Journal for History of Mathematics
Vol. 30 No. 1 (Feb. 2017), 17–29 http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.1.017

On the classical results of Cesàro summability for Fourier series

푸리에 급수에 대한 체사로 총합가능성의 고전적 결과에 관하여

Lee Jung Oh 이정오

This paper is concerned with the Cesàro summability of Fourier series. Many authors have studied on the summability of Fourier series up to now. Also, G. H. Hardy and J. E. Littlewood [5], Gaylord M. Merriman [18], L. S. Bosanquet [1], Fu Traing Wang [24] and others had studied the Cesàro summability of Fourier series until the first half of the 20th century. In the section 2, we reintroduce Ernesto Cesàro's life and the meaning of mathematical history for Cesàro's work. In the section 3, we investigate the classical results of summability for Fourier series from 1897 to the mid-twentieth century. In conclusion, we restate the important classical results of several theorems of Cesàro summability for Fourier series. Also, we present the research minor lineage of Cesàro summability for Fourier series.

Keywords: Cesàro summability, Summability of Fourier series, Cesàro mean, infinite series; 체사로 총합가능성, 푸리에 급수의 총합가능성, 체사로 평균, 무한급수.

MSC: 42A20, 42A32

1 서론

이탈리아 로마에서 기차로 1시간 남짓 남쪽으로 가다보면 항구도시 나폴리(Napoli)에 도착하게 된다. 나폴리 항에서 배를 타고 나가 다시 나폴리 항구를 바라보면 "나폴리를 보고 죽어라(Vedi Napoli e poi muoia)"1) 라는 이탈리아 속담이 실감난다. 아름다운 이곳은 1859년 수학자 에르네스토 체사로(Ernesto Cesàro)2) 가 태어난 고향이다. 체사로는 총합가능성과 체사로 평균(Cesàro mean)으로 우리에게 친숙하다. 어떤 의미로 푸리에 급수 수렴성의 본질은 주어진 함수가 푸리에 급수인 삼각계 무한급수로 표현되는지 또한 무한급수의

Lee Jung Oh: Dept. of Liberal Arts, Chosun College of Science and Technology
E-mail: jolee@cst.ac.kr
Received on Dec. 1, 2016, revised on Feb. 5, 2017, accepted on Feb. 7, 2017.

1) 이탈리아 격언. 나폴리는 고대 그리스어로 새로운 도시라는 뜻. https://en.wikipedia.org/wiki.

2) 이탈리아 출신. 미분기하를 주로 연구. http://www.pronouncenames.com/ErnestoCesaro.'체사로' 는 이탈리어 발음.

합이 어떻게 정의되는지 여부로 귀결된다고 할 수 있다 [14]. 이러한 푸리에 급수 수렴성을 논하는 데 체사로 총합가능성 (Cesàro summability) 은 중요한 도구 중 하나이다. 여기서 몇가지 정의를 먼저 소개한다.

구간

$$T = \{t \in R | -\pi \le t \le \pi\} \tag{1}$$

상에서 정의된 2π 주기를 가진 적분가능한 함수 $f(t)$ 의 푸리에 급수

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{2}$$

와 그 부분합은

$$S_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) \tag{3}$$

이다. 임의의 수열 $\{a_n\}$ 와 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

에 대하여 k 번째 부분합이

$$S_k = a_1 + \cdots + a_k \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

일 때 만약

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k = A \tag{6}$$

이면 급수 (4) 를 A 로 체사로 총합가능이라고 한다. 그리고 부분합 (5) 의 체사로 평균을

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n} \tag{7}$$

으로 표현한다. 체사로 총합 (Cesàro summation) 은 무한급수의 부분합에 대한 산술평균의 극한으로 정의된다. 한편, 1890 년 체사로 (Cesàro) 가 밝힌 총합계념을 확장하여 α 가 음이 아닌 정수일때 (C, α) 로 표현한다. $(C, 0)$ 은 일반적인 총합방법이고 $(C, 1)$ 은 체사로 총합방법이다. 또한 만약 $f(t)$ 가 $t \in [0, 1]$ 에서 유계변동 (bounded variation) 이고

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

이면 급수 (4) 를 절대적인 총합가능 (A) 이라 한다 [15, 16, 17].

본 논문 2 절에서 에르네스또 체사로 (Ernesto Cesàro) 의 생애와 연구업적 그리고 무한급수 총합에 관한 19 세기 전후 상황을 수학사적 관점에서 간략하게 고찰하고 3 절에서는 푸리에 급수에 대한 총합가능성에 관한 고전적인 연구결과들을 20 세기 중반까지 살펴본다. 결론으로 3 절에서 살펴본 결과들 중 중요한 몇가지 정리들의 의미를 재소개하고 연구 소계보를 작성 제시한다.

2 체사로(Cesàro) 업적과 수학사적 의미

체사로 연구에 대해 수학사적 의미와 그의 생애를 살펴본다. 먼저 1760년 오일러(Leonhard Euler)는 ‘발산하는 모든 급수의 합도 자연스럽게 존재한다’ 고 여겼는데 오일러에 의해 발산하는 급수에 대한 연구[3)]가 소개된 후 여러 사람들에 의해 무한급수에 대한 연구가 진행되었지만 그 결과들이 서로 모순되어 ‘급수의 합이 무엇을 의미하는지?’ 명확하게 정의되지 않아 혼란스러웠다. 18세기 여러 수학자들에 의해 주도된 급수문제는 19세기에 들어와 수학적 엄밀성이 더해진다. 1807년 푸리에(Jean-Baptiste Joseph Fourier)가 발표한 열전도론의 결과 ‘주어진 불연속 함수를 삼각급수로 나타내는 정리’ 를 디리클레(Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet)는 다시 엄밀하게 정리하고 코시(Augustin-Louis Cauchy)는 연속성과 합의 극한으로서 수렴급수의 합에 대한 엄밀한 정의를 한다. 이런 결과로 ’ 발산하는 급수’ 는 수학자의 관심 대상에서 잠시 멀어졌다. 이후 1884년 점근적 급수를 소개한 브런스(Heinrich Bruns)[4)]와 1887년 점근적 급수의 연구[5)]를 발표한 푸앵카레(Henri Poincaré)에 의해 19세기 말 다시 발산하는 급수에 대한 관심이 시작된다. 그 당시 이탈리아 에르네스토 체사로는 그가 21세였던 1880년 ‘발산급수의 총합’ 을 구하는 연구로 1890년 ‘임의의 발산하는 급수의 합’ 을 엄밀하게 정의할 수 있음을 알고 체사로 총합가능성을 정의하게 된다. 그를 더 이해하기 위해 수학자 체사로의 일생을 간력하게 살펴보고자 한다.

혁명으로 인해 이탈리아가 통일되고 공식적인 왕국이 세워지게된 이탈리아의 역사적 대변혁기에 태어난 체사로는 14살이던 1873년 벨기에 동부에 있는 공업도시 리에주(Liège)의 국립광산학교(École des Mines)를 다니게 되는데 이때 스승 카탈란(Eugène Catalan)[6)] 을 만나 많은 영향을 받는다. 그의 나이 24세 때인 1883년 스승 카탈란의 도움으로 프랑스어로 ‘다양한 문제의 연산에 관하여’(sur diverses questions d’arithmétique; on various issues arithmetic)를 발표하여 주목을 받는다. 이런 연유로 프랑스 파리의 소르본(Sorbonne) 대학에서 잠시 공부할 기회가 마련되어 샤를 에르미트(Charles Hermite), 장 다르부(Jean Gaston Darboux)등의 강의를 듣게 되는데 당시 그는 장 다르부의 기하학 수업에 특별한 관심을 갖게 된다. 에르미트의 제자였고 디니 판정법(Dini test)으로 잘 알려진 율리 디니(Ulisse Dini)와 화법기하학[7)]에 사영기하학을 접목시켰던 밀라노 대학(Università degli Studi di Milano)의 루이지 크레모나(Luigi Cremona) 등의 도움을 받아 그의 나이 25세였던 1884년에 로마대학(Universitàdi Roma)에서 공부를 시작하여 3년뒤 박사학위를 받는다. 그 후 이탈리아

3) De seriebus divergentibus, Opera Omnia, I, 14, (1760), 585–617.

4) Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Störungen, Astron. Nachr., 109(1884) 216–222.

5) Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, 3 vols., Albert Blanchard, Paris (reprint from the original editionfrom (1987) 1892–1899).

6) (1814–1894) : 벨기에 수학자.

7) 몽즈(Gaspard Monge)에 의해 고안된 오늘날 공업도학(Engineering drawing)의 토대를 마련한 삼차원의 물체를 평면에 투영하는 기하학.

시칠리아섬의 최대 도시에 있는 팔레르모 대학(University of Palermo)을 거쳐 1892년 33세에 고향 나폴리 대학(Università di Napoli)에서 생을 마칠 때까지 연구한다 [20]. 체사로는 그의 생애를 통해 주로 미분기하에 공헌을 하였다. 예를 들어 좌표 변환에서 변하지 않은 양에 관하여 정의된 곡선과 곡면의 '내재적 기하학 수업'(Lezione di geometria intrinseca)[8)]이라는 연구는 곡선에 적용되는 특별한 좌표 시스템을 선택한 장다르부(Jean Gaston Darboux)의 아이디어를 잘 활용한 결과였다. 더 나아가 그는 모든 점에서 연속이지만 어느점에서도 미분이 불가능한 헬게 폰 코흐(Niels Fabian Helge von Koch)[9)]의 코흐곡선을 연구하기 위해 그 자신의 연구 방법을 확장하기도 한다. 당시 체사로의 연구는 '임의의 수렴하지 않는 급수의 합' 에 대한 새로운 수렴정의를 보다 분명하게 정의하였는데 '수렴하지않는 급수에 대한 부분합의 산술평균의 극한으로 정의한 방법' 인 체사로 총합가능성을 발표하여 발산급수에 대한 새로운 연구의 장을 여는 수학사적 의미가 크다. 그의 연구는 결국 푸리에 해석에서 푸리에 급수의 수렴성을 논하는 데 중요한 수학적 도구 중 하나가 된다. 일반적으로 수렴하지 않는 무한급수의 값을 결정하는 좋은 도구인 체사로 총합가능성의 성질을 살펴보면 수렴급수는 체사로 총합가능이고 수렴하는 급수의 합은 체사로 총합과 일치한다는 사실이 이미 잘 알려져 있다.

3 체사로(Cesàro)의 총합가능성의 고전적 연구들

고전적으로 푸리에 해석의 푸리에 급수 수렴성 문제는 길고 복잡한 역사를 가지고 있다. 푸리에 급수는 일반적으로 유한구간에서 주어진 복잡한 주기함수를 간단한 사인과 코사인의 일차결합 형태 무한급수로 된 삼각함수 가중치로 분해하여 표현한 것이다 [16]. 푸리에 급수의 수렴성을 논하는 방법에는 푸리에 계수의 특징을 이용한 방법과 점별수렴, 항등수렴, 절대수렴, L^p 공간의 노름(norm)을 이용한 수렴성 등 다양한 연구가 진행되어 오고 있다 [17]. 이 절에서는 푸리에 급수의 체사로 총합가능성을 이용한 연구들을 중심으로 1897년부터 1950대 말까지 주목된 결과들을 고찰한다.

체사로는 1897년 나폴리 대학에서 그의 나이 38세 때 '무한소 미적분의 요소(Elements of Infinitesimal Calculus)' 를 발표하는데 여기서 체사로 총합으로 알려진 급수합을 부분합의 산술평균의 극한값으로 정의하여 제시한다. 이후 1900년 리포트 페예르(Lipót(or Leopold) Fejér)[10)] 는 당시 외트뵈시 로란드 (Eötvös Loránd) 대학에서 스승 헤르만 슈바르츠(Hermann Amandus Schwarz)로부터 박사학위 지도를 받던 중 "유계집합인 적분가능 함수에 관하여" [3]를 통해 푸리에 급수에 대한 근본적인 총합 정리를 발표한다. 즉 함수 $f(t)$

8) Intrinsic geometry lesson, Naples,(1896) ; 이 논문은 1914년 러시아어로 번역 출판됨.
9) (1870–1924) ; 스웨덴의 수학자. 1904년 코흐곡선으로 다윗의 별처럼 생긴 곡선을 만들어 제시함.
10) (1880–1959) 헝가리 태생 유태인 수학자. 조화해석과 푸리에 급수 연구.

가 2π 주기를 가진 연속 함수일 때 푸리에 급수의 부분합 (3)에 대하여 특히

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mu)\frac{\sin(2n+1)\frac{\mu-t}{2}}{\sin\frac{\mu-t}{2}}d\mu$$

로 표현하여 페예르 커널 (Fejér kernel) 로 잘 알려진

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mu)\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\mu-t}{2}}{\sin\frac{\mu-t}{2}}\right]^2 d\mu$$

을 최초로 소개한다. 페예르 커널은 디리클레 (Dirichlet) 커널 함수열들의 산술평균으로 표현되어지고 푸리에 해석에서 근사항등원에 관련된 대표적인 커널 중 하나이다. 그는 이어 1902 년 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성의 발견 (The discovery of the Cesàro summability of Fourier series)" 연구로 학위를 받는다. 한편 페예르 [3] 와 에이나르 힐레 [6] 와 학문적인 관계를 갖는다. 헝거리 부다페스트에 있는 외트뵈시 로란드 (Eötvös Loránd) 대학에서 리포트 페예르 (Lipót Fejér) 의 제자였던 머르첼 리스 (Marcel Riesz) 가 1912 년 학위를 받고 스웨덴 스톡홀름 (Stockholm) 대학에서 '구면조화함수[11)]에 관한 몇가지 문제 (Some Problems Concerning Spherical Harmonics)' 를 연구한 그의 제자 에이나르 힐레 (Einar Hille) 에게 1918 년 학위를 수여한다. 따라서 힐레는 페예르의 직계 후학이다. 원래 푸리에 급수는 원형상의 함수를 표현하는 급수이기 때문에 구면조화함수는 구형 표면상에 정의된 특별한 함수의 급수로 표현된다. 이어서 영국의 윌리엄 헨리 영 (William Henry Young) 은 1912 년 "총합가능 함수족과 푸리에 급수에 관하여" [29] 를 소개한다. 또한, 푸리에 급수와 푸리에 변환과 등에 관한 조화 해석학 (harmonic analysis) 분야에 공동 연구로 유명한 고드프리 해럴드 하디 (Godfrey Harold Hardy)[12)] 와 존 이든저 리틀우드 (John Edensor Littlewood)[13)]가 있다. 네온 리히텐슈타인 (Leon Lichtenstein) 이 1918 년 창간한 독일 수학저널 (Mathematische Zeitschrift) 에 이들은 1924 년 "멱급수와 푸리에 급수에 대한 체사로 총합가능성 문제의 해" [5] 에 대한 결과를 소개한다. 당시 푸리에 급수의 수렴성 문제가 리포트 페예르 (L. Fejér), 윌리엄 헨리 영 (William Henry Young), 머르첼 리스 (Marcel Riesz) 등에 의해 활발하게 논의되고 있었는데 만약 (1) 상에서 정의된 $f(t) \in L^1(T)$ 인 함수가 적분가능 일 때 그 함수의 푸리에 급수의 수렴성에 관한 필요충분조건으로 $f(t)$ 의 간결하고 완전한 성질을 찾지 못하고 있었다. 다시 말하면 충분조건은 있지만 필요조건이 없고 필요조건이 있지만 충분조건이 없는 결과들에 대해 그들은 체사로 총합가능성을 가지고 필요충분조건을 제시하였다. 즉, $t = x$ 일때 적분가능한 함수 $f(t) \in L^1(T)$ 의 푸리에 급수 (4) 가 총합가능(C) 일 필요충분조건은 만약

$$g(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2A$$

11) 주로 수학, 물리학, 전자기학, 양자역학등에서 구면 대칭인 계를 다룰 때 사용한다.

12) (1877–1947) 해석학과 수론을 연구한 영국의 옥스포드대학과 켐브리지대학 수학교수.

13) (1885–1977) 주로 조화해석 연구. 캠브리지 대학과 옥스포드 대학의 수학 교수 중 최고 교수로 선임된 라우스 볼 수학교수 (Rouse Ball Professor of Mathematics) 역임.

이고

$$g_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g(t_1)dt_1,$$
$$g_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g_1(t_2)dt_2, \cdots$$

이면 $t \to 0$일 때, $g_k(t) \to 0$을 만족하는 k가 존재해야 한다. 이 정리는 푸리에 급수뿐만 아니라 멱급수에도 적용된다. 그들은 주 정리들을 30페이지에 걸친 긴 증명을 통해 소개하였다. 한편 재창간된 후 1911부터 프린스턴 대학에서 발행된 수학연보(Annals of Mathematics)에 1927년 게일로드 메이쉬 메리맨(Gaylord Maish Merriman) 학위 논문이 소개된다. 이 논문은 게일로드 메이쉬 메리맨이 미국 오하이오주 남서부에 있는 신시네티대학(University of Cincinnati)에서 1926년 "이중 급수의 체사로 총합가능성에 대한 필요충분조건의 집합" [18] 연구로 스승 해리스 핸콕 (Harris Hancock)으로 부터 학위를 받은 논문이다. 이 논문은 기존의 하디와 리틀우드의 단일 푸리에 급수의 체사로 총합 가능성에 대한 필요충분조건 결과 [5]를 이용하여 이중 푸리에 급수로 확장한 결과이다. 한편 프린스턴 대학교 에이나르 힐레(Einar Hille)와 브라운 대학의 야곱 데이비드 타마킨(Jacob David Tamarkin)은 공동연구를 통해 1928년 "푸리에 급수의 총합 가능성에 관하여" [6]를 소개한다. 이 결과는 닐스에릭 놀런드(Niels Erik Nørlund)의 결과 [19]를 이용한 것이다. 당시 놀런드는 주어진 급수

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

에 대한 부분합을

$$\sum_{k=0}^{n} S_k = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

이라하고 수열 $\{c_n\}$은 $c_nC^{-1} \to 0$인 양항수열로 제안했다. 이어서 힐레(Einar Hille)와 타마킨(Jacob David Tamarkin)는 "푸리에 급수의 총합 가능성에 관하여 I" [7]에서 T_n을

$$T_n = (c_0S_n + c_1S_{n-1} + c_2S_{n-2}, + \cdots + c_nS_0)C^{-1} \tag{8}$$

으로 표현하고 $T_n \to T$이면 급수 C를 총합이 T인 T 총합가능이라고 표현하고 구간 (1) 상에서 주어진 함수 $f(t)$가 르베그적분가능이고 이 함수의 푸리에 급수 (2)의 부분합 (3)에 대한 총합을 놀런드(Niels Erik Nørlund) 방법을 적용하여 다시 T_n을

$$N_n[f(t), p_n] = \frac{1}{c_n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\mu)\left[\frac{c_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}\cos k\mu\right] d\mu$$

으로 표현한다. 그리고 거의 모든 곳에서 $f(t)$의 합에 대한 푸리에 급수 (2)와 (8)이 각각 (T, c_n) 총합가능임을 보인다. 그후 그들은 계속해서 "푸리에 급수의 총합 가능성에 관하여 II" [8]와 "푸리에 급수의 총합 가능성에 관하여 II 논문에 부가" [9]를 거듭 소개한다. 이어서 인도 북부 우타르프라데시 주에 있는 알라하바드 대학의 배지 나스 프라사드(Baij Nath Prasad)는 영(W. H. Young), 하디(G. H. Hardy), 리들우드(J. E. Littlewood)등의 연구 결과를 토대로

삼각계 급수에 관해 연구하던 중 1929년 영국 런던으로 건너가 리버풀(Liverpool) 대학에서 티치마쉬(E. C. Titchmarsh) 교수와 푸리에 급수 이론에 대한 연구를 통해 1930년 "푸리에 급수의 절대(A) 총합가능성" [21] 을 발표한다. 프라사드(Prasad)가 제시한 새로운 조건을 살펴보면, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ 일때 만약 함수

$$\Phi(t) = \int_0^t f(t)dt$$

가 구간 $(0, \delta)$ 에서 연속이면 (1) 상에서 정의된 르베그적분 가능한 함수 $f(t)$ 의 푸리에 급수 (2) 가 절대적인 총합가능(A) 이다. 또한 듀크대(Duke University) 에서 워터루딘(Walter Rudin) 의 스승으로 잘 알려진 거젠(John Jay Gergen) 도 같은 해에 "푸리에 급수에 관한 수렴성과 총합가능성의 기준" [4]을 소개한다. 이후 미국 일리노이주에 있는 노스웨스턴 대학(Northwestern University) 의 렌델스(W. C. Randels) 는 1937년 "푸리에 급수의 총합가능성" [22] 을 발표한다. 또한 옥스포드 대학에서 스승 하디(G. H. Hardy) 에게 학위를 받은 캠브리지 대학의 보잔켓(Lancelot Stephen Bosanquet) 은 주로 푸리에 해석을 연구하였는데 "연속적으로 유도된 푸리에 급수에 대한 체사로 총합가능성문제의 한 해" [1] 를 1940년 발표하고 이어서 칠교놀이(Tangram) 정리 증명14) 으로 잘 알려진 중국의 국립 종합대학인 저장대학 푸 트라잉 왕(Fu Traing Wang) 은 1943년 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성에 관한 참고" [24] 라는 연구를 소개한다. 즉 n 이 $0 < \beta \le n$ 을 만족하는 양의 정수이고

$$0 < \beta < \gamma, \quad \alpha = \frac{\gamma(n-1)+\beta}{\gamma+n-\beta}$$

일때 만약

$$f_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x)^{\beta-1}\{f(x)-s\}dx = o(t^\gamma)$$

성립하면 $t = 0$ 에서 총합 s 로 푸리에 급수 (2) 는 (C, α) 총합가능임을 소개한다. 한편 첸(Kien Kwong Chen) 은 36세 나이로 1929년 일본 도호쿠 대학(Tohoku University) 에서 푸리에 해석에 대한 뛰어난 연구를 통해 중국인 최초로 박사학위를 받고 중국으로 돌아온다. 그후 1944년 "주어진 점에서 음수차 푸리에 급수에 대한 체사로 절대 총합가능성에 관하여" [2] 를 발표한다. 즉 정의된 구간 (1) 에서 2π 주기를 가진 $f(t)$ 는 르베그적분가능한 함수이다. 또한 $1 < p, 0 < k < 1$ 이고 $1 < q + pk$ 를 만족하는 q 가 존재하고 $h \to +0$ 일때 함수

$$\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]$$

의 공액 함수 $g(t)$ 가

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t+h)-g(t-h)|^p \, t^{-q} dt = 0(h^{pk})$$

임을 만족하면 $x = t$ 에서 함수 $f(t)$ 의 푸리에 급수 (2) 는 $\alpha_0 < \alpha$ 일때 (C, α) 총합가능이다.

14) Fu Traing Wang (Chuan-Chih Hsiung) ; A Theorem on the Tangram, The American Mathematical Monthly 49(9) (1942), 596–599.

그리고 $-k < \beta$ 일때 (2)는 (C, β) 총합가능임을 보인다. 단 여기서

$$-\frac{1}{2}k < \alpha, \quad \alpha_0 = \frac{1}{p} - k < 0, \quad -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2} < \beta$$

이다. 1950년대 들어와서 특히 일본에서 더 활발한 연구가 여러 사람들에 의해 진행된다. 먼저 도쿄수도 대학(Tokyo Metropolitan University)의 시게키 야노(Shigeki Yano)는 1952년 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성" [27]을 소개한다. 즉 (1)상에서 정의된 적분가능한 함수 $f(t)$의 푸리에 급수가 (2)일때 급수

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)n^{-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

와 공액 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nt - b_n \cos nt)n^{-\alpha}$$

는 거의 모든 곳에서 $(C, -\alpha)$ 총합가능임을 소개한다. 그리고 이듬해 1953년 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성" [28]으로 간단 명료한 짧은 연구결과를 발표하는데 주어진 $f(t)$은 (1)상에서 정의된 주기함수이고 (2)와 같이 푸리에 급수로 표현될때 만약 $f(t) \in L^p(T), 1 \leq p$이고 $0 < \alpha < 1$이면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)n^{-\frac{\alpha}{p}} \tag{9}$$

은 $(C, -\frac{\alpha}{p})$ 총합가능임을 이용하여 주 정리에서 만약 $f(t) \in L^p(T)$일때 $1 \leq p$이고 $0 < \alpha < 1$이면 급수

$$g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt, \quad a_0 = 0 \tag{10}$$

은 $(C, -\frac{\alpha}{p})$ 총합가능임을 보인다.

도호쿠 대학(Tohoku University)의 겐이치로 스노우치(Gen Ichiro Sunouchi)는 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성" [23]에서 우함수이고 주기함수인 $g(t)$가 코사인 푸리에 급수로 표현되고 (8)에서 $g(t)$ 의 α-번째 적분

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g(x)(t-x)^{\alpha-1}dx \quad (\alpha > 0)$$

과 (8)의 β-번째 체사로 총합을 $S_n^\beta(\beta > -1)$으로 정의한 다음 $0 < \beta < \gamma$에 대해서 만약

$$\Phi_\beta(t) = o(t^\gamma) \quad (t \to 0)$$

이면 $\alpha = \frac{\beta}{\beta-\gamma+1}$ 일때

$$S_n^0 = S_n = o(n^\alpha) \quad (n \to \infty)$$

임을 이용하여 주 정리에서 만약 $0 < \beta < \gamma$ 이고 (9)이면 $g(t)$의 푸리에 급수 (9)이 $t = 0$에서 0으로 $\left(C, \frac{\beta}{\gamma-\beta-1}\right)$ 총합가능임을 보인다.

도쿄 토리추(Tokyo Toritu) 대학의 마사끼티 기누카와(Masakiti Kinukawa)는 1954년 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성에 관하여" [11]를 소개하고 이듬해에 도쿄에 위치한 국제

기독교대학(ICU)으로 자리를 옮겨 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성에 관하여 II" [12]를 연속해서 발표한다. 이어서 야마가타(Yamagata) 대학의 고시 간노(Kosi Kanno)는 "푸리에 급수의 체사로 총합가능성에 관하여 (II)" [10]에서 [29, 23, 12]등의 결과를 이용하여 그의 연구결과를 소개한다. 이어서 나라 여자대학(Nara Women's University)의 겐지 야노(Kenji Yano)는 1957년 "푸리에 급수에 대한 체사로 총합의 어떤 방법에 관하여" [26]를 발표한다. 여기서 만약 $0 < \alpha < 1$ 그리고 왕(F. T. Wang)[15] 이 보인 조건

$$\Phi_1(t) = o(t^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (t \to +0)$$

을 만족하면 구간 (1)에서 정의된 주기함수 $f(t)$ 의 푸리에 급수 (2)가 $t = x$ 에서 함수 $f(x)$ 로 (C, α) 총합가능임을 보인다. 체사로 총합가능성을 일반화한 다양한 연구가 시도되고 있고 푸리에 급수의 수렴성을 보이는데 체사로 평균을 사용하는 편리함도 잘 알려져 있다. 우리가 자주 접하게되는 아벨 총합가능성(Abel summability)은 체사로 총합가능성을 확장한 개념의 하나이다. 즉 주어진 함수의 푸리에 급수에 대해 체사로 총합은 가능하지 않지만 아벨 총합은 가능한 급수가 존재함이 알려져 있다. 이제까지 살펴본 20세기 전반기 연구결과들 이외에도 계속해서 현재까지 여러 연구들이 소개되고 있다. 최근 소개된 결과들 중에는 2014년에는 나야크(L. Nayak), 다스(G. Das), 레이(B. K. Ray)등의 연구와 지난 2015년 트리거브(R. M. Trigub), 마하라제(D. Makharadze)등 그리고 2016년 올해 들어와서도 그리고리언(M. G. Grigoryan)과 갈로얀(L. N. Galoyan)등의 결과들이 활발하게 소개되고 있다. 현재도 여러 사람들에 의해 지속적인 연구가 진행되고 있다.

4 결론 : 푸리에 급수의 체사로(Cesàro) 총합가능성

무한급수의 부분합들에 대한 산술 평균의 극한으로 정의된 체사로 총합가능성이 1890년 에르네스또 체사로에 의해 소개된 이후 체사로 총합가능성은 급수의 합을 구하는 데는 편리한 도구이기 때문에 푸리에 급수 수렴성 연구에 더 흔히 사용된다. 체사로 총합가능성은 푸리에 급수의 삼각계 무한급수 총합가능성을 논하여 수렴성을 보이는 것 뿐만아니라 정보통신분야의 입력신호를 체사로 총합의 변환을 통해 영상신호 복원과 음성신호 복원 등에 활용되고 특히 물리학의 조절이론에서 무한값의 무한 정도를 특정 조절변수(regulator)로 표현하여 유한값으로 정의하는 양자론 등 자연과학과 공학에서 널리 사용되고 있다. 앞절에서 살펴본 여러 결과들 중 주목되는 몇가지 연구들에 대해 결론으로 특징과 그 의미를 재기술한다. 리포트 페예르 [3]의 1900년 푸리에 급수에 대한 본질적인 총합 정리와 1902년 푸리에 급수의 체사로 총합가능성에 관한 연구는 20세기 초반 고전적인 해석학 연구에 동기를 제공하게 된다. 페예르는 해석학 분야의 여러 주제에 걸쳐 심오한 기여를 했을 뿐만 아니라 특히 푸리에 해석에서 중요한 페예르

15) F.T. Wang, A remark on (C) summability of Fourier series. J. London Math. Soc., 22 (1947), 40–47.

커널을 우리에게 선사했다. 또한 윌리엄 헨리 영 [29] 의 결과는 1911년 그의 연구[16] 인 '푸리에 급수 적분문제' 에서 기인된 것이다. 한편 야곱 데이비드 타마킨 (Jacob David Tamarkin) [6] 은 러시아 모스크바 북쪽에 위치한 예술의 도시 상트페테르부르크의 상트페테르부르크 국립대학교 (St. Petersburg State University) 에서 1917년 스승 안드레이 마르코프 (Andrei A. Markov) 로부터 학위를 받고 1925년 미국으로 이민온 후 브라운 (Brown) 대학에서 푸리에 급수등을 연구하면서 세계적으로 주목받은 많은 제자를 둔다.[17] 그리고 프라사드 (Prasad) 의 연구결과 [21] 는 그가 리버풀 대학에 방문전 에딘버러 (edinburgh) 대학에서 잠시 푸리에 급수를 연구하는데 이 대학 휘터커 (John Macnaghten Whittaker) 가 제시한 [25] 에서 절대 총합가능성 조건에 대해 새로운 조건과 협의의 절대 총합가능성 조건을 각각 제시한 새로운 연구결과를 불과 몇 개월만에 리버플 대학에서 발표해 주위를 놀라게 한다. 이후에도 거젠 [4], 첸 [2], 등에 의해 연구가 계속되어 오다가 1950년대 들어와서는 일본 수학자들이 푸리에 급수의 체사로 총합가능성 연구를 주도하면서 많은 결과를 발표한다. 그 중 주목되는 결과로 1952년 시게키 야노 (Shigeki Yano) 가 소개한 [27] 은 독일의 야곱 (M. Jacob) 이 1927년에 발표한 '푸리에 급수 이론에서 하디 (Hardy) 의 통합 이론들의 일반화에 관하여' 는 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)n^{2\alpha}\qquad(0<\alpha<1)$$

가 수렴한다고 가정하고 삼각계 급수가 $(C,-\alpha)$ 총합가능임을 보인 결과를 더 일반화한 연구였다. 그리고 겐 이치로 스노우치 (Gen Ichiro Sunouchi) 는 1953년 그가 소개한 연구 [23] 에서 주 정리를 더 약한 타우버 조건 (Tauberian condition)

$$\sum_{\mu}^{\infty}\frac{|a_\mu|}{\mu}=O(n^{-(1-\delta)})$$

에서 체사로 총합가능성과 동치관계인 베셀 총합가능성 (Bessel summability) 을 이용하여 증명한다. 한편 1957년 인도 알라하바드 대학 (Allahabad University) 의 슬라사나쿠마리 (Sulaxana Kumari) 는 [13] 에서 푸리에 급수의 체사로 평균의 차수를 논하면서 푸리에 급수의 부분합의 차수에 대한 기존 르베그 (Lebesque) 와 페예르 (Fejér) 의 연구결과를 소개한다. 결과적으로 스노우치 (Sunouchi))[18] 의 결론을 이용하여 '푸리에 급수의 체사로 평균의 차수' 를 보임으로써 주목을 받는다.

무한급수에 대해 총합가능성을 확장하여 일반화하는 조건의 연구도 활발하게 진행되고 있다. 1911년 머르첼 리스 (Marcel Riesz) 에 의해 소개된 리츠 평균은 체사로 평균과 실질적으로 유사한 총합 가능성 방법이다. 기존 총합가능성의 접근방법과 다른 무한 급수의 수렴값을 정의

16) William Henry Young, On a class of parametric integrals and application in the theory of Fourier series, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, vol. 85 (1911), 401–414.

17) Jacob David Tamarkin—His life and work, by Einar Hille, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 53, Number 5 (1947), 440–457.

18) Note on Fourier analysis. (XLIV). On the summation ofFourier series,Tohoku Mathematical Journal, 3 (1951) 114–122.

하는 무한급수 정규화(regularization)방법이 있고 기존 개념에서 확장된 총합가능성이 언제 기존의 총합가능성과 일치하는지를 연구한 정리들인 타우버의 정리(Tauberian theorem)[19)]가 있다. 결론으로 1924년부터 1957년까지 체사로(Cesàro) 총합가능성을 이용한 푸리에 급수 수렴성 문제를 일반화하려는 다양한 노력의 연구자 소계보를 요약 제시한다.

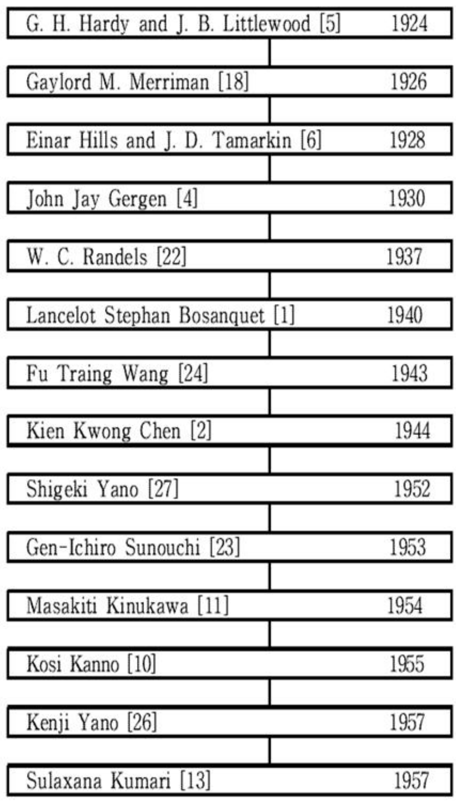

Figure 1. The researcher minor lineage of Cesàro summability for Fourier series; 푸리에 급수의 총합 가능성 관한 연구자 소계보

음이 아닌 항의 단조증가수열$\{s_n\}$에 대해 이 수열이 어떤 실수 L로 체사로 총합가능하면 실제로 이 수열은 L로 수렴한다. 무한급수 (4)의 값을 정의할 때 일반적으로 (4)의 부분합의 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$ 또는 기존 방법을 확장하거나 무한합을 재해석하는 등 급수의 수렴성을 자연스럽게 확장하는 시도는 여러 사람들에 의해 지금도 연구되고 있다.

19) 헝가리 수학자 알프레트 타우버(Alfred Tauber)의 이름으로 기인됨.

References

1. L. S. Bosanquet, A solution of the Cesàro summability problem for successively derived Fourier series, *Proc. London Math. Soc.* 2(46) (1940), 270–289.
2. Kien Kwong Chen, On the Absolute Cesàro Summability of Negative Order for a Fourier Series at a Given Point, *American Journal of Mathematics* 66(2) (1944), 299–312.
3. Lipót Fejér, Sur les functions bornée set intêgrables, *C. R. Acad. Sci. Paris* 131 (1900), 984–987.
4. John J. Gergen, Convergence and summability criteria for Fourier series, *Quarterly Journal of Mathematics*, *Oxford Series* 1 (1930), 252–275.
5. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series, *Mathematische Zeitschrift* 19 (1924), 67–96.
6. Einar Hille J. D. Tamarkin, On the summability of Fourier series, *Proc. N. A. S.* 14(1928).
7. Einar Hille, J. D. Tamarkin, On the Summability of Fourier Series I, *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 34 (1932), 757–783.
8. Einar Hille, J. D. Tamarkin, On the Summability of Fourier Series II, *Annals of Mathematics* Second Series, 34(2) (1933), 329–348.
9. Einar Hille, J. D. Tamarkin, Addition to the paper "On the Summability of Fourier Series II", *Annals of Mathematics* Second Series, 34(3) (1933), 602–605.
10. Kosi Kanno, On The Cesàro summability of Fourier series (II), *Tohoku Mathematical Journal* Second Series, 7(3) (1955), 265–278.
11. Masakiti Kinukawa, On The Cesàro summability of Fourier series I, *Tohoku Math. Journal* 6(2–3) (1954), 109–120.
12. Masakiti Kinukawa, On The Cesàro summability of Fourier series II, *Tohoku Math. Journal* Second Series, 7(3) (1955), 252–264.
13. Sulaxana Kumari, On the order of the Cesàro means of Fourier series and its successively derived series, *Proceedings: Physical sciences* Part A. 23(3) (1957), 199–216.
14. Lee Jung Oh, The Life of Fourier, the Small Lineage of His younger scholars and a theorem of Telyakovskii on L^1-convergence, *The Korean Journal for History of Mathematics* 22(1) (2009), 25–40.
15. Lee Jung Oh, A brief study on Bhatia's research of L^1-convergence, *The Korean Journal for History of Mathematics* 27(1) (2014), 81–93.
16. Lee Jung Oh, On Classical Studies for the Summability and Convergence of Double Fourier Series, *Korean Journal for History of Mathematics* 27(4) (2014), 285–297.
17. Lee Jung Oh, On $L^p(T^2)$-convergence and Móricz, *Journal for History of Mathematics* 28(6) (2015), 321–332.
18. Gaylord M. Merriman, A Set of Necessary and Sufficient Conditions for the Cesàro Summability of Double Series, *Annals of Mathematics* Second Series, 29(1/4) (1927–1928), 343–354.
19. Niels Erik Nørlund, Sur une application des fonctions permutables, *Lunds Universitets Arsskrift* N. F., avd.16(2) (1919), 3–10.
20. Alfredo Perna, Ricordo di Ernesto Cesàro (1859–1906), Bollettino dell'Unione Matemat-

ica Italiana, Serie 3, 11(3) (1956), 457–468.

21. B. N. PRASAD, *The Absolute Summability (A) of Fourier Series*, University of Liverpool, 1930, 129–134.
22. W. C. Randels, On the summability of Fourier series, *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 41(1) (1937), 24–47.
23. Gen Ichiro SUNOUCHI, Cesàro Summability of Fourierseries, *Tohoku Mathematical Journal* Second Series, 5(2) (1953) 198–210.
24. Fu Traing WANG, A Note on Cesàro Summability of Fourier Series, *Annals of Mathematics* Second Series, 44(3) (1943), 397–400.
25. J. M. WHITTAKER, The absolute summability of Fourier series, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 2 (1930), 1–5.
26. Kenji YANO, On a method of Cesàro summation for Fourier series, *Kodal mathematical seminar reports* 9(2) (1957) 49–58.
27. Shigeki YANO, Note on Fourier analysis. XXXI. Cesàro summability of Fourier series, *Pacific J. Math.* 2(3) (1952), 419–429.
28. Shigeki YANO, Cesàro Summability of Fourier series, *Tohoku Mathematical Journal* Second Series, 5(2) (1953) 196–197.
29. William Henry YOUNG, On classes of summable functions and their Fourier series, *Proceedings of the Royal Society of London* Series A (1912), 225–229.