Journal for History of Mathematics
Vol. 30 No. 1 (Feb. 2017), 31–50
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.1.031

A study on the analysis of history of uniform convergence and its educational implications

평등 수렴의 역사에 대한 분석과 그 교육적 시사점에 대한 연구

Park Sun-Yong 박선용

This study analyses on the history of uniform convergence, and discusses its educational implications. First, this study inspects 'overflowing of the Euclidean methodology' which was suggested by Lakatos as a cause of tardy appearance of uniform convergence, and reinterprets that cause in the perspective of 'symbolization'. Second, this study looks into the emergence of uniform convergence of Seidel and Weierstrass in this viewpoint of symbolization. As a result, of analysis, we come to know that the definition of uniform convergence had been changed into the theory of 'domain and graph' from that of 'point and function value' by the location change of the quantifier. As these results, this study puts forward an educational suggestion from an angle of epistemological obstacle, concept definition and concept image.

Keywords: uniform convergence, quantifier, Seidel, Weierstrass, domain; 평등 수렴, 양화사, 자이델, 바이어슈트라스, 영역.

MSC: 01A55 ZDM: A35

1 서론

대학수준의 해석학 교육에서 평등 수렴(또는 고른 수렴)의 개념은 흔히 "$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)$ 인가? 연속인 함수열에 대한 극한함수도 연속인가?" 와 같은 교환가능성의 문제를 통해 도입된다. 그리고 수업에서 점별 수렴과 구별되는 평등 수렴의 정의를 제시하고 몇몇 사례를 통해 그 차이를 인식하게 하려 한다. 하지만 대부분의 예비 수학교사는 점별 수렴과 평등 수렴 사이의 구별을 어려워하면서 진정한 이해 없이 각 정의를 외운 채 그것을 증명과 문제 해결에 적용하게 된다.

이러한 교육적 단점을 극복하기 위해 제안된 것 중, 가장 주목받아온 것이 라카토스의 증명과 반박의 방법에 따른 교육이라 하겠는데 그 계열은 다음과 같다 [11, p. 301–302].

이 연구는 2015학년도 영남대학교 학술연구조성비의 지원을 받아 수행된 것임.
Park Sun-Yong: Dept. of Math. Edu., Yeungnam Univ. E-mail: polya@yu.ac.kr
Received on Nov. 15, 2016, revised on Jan. 20, 2017, accepted on Jan. 25, 2017.

① 원초적인 추측 : 연속함수의 임의의 수렴하는 수열의 극한함수는 연속이다.

② 증명(원초적인 추측을 부분추측이나 보조정리로 분해하는 대강의 사고실험) : 연속함수에 대한 코시의 정의와 증명

③ 전면적인 반례(원초적인 추측에 대한 반례)의 출현: 반례인 Fourier 급수 $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots$ 및 여러 가지 전면적인 반례의 제시

④ 증명의 검토, 전면적인 반례가 국소적인 반례가 되는 '유죄인 보조정리'의 발견과 증명 및 추측의 개선, 새로운 증명생성 개념의 출현 : $\epsilon - \delta$방법에 의한 증명분석, 평등 수렴 개념의 도입

이와 관련해, Bressoud [3]의 ⟨실해석학: 전혀 새로운 접근⟩은 역사 발생적 원리에 기초하여 위의 라카토스의 제안을 충실히 반영한 교재라 할 수 있다. 연구자는 이 책의 구성 전개에 따라 교육대학원 및 일반대학원 해석학 수업을 하였는데, 이미 학부에서 해석학을 배운 예비 및 현직 교사조차 평등 수렴 개념에 대해 혼란스러워 하는 문제가 지속적으로 발생하였다.

물론, 이런 현상이 학생에게 익숙하지 않은 교육 방식, 푸리에 급수의 개념상의 어려움, 교수-학습 시간의 부족 등에 기인한 것일 수도 있다. 하지만 학습의 양을 줄이면서 푸리에 급수가 아닌 쉬운 예를 도입하거나 평등 수렴 개념에 이르는 '증명과 반박'의 모습을 토론식이 아닌 설명식으로 쉽게 가르치더라도 '복습을 하는' 학습자에게 오히려 혼란만 가중시키는 일이 벌어지곤 하였다. 왜 이런 일이 벌어지는 것일까? 라카토스와 Bressoud의 제안이 역사 발생적 원리에 기초했다는 점을 고려할 때, 이러한 현상의 원인을 평등 수렴이 출현하는 역사에서 나타났던 어려움과 비교해 알아볼 필요가 있었다 [5].

이를 계기로 삼아 수업의 전체 내용과 방법을 검토하면서, 수학사에 대한 재-고찰 과정에서 라카토스의 제안이 평등 수렴 개념의 발생적 측면을 온전히 반영하지 못하고 있음과 그렇게 반영되지 않은 사항이 평등 수렴 개념의 도입에 큰 영향을 줄 수 있음을 인식하게 되었다. 구체적으로 말해, 연속함수열의 극한함수가 불연속인 경우에 대한 증명분석을 온전하게 수행하더라도 오늘날의 평등 수렴 개념에 이르지 못하는 것이다.

이 연구는 라카토스의 제안의 이러한 한계점을 수학사에 대한 분석을 통해 살펴보고 그의 제안을 교육적 측면에서 보완하는 데에 목적이 있다. 현재의 평등 수렴과 자이델이 도입한 평등 수렴 사이에는 차이가 있는데, 이 연구는 차이를 명확히 드러내고 그것을 극복하기 위한 교육적 방안을 찾고자 하는 것이다.

이에 대한 논의를 시작하기 위해, 우선 평등 수렴 개념의 출현의 배경과 그에 대한 라카토스의 분석부터 살펴보기로 하자.

2 평등 수렴 출현의 배경: 코시의 연속정리와 그에 대한 반례

'극한 이전까지 참인 것은 극한에서도 참이다.'는 '연속성에 대한 공리'와 관련해, 코시는 1821년에 '연속함수(열)의 수렴하는 급수의 극한도 연속이다.'[1)]는 명제(일명, 코시의 연속정리)에 대한 증명을 제시하였다. 왜 코시는 당시까지 자명한 것으로 받아들여진 '연속성에 대한 공리'에 부합하는 명제인 '연속정리'를 증명하려 했던 것일까?

이러한 증명 시도는, 푸리에의 1807년 〈고체의 열전도 이론(Theory of the Propagation of Heat in Solid Bodies)〉에 제시된 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1)x$와 같은 예가 불연속함수가 되는 현상과 관련이 있다. 라카토스에 따르면, 코시가 푸리에의 예가 등장했던 초기에 '곡선의 연속성이 그 곡선이 연속함수들의 방정식 하나로 표현될 수 있다는 것에 의존하지 않는다.'는 것을 명확히 인정했던 것은 아니다. 오히려, 그는 푸리에 급수의 예가 등장했던 상황에서 연속함수에 대한 산술적 정의를 제공함으로써 푸리에 급수의 예가 연속정리에 대한 반례로서 부적절함이 드러날 것으로 기대하였다 [2, 6, 8].

하지만 코시의 연속함수에 대한 산술적 정의를 사용하더라도 여전히 푸리에 급수의 반례로서의 부적절함은 밝혀지지 않았다. 코시는 그의 연속함수에 대한 정의가 당시 수학계의 엄밀치 못한 관행을 없애줄 것으로 기대했는데, 자신의 정의를 사용할 경우에 오히려 '연속정리'가 거짓인 명제가 되고 결과적으로 당시의 상식인 '연속성에 대한 공리'가 부정되는 상황이었다. 이에, 코시는 자신의 연속에 대한 정의가 '연속성에 대한 공리'와 충돌하지 않는다는 것과 푸리에의 예가 일명 '연속정리'에 대한 반례가 되지 않는 '부적절한 예'임을 동시에 보이려 하였다. 이러한 코시의 의도에 대해, 라카토스는 다음과 같이 말한다.

> 만일 우리가 연속성에 대한 직관적인 개념을 코시의 개념으로 바꾼다면 (그리고 이때에만!), 연속성에 대한 공리[2)]는 푸리에의 결과와 모순되는 듯하다. 이것은 코시의 정의(연속성뿐만 아니라 극한의 정의와 같은 다른 정의도)에 반대하는 강력하고 아마도 결정적인 논거처럼 보인다. 그래서 코시가, 연속 공리를 그에 대한 그의 새로운 해석으로 실제로 증명할 수 있다는 것을 보이기를 원하고, 거기서 그의 정의가 이러한 가장 엄격한 적절성에 대한 요구를 만족한다는 증거를 제공하고자 한 것은 놀라운 일이 아니다 [11, p. 234].

사실, 19세기 초까지 수학자들은 어떤 함수에 대한 그래프를 종이에서 떼지 않고 연필로 그릴 수 있다면 그 함수를 연속 함수로 간주하였다. 그 당시 무한급수를 마구잡이로 사용하던 관행과 관련해, 이미 몇몇 수학자들은 '연속함수가 테일러 정리에 의해 항상 무한급수로 표현된다.'는

1) 라카토스의 오류주의에 따르면, 이 명제를 '정리'보다 '추측'이라 부르는 것이 적합하다. 하지만 라카토스가 수학사학계의 관행을 존중해 이 명제를 '코시의 연속정리'로 지칭했듯이 이 논문에서도 그렇게 부르기로 한다.

2) 여기서, 연속성에 대한 공리는 '연속함수(열)의 수렴하는 급수의 극한도 연속이다.'는 코시의 연속정리를 지칭한다. 코시의 연속정리는 '연속성에 대한 공리'의 특별한 한 경우에 해당한다.

것에 대해 의심했고 연속함수가 무엇인지에 대해 고찰하기 시작하였다. 물론, 이러한 시대적 상황은 공간 직관을 피하는 '연속에 대한 만족할 만한 정의' 를 요구했다고 할 수 있고, 볼차노의 정의와 더불어 '코시의 연속함수에 대한 산술적 정의' 는 그에 대한 역사적 대응물이었다고 할 수 있다 [4, 10].

이러한 등장 배경을 가진 코시의 연속정리에 대한 증명과 관련해, 수학사학계에서는 1826년에 아벨이 그 정리에 대한 반례와 함께 평등 수렴 개념을 제시한 것처럼 간주하여 왔다. 하지만 라카토스 [11] 는 아벨이 반례를 명확히 제시한 것은 맞지만 예외배제법[3)] (the method of exception-barring) 을 통해 코시의 연속정리가 성립하는 안전한 영역으로 후퇴하는 활동에 머물렀을 뿐이라고 한다. 그리고 보조정리 합체법 (the method of lemma-incorporation)[4)] 을 의식적으로 사용했던 자이델이 코시의 증명에 대한 분석[5)] 을 통해 1847년에서야 그 증명에서 감추어진 보조정리를 드러내고 증명생성개념[6)] (proof-generated concept) 으로서의 평등 수렴을 추출하였다고 주장한다.

그러면서, 라카토스는 1821년부터 1847년까지의 오랜 기간 동안 선도적인 수학자들이 코시의 증명에서 명확하게 오류를 발견하지 못하고 점별 수렴과 구분되는 평등 수렴의 개념을 추출하지 못한 근본적 이유는 당시에 증명분석을 거부하는 유클리드적 방법론[7)] 이 팽배해 있어서 증명분석의 엄밀성을 추구하지 못했기 때문이라고 말한다.

이러한 라카토스의 주장은 크게 두 가지로 요약할 수 있다. 하나는 1847년에서야 자이델이 보조정리 합체법을 사용하여 평등 수렴 개념을 도입하게 되었다는 것이고, 다른 하나는 평등 수렴 개념이 그처럼 뒤늦게 도입된 것은 증명분석을 가로막는 전통이 있었기에 반례가 나왔음에도 코시의 증명에서 잘못된 부분을 찾는 활동이 활발하고 엄격하게 이루어지지 않았다는 것이다.

3) 예외배제법은 어떤 추측 자체에 대한 전면적 반례가 출현했을 때, 반례에 의해 추측을 기각하는 대신에, 그 반례를 예외로 전환하여 간주함으로써 그러한 예외를 적절히 반영한 조건절을 원래의 추측에 끼워 넣어 추측을 개선시키려는 방법을 뜻한다.

4) 라카토스에게 '증명' 이란 '어떤 추측에 대한 비판을 원활하게 하기 위해 추측을 여러 부분추측 (또는 보조정리) 로 분할하는 사고실험', '어떤 추측을 부분추측 또는 보조정리로 분해하여 그것을 가능한 한 매우 멀리 떨어져 있는 지식체 가운데 끼워 넣는 것' 을 의미한다 [11, p. 31]. 이런 관점에서, 보조정리 합체법은 어떤 추측 자체에 대한 전면적 반례가 출현했을 때 그 반례가 보조정리에 대한 반례인 국소적 반례도 되는지를 알아보는 비판적 점검 활동 (일종의 증명분석) 을 통해 증명 안에서 '반박되는 보조정리' (또는 자명하지 않는 보조정리, 감추어진 보조정리) 를 찾아내어 그 보조정리를 원래의 추측에 조건으로 합체시키는 방법을 뜻한다.

5) 라카토스는 '증명분석' 에 대해 '증명을 주의 깊게 조사하여 자명하지 않은 보조정리의 목록을 마련하는 것', '증명에 대한 언어적 명료화' 라 하였다 [11, p. 100].

6) 증명생성개념은, 증명을 분석하는 과정에서 나오는 개념이기에, 많은 경우에 있어 보조정리 합체법이 사용되는 과정 속에서 출현하게 되는 개념이라 할 수 있다.

7) 라카토스는 '유클리드적 방법론 (Euclidean methodology)' 을 '공리, 정의, 정리로서의 연역체계를 구축하는 방법론' 의 의미로 사용하며, '방법론' 에서의 '방법' 은 폴리아와 베르나이스의 '발견술', 포퍼의 '발견의 논리' 나 '상황논리' 에서 사용되는 '술', '논리' 등과 같은 의미로 사용한다 [11, p. 20].

3 평등 수렴이 출현할 수 있었던 디딤돌 : 기호화

라카토스는, 19세기 초의 선도적 수학자들조차 추측 자체에 대한 전면적 반례를 발견했을 때 그 추측에 대한 증명을 주의 깊게 분석하고 증명 안에서 유죄인 보조정리를 찾으려고 시도해야 한다는 점을 알지 못했으며 그들 대부분은 발견술적으로 볼모인 예외배제법에 의해 전면적 반례를 처리하려고 하였다고 말한다. 여기서, '유죄인 보조정리를 찾으려고 시도해야 한다는 점을 알지 못했다.' 는 것은, 라카토스의 용어를 빌자면, 19세기 초의 비형식적 수학활동에서 어떤 추측에 대한 전면적 반례가 (증명 속의) 보조정리에 대한 국소적 반례일 것을 요구하는 원리, 즉 거짓이 결론에서 그 전제로 다시 전달되는 '허위성의 재-전달 원리(the principle of re-transmission of falsity)' 가 실제로 잘 적용되지 않는 경향이 있었음을 말한다고 하겠다.

이러한 19세기 초의 수학계의 풍조로 인해, 라카토스는 코시의 연속정리에 대한 전면적 반례가 출현했을 때 그 정리에 대한 증명에서 결함을 찾는 증명분석 작업이 활발하게 이루어지지 않았기에 당시에 증명(또는 보조정리) 안에 감추어진 '평등 수렴' 개념을 끄집어낼 충분한 기회가 없었다고 주장한다. 그리고 이와 관련된 수학사적 증거로써, 그는 아벨의 예외배제법과 자이델의 보조정리 합체법을 비교하여 제시한다.

라카토스는 아벨이 1826년에 코시의 연속정리와 관련해 예외배제법을 다음과 같이 사용했다고 밝히고 있다.

> 그(아벨)는 '내가 보기에 코시 정리에 대한 몇 가지 예외가 있는 것 같다.' 고 쓰고 있으며, 곧바로 $\sin\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi + \frac{1}{3}\sin 3\phi - \frac{1}{4}\sin 4\phi \cdots$ 의 예를 제시하고 있다. 아벨은 '알려진 바와 같이 이와 같은 예가 훨씬 많이 있다.' 고 덧붙이고 있다. 이들 반례에 대한 그의 반응은 '코시 정리의 안전한 영역은 무엇인가?' 라고 추측하기 시작한 것이다. 이 질문에 대한 그의 대답은 이렇다. 일반적으로 해석학의 정리가 타당한 영역 그리고 특히 극한 함수의 연속성에 대한 정리가 타당한 영역은 멱급수로 제한된다 [11, p. 239].

라카토스는 이와 같은 아벨의 예외배제법이 증명의 엄밀성을 추구하는 수준에 머문 것이라 말하며, 이러한 한계는 유클리드적 방법론의 만연에 기인한 것이라 주장한다. 그러면서, 그는 코시의 경우를 들어 19세기 초에 유클리드적 방법론이 어떻게 예외배제법의 광범위한 사용을 야기했는지에 대해 다음과 같이 설명한다.

> 엄밀성에 대한 코시의 혁명은 유클리드적 방법론을 미적분에 적용하려는 의식적인 시도에 의해 동기유발이 되었다. (중략) 그런데 유클리드적인 골격 내에서는 거짓인 것의 증명을 시도할 여지가 없다. 그래서 코시는 먼저 거짓인 잡동사니를 버림으로써 현존하는 수학적 추측의 덩어리를 개선하지 않을 수 없었다. 추측들을 개선하기 위하여 그는 예외를 찾아 원래의 경솔하게 진술된 추측이 타당한 영역을

안전한 분야로 제한하는 방법을 적용하였다. 곧, 그는 예외배제법을 적용하였다 [11, p. 245].

한편, 이러한 라카토스의 논거에는 증명의 엄밀함과 증명분석의 엄밀함에 대한 구분이 내재해 있다. 라카토스는 "증명과 증명분석을 구분하고 그에 대응하여 증명의 엄밀함과 증명분석의 엄밀함을 구분하는 것은 매우 중요한 듯하다." [11, p. 109]고 하며, 그는 코시와 아벨과 같은 19세기 초의 최고의 수학자들조차 '수정같이 맑은 사고실험이나 구성', 즉 '증명의 엄밀함' 은 추구했지만 증명 (사고실험) 을 언어적으로 정교화하는 시도, 사고실험 이면의 패턴과 연역적 구조를 발견하려는 시도, 추측뿐만 아니라 증명이 타당한 영역을 밝힘으로써 증명한 것을 확실히 하려는 시도, 예외를 발견하면 증명을 다시 살펴보려는 시도를 하는 것과 같은 '증명분석의 엄밀함을 의식적으로 추구하는 활동' 을 하지 않았다고 주장한다. 덧붙여, 그들에게 그러한 시도를 해야겠다는 생각조차 떠오르지 않았을 것이라 보았다.

이러한 라카토스의 주장은 '유클리드적 방법론에 의해서는 증명분석의 엄밀함을 추구하는 것이 아니라 증명의 엄밀함을 추구하는 수준에 머물 수밖에 없고 그에 따라 예외배제법보다 나은 방법을 사용할 수 없었다.' 는 것으로 요약할 수 있다. 여기서, 이러한 라카토스의 주장을 재해석 또는 비판적으로 검토하기 위해 그가 말하는 '증명의 엄밀함' 과 '증명분석의 엄밀함' 이 어떻게 구분되는 것인지에 대해 살펴볼 필요가 있을 것이다.

이러한 라카토스의 구분을 반힐레의 학습수준 이론에 비추어보면, 그 구분의 의미가 좀 더 명확하게 드러난다. 다시 말해, '증명의 엄밀함을 추구하는 수준' 과 '증명분석의 엄밀함을 추구하는 수준' 을 각각 반힐레의 제 4 학습수준과 제 5 학습수준에 대응시켜 생각하면, 두 수준 사이의 구분이 잘 드러나게 된다.

우선, 유클리드적 방법론에 기초해 증명의 엄밀함을 추구하는 수준에 대해 고려해보자. 라카토스는 '유클리드적 방법론' 이 무엇인지에 대해 명확히 서술하고 있지 않았다. 하지만 "방법에 대해서는, 나는 대수의 일반성으로부터 이끌어낸 이유에 결코 호소하지 못하도록, 기하에 요구하는 엄밀성을 그들 (미적분) 에게 부여해야만 하였다 [11, p. 245, 재인용]." 와 같은 코시의 1821 년의 언급을 밝히면서 유클리드 방법론에 대해 다룬 것으로 볼 때, 라카토스는 '유클리드적 방법론' 을 '공리, 정의, 정리를 가지고 실질적 공리학 체계를 구축하는 방법론' 의 의미로 사용했다고 할 수 있다. 그런데 이처럼 실질적 공리학 체계를 구축하는 것은 정확히 반힐레의 제 4 학습수준에 해당한다. 유클리드적 방법론에 기초해 증명의 엄밀함을 추구하는 수준은 반힐레의 제 4 학습수준에 대응된다고 할 수 있는 것이다.

이와 대비해, 라카토스가 증명분석의 엄밀함을 추구하는 수준이라 지칭한 것은 자이델이 $\epsilon - \delta$ 방법을 가지고 증명분석을 한 활동인데, 이러한 활동은 반힐레의 제 5 학습수준에 근접한다고 할 수 있다. 반힐레의 제 5 학습수준은 형식적인 공리학 체계를 구축하고 어떤 공리체계와 관련해 건전성, 완전성, 무모순성, 독립성 등을 다루는 수준이다. 형식적 공리학의 구축은

인간의 직관이 개입하지 않아도 명제의 진위를 기계적으로 판별 가능하게 하는 데에 목적이 있다. 그런데 $\epsilon - \delta$ 기호체계를 통해 명제를 다루고 분석하는 것은, 특정 명제의 진위를 선명히 드러내려는 증명의 엄밀성을 추구하는 차원을 넘어서, 어떤 사람이 판단하더라도 '의미' 와 '직관' 의 개입이 없이 그 진위를 바로 판별해낼 수 있게 하려는 수준에 가깝다고 할 수 있다. 형식적 공리학의 전조라 할 만한다. 이러한 특징으로 인해, 증명분석의 엄밀함을 추구하는 수준은 반힐레의 제 5 학습수준의 초기에 가깝다고 할 수 있다.

$\epsilon - \delta$ 방법으로 대변되는 '해석학의 산술화' 는 '직관 배제' 와 '기호 조작' 을 추구한다는 면에서 형식적 공리학과 그 정신을 공유한다. 다시 말해, $\epsilon - \delta$ 방법에 의한 증명분석을 수행하는 활동은 '해석학의 산술화' 의 전형적 도구이며 형식적 공리학처럼 '의미' 를 제거한 체 기호를 조작하고 그 적절성에 대해 다루는 성격이 있는 것이다.

이러한 논의를 종합하면, 라카토스가 19세기에 평등 수렴이 더디게 출현한 이유로 밝힌 '유클리드적 방법론의 팽배' 는 당시의 '기호체계의 불완전함 ' 과 밀접한 연관이 있다고 할 수 있다. 즉, 기호체계가 충분히 성숙하지 않았기 때문에 '증명분석을 가로막는 전통' 이 유지될 수 있었던 것이다. 반면에, '기호화의 성숙' 은 상대적으로 증명분석의 수월성을 낳았다고 할 수 있다. 이러한 상대적 수월성에 대해, 자이델은 다음과 같이 말한다

> 일반적으로 타당하지 않은 명제에 도달했다는 것이 확실하다면, 그 명제의 증명에는 기본적으로 어떤 숨은 보조정리가 들어있다. 이 증명에 대한 정확한 분석을 하게 되면, 그 숨은 가설을 발견하는 것은 어렵지 않다. 불연속 함수를 나타내는 급수가 나타난 상황에서도 이렇게 적용할 수 있음을 반대로 추론할 수 있다 [1, p. 202–203, 재인용].

4 자이델의 증명 분석에 기초해 '평등 수렴' 을 정의하기

기호화의 관점에서 볼 때 디리클레, 자이델, 바이어슈트라스 등으로 이어지면서 기호체계를 통해 산술화된 해석학을 구축하던 활동은, 비록 기호화를 시도했다고 하더라도, 코시가 무한과 무한소에 대해 부적절한 용어를 사용하면서 해석학을 다룬 활동과는 분명히 다른 것이었다 [6, 7, 8, 10]. 이러한 기호화의 입장에서, 자이델이 기호를 사용해 '코시의 연속정리의 증명' 에 대한 분석을 어떻게 수행했는지에 대해 고찰하도록 하자.

임의의 자연수 n과 연속함수 $f_n(x)$에 대해 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} f_m(x)$와 $r_n(x) = \displaystyle\sum_{m=n+1}^{\infty} f_n(x)$를 정의하고 $S(x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$가 연속함수의 수렴하는 급수라 할 때, 코시의 증명은 다음과 같이 세 가지의 전제로부터 나오는 결론이라 할 수 있는데, 자이델은 이 증명에 대한 분석을 어떤 특정한 점 x를 중심으로 한 매우 작은 근방 $(x - \delta, x + \delta)$에 초점을 맞추어 수행한다 [3, p. 206; 11, p. 237].

코시의 연속정리에 대한 증명의 개요

전제① : 임의의 $\epsilon > 0$에 대해, 임의의 b에 대하여 $|b| < \delta$이면 $|S_n(x+b) - S_n(x)| < \epsilon$인 δ가 존재한다. $S_n(x)$가 연속이므로 그러한 δ가 존재한다.

전제② : $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $|r_n(x)| < \epsilon$인 N이 존재한다. $S(x)$가 수렴하므로 그러한 N이 존재한다.

전제③ : $n \geq N'$인 모든 자연수 n에 대하여 $|r_n(x+b)| < \epsilon$인 N'가 존재한다. $S(x+b)$가 수렴하므로 그러한 N'이 존재한다.

결론 : $|b| < \delta$인 모든 b에 대하여

$$\begin{aligned} |S(x+b) - S(x)| &\leq |S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| \\ &\leq |S_n(x+b) - S_n(x)| + |r_n(x+b)| + |r_n(x)| \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$

이러한 코시의 증명에 대해, 자이델은 양 사이의 함수적 의존 관계를 명확히 드러냄으로써 다음의 감추어진 보조정리를 찾아냈는데, 그 핵심은 최댓값의 존재성에 대한 것이다.

자이델의 증명분석의 개요

전제① 에서의 관계: $|b| < \delta(\epsilon, x, n)$이면 $|S_n(x+b) - S_n(x)| < \epsilon$

전제② 에서의 관계: $n \geq N(\epsilon, x)$이면 $|r_n(x)| < \epsilon$

전제③ 에서의 관계: $n \geq N(\epsilon, x+b)$이면 $|r_n(x+b)| < \epsilon$

결론 : 만약 $n \geq \max\{N(\epsilon, z) | \epsilon > 0,\ z \in (x-\delta, x+\delta)\}$이고[8)] $|b| < \delta(\epsilon, x, n)$이면 $|S_n(x+b) - S_n(x)| = |S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| < 3\epsilon$

자이델이 찾아낸 '감추어진 보조정리' 는 임의의 ϵ에 대해 최댓값인 $\max\{N(\epsilon, z) | z \in (x-\delta, x+\delta)\}$이 존재해야 한다는 것이다. 그리고 이 최댓값의 존재유무에 따라 자이델은 다음과 같이 '느린 수렴' 과 '평등 수렴' 의 개념을 도입한다.

자이델의 느린 수렴

> 만약 각각의 함수열은 연속이지만 어떤 점 x의 불연속함수로 수렴하는 급수가 있다면, 그 점의 매우 작은 근방에서 그 급수는 임의로 느리게 그 함수로 수렴하는 반면에 그 함수가 급히 도약(jump)하게 되는 x의 (함숫)값을 찾을 수 있다 [1, p. 203, 재인용].

8) 여기서, $N(\epsilon, z)$는 최소필수성(minimality)의 성질이 있는 자연수라 하자. 즉, 주어진 어떤 점 $z \in (x-\delta, x+\delta)$에서 점별 수렴하지만 자연수 $N(\epsilon, z) - 1$을 가지고서는 '점별 수렴의 식' 을 만족시키지 못한다. 구체적으로 '$n = N(\epsilon, z) - 1$일 때 $|S_n(z) - S(z)| \geq \epsilon$' 임을 말하는 것이다. 각각의 상황에서 언급하지 않더라도, 정렬정리에 기초해, 이 논문에서 다루는 '점별 수렴' 및 '평등 수렴의 정의에 나타나는 $N(\epsilon, x)$, $N(x, \epsilon)$, $N(\epsilon)$ 등은 이러한 최소필수성을 가진 것이라 하자.

자이델의 (점별) 평등 수렴

> 임의로 작은 모든 양수 ϵ에 대해, $n > n_0(\zeta, \epsilon)$와 $\zeta - \delta(\zeta) \leq x \leq \zeta + \delta(\zeta)$에 대해 $|r_n(x)| < \epsilon$을 만족하는 $\delta(\zeta)$이 존재한다면, 급수 $\sum u_n(x)$는 구간 $[a, b]$의 어떤 점 ζ의 근방에서 평등 수렴한다 (The series $\sum u_n(x)$ is uniformly convergent in the neighborhood of a point ζ of the interval $[a, b]$ if there exists a $\delta(\zeta)$ such that $|r_n(x)| < \epsilon$ for every arbitrarily small positive ϵ, for $n > n_0(\zeta, \epsilon)$ and $\zeta - \delta(\zeta) \leq x \leq \zeta + \delta(\zeta)$) [1, p. 204, 재인용].

그런데 이 자이델의 평등 수렴은 '구간 $[a, b]$ 위의 특정한 점 ζ에 대해 $\lim_{x \to \zeta} r_n(x) = 0$' 임을 뜻한다: "$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+ \; s.t. \; \forall x \in [a, b], |x - \zeta| < \delta(\epsilon) \longrightarrow |r_n(x) - 0| < \epsilon$" 임을 말한다. 이런 특성에 근거하면, 자이델은 점 $x = \zeta$에서 평등 수렴을 정의한 것처럼 보인다.[9] 그러면, 마치 특정한 점에서 평등 수렴을 정의한 것처럼 보이므로, 이 정의를 편의상 '자이델식의 점별 평등 수렴' 이라 부르기로 하자.

한편, 앞서의 자이델의 증명분석을 토대로 해서 Bressoud [3, p. 205–209]는 구체적이고 쉬운 반례를 통해 코시의 연속정리의 증명 안에 '감추어진 가정' 을 찾고 평등 수렴을 도입하는 활동을 제안하였는데, 그 개요는 다음과 같다.

(예)

$$S_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2} \quad \text{일 때,} \quad r_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{1+nx^2} & x \neq 0 \end{cases} \; S(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{이다.}$$

x가 0에 매우 가까이 있지만 0이 아닐 때

$$|S(x) - S(0)| \leq |S_n(x) - S_n(0)| + |r_n(x)| + |r_n(0)| = \frac{nx^2}{1 + nx^2} + \frac{1}{1 + nx^2} + 0 = 1$$

과 같은 반례가 있으므로, 코시의 증명에는 문제가 있다. 이러한 문제는 n의 크기가 x에 좌우되기 때문에 발생하는데, 이 예를 통해서도 $|r_n(x)| = \frac{1}{1 + nx^2} < \epsilon$이기 위해서는 $\frac{1 - \epsilon}{\epsilon x^2} < n$이어야 하므로, $|x|$의 값이 작아지면 n의 값이 커짐을 알 수 있다. 그에 따라 $\frac{nx^2}{1 + nx^2}$과 $\frac{1}{1 + nx^2}$을 동시에 작게 만들 수 없다. 그런데 $|r_n(x)|$의 크기가 x에 좌우되지 않으면 이런 종류의 문제가 발생하지 않는다. 이런 상황과 관련해, Bressoud는 '어떤 구간에서 급수가 평등 수렴한다.' 는 정의를 도입한다.

이러한 Bressoud의 평등 수렴의 도입방식은 '자이델의 증명 분석과 평등 수렴' 을 어떻게 반영했다고 할 수 있을까? 여기서, 한 가지 중요한 의문이 제기된다. 자이델은 어떤 특정한

9) 점에서 정의한 것처럼 보이지만, 엄밀히 말해 구간에서 정의한 것이다. 다만, '자이델식의 점별 평등 수렴' 의 '점별' 표현은 '특정한 점에 초점을 맞추어 다루는' 의 의미를 가진다.

점의 매우 작은 근방에서 증명 분석을 수행하고 그 점 또는 그 근방에 대해 평등 수렴을 정의하였다. Bressoud 역시도 코시의 연속정리 증명에 대한 분석을 특정한 점과 그 근방에 대해 수행하였다. 그런데 어떻게 '점' 에서 평등 수렴이 아니라 '구간 또는 영역' 에서 평등 수렴을 정의하는 방식으로 나아갈 수 있는 것일까? 사실, 이 연구를 통해 밝히겠지만 이것은 매우 중요한 간격이다. 그리고 역사에 대한 탐색을 통해 이 간격을 교육적 차원에서 메우는 것이 이 연구의 목적이기도 하다.

그러면, 어떤 특정한 점의 근방에서 '$|r_n(x)|$의 크기가 x에 좌우되지 않는다.' 는 것으로부터 '영역 또는 구간' 의 평등 수렴에 대한 정의로 어떻게 나아가야 하는 것일까? 즉, 자이델과 같이 어떤 특정한 점에서 정의하는 방식이 아니라 어떤 영역이나 구간 위에서 균등 수렴을 어떻게 정의해야 할까?

이 논의가 자이델의 증명 분석과 그의 '점별 평등 수렴' 에 근거하고 있기 때문에, 가장 자연스러운 방식은 '어떤 영역이나 구간의 모든 점에서 자이델식으로 점별 평등 수렴한다.' 는 것을 활용하는 방식이라 할 수 있다.

'어떤 영역의 각 점마다 자이델식으로 점별 평등 수렴한다.' 는 것은 '구간 또는 영역 D의 모든 임의의 점 ζ에 대해 $\lim_{y\to\zeta} r_n(y) = 0$' 임을 말한다. 그리고 그것은 $|r_n(x)|$의 크기가 x에 좌우되지 않게 됨을 의미한다. 그렇다면, 어떤 주어진 ϵ에 대응하는 자연수를 x에 좌우되지 않게 찾아 $|r_n(x)| < \epsilon$을 만족시키는 것이라 할 수 있다. 그런데 이 자연수는, $x \in D$에 좌우되지 않는 값이므로, 주어진 ϵ에 대한 일종의 최댓값 $\max\{N(\epsilon, z)|z \in D\}$에 해당한다.

이러한 논의를 종합하면, '영역 D에서 평등 수렴' 을 정의하기 위해 '영역 D에서 점별 수렴' 과 차별화되어야 할 것은, 어떤 점의 매우 작은 근방에서와 마찬가지로, 여전히 '$x \in D$에 좌우되지 않는 최댓값 $\max\{N(\epsilon, z)|z \in D\}$' 의 존재라 할 수 있다.

그렇다면, '영역' 에서 평등 수렴을 정의하는 합리적인 방식은 '영역에서 점별 수렴' 의 정의에 최댓값의 존재성, 즉 '찾고자하는 최댓값이 x에 좌우되지 않는다.' 는 특성을 합체시키는 것이다. 물론, 이것은 라카토스의 보조정리 합체법에 의해 증명생성 개념으로서의 '어떤 영역에서 평등 수렴' 개념을 산출하는 방식이기도 하다.

이러한 논의에 기초해, 보조정리 합체법을 이용하여, 실수 $\mathbb{R}$의 부분집합인 D 위에서 함수열 $\langle S_n\rangle$이 정의되고 각 점 $x \in D$에 대응하는 수열 $\langle S_n(x)\rangle$가 극한함수 S에 수렴하면 '$\langle S_n\rangle$은 D 위에서 S에 점별 수렴한다.' 고 정의한다고 할 때 [9, p. 134], 이 정의를 수정해서 '어떤 영역 D에서 균등 수렴' 의 정의를 만들어보자.

영역 D 위에서 점별 수렴

$$\begin{aligned} & \forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists N_0(x,\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \\ & \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0(x,\epsilon) \to |S_n(x) - S(x)| < \epsilon \\ \text{또는} \quad & \forall (x,\epsilon) \in D \times \mathbb{R}^+, \exists N_0(x,\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0(x,\epsilon) \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon.$$

물론, 가장 단순하고 명확한 수정 방법은 ϵ 에만 영향을 받고 $x \in D$ 에 관계없이 찾아야 하는 $N_1(\epsilon) = \max\{N_0(\epsilon, x) | x \in D\}$ 을 직접 도입하는 것이다. 그러면, 영역 D 위에서의 평등 수렴의 정의를 다음과 같이 진술할 수 있게 된다.

영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴

$$\forall (x,\epsilon) \in D \times \mathbb{R}^+, \exists N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1(\epsilon) \to |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

'자이델식의 점별 평등 수렴' 와 그 특성을 비교한다면, 이 정의는 '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 이라 부를 수 있을 것이다. 기본적으로, 이러한 시도는 '각 $x \in D$ 마다 함수 f 가 연속이면 D 위에서 함수 f 가 연속이다.' 는 정의처럼, 마치 각 점마다의 성질을 통해 영역 D 위에서 평등 수렴을 정의하는 방식에 가깝다.

5 바이어슈트라스의 '평등 수렴' 에 대한 새로운 정의

사실, 서론에서 언급했던 수업에서 도출되었던 것은 바로 이 정의이다. 연구자뿐만 아니라 수업에 참여했던 모든 구성원은 이렇게 예상한 정의가 점별 수렴을 보조정리 합체법에 의해 수정해서 만든 정의로 적합할 뿐만 아니라 현재의 평등 수렴의 정의와 일치한다고 믿었다.

그런데 '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 을 부정했을 때의 조건이 현재의 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 과 일치하지 않는 난관에 부딪치게 됨으로써, 수업 참여자 모두는 점차 혼란에 빠지게 되었다.

평등 수렴하지 않을 자이델식의 필요충분조건

$$\exists (x_0, \epsilon_0) \in D \times \mathbb{R}^+ s.t. \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0(N) \in \mathbb{N} s.t.$$
$$n_0(N) \geq N \wedge |S_{n_0(N)}(x_0) - S(x_0)| \geq \epsilon_0$$

현재의 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 과 구분하기 위해, '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 을 부정한 것을 그 발생과정에 기초해 '평등 수렴하지 않을 자이델식의 필요충분조건' 이라 부르기로 하자.

이 '평등 수렴하지 않을 자이델식의 필요충분조건' 의 핵심 아이디어는 부분수열 $\langle S_{n_0(N)}(x_0) \rangle$ 의 존재에 대한 것이다. 그런데 이 조건은 정확히 '$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) \neq S(x_0)$', 즉 '$\langle S_n \rangle$은 D 위의 어떤 점 x_0 에서는 S 에 점별 수렴하지 않는다.' 를 말한다는 점에서 '영역 D 에 대한 점별 수렴에 대해 부정한 것' 에 해당할 뿐이다.

여기서 큰 혼란이 발생한다. 왜냐하면 '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴을 부정한 것' 과 '영역 D 에 대한 점별 수렴을 부정한 것' 이 동일하다면, 어떤 영역에서 '평등 수렴' 과 '점별

수렴' 의 정의가 명확히 구분되지 않는 현상이 발생하기 때문이다. 결국, 기존의 '점별 수렴' 과 구분되는 새로운 개념을 적합하게 정의하지 못한 것이다.

그렇다면, '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 은 어떤 성질을 가져야 하는 것일까? 물론, 이 것은 '영역 D 위에서 평등 수렴' 을 정의할 때 고려했던 성질을 통해서 알 수 있다. 기존의 점별 수렴과 구분되도록 하기 위해 '영역 D 위에서 평등 수렴' 을 새로 정의하려고 할 때, 가장 중요한 것은 '영역 D 에서 점별 수렴' 과 '$\forall\epsilon > 0, \exists \max\{N_0(x,\epsilon)|x \in D\}$' 이 동시에 반영되어야 한다는 것이다. 즉, '$\forall\epsilon > 0$, $\{N_0(x,\epsilon)|x \in D\}$ 이 유한집합이다.' 는 사항도 새로운 개념의 정의에 반영되어야 하는 것이다. 반대로 생각하면, 이러한 두 성질의 연언(conjunction)에 대한 부정이 바로 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 이 지녀야 할 성질인 것이다.

구체적으로, '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 은 ⟨성질 1: 영역 D 의 어떤 점 x_0 에서는 점별 수렴하지 않는다.⟩ 또는 ⟨성질2: $\exists\epsilon_0 > 0 s.t. \{N_0(x,\epsilon_0)|x \in D\}$ 은 무한집합이다.⟩를 '포괄적 선언(inclusive disjunction)' 의 방식으로 만족해야 하는 것이다.

여기서, '포괄적 선언' 의 의미는 ⟨성질1⟩ 또는 ⟨성질2⟩에서의 '또는' 표현이 '배타적(exclusive)' 이지 않고 '포괄적(inclusive)' 이란 것이다. 즉, '⟨성질1⟩과 ⟨성질2⟩가 모두 성립하는 경우' 를 인정하는 것이다.

그런데 우리가 예상한 '평등 수렴하지 않을 자이델식의 필요충분조건' 에서는 '⟨성질1⟩은 성립하고 ⟨성질2⟩가 성립하지 않는 경우', '⟨성질1⟩은 성립하지 않고 ⟨성질2⟩가 성립하는 경우', '⟨성질1⟩과 ⟨성질2⟩가 모두 성립하는 경우' 에 대해 다루지 못한다. 한마디로, 최댓값 $\max\{N_0(x,\epsilon)|x \in D\}$ 의 존재성에 대한 ⟨성질2⟩를 다루지 못하는 것이다. 이와 관련한 의문을 해소하기 위해, 오늘날 사용하는 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 이 가진 성질과 비교해보자 [9, p. 140].

평등 수렴하지 않을 필요충분조건

$$\begin{aligned} &\exists\epsilon_0 > 0 \quad s.t. \quad \forall N \in \mathbb{N}, \exists(n_0(N), x(N)) \in N \times D \\ &s.t. \quad (n_0(N) \geq N) \wedge |\, S_{n_0(N)}(x(N)) - S(x(N))\,| \geq \epsilon_0 \end{aligned}$$

현재의 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 은 ⟨성질2: $\exists\epsilon_0 > 0 \quad s.t. \quad \{N_0(x,\epsilon_0)|x \in D\}$ 은 무한집합이다.⟩를 어떻게 다루는 것일까? 무엇보다 제일 중요한 것은 '영역 D 의 모든 점에서 점별 수렴함에도 불구하고 ⟨성질2⟩가 성립하는 경우를 어떻게 다룰 수 있는 것일까?' 의 문제이다. 이것을 다음과 같이 설명할 수 있다.

영역 D 의 모든 점에서 점별 수렴한다고 하자. 그러면, 점 $x = x(N)$ 에서도 점별 수렴하고, 이 $x(N)$ 와 주어진 ϵ_0 에 대해 다음식이 성립하게 된다:

$$\exists N_0(x(N),\epsilon_0) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0(x(N),\epsilon_0) \Rightarrow |S_n(x(N)) - S(x(N))| < \epsilon_0.$$

그런데 $|S_{n_0(N)}(x(N)) - S(x(N))| \geq \epsilon_0$ 이므로 $N_0(x(N),\epsilon_0) > n_0(N)$ 이 성립한다. 따라서 $\forall N \in \mathbb{N}$, $N_0(x(N),\epsilon_0) > n_0(N) \geq N$ 이 성립하게 된다.

그러면, $\{N_0(x(N), \epsilon_0)|N \in \mathbb{N}, x(N) \in D\}$ 은 무한집합이 되므로 $\{N_0(x, \epsilon_0)|x \in D\}$ 도 무한집합이 된다. 즉, ⟨성질2: '$\exists\epsilon_0 > 0 \quad s.t. \quad \{N_0(x, \epsilon_0)|x \in D\}$ 은 무한집합이다.'⟩가 성립하게 되어, 집합 $\{N_0(x, \epsilon_0)|x \in D\}$ 의 최댓값은 존재하지 않게 된다.

사실, 현재의 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 은 '⟨성질1⟩ 또는 ⟨성질2⟩' 을 잘 표현한다. 집합 $\{x(N)|N \in \mathbb{N}\}$ 이 유한집합일 때와 무한집합일 때로 나누어 체계적으로 접근하면[10], 포괄적 선언의 세 가지 경우를 쉽게 다룰 수 있는 것이다.

식의 형태에 주목하면, 현재의 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 은 부분수열 $\langle S_{n_0(N)}\rangle$ 과 D 에서의 수열 $\langle x(N)\rangle$의 존재를 요구한다는 것에서, 어떤 특정한 점 $x_0 \in D$ 와 $S(x_0)$ 이 주어진 상태에서 부분수열 $\langle S_{n_0(N)}(x_0)\rangle$의 존재를 요구하는 '평등 수렴하지 않을 자이델식의 필요충분조건' 과 다르다.

함수의 그래프로 보면, '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 의 경우 그래프에서 상하좌우를 넘나드는 변화를 다루는 반면에, '평등 수렴하지 않을 자이델식의 필요충분조건' 의 경우에는 어떤 특정한 점 $x_0 \in D$ 에서 상하로의 변화만을 다룬다. 그러기에, 후자가 더 강하게 제한된 조건이라 할 수 있다. 즉, 후자는 전자의 매우 특별한 예이기 때문에 후자는 전자이기 위한 충분조건이라 할 수 있다.

여기서, 현재의 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 을 다시 부정함으로써 현재 사용하는 '영역 D 위에서 평등 수렴' 을 유도하면, '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 와의 미묘한 차이가 확연하게 드러나게 된다 [9, p. 138].

영역 D 위에서 평등 수렴

$$\forall\epsilon > 0, \exists N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall(n, x) \in \mathbb{N}\times D, n \geq N_0(\epsilon) \to |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

가장 직접적으로 나타나는 차이는 분명하다. 무엇보다, '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 인 "$\forall(x, \epsilon) \in D \times \mathbb{R}^+, \exists N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} s.t. \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1(\epsilon) \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$" 와 비교할 때, 양화사 '$\forall x \in D$' 의 위치가 서로 다르다고 할 수 있다. 그렇다면, 이 차이가 무슨 의미를 지닌 것일까?

앞서 살펴보았듯, '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 에서는 '$\forall x \in D$' 표현이 정의의 맨 앞에 위치함으로써, 모든 x 에 적용될 수 있는 자연수 $N_1(\epsilon)$ 또는 값 x 에 관계없는 최댓값으로서의 $N_1(\epsilon)$ 의 존재성에 초점을 맞추면서, 각 $x \in D$ 마다 함숫값 $S_n(x)$, $S(x)$ 를 다루게 된다. 하지만 양화사의 위치로 인해 '모든 x 에 적용될 수 있는 자연수 $N_1(\epsilon)$ 의 존재' 가 보장된다고 할 수 없다.

이와 비교해, '영역 D 위에서 평등 수렴' 에서 '$\forall x \in D$' 표현은 '$n \geq N_0(\epsilon) \to |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 표현의 바로 앞이나 뒤에 위치하게 됨으로써, D 위에서 함수열 $\langle S_n(x)\rangle$와 함수

10) '$x(N)$ 이 무한히 서로 다른 경우' 와 '$x(N)$ 이 무한히 일치하는 경우' 을 조합하여 고려하면 된다.

$S(x)$의 그래프를 국소적이 아닌 전체적으로 다루게 된다. 다시 말해, 각 $x \in D$마다 함숫값 $S_n(x)$, $S(x)$을 비교하는 것이 아니라 함수열 $\langle S_n \rangle$과 함수 S의 그래프 자체를 다루는 것이다. 직관적으로 해석하면, '영역 D 위에서 평등 수렴' 에서 '$\forall x \in D$' 은 'x는 영역 D는 원소인데 이 영역 D와 관련해' 의 의미를 나타내고 '$\exists N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times D, n \geq N_0(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 은 '영역 D 전체에 걸쳐서, $S(x)$의 그래프의 ϵ띠 안으로 $S_n(x)$의 그래프 중 유한개를 제외하고 모두 들어가는 것' 의 의미를 나타낸다고 하겠다.

왜 이런 차이가 나타나는 것일까? 그것은 보편양화(universal quantification)의 메커니즘으로 설명될 수 있다. "$\forall (x,\epsilon) \in D \times \mathbb{R}^+, \exists N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$"을 보이기 위해서는, 우선 임의의 고정된(arbitrary fixed) x와 ϵ을 놓게 된다. 이 상황에서 나머지 식인 "$\exists N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times D, n \geq N_1(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$"을 하나의 실체적 대상으로 간주할 때 x는 잠정적으로 고정된 상태이기 때문에 $S_n(x)$, $S(x)$는 함숫값으로 취급된다.

이에 비해, "$\forall \epsilon > 0, \exists N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times D, n \geq N_0(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$" 을 보이고자 하면, 우선 임의의 고정된 ϵ을 놓게 된다. 이 때, 나머지 식인 "$\exists N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times D, n \geq N_0(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$"을 하나의 실체적 대상으로 간주할 때 x는 고정된 상태가 아니기 때문에 "$\forall x \in D, |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$"은 '영역 D 전체에 걸쳐 $S(x)$그래프의 ϵ띠 안으로 $S_n(x)$ 그래프가 들어감' 으로 해석할 수 있는 것이다.

정리하면, '$\forall x \in D$' 표현은 '영역 D에 대한 자이델식의 평등 수렴' 과 '영역 D 위에서 평등 수렴' 에서 보편양화의 메커니즘에 의해 각각 '국소적인 점' 과 '영역 전체' 에 초점을 맞추게 하는 역할을 하는 것이다. 이런 현상은, '평등 수렴하지 않을 자이델식의 필요충분조건' 과 '평등 수렴하지 않을 필요충분조건' 에서 각각 '함수의 그래프에서 상하로의 변화', '함수의 그래프에서 상하좌우를 넘나드는 변화' 를 다룬다는 현상과 일맥상통한다. 그렇다면, 수학의 역사를 통해 볼 때 이런 차이는 어떻게 나타나게 된 것일까?

수학사적인 측면에서 볼 때, 그것은 현재의 '영역 D 위에서 평등 수렴' 이 바이어슈트라스에 의해 정의된 것인데 그가 국소적인 점 또는 그 근방에 초점을 둔 방식으로서가 아니라 어떤 영역에서 함수열과 극한함수의 그래프의 전체적 성질을 다루는 방식으로 평등 수렴을 정의했기 때문이다. 정확히 말해, 평등 수렴은 '점에서의 이론' 이 아니라 '영역 또는 구간에서의 이론' 인 것이다.

기본적으로, 바이어슈트라스는 '영역 D 위에서 점별 수렴' 에 기초해 최댓값의 존재를 첨가하는 방식이 아니라 그 영역 전체에 걸쳐서 함수열과 극한함수의 그래프의 성질을 다루도록 하는 방식으로 평등 수렴 개념을 정의했다. 평등 수렴의 성격을 분명히 했던 것인데, 이와 관련해, Bottazzini [1, p.204]는 다음과 같이 평한다 :

> 바이어슈트라스가 도입한 평등 수렴의 의미는 자이델이 그 개념을 처음 도입했을

> 때의 의미와 다르다. 자이델은 전체 구간에서 급수의 수렴을 특성화하는 "전체적" 성질에는 관심을 기울이지 않았고, 대신에 미리 정해진 어떤 점 주위의 매우 작은 구간에 관심을 기울였다.

한편, 바이어슈트라스가 도입한 평등 수렴은 다음과 같다.

> **바이어슈트라스의 평등 수렴** 임의로 작은 모든 양수 ϵ에 대해, $n > n_0(\epsilon)$와 $a \le x \le b$인 모든 x에 대해 $|r_n(x)| < \epsilon$을 만족하는 $n_0(\epsilon)$가 존재한다면, 급수 $\sum u_n(x)$는 구간 $[a, b]$에서 평등 수렴한다 11) [1, p. 204, 재인용].

물론, '바이어슈트라스의 평등 수렴' 은 오늘날의 '구간 $[a, b]$에서 평등 수렴' 에 해당한다. 한편, 그의 정의에서 분명히 확인할 수 있는 사항은 양화사 '$a \le x \le b$인 모든 x에 대해' 의 위치가 문장의 맨 앞, 즉 '$\exists n_0(\epsilon)$의 앞' 에 있지 않고 '$|r_n(x)| < \epsilon$' 의 곁에 붙어 있으면서 'n의 값과 $|r_n(x)|$의 크기가 x에 좌우되지 않는다.' 는 성질이 부여되도록 하고 있다는 것이다.

이러한 관점에 기초하면, '자이델의 평등 수렴' 에 대해 재해석할 수 있다. 이 정의는 '구간 $[a, b]$ 위의 특정한 점 ζ에 대해 $\lim_{x\to\zeta} r_n(x) = 0$' 임을 말하기에 그 점 $x = \zeta$에서 평등 수렴을 정의한 것처럼 보인다. 이와 같은 특성에 따라, 앞에서도 이러한 수렴을 '자이델식의 점별 평등 수렴' 이라 명명하였다. 하지만 엄밀하게 말해, '자이델의 평등 수렴' 은 점 $x = \zeta$에서가 아니라 매우 작은 구간 $[\zeta - \delta(\zeta), \zeta + \delta(\zeta)]$에서 정의되는 것이며, '$|r_n(x)| < \epsilon$' 이 성립할 수 있게 $\delta(\zeta)$와 $[\zeta - \delta(\zeta), \zeta + \delta(\zeta)]$이 동시에 정해지게 되는 특성을 가진다. 분명한 사항은, 바이어슈트라스의 평등 수렴에서와 마찬가지로 '$\forall x \in [\zeta - \delta(\zeta), \zeta + \delta(\zeta)]$' 는 문장의 제일 처음에 있는 것이 아니라 '$|r_n(x) < \epsilon$' 의 곁에 붙어 있는 것이다.

자이델은 분명히 특정한 점 ζ에 초점을 맞추어 평등 수렴을 정의하였다. 사실, 기존의 점별 수렴에서의 접근방식과 차별화되기 쉽지 않다. 그래서 이 연구에서는 '자이델식의 점별 평등 수렴', '영역 D에 대한 자이델식의 평등 수렴' 용어를 도입하였다. 하지만 그는 '구간 $[a, b]$의 어떤 특정 점 ζ의 근방' 에서 평등 수렴을 정의하면서, 이 정의가 '점 ζ' 에서가 아니라 '점 ζ의 근방' 에서 정의된다고 밝혔다. 이러한 사항은, 자이델도 평등 수렴이 '점과 함숫값' 이 아닌 '구간과 그래프' 를 다룬다는 것을 어렴풋이 인식했음을 의미한다.

물론, 바이어슈트라스는, 자이델과 비교해, 평등 수렴이 '구간과 그래프' 을 다룬다는 것을 아주 명백하게 하였다. 특히, 그는 구간 $[a, b]$의 '임의의' 점 ζ의 근방에서 자이델의 방식대로 평등 수렴하면 구간 $[a, b]$에서 평등 수렴하게 됨을 20여년 이상의 각고의 노력 끝에 1880년에 증명했다 [2, 7, 8]. 그렇다면, 수학사에서 나타난 이러한 노력과 어려움은 교육적으로 무엇을 암시하는 것일까?

---

11) The series $\sum u_n(x)$ is uniformly convergent in an interval $[a, b]$ when for every arbitrarily small positive ϵ, there exists a $n_0(\epsilon)$ such that $|r_n(x)| < \epsilon$ for $n > n_0(\epsilon)$ and for every x, $a \le x \le b$.

이것은 코시의 연속정리와 그 증명에 대한 분석만으로 '평등 수렴' 의 정의를 이끌어내기 쉽지 않음을 알려준다. 다시 말해, 증명분석을 통해 감추어진 보조정리인 '최댓값의 존재성' 을 찾는다고 해도 그 발견이 '평등 수렴' 에 대한 온전한 정의를 유도하기는 힘들다는 것이다.

기본적으로, 코시의 연속정리와 그에 대한 증명은 '구간' 이 아닌 '점' 에 초점을 맞춘 것이다. 그리고 그 증명에 대한 분석 역시도 '점과 함숫값' 또는 '점의 근방과 함숫값' 에 초점을 맞추고 있다고 할 수 있다. 그러므로 그 정리에 대한 증명분석을 거치며 보조정리 합체법을 통해, '점과 함숫값' 에 대한 초점을 유지하면서, 구간 $[a,b]$ 에서 점별 수렴' 으로부터 '구간 $[a,b]$ 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 으로 수정하는 것이 가장 자연스러운 방향이다. 곧, 양화사 '$\forall x \in [a,b]$' 를 문장의 맨 앞에 그대로 유지하면서 x 에 영향을 받지 않는 최댓값의 존재성 '$N_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$' 을 합체시키는 것은 라카토스의 보조정리 합체법을 적절하게 사용했다고 할 수 있다. 하지만 이것은 '구간 $[a,b]$ 에 대한 평등 수렴' 에 대한 적절한 정의가 되지 않는다.

한마디로, 점에 지속적으로 강조점을 둔 상태에서 '구간 $[a,b]$ 에서 평등 수렴' 으로 넘어가려는 교수-학습은 혼란을 야기할 수밖에 없다는 것이다. 우리 수업에서 어려움이 있던 것은 어쩔 수 없었던 것이다. 즉, 보조정리 합체법에 의해 '구간 $[a,b]$ 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 을 이끌어내는 활동을 성공적으로 했다 하더라도, 이러한 활동을 바탕으로 '구간 $[a,b]$ 에서 평등 수렴' 으로 나아가는 교수-학습이 장애와 단절을 일으키는 것은 당연했다.

6 결론 및 교육적 시사점

'영역 D 위에서 점별 수렴' 인 "$\forall x \in D, \forall\epsilon > 0, \exists N_0(x,\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0(x,\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$" 으로부터, 코시의 연속정리와 그 증명에 대한 분석을 통해 $N_1(\epsilon) = \max\{N_0(\epsilon,x)|x \in D\}$ 와 같은 '최댓값의 존재' (감추어진 보조정리) 를 찾아내어, 이를 '영역 D 위에서 점별 수렴' 에 직접 합체하게 되면 "$\forall x \in D, \forall\epsilon > 0, \exists N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$" 와 같은 정의를 이끌어낼 수 있다. 이 연구에서는 이 정의를 '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 이라 명명하였는데, 기호학적-수학사적 분석을 통해 이 정의가 현재의 '영역 D 위에서 평등 수렴' 이 아니라는 것과 양화사 '$\forall x \in D$' 의 위치 변화가 평등 수렴의 정의에 결정적 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

양화사의 위치에 주목하면, '영역 D 위에서 평등 수렴' 인 "$\forall\epsilon > 0, \exists N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} s.t. \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times D, n \geq N_0(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$" 에서 '$\forall x \in D$' 는 문장의 맨 앞에 있지 않고 '$n \geq N_0(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 의 바로 곁에 있다. 보편양화의 관점에서, 임의의 고정된 ϵ 을 놓게 될 때, 나머지 식인 '$\exists N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times D, n \geq N_0(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 을 하나의 대상으로 보면 '$\forall x \in D, |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 은 '영역 D 전체에 걸쳐 $S(x)$ 그래프의 ϵ 띠 안으로 $S_n(x)$ 그래프가 들어가는 것' 으로 해석할 수 있다.

이와 비교해, '영역 D 에 대한 자이델식의 평등 수렴' 인 "$\forall (x,\epsilon) \in D \times \mathbb{R}^+, \exists N_1(\epsilon) \in$

$\mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$" 을 보이기 위해서는 임의의 고정된 x와 ϵ을 놓으면서 출발하는데, 나머지 식인 '$\exists N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 을 하나의 대상으로 간주하면 x는 잠정적으로 고정된 상태이기 때문에 $S_n(x)$, $S(x)$은 함숫값으로 다루게 된다.

결론적으로 말해, '영역 D에 대한 자이델식의 평등 수렴' 은 '특정한 점과 함숫값' 을 대상으로 하는 반면에 '영역 D 위에서 평등 수렴' 은 '영역 전체와 그래프' 또는 '구간 전체와 그래프' 를 대상으로 한다고 하겠다.

사실, 이 연구에서 알 수 있듯이 '영역 D 위에서 평등 수렴' 은 바이어슈트라스에 의해 새롭게 창조된 개념에 가깝다고 할 수 있다. 그는 '점과 함숫값' 을 취급하는 국소적 접근이 아니라 '구간과 그래프' 를 다루는 전제적 접근으로 수렴을 다루는 방식을 창안한 것이다. 즉, 특정한 점이나 그 주위에서 함숫값의 변화만을 국소적으로 다루던 활동을 벗어나, 구간 전체에서 급수의 수렴을 다루도록 하는 새로운 개념을 만든 것이다. 이러한 창조가 가능했던 것은, 양화사 '$a \leq x \leq b$인 모든 x에 대해' 를 문장의 맨 앞에 두지 않고 '$|r_n(x)| < \epsilon$' 의 곁에 두면서 '$|r_n(x)|$의 크기가 x에 좌우되지 않는다.' 는 성질을 부여했기 때문이다. 부연하면, '구간의 각 점별로 접근' 하는 것이 아닌 '구간 전체로의 접근' 이란 아이디어를 실현하기 위해, 바이어슈트라스는 결정적으로 양화사의 위치에 주의를 기울였던 것이다.

이러한 분석 결과에 기초하여, 대학에서의 해석학 교육과 관련해 교육 내용 및 그에 대한 접근의 측면에서 교육 방법과 관계없이 공통적으로 적용될 수 있는 세 가지 교육적 시사점을 도출해낼 수 있다.

첫째, 평등 수렴을 도입함에 있어 '인식론적 장애' 에 주의를 기울일 필요가 있다. 여기서의 '인식론적 장애' 는 '영역 D의 각 점에 대해 성립하는 성질을 영역 D에 대해 성립하는 성질로 간주하는 방식' 이다. 이 지식은 '점별로 접근하는 방식' 이라 할 수 있는데, '영역 D에서 점별 수렴', '영역 D에서 함수 f의 연속' 등을 정의함에 있어서 매우 유용한 수단이지만 평등 수렴을 정의하고 이해하는 데에는 오히려 방해가 될 수 있다 [12].

앞서 제기했듯, '점별로 접근하는 방식을 유지한 상태로 영역 D에서 평등 수렴' 을 정의하면 "$\forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1(\epsilon) \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$" 와 같은 정의에 이르고 만다. 사실, 상당수의 (예비) 수학교사와 예비 수학전공자들은 이 정의가 'x의 영향을 받지 않는 자연수의 존재성' 을 보여주므로 '영역 D에서 평등 수렴' 이라고 착각하기도 한다. 하지만 '영역 D에서 평등 수렴' 은 각 점에 대해 성립하는 성질에 기초하는 것이 아니라 '영역 D' 자체에 대해 성립하는 성질이다. 따라서 평등 수렴에 대한 교육을 위해서는, '점별로 접근하는 방식' 을 넘어서 '영역 또는 구간으로 접근하는 방식' 으로 가르치는 적합한 교수-학습 방안을 마련할 필요가 있다. 이후의 둘째와 셋째 시사점은 궁극적으로 이러한 교수-학습 방안과 관련된 것인데, 각각 개념 이미지와 개념 정의 차원에서의 제안이라 하겠다.

둘째, 영역 D에서 점별 수렴하지만 대비되는 두 가지 상황을 그래프를 통해 다룰 필요가 있다. 즉, 그 영역에서 평등 수렴해서 극한함수가 연속인 상황과 평등 수렴하지 않고 극한함수도 불연속인 상황을 대비시키면서 그 영역 전체에서 연속함수열의 그래프와 극한함수의 그래프의 관계를 관찰하도록 하는 것이다. 이때, 특정한 점에서의 극한함수의 불연속성 자체보다는 그러한 현상이 발생한 이유를 그래프에 대한 비교-관찰을 통해 탐색하도록 하는 것이 필요하다. 여기서, ϵ이 정해졌다고 할 때 '영역 전체에 걸친 극한함수 $S(x)$의 그래프의 ϵ띠' 와 '연속함수열 $\langle S_n(x)\rangle$의 그래프' 사이의 관계를 두 상황에서 비교하도록 하는 것이 중요하다.

물론, 이러한 접근을 통해 학습자에게 (1) 극한함수 $S(x)$가 연속일 때는, 영역 전체에 걸쳐 $S(x)$의 그래프의 ϵ띠 안으로 $S_n(x)$의 그래프 중 유한개를 제외하고 모두 들어간다는 것, (2) 극한함수 $S(x)$가 불연속일 때는, $S(x)$의 그래프의 어떤 적당한 ϵ띠 밖으로 그 영역에서 무한개의 $S_n(x)$의 그래프 각각이 부분적으로 빠져나간다는 것을 포착하기를 기대한다고 할 수 있다. 이 그래프를 활용하는 접근방식은, 평등 수렴을 도입함에 있어, 평등 수렴이 특정한 점이 아니라 영역에서 정의된다는 것을 암묵적으로 인식하는 데에 도움을 줄 것이다. 즉, '점과 함숫값' 에 기초한 국소적 접근이 아니라 '영역(또는 구간)과 그래프' 에 기초한 전체적 접근이라는 점에서 '영역 D에서 평등 수렴' 에 대한 적절한 개념 이미지를 형성하는 데에 기여할 것이다.

하지만 이처럼 적절한 개념 이미지를 활용하는 접근을 통해 평등 수렴을 도입한다고 해도 그 개념에 대한 정확한 이해를 보장하는 것은 아니다 [12]. 올바른 개념 정의에 대한 습득을 위한 방안이 필요한 것인데, 이 연구의 결과를 통해 볼 때 이를 위해 다음의 처방이 필요하다고 할 수 있다.

셋째, '영역 D에서 평등 수렴' 에 대한 정확한 '개념 정의' 를 이해하기 위해서는 양화사를 다루는 최소한의 요령과 양화의 의미에 대한 교육이 필요하다고 하겠다. 자이델이 코시의 연속정리에 대한 증명분석을 통해 평등 수렴을 이끌어낼 수 있었던 것은 양 사이의 함수적 의존관계를 기호를 통해 적절히 다룰 수 있었기 때문이다. 또한, 바이어슈트라스가 '영역 D의 평등 수렴' 을 정의할 때도 '양화사의 위치' 에 대한 것이 핵심이라고 할 수 있다. 사실, '점별 수렴' 과 '평등 수렴' 에 대한 구분뿐만 아니라 해석학을 비롯한 대학수학을 배우기 위해서는 양화사를 다루는 기술이 반드시 필요하다.

하지만 이 말은 '해석학을 비롯한 대학수학 과목을 배우기 위해 기호 논리학, 특히 술어 계산 (predicate calculus)을 미리 배우거나 이수해야 한다.' 고 주장하는 것이 아니다. 과목으로서의 논리학까지 도입할 필요도 없고 엄밀한 수학을 전개하자는 것도 아니다. 다만, 대학수학을 배우기 위해 반드시 요구되는 최소한의 '양화사를 다루는 방법' 만큼은 지도하자는 것이다. 이와 관련해, 연구자는 Table 1의 3가지 '양화사 부정(quantifier negation)' 에 대한 지도가 이루어져야 한다고 생각한다.

보편 또는 전칭 양화 (universal quantification)	특칭 또는 존재 양화 (existential quantification)
$\forall x \in A, p(x)$	$\exists x_0 \in A \; s.t. \; \sim p(x_0)$
$\forall x \in A, \; p(x) \to q(x)$	$\exists x_0 \in A \; s.t. \; p(x_0) \wedge (\sim q(x_0))$
$\forall x \in A, \; \exists y_0(x) \in B \; s.t. \; p(x, y_0(x))$	$\exists x_0 \in A \; s.t. \; \forall \, y \in B, \; \sim p(x_0, \, y)$

Table 1. Three essential 'quantifier negation'; 3가지 필수적인 '양화사 부정'

이 논의를 평등 수렴에 대한 지도로 제한시키더라도, '영역 D에서 점별 수렴' 과 '영역 D에서 평등 수렴' 을 명확히 구분할 수 있기 위해서는 평등 수렴을 도입한 이후에라도 반성 단계에서 '영역 D에서 점별 수렴하지만 평등 수렴하지 않는 것' 이 어떻게 가능한지를 이해할 수 있어야 한다. 이것은 '$\forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists N_0(x, \epsilon) \in N \quad s.t. \quad \forall n \in N, n \geq N_0(x, \epsilon) \to |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 와 '$\exists \epsilon_0 > 0 \quad s.t. \quad \forall N \in \mathbb{N}, \exists (n_0(N), x(N)) \in \mathbb{N} \times D \quad s.t. \quad (n_0(N) \geq N) \wedge |S_{n_0(N)}(x(N)) - S(x(N))| \geq \epsilon_0$' 로부터 '$\forall N \in \mathbb{N}, N_0(x(N), \epsilon_0) > n_0(N) \geq N$' 을 유도함으로써 이루어질 수 있다.

결국, '영역 D에서 평등 수렴' 을 부정할 수 있어야만 평등 수렴의 의미를 이해할 수 있는 것이다. 사실, 어떤 개념이나 명제의 의미는 그것의 부정을 통해 가장 잘 드러나기 때문에 '양화사 부정' 은 반드시 다룰 필요가 있다. 그런데 평등 수렴에 대한 부정뿐만 아니라 대부분의 수학 명제를 부정하는 데에 있어 앞의 3가지 양화사 부정은 널리 사용된다. 덧붙이자면, 이 3가지 양화사 부정은 대부분의 수학명제를 부정하는 데에 충분히 효과적으로 사용할 수 있기 때문에 이에 대한 지도가 필요하다고 판단된다.

하지만 '영역 D에서 평등 수렴' 에 대한 이해를 위해서는, '양화사 부정' 의 규칙에 앞서, 양화 그 자체를 잘 이해할 필요가 있다. 특히, 보편 양화의 '과정' 과 '결과' 를 명확히 이해해야 한다. 왜냐하면 보편 양화된 수학 문장에 대해 '과정' 과 '결과' 를 모두를 유연하게 볼 수 있어야만 '영역 D에서 평등 수렴' 을 '점과 함숫값' 에 대한 것이 아니라 '영역과 함수의 그래프' 에 대한 것으로 해석할 수 있기 때문이다.

여기서, 보편 양화의 '과정' 과 '결과' 를 '$\forall x \in A, p(x)$' 을 예로 설명하면, '집합 A의 임의의 고정된 (arbitrary fixed) x로부터 출발해, 그 잠정적으로 고정된 x에 대해 $p(x)$가 성립하는지' 를 알아보는 것이 '과정' 에 해당하며 이 과정이 완결되어 '집합 A의 모든 x에 대해 $p(x)$가 성립한다.' 는 것이 '결과' 에 해당한다. 이러한 두 측면에 대해 이해하면, '영역 D에서 평등 수렴' 과 관련해 임의의 고정된 ϵ을 놓게 되는 '과정' 으로 출발하고 식의 나머지 부분인 '$\exists N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times D, n \geq N_0(\epsilon) \to |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$' 을 하나의 완결된 '결과' 인 대상으로 간주하게 되면 그 식은 '영역 D 전체에 걸쳐서, $S(x)$의 그래프의 ϵ띠 안으로

$S_n(x)$ 의 그래프 중 유한개를 제외하고 모두 들어가는 것' 으로 해석할 수 있는 것이다.

어떻게 보면, 평등 수렴의 역사에 대한 본 연구가 주장하는 바는 매우 단순하다. 그것은 '양화사의 위치가 중요하다.' 는 것이다. 그리고 그 역사는 교육적으로 다음을 시사한다: 양화의 '과정' 과 '결과' 에 대한 이해를 바탕으로 하여, 전체 문장에서 양화사의 위치 변화에 따른 영향을 판단할 수 있다면 평등 수렴뿐만 아니라 많은 수학적 개념을 이해하는 데에 도움이 될 것이다.

이 연구는 평등 수렴의 출현과 그 변화 과정에 대해 분석을 하고 그에 따른 교육적 제안을 하였다. 이론적인 연구를 수행한 것이다. 그러기에, 이러한 제안의 교육적 효과는 후속 연구에 의해 검증될 필요가 있다고 하겠다.

References

1. U. Bottazzini, *The Higher calculus : A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, New York, Springer-Verlag, 1986.
2. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, 1991. 양영오, 조윤동 역, 수학의 역사(하), 경문사, 2000.
3. D. M. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*(2e), MAA, 1997. 허민 역, 실해석학(2판)-전혀 새로운 접근-, 교우사, 2009.
4. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer-Verlag, 1979.
5. J. Fauvel(ed.), The Use of history in Teaching Mathematics, *For the Learning of Mathematics* 11(2) (1991), 3–6.
6. J. W. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Cambridge, MIT Press, 1981.
7. I. Grattan-Guinness, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis From Euler to Riemann*, Cambridge, MIT Press, 1971.
8. I. Grattan-Guinness(ed.), *From the Calculus to Set Theory*, London, Duckworth, 1980.
9. Jung, D. M., Jo, S. J., *Introduction to Real Analysis*, Seoul, Kyungmoon-Sa, 2016. 정동명, 조승제, 실해석학 개론, 경문사, 2016.
10. M. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York, Oxford University Press, 1983.
11. I. Lakatos, *A Proofs and Refutations : The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1976. 우정호 역, 수학적 발견의 논리, 아르케, 2001.
12. Woo J. H., *Principle and Method of Teaching-learning of Mathematics*, Seoul, SNU Press, 2000. 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울, 서울대학교 출판부, 2000.