번호		풀이를 시도		계산 맞음		완벽한 풀이	
		수	비율	수	비율	수	비율
제1회 (91명)	1-1	87	96%	60	66%	52	57%
	1-2	47	52%	34	37%	0	0%
	1-3	56	62%	46	51%	7	8%
	1-4	43	47%	32	35%	8	9%
제2회 (80명)	2-1	74	93%	40	50%	6	8%
	2-2	48	60%	36	45%	7	9%
	2-3	55	69%	55	69%	13	16%
	2-4	50	63%	40	50%	4	5%
합 계 (전체 684)		460	67%	343	50%	97	14%

[표12]는 앞에서 분류한 오류유형별로 8문항 전체에서 발생 건수를 측정한 결과이다.

'발생률'은 총 684개의 답안 중 풀이를 시도하지 않은 224개의 답안을 제외한 나머지 460개의 답안을 기준으로 각 오류가 발생한 비율을 백분율로 계산한 값이다.

발생률의 합계는 오류의 총횟수 467을 답안의 개수 460으로 나눈 비율인데, 이 값이 100%를 넘는다는 것은, 학생이 풀이를 서술하였을 때에 평균적으로 하나 이상의 오류를 범한다는 뜻으로 해석할 수 있다.

‘분석대상 발생률’은 풀이를 시도한 460개의 답안 중에서 오류가 발생하지 않은 97개의 답안을 제외한 363개의 답안을 분석대상으로 하여 계산한 비율이다. 따라서 ‘발생률’보다 높은 수치로 나타나게 된다. ‘분석대상 발생률’의 합계 128.7%.는 오류 횟수 467을 분석 대상 답안의 개수 363으로 나눈 비율이다. 따라서 오류가 발생한 답안에 평균적으로 1.28개의 오류가 발견되어 복수의 오류가 발생한 답안이 많았음을 나타낸다.

[표12] 문항 전체에서 나타난 유형별 오류 빈도
[Table 12] Total frequency of each type of errors

오류유형	발생건수	발생률(%) (전체 460)	분석대상 발생률(%) (전체 363)
A: 내용지식 부족	58	12.6	16.0
B: 방법상의 오류	66	14.3	18.2
(B1) 풀이 미완성	41	8.9	11.3
(B2) 정답조건 누락	6	1.3	1.7
(B3) 계산 오류	19	4.1	5.2
C: 타당성 결여	157	34.1	43.3
(C1) 근거 없음	28	6.1	7.7
(C2) 근거 부족	119	25.9	32.8
(C3) 비논리적 방법	10	2.2	2.8
D: 표현 미숙	170	37.0	46.8
(D1) 임의의 기호	26	5.7	7.2
(D2) 문자의 의미 불명	68	14.8	18.7
(D3) 그림에 의존	35	7.6	9.6
(D4) 잘못된 기호 사용	38	8.3	10.5
(D5) 불명확한 표현	3	0.7	0.8
E: 유사 문제로 오인	16	3.5	4.4
합 계	467	101.5	128.7

오류 A, B의 발생률은 수치상으로는 비교적 낮지만, 이는 풀이를 시도하지 못한 경우를 오류 분석 대상에서 제외하고 구한 결과이다. 풀이를 시도한 비율이 67%에 그쳤다는 사실을 고려할 때, 기본 학습내용을 습득하지 못하거나 문제의 해결 방법을 찾지 못하는 학생이 매우 많다고 보는 것이 타당하다.

오류 C의 발생률은 34%으로 나타나는데, 이는 계산을 맞은 학생 3명 중 2명만이 실제로 문제를 타당하게 풀이할 수 있음을 의미한다. 또한 오류 C, D의 발생률 합은 70%가 넘는데, 이는 10명 중 3명만이 풀이 과정을 정확히 써서 의사소통할 수 있다는 뜻이 된다. 실제로 [표11]을 보더라도 계산을 맞은 343개의 답안 중 풀이가 완벽한 답안은 97개에 불과한데, 이 비율을 계산해 보면 28%라는 값이 나온다.

수능 시험이 선다형과 단답형으로만 구성되어 있어, 학생은 학년이 올라갈수록 자칫 답만을 빠르게 구하고자 하는 잘못된 습관을 기르도록 유혹을 받을 수 있다. 그러나 수학 수업에서는 풀이 과정을 단계별로 검토하는 습관이 길러져야 한다. 문제 풀이이든 증명이든, 아이디어 구상부터 정답의 도출까지 사고의 각 과정을 토의를 통해 서로 검토하고 보완하는 모든 활동을 수업 시간에 해 나가야 한다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서 고등학생의 기하와 벡터문제 풀이과정 서술을 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 선다형 정답률이 40% 이상인 문항을 서술형으로 다시 실시하였을 때, 풀이를 시도한 답안의 비율이 전체의 67%에 그쳤으며, 나머지 33%는 풀이를 시작하지 않았다. 또한 풀이 과정이 오류 없이 완벽하게 서술된 답안은 전체의 14%에 그쳤다.

둘째, 풀이를 시도한 답안 중 타당성이 결여된 풀이 방법을 사용한 비율이 34%에 달한다. 자세히 살펴보면, 자신의 답을 전혀 정당화하지 않은 경우가 6.1%, 필요한 조건을 빠뜨리는 등 근거가 부족한 경우가 25.9%, 비논리적인 방법을 사용하거나 자신의 풀이가 타당한지 검증하지 않은 경우가 2.2%로 나타났다. 이는 선다형이나 단답형 문항으로는 학생이 실제로 정확한 풀이 과정을 사용했는지 알 수 없다는 것을 의미한다.

셋째, 문제를 풀이하고도 자신의 풀이 방법을 정확히 표현해 내지 못하는 경우가 37%에 달한다. 세부적으로, 정의되지 않은 기호를 임의로 창작하여 사용한 경우가 5.7%, 문자를 도입하면서 뜻을 밝히지 않는 경우가 14.8%, 중요한 사항을 그림에만 표시하는 경우가 7.6%, 기호를 잘못 사용하는 경우가 8.3%, 표현이 불명확한 다른 경우는 0.7%이다.

연구결과와 관련하여, 기하와 벡터 문제 풀이과정 서술의 오류를 방지하기 위해 수업에서 유의해야 할 부분

을 다음과 같이 제시하고자 한다.

풀이의 타당성이 확보되는지, 특히 필요한 조건을 빠뜨리지 않았는지 점검할 수 있도록 하여야 한다. 정의된 기호를 사용하고, 문자를 도입할 때는 뜻을 밝히며, 중요한 내용은 그림에만 표시하지 않고 식이나 글로 정확히 표현할 수 있도록 해야 한다.

행렬과 일차변환에서는 기계적인 사고가 아니라 일차변환 및 각 변환의 정확한 정의와 개념을 사용하여 간단한 식을 세울 수 있도록 하고, 문제를 읽을 때는 계수뿐 아니라 변수 x, y도 꼼꼼히 읽어 실수하지 않도록 지도해야 한다.

학생들이 자주 하는 오류를 방지하기 위하여 이차곡선 수업 시 유의할 사항은 다음과 같다. 먼저 포물선의 초점을 구하는 것과 꼭짓점을 구하는 것을 혼동하지 않도록 개념을 확실하게 세워 주어야 한다. 벡터의 성분과 달리 점의 좌표에 대해서는 등호를 사용할 수 없음을 인식시켜야 한다. 평행이동을 할 때에는 정의되지 않은 임의의 기호를 사용하지 않고 어느 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 정확히 나타내도록 해야 한다. 풀이과정을 머릿속으로만 생각하지 말고 필기로 정리하여 계산에 오류가 없도록 해야 한다. 구한 답이 문제에 주어진 모든 조건에 맞는지, 반대로 자신이 이용한 조건이 문제에서 주어지거나 유도될 수 있는 것이 맞는지 확인하는 습관을 기르도록 해야 한다. 문자를 사용할 때 정확한 뜻을 정하고 사용하도록 주의시키고, 특히 '접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하자'를 생략하지 않도록 해야 한다. 이는 의사소통이 가능하게 함과 동시에 실수를 방지하기 위함이다.

본 연구를 수행하는 과정에서 연구팀은 특정학교 학생들을 대상으로 하여 연구팀이 개발한 검사지를 활용하였으므로 연구 결과를 일반화하기에는 제한이 있다. 따라서 다른 지역의 학교나 다른 학교급의 학생들을 대상으로 한 연구 및 다른 과목의 풀이과정 서술에서의 오류유형의 분류에 관한 다양한 연구가 이루어져야 한다. 또한, 수업 개선에 도움을 줄 수 있도록 오류의 유형별로 오류발생의 원인이 된 사고과정을 분석하여 대안을 제시하는 후속 연구가 이루어져야 함을 제언한다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 2009 개정교육과정에 따른 수학 교육과정, 교육과학기술부고시 제2011-36호, 서울:교육과학기술부.

The Ministry of Education, Science, and Technology (2011). *2009 reformed mathematics curriculum*, Seoul: MOST.

교육부 (2015). 수학과교육과정, 교육부고시 제2015-74호.

Ministry of Education (2015) *Mathematics Curriculum.*

권주희, 양성호, 이경언 (2015). 내용 영역에 따른 수학학습 부진아의 성취수준 및 오류유형 분석. 교육과학연구17(2), 127-161.

Kwon, J.H., Yang, S.H., & Lee, K.E. (2015). An Analysis of Mathematics Underachievers" Achievement Levels and Error Types according to the Contents Area, *Journal of Education Science, 17(2),* 127-161.

김래영, 김구연, 노선숙, 김민경, 전지훈, 김기영, 이민희 (2012). 중등 수학과 서술형평가 체계의 실제와 대안적 발전 방향 모색-경기도 창의·서술형 평가와 미국 오하이오 주 평가를 중심으로. 수학교육논문집 26(3), 273-299.

Kim, R.Y., Kim, G., Noh, S., Kim, M.K., Jeon, J.H., Kim, K.Y., & Lee, M.H. (2012). Current status and future direcion of constructed-response assessments – Cases of secondary mathematics in Gyeonggi-do and Ohio, *Communications of Mathematical Education 26*(3), 273-299.

김민경, 김의석, 이병헌, 이직현 (2015). 2016학년도 수능대비 수능특강 수학영역 기하와 벡터. EBS.

Kim, M.K., Kim, E.S., Lee, B.H., & Lee, S.H. (2015). *2016 CSAT Special Lectures - Mathematics - Geometry & Vectors*. EBS.

김범석 (2009). 공간도형의 문제해결과정에서 나타나는 수학적 오류 유형 연구. 교육대학원 석사학위논문, 한국교원대학교.

Kim, B.S. (2009). *A Study on Mathematical Error Types in Problem Solving Process of Space Figures, Unpublished master's thesis*, Korea National University of Education.

김부미 (2004). 인지심리학의 관점에서 수학적 오류의 분석가능성 탐색. 수학교육학연구 14(3), 239-266.

Kim, B.M. (2004). Cognitive Psychological Approaches on Analysing Students' Mathematical Errors, *Journal of Educational Research in Mathematics 14*(3), 239-266.

노영아, 안병곤 (2007). 도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구 – 초등학교 4학년을 중심으로. 한

국초등수학교육학회지 11(2), 199-216.

No, Y.A. & Ann, B.G. (2007). An Analysis on Error of Fourth Grade Student in Geometric Domain, *Journal of elementary mathematics education in Korea 11*(2), 199-216.

문혜영, 김응환 (2011). 고등학교 1학년 함수단원 문제해결에서의 오류에 대한 분석. 한국학교수학회논문집 14(3), 277-293.

Mun, H.Y. & Kim, Y.H. (2011) An Analysis of errors in problem solving of the function unit in the first grade highschool, *Journal of the Korean School Mathematics Society, 14*(3), 277-293.

박효진 (2008). 문자와 식 단원에서 학생들이 보이는 오류분석; 중학교 1학년 수학을 중심으로. 교육문화연구, 14(1), 105-133.

Park, H.J. (2008). An Analysis of the errors of 1st grade middle School Students in Mathematical Symbols and Equations, *Journal of Education & Culture 14*(1), 105-133.

이대현, 박배훈 (2002). 수학교육에서 시각화와 직관. 수학교육학연구 12(1), 71-79.

Lee, D.H. & Park, B.H. (2002). Visualization and Intuition in Mathematics Education, *Journal of Educational Research in Mathematics 12*(1), 71-79.

이용하, 박지현 (2011). 학습자의 오개념과 오류에 대한 수학 교사들의 PCK. 교과교육학연구 15(1), 223-242.

Lee, Y.H. & Park, J.H. (2011). A study of Mathematics Teacher's PCK with Respect to Students' Misconceptions and Errors, *Pedagogical content research 15*(1), 223-242.

임연휘, 표용수 (2013). 대학 입학 예정자들의 함수 및 미분의 기초개념 이해에 대한 오류 분석. 한국학교수학회논문집 16(2), 435-457.

Lim, Y.H. & Pyo, Y.S. (2013). An analysis of errors in understanding the fundamental concepts of function and differentiation for matriculants, *Journal of the Korean School Mathematics Society, 16*(2), 435-457.

임지현, 최창우 (2016). 도형 학습에서의 오류 찾기 활동의 적용 효과. 초등수학교육 19(1), 31-45.

Lim, J.H. & Choi, C.W. (2016). Effects on the Application by Finding Errors in the Learning of Figure, *Education of Primary School Mathematics, 19*(1), 31-45.

조윤동, 고호경 (2015). 문자와 식, 함수 영역에서 보이는 중학생의 수학적 오류 분석 - 2013년 국가수준 학업성취도 평가 서답형 문항을 바탕으로. 수학교육학연구 25(3), 281-302.

Jo, Y.D. & Ko, H.K. (2015). Analysis of Errors by Response Assessments of Korean Middle School Students on the 2013 National Assement of Educational Achievement in Mathematics, *Journal of Educational Research in Mathematics 25*(3), 281-302.

한경민, 고상숙, (2014). 원의 방정식의 서술형 평가에서 오류유형 분석. 수학교육 53(4), 509-524.

Han, K.M. & Koh, S.S. (2014). An Analysis of the mathematical errors on the items of the descriptive assessment in the equation of a circle, *The Mathematical Education 53*(4), 509-524.

황재우, 부덕훈 (2015). 중학교 기하 증명의 서술에서 나타나는 오류의 유형 분석. 수학교육 54(1), 83-98.

Hwang, J.W. & Boo, D.H. (2015). An Analysis of Types of Errors Found in the Proofs for Geometric Problems - Based on Middle School Course, *The Mathematical Education 54*(1), 83-98.

황혜정, 김명수 (2014). 수학 교과에서의 학생의 오답원인 자기평가에 관한 사례 연구. 수학교육논문집 28(2) 255-279.

Hwang, H.J. & Kim, M.S. (2014). A Case Study on Student Self-Evaluation of Wrong Answers in School Mathematics, *Communications of Mathematical Education 28*(2), 239-266.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*, New York: Academic Press.

An Analysis of Errors in Describing Solving Process for High School Geometry and Vectors

Hwang, Jae-woo
Daejeon Gao High School
E-mail : hjwedu@korea.kr

Boo, Deok Hoon†
Department of Mathematics Education, Chungnam National University
E-mail : dhboo@cnu.ac.kr

By analysing the examination papers from third grade high school students, we classified the errors occurred in the problem solving process of high school 'Geometry and Vectors' into several types. There are five main types — (A)Insufficient Content Knowledge, (B)Wrong Method, (C)Logical Invalidity, (D)Unskilled Expression and (E)Interference.. Type A and B lead to an incorrect answer, and type C and D cannot be distinguished by multiple-choice or closed answer questions. Some of these types are classified into subtypes — (B1)Incompletion, (B2)Omitted Condition, (B3)Incorrect Calculation, (C1)Non-reasoning, (C2)Insufficient Reasoning, (C3)Illogical Process, (D1)Arbitrary Symbol, (D2)Using a Character Without Explanation, (D3) Visual Dependence, (D4)Symbol Incorrectly Used, (D5)Ambiguous Expression. Based on the these types of errors, answers of each problem was analysed in detail, and proper ways to correct or prevent these errors were suggested case by case.

When problems that were used in the periodical test were given again in descriptive forms, 67% of the students tried to answer, and 14% described flawlessly, despite that the percentage of correct answers were higher than 40% when given in multiple-choice form. 34% of the students who tried to answer have failed to have logical validity. 37% of the students who tried to answer didn't have enough skill to express.

In lessons on curves of secondary degree, teachers should be aware of several issues. Students are easily confused between 'focus' and 'vertex', and between 'components of a vector' and 'coordinates of a point'. Students often use an undefined expression when mentioning a parallel translation. When using a character, students have to make sure to define it precisely, to prevent the students from making errors and to make them express in correct ways.

* ZDM Classification : E5
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key words : geometry and vectors, problem solving process, descriptive problems, types of errors
† Corresponding author