한국초등수학교육학회지 21(4) 575-598. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 21*(4) 575-598.
2017. 11. 30 *November 30. 2017.*

산술적 사고 수준의 분석 및 검사 도구 개발[1]

임미인[2] · 장혜원[3]

초등 수학의 주요 내용인 산술 지도의 바람직한 방향 모색을 위해 산술적 사고의 수준을 고려할 필요가 있고, 이를 위해 산술적 사고 수준별 특징을 탐색하고 학생 개인의 산술적 사고 수준 판단을 위한 검사 도구를 마련하는 것은 교육적으로 매우 의미 있는 일이다. 본 연구에서는 문헌 분석 결과에 따라 산술적 사고 요소에 기초한 산술적 사고의 수준별 특징을 탐색하고, Guttman 척도를 따르는 산술적 사고 수준 검사 도구를 구성하는 것을 목적으로 하였다. 연구 결과, 산술적 사고는 산술적 사고 요소에 따라 특징이 상이한 4가지 수준으로 구별 가능하며, 그 특징을 반영하여 개발한 산술적 사고 수준 검사 도구는 학생들의 산술적 사고 수준 판별에 유용할 것으로 기대된다. 또한 검사 도구의 적용 결과는 우리나라 초등 수학에서 관계 수준(3수준) 및 적용 수준(4수준)을 위한 학습 경험을 더욱 풍부히 제공해야 함을 시사한다.

주제어: 산술적 사고, 산술적 사고 수준, 산술적 사고 수준 검사 도구

Ⅰ. 서 론

초등학교에서 수학을 학습한다는 것은 곧 수와 연산을 학습한다는 의미로 여겨질 만큼 산술은 학교수학의 기본이라 할 수 있고, 실제로 수학 교과서를 분석해보더라도 초등 수학에서 산술이 차지하는 양과 범위가 방대함을 확인할 수 있다. 이와 같이 초등 수학의 핵심인 산술을 어떻게 의미 있게 지도할 수 있을까?

산술에 대한 학생들의 풍부한 이해를 도모하기 위해서는 그와 관련된 사고인 산술적 사고가 수반되어야 하고(Guberman, 2016), 우정호(2011)의 주장에 기초할 때, 산술적 사고의 본질에 대해 이해하고 이를 통해 수학적 안목을 구성하는 방향으로 산술 학습이 이루어져야 한다. 특히 van Hiele(1986), Guberman(2016) 등은 학생들의 산술적 사고 수준을 설정하고 산술적 사고의 발달 측면에 집중한 연구를 수행하였다. van Hieles는 기하 교수·학습 시 교사가 학생들과 다른 사고 수준에 해당하는 언어로 가르치기 때문에 학생들의 이해를 이끌지 못함을 문제로 지적한 바 있다. van Hiele(1986)은 이것이 비단 기하적 사고 수준에만 해당되는 것이 아니며 산술적 사고 또한 그 수준에 따른 지도가 필요하다고 하였다. Guberman(2016)은 van Hieles의 이론에 근거하여 산술적 사고의 수준을 구분하였다. 그에 따르면 산술적 사고는 수에 대한 기초적인 이해부터 논리적 관계 인식에 이르기까지 사고

1) 이 논문은 제1저자의 박사학위논문의 일부를 재구성한 것임.
2) [제1저자] 서울오류초등학교
3) [교신저자] 서울교육대학교

요소의 스펙트럼이 광범위하기 때문에, 학생별로 발달 정도에 따라 서로 다른 사고 수준에 위치할 것이 예상된다. 그 밖에 Skemp(1989) 또한 예를 들어, 5 더하기 4의 덧셈 문제를 해결함에 있어서 아동들의 사고를 살펴보면 5개의 구체물을 세고 4개를 더 센 후 다시 처음부터 9개를 모두 세는 아동, 손가락으로 5부터 시작하여 4개를 더 이어 세는 아동, 5 더하기 5는 10이고 4는 5보다 1만큼 작기 때문에 답이 10보다 1만큼 작은 9라고 답하는 아동 등 각기 다른 사고를 한다고 하였다. 그가 산술적 사고 수준에 대해 명시적으로 언급한 것은 아니지만, 나이가 비슷함에도 불구하고 둘째 아동의 사고가 첫째 아동의 사고보다 발달된 것이고 셋째 아동의 사고는 수학적으로 훨씬 앞서는 사고라고 말함으로써 산술에서 사고 수준의 구분 가능성을 암시하였다.

따라서 효과적인 산술 교육을 위해서는 학생이 보이는 산술적 사고의 특징 및 그에 따른 사고 수준을 파악하여 그에 적합하게 지도할 필요가 있다. 이는 산술적 사고의 수준별 특징은 어떠한지에 대한 연구뿐만 아니라, 더 나아가서 학생들의 산술적 사고 수준을 판단할 수 있는 진단 도구가 필요함을 함의한다. 물론 Guberman(2016)에서 산술적 사고 수준 검사 도구를 제시하기는 하였으나 이는 이스라엘이라는 특정 국가의 교육과정에 국한된다는 한계가 있다. 즉, 산술 지도 시 보다 보편적인 산술적 사고 수준 검사 도구를 통해 학생들의 산술적 사고 수준을 파악하고 그에 적합한 학습 경험을 제공함으로써 학생 개개인의 산술적 사고를 신장할 수 있도록 지도할 필요가 있는 것이다.

이러한 연구 배경과 필요성을 토대로 본 연구는 산술적 사고 요소에 기초한 산술적 사고의 수준별 특징을 탐색하며, 산술적 사고 수준 검사 도구를 개발하여 학생들의 산술적 사고 수준을 신장시키기 위한 산술 교육에 이론적, 실제적 토대를 제공하는 것을 목적으로 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 산술적 사고 수준

산술적 사고 수준에 관한 선행 연구로 van Hiele(1986), Guberman(2016)을 고찰함으로써 산술적 사고 요소를 수준별로 범주화하기 위한 기초 자료로 활용하였다.

van Hiele(1986)은 일반적으로, 교사와 학생은 매우 상이한 언어로 말하고, 이는 서로 다른 수준에서 사고하기 때문이라고 하였다. 또한 사고 수준은 학교에서 가르쳐지는 어떠한 수학 영역에도 적용될 수 있고, 산술에서도 이러한 사고 수준을 확인할 수 있다고 하였다. 또한 교사가 학생의 사고 수준에 대한 지식을 지니면 가르치고자 하는 내용을 어디에서부터 시작해야 할지 찾을 수 있고 학생들이 미달성한 수준에 있는 개념을 이용하여 지도하는 위험을 피할 수 있다고 하였다. 나아가 생물학적 성숙이 아닌 적절한 학습을 통해 상위 수준의 사고로의 발달을 주장하였다.

Guberman(2016)은 van Hieles의 연구를 토대로 이스라엘의 교육과정에 기초한 산술적 사고 수준 검사 도구를 제작하여 이스라엘 교육대학생들의 산술적 사고 수준을 검사하고 그로부터 각 수준별 특징을 제시하였다. 산술적 사고를 4가지 수준으로 범주화하고, 각각의 수준별 특징을 고려하여 1수준은 행동 수준, 2수준은 설명 수준, 3수준은 비형식적 산술 수준, 4수준은 형식적 산술 수준으로 칭하였다. 또한 산술적 사고 요소를 수준별로 구분함에 있어서, 비효율적/효율적 계산 수행, 산술에 대한 도구적/관계적 이해, 부분적 일반

화/일반화와 같이 두 수준에 걸쳐 포함되는 요소는 그 수준을 달리하여 제시하였다. 본 연구에서는 산술적 사고 요소를 수준별로 범주화하고 이후 산술적 사고 수준 검사 도구를 제작하기 위해 수준별로 문항을 배치함에 있어서 이와 같은 Guberman(2016)의 산술적 사고 수준별 특징을 기초 자료로 활용하였다.

2. 산술적 사고 수준에 따른 산술적 사고 요소 구분

임미인(2017)은 산술, 산술적 사고, 대수적 사고, 산술적 추론, 수 감각 등 관련 연구 분석 및 3차에 걸친 전문가 델파이 조사를 통해 산술적 사고의 요소 18가지를 추출하였다(<표 1>). 18가지 산술적 사고 요소 각각이 요구하는 인지적 수준이 같지 않다는 사실은 산술적 사고 수준에 대한 심도 깊은 탐색의 필요로 이어진다.

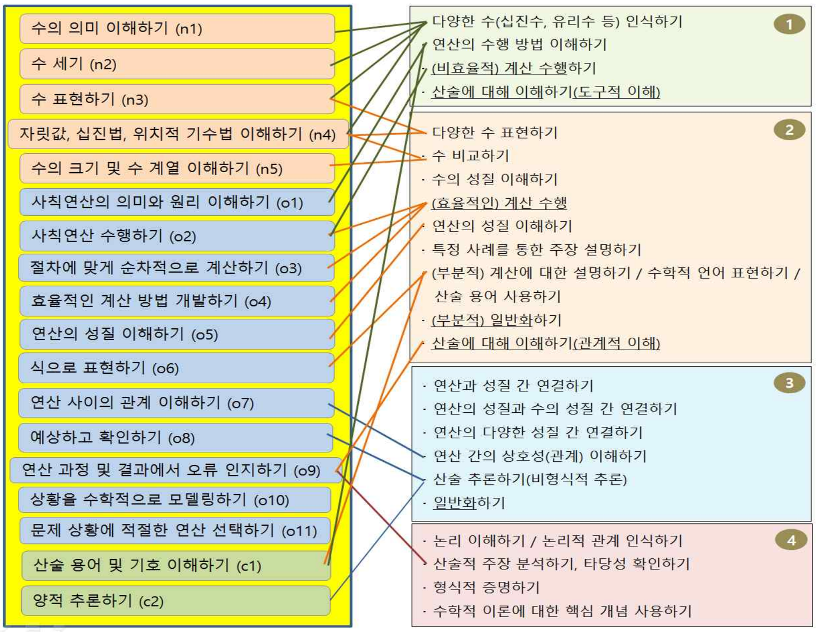
<표 1> 산술적 사고 요소(임미인, 2017)

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">수 관련 요소</th><th colspan="2">연산 관련 요소</th><th colspan="2">공통 요소</th></tr>
<tr><td rowspan="6">성질 측면</td><td>수의 의미 이해하기</td><td>n1</td><td>사칙연산의 의미와 원리 이해하기</td><td>o1</td><td rowspan="7">산술 용어 및 기호 이해하기</td><td rowspan="7">c1</td></tr>
<tr><td>수 세기</td><td>n2</td><td>사칙연산 수행하기</td><td>o2</td></tr>
<tr><td>수 표현하기</td><td>n3</td><td>절차에 맞게 순차적으로 계산하기</td><td>o3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기</td><td rowspan="3">n4</td><td>효율적인 계산 방법 개발하기</td><td>o4</td></tr>
<tr><td>연산의 성질 이해하기</td><td>o5</td></tr>
<tr><td>식으로 표현하기</td><td>o6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">관계 측면</td><td rowspan="3">수의 크기 및 수 계열 이해하기</td><td rowspan="3">n5</td><td>연산 사이의 관계 이해하기</td><td>o7</td></tr>
<tr><td>예상하고 확인하기</td><td>o8</td><td rowspan="4">양적 추론하기</td><td rowspan="4">c2</td></tr>
<tr><td>연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기</td><td>o9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">적용 측면</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>상황을 수학적으로 모델링하기</td><td>o10</td></tr>
<tr><td>문제 상황에 적절한 연산 선택하기</td><td>o11</td></tr>
</table>

이상의 18가지 산술적 사고 요소를 Guberman(2016)으로부터 파악된 산술적 사고 수준별 요소와 비교함으로써([그림 1]), 산술적 사고 요소 각각을 Guberman(2016)의 사고 수준별로 구분할 수 있다.

수 관련 산술적 사고 요소 중 수의 의미 이해하기(n1), 수 세기(n2), 수 표현하기(n3), 자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기(n4)는 Guberman(2016)에서의 1수준에 해당하는 다양한 수 인식하기와 관련 있다. 이 중 n3, n4는 2수준의 다양한 수 표현하기와도 관련되기 때문에 1수준과 2수준에 모두 해당하는 산술적 사고 요소로 파악될 가능성이 있다. 자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기(n4), 수의 크기 및 수 계열 이해하기(n5)는 2수준인 수 비교하기와 관련된다.

연산 관련 산술적 사고 요소 중 사칙연산의 의미와 원리 이해하기(o1)는 1수준인 연산의 수행 방법 이해하기와, 사칙연산 수행하기(o2)는 1수준인 (비효율적) 연산 수행하기와 2수준인 (효율적인) 연산 수행하기 둘 다에 관련된다. 절차에 맞게 순차적으로 계산하기(o3), 효율적인 계산 방법 개발하기(o4)는 (효율적인) 연산 수행하기와, 연산의 성질 이해하기(o5)는 연산의 성질 이해하기와, 식으로 표현하기(o6)는 수학적 언어 표현하기와 관련되어 네 요소 모두 2수준에 해당한다. 연산 사이의 관계 이해하기(o7), 예상하고 확인하기(o8)는 각각



[그림 1] 산술적 사고 요소와 Guberman(2016)의 산술적 사고 수준

3수준의 연산 간 상호성 이해하기, 산술 추론하기(비형식적 추론)와 관련된다. 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기(o9)의 경우, 주어진 풀이 과정 및 결과를 보고 오류를 인지하는 것은 2수준에 해당하는 산술에 대한 관계적 이해가 가능할 때 이루어질 수 있으며, 4수준에 해당하는 산술적 주장 분석하기, 타당성 확인하기와도 관련이 있다. 한편 Guberman(2016)에서 상황을 수학적으로 모델링하기(o10), 문제 상황에 적절한 연산 선택하기(o11)와 직접적으로 관련되는 요소는 찾아볼 수 없었다.

수와 연산 공통 관련 산술적 사고 요소 중 산술 용어 및 기호 이해하기(c1)는 1수준인 연산의 수행 방법 이해하기와 2수준인 산술 용어 사용하기 모두에 관련되는 것으로 파악된다. 사칙연산의 수행 방법을 안다는 것은 그와 관련된 산술 용어 및 기호를 이해할 때 가능하기 때문이다. 양적 추론하기(c2)는 전형옥, 이경화, 방정숙(2009) 등 선행 연구 결과에 기초할 때 3수준인 산술 추론과 관련된다.

이와 같은 분석 결과에 기초하여 18가지 산술적 사고 요소를 크게 4가지 수준으로 범주화하고, 산술적 사고 수준별로 예상되는 특징을 추출할 수 있다(<표 2>). 이때 양적 추론하기(c2)는 비형식적 대수 추론으로 볼 정도의 요소이므로(이화영, 2011) 3수준보다는 가장 상위 수준인 4수준에 해당하는 것으로 예상하였다.

수 표현하기(n3), 사칙연산 수행하기(o2)는 1수준과 2수준에 걸쳐 관련되는 것으로 나타났기에 두 수준에 모두 해당되는 요소로 예상하였다. 한편 자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기(n4)는 1수준과 2수준에, 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기(o9)는 2수준과 4수준에, 산술 용어 및 기호 이해하기(c1)는 1수준과 2수준에 걸쳐 관련되는 요소로 파악되었으나 n4는 n3과 비교할 때 상위 수준의 요소로 예상되어 2수준으로 구분하였고, o9는 2수준과 4수준 사이인 3수준으로 구분하였다. c1은 1수준으로 범주화된 o1, o2와 밀접한 관련이 있기 때문에 1수준으로 예상 수준을 구분하였다. 상황을 수학적으로 모델링하기(o10), 문제 상황에 적절한 연산 선택하기(o11)는 Guberman(2016)에서 제시되지 않은 요소이기

때문에, 수학교육 전문가 2인의 검토를 통해 그 예상 수준을 취하였다. o10과 o11의 경우는 일반적으로 적용과 관련된 요소의 성격을 띠고, o10은 분석, 이해, 종합 등 고도의 인지 활용까지 요구하기 때문에(고창수, 오영열, 2015) 4수준으로 예상하였다.

Guberman(2016)은 4가지 산술적 사고 수준을 행동 수준, 설명 수준, 비형식적 산술 수준, 형식적 산술 수준으로 구분하였으나, 본 연구 결과 산술적 사고 요소 중 형식적 산술 수준인 4수준과 관련된다고 볼 수 있는 요소는 1가지(연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기, o9)만 추출됨으로써 Guberman(2016)이 제시한 산술적 사고 수준을 그대로 따르는 것은 불가능하였다. 이에 각 수준별로 포함된 요소들의 공통점을 탐색하고 Guberman(2016)과 Warren(2003)에 기초하여 본 연구에서는 1수준부터 4수준을 각각 행동 수준, 표현 수준, 관계 수준, 적용 수준으로 명명하였다.

<표 2> 문헌 분석을 통해 파악된 산술적 사고의 4가지 수준 및 예상 특징

수준		산술적 사고 요소	각 산술적 사고 수준에 해당하는 예상 특징
1수준	행동 수준	n1, n2, n3 o1, o2 c1	· 개수를 세고, 수(자연수) 개념을 이해한다. · 산술 용어 및 기호를 이해한다. · 사칙연산의 의미와 원리를 알고 자연수의 사칙연산을 수행한다.
2수준	표현 수준	n3, n4, n5 o2, o3, o4, o5, o6	· 수(분수, 소수)를 다양하게 표현한다. · 자연수의 크기를 비교하고 수 계열을 이해한다. · 자릿값, 십진법, 위치적 기수법을 이해한다. · 분수, 소수의 사칙연산을 수행한다. · 혼합 계산을 절차에 맞게 순차적으로 계산한다. · 연산의 성질을 이해한다. · 효율적인 계산 방법을 이해한다. · 식으로 표현한다.
3수준	관계 수준	n5 o7, o8, o9	· 분수, 소수의 크기를 비교한다. · 연산 사이의 관계를 이해한다. · 예상하고 확인한다. · 연산 과정 및 결과에서 오류를 인지한다.
4수준	적용 수준	o10, o11 c2	· 양적 추론을 한다. · 주어진 상황을 수학적으로 모델링한다. · 관련 연산이 직관적으로 파악되지 않는 문제 상황에서 적절한 연산을 선택한다.

Ⅲ. 연구 방법

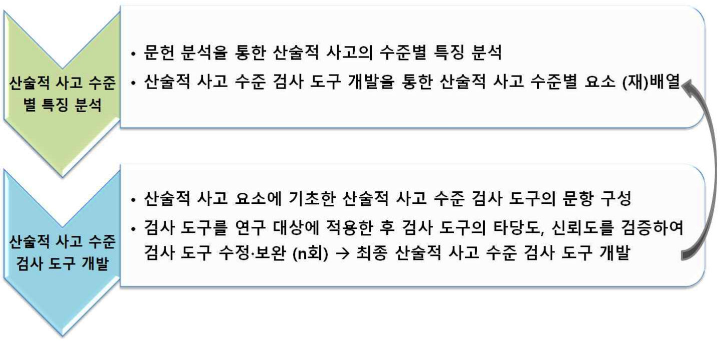
1. 산술적 사고의 수준별 특징 분석

가. 문헌 분석

일차적으로 국내・외의 산술적 사고 수준에 관한 선행 연구 문헌을 분석 대상으로 하여 자료를 수집・분석한 후, 그 결과를 토대로 산술적 사고 요소를 수준별로 범주화하였다(II장 2절 참조).

나. 검사 도구 개발 후 산술적 사고 수준별 특징 재분석

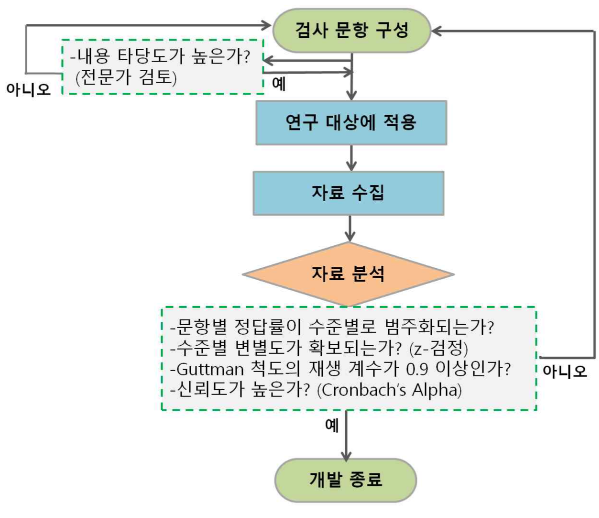
문헌 분석을 통해 산술적 사고 수준별로 범주화한 요소들의 배치가 타당한지 검증하기 위해 요소의 수준별 구분이 Guttman 척도를 따르는지 분석하였다. 본 연구에서 개발한 최종 산술적 사고 수준 검사 도구는 Guttman 척도에 따라 1수준부터 4수준까지 각 수준에 해당하는 요소 및 그에 관련된 문항으로 구성되었다. 즉, 산술적 사고 수준 검사 도구가 산술적 사고 수준을 구분함을 보장하는 것이기 때문에, 문헌 분석을 통해 수준별로 범주화했던 요소들이 최종 검사 도구의 각 수준과 일치하는지 확인한 후, 수준이 일치하지 않는 요소를 추출하여 수준을 재배치함으로써 산술적 사고 수준별 특징을 공고히 할 수 있다. 이에, 개발한 산술적 사고 수준 검사 도구의 결과를 토대로, 문헌 분석을 통해 탐색한 산술적 사고의 수준별 특징이 적절한지에 관한 재분석을 실시하였다([그림 2]).



[그림 2] 연구 방법 및 절차

2. 산술적 사고 수준 검사 도구 개발

산술적 사고 수준 검사 도구의 개발 절차는 [그림 3]과 같다.



[그림 3] 산술적 사고 수준 검사 도구의 개발 절차

가. 연구 대상

산술적 사고 수준 검사 도구의 초안을 개발한 후 이를 표준화 검사 도구로 구성하기 위해 산술에 대한 기초적인 학습을 완료한 초등학교 5학년과 6학년 학생들을 대상으로 적용을 실시하였다. 5학년과 6학년 학생은 산술에 대한 기본적인 지식을 확보한 상태에서 검사에 임할 것으로 기대되며, 아직 본격적인 대수 학습 이전이기 때문에 산술적 사고 작용을 토대로 문제를 해결할 것으로 가정된다. 연구 대상은 연구자와의 지리적 접근성을 고려하여 S시 소재 초등학교를 대상으로 무선 표집을 실시하여 선정하였다. 이때 지역별 특성이 고루 반영될 수 있도록 S시의 동부, 서부, 남부, 북부 지역별로 구분하고, 학생이 아닌 학교 단위로 층화군집표집을 실시하였다. Gay, Mills, & Airasian(2000)에 기초하여 1회 검사 시 5학년, 6학년 각각의 표본 크기를 240으로 하여 총 480명을 표본으로 하였다.

본 연구에서는 검사 도구가 타당도와 신뢰도를 확보할 때까지 검사 도구의 수정・보완 및 적용이 n회에 걸쳐 이루어지기 때문에, 전체 적용을 위해 필요한 계획 단계의 연구 대상은 $480 \times n$ 명이었다. 이때 검사 도구의 신뢰도를 확보하기 위하여 이전 회차에 검사를 실시한 학급 및 학생은 차기 회차의 연구 대상에서 제외되었다. 결과적으로, 4차까지 검사 도구의 적용에 참여한 최종적인 연구 대상을 정리하면 <표 3>과 같다.

<표 3> 검사 도구 적용을 위한 연구 대상

표집 / 회	인원								총계	
	동부		서부		남부		북부		학교 수	학생 수
	학교	학생 수	학교	학생 수	학교	학생 수	학교	학생 수		
1차	S	131	O	105	S	122	S	141	4	499
2차	Y	125	O	99	E, M	157	B	117	5	498
3차	K	91	M	135	C, G	168	Y	102	5	496
4차	M	119	D, O	172	S	110	M	93	5	494

나. 검사 도구의 문항 구성 및 자료 수집, 분석

산술적 사고 수준 검사 도구 개발 과정은 순환적 절차를 따랐다([그림 3]). 결과가 기준을 충족하면 개발이 종료되지만, 그렇지 않을 경우에는 검사 도구의 재구성 후 다음 회차의 적용 및 자료 수집, 분석을 진행하였다. 즉, 검사 도구의 문항 구성 및 자료 수집, 분석은 별도로 이루어지는 것이 아니라 기준 만족 시까지 두 과정이 교대로 진행되기 때문에 본 연구에서는 이에 대해 통합 진술이 불가피하다.

구체적인 방법 및 절차는 다음과 같다. 먼저, 산술적 사고 요소 및 문헌 분석 결과 파악된 산술적 사고 수준별 특징에 기초하여 Guttman 척도를 따르는 내용적 측면과 과정적 측면을 통합적으로 고려한 산술적 사고 수준을 검사하기 위한 검사 도구의 초안을 개발하였다. 이를 연구 대상에게 적용하기 이전에 수학교육 전문가 2인 및 초등수학교육 전공 석사 학위 이상의 초등교사 5인에게 검사 도구의 내용 타당도를 검증받았다. 또한 문항의 지시문에 대한 단순 이해 부족으로 인한 검사의 오류를 방지하기 위하여 연구 대상이 아닌 초등학교 5학년 2명, 6학년 3명의 학생들에게 예비 검사를 실시하여 일부 문항의 지시문 또는 답안 진술을 수정함으로써 1차 적용을 위한 검사 도구를 완성하였다. 이를 표집된 1차 적용 학교로 발송하여 검사를 실시한 후, 자료를 수집하였다. 이와 같은 자료 수집

은 2차, 3차, 4차(최종) 적용 시에도 동일하게 시행되었다.

본 검사 도구는 Guttman 척도를 만족할 때까지 수정 적용이 필수적이다. Abdi(2010)에 기초하여 전체 검사 결과에서 오류의 수를 파악하고 재생 계수(Coefficient of Reproducibility, CR)를 구하여 전체 데이터가 Guttman 척도에 따라 수용 가능한지 확인하였다. Guttman 척도에서 오류가 10% 미만인 경우, 즉 CR 값이 0.9 이상이면 그 척도는 수용 가능한 것으로 간주된다(홍종선, 1996; Abdi, 2010).

$$CR = 1 - \frac{\text{실제 오류의 수}}{\text{가능한 오류의 수}} = 1 - \frac{\text{실제 오류의 수}}{\text{데이터 항목 수} \times \text{응답자 수}}$$

본 연구에서는 그 밖에 각 문항별 정답률, 수준별 변별도를 분석하여 본 검사 도구가 산술적 사고 수준을 적절하게 판별 가능한지 확인하였다. 또한 Cronbach’s Alpha 계수를 산출하여 신뢰도를 파악하였다.

구체적인 자료 분석 내용은 다음과 같다. k차 검사 도구의 문항별 정답률을 구하여 정답률이 수준별로 잘 범주화되는지, 수준별 정답률 간의 z-검정 결과가 유의미한 차이가 있어 수준별 변별도가 확보되는지, Guttman 척도 재생 계수(CR)가 0.9 이상인지, Cronbach’s Alpha 계수가 0.7 이상으로 신뢰도가 높은지를 분석하였다. 4차 적용 후 각 항목의 검사 결과가 모두 적절하다고 판단되어, 이를 본 연구의 최종 산술적 사고 수준 검사 도구로 채택하였다.

Ⅳ. 산술적 사고 수준 검사 도구 개발 결과

1. 산술적 사고 수준 검사 도구 개발의 원리

산술적 사고 수준 검사 도구 개발을 위한 원리를 다음과 같이 설정하였다. 첫째, 산술적 사고 요소와 문헌 분석 결과 파악된 산술적 사고의 수준별 특징에 기초하여 적합한 문항을 구성한다. 둘째, 단순히 해당 주제에 대한 산술적 개념 및 원리 자체를 묻는 문제가 아니라, 산술적 사고 요소 각각을 통해 문제를 해결할 수 있는 문항으로 구성한다. 셋째, 산술적 사고가 내용적 사고라는 점을 감안하여 산술적 사고 요소 중 내용적 측면과 과정적 측면이 통합적으로 반영되도록 검사 도구를 개발한다. 사고 요소의 종류에 따라서는 내용적 측면, 과정적 측면 각각에만 해당하는 경우도 있을 수 있으나, 일부 요소는 어떠한 수(예, 자연수, 분수, 소수)를 다루느냐에 따라서 요구하는 사고 수준이 달라질 수 있기 때문이다. 또한 검사 도구의 문항은 선행 연구 결과에 기초하여 그 문항을 가장 대표할 수 있는 연산을 선택하여 구성하고, 사칙연산 수행하기와 같이 자연수의 덧셈, 뺄셈 등 여러 학년에 걸쳐 점차 수의 범위가 확장됨으로써 난이도가 증가하는 경우에는 각 수준에 적절한 난이도에 대한 고려가 요구된다. 넷째, 표준화 검사 도구로 활용될 수 있도록 Usiskin(1982)에 따라 선다형 문항으로 구성한다. 이는 표준화 검사 도구 내 각각의 문항이 산술적 사고 요소를 모두 포함하고 있고 각 문항은 그러한 산술적 사고가 가능할 때에 문제를 해결할 수 있다는 전제를 따른 것이며, 이는 Guberman(2016)에서 적용된 방법이기도 하다. 다섯째, Guttman 척도에 따르도록 문항을 수준별로 배열한다. 즉 1~5번 문항은 가장 하위 수준인 1수준에, 6~10번은 2수준에, 11~15번은 3수준에, 16~20번은 가장 상위 수준인 4수준

에 해당하는 문항으로 구성한다. 여섯째, 선행 연구에 기초하여 산술적 사고 수준을 판별하기 위한 위계적 판별 기준을 마련하여 적용한다. 본 연구의 산술적 사고 수준 검사 도구를 통한 산술적 사고 수준의 판별은 Guberman(2016), Usiskin(1982)과 마찬가지로, 〈표 4〉와 같이 각 수준별 5개 문항 중 최소 4개를 옳게 응답하고 이전 수준의 문항을 모두 옳게 해결한 경우 그 수준에 해당한다고 판단한다. 한편 Guberman(2016)과 마찬가지로 1수준에 해당하는 1~5번 문항 중 4개 미만을 해결할 경우에는 아직 산술적 사고의 1수준에도 도달하지 못한 것으로 판별한다.

<표 4> 검사 도구에 의한 수준 판별 기준

<table>
<tr><td colspan="2">문항 번호</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="4">수준 판별</td><td>1수준</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>2수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>3수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>4수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td></tr>
</table>

2. 산술적 사고 수준 검사 도구 개발의 실제

상술한 대로 본 연구에서 개발한 검사 도구는 4차 적용 시 Guttman 척도에 따라 타당도, 신뢰도를 확보하였기 때문에 적용 과정 및 결과는 1차, 2차, 3차, 4차로 범주화하여 진술하고자 한다.

가. 1차 적용 및 결과

초안의 성격을 띤, 1차 적용을 위한 검사 도구는 문항의 타당성을 확보하기 위하여 산술적 사고 요소 각각과 관련된 선행 연구(고창수, 오영열, 2015; 김정원, 방정숙, 최지영, 2016; 이화영, 2011; 전형옥 외, 2009; Berman, 2011; Guberman, 2016; Howe, 2015; Warren, 2003 등)의 문항 및 수학 교과서에 제시된 문제들에 기초하여 구성하였다. 1차 검사 도구의 문항은 총 30개이며 하나의 문항은 최소 1개의 산술적 사고 요소부터 많게는 4개의 요소를 복합적으로 판별할 수 있는 경우로 구성된다. 한편, 선다형으로 문항을 구성할 경우, 학생들이 5가지 답안을 하나씩 대입해 보면서 정답을 구하는 등의 문제가 발생할 우려가 있다. 따라서 이러한 영향을 최소화하고자 답안을 대입해봄으로써 정답을 추론할 수 있는 문항은 가급적 배제하였고, 선행 연구(Guberman, 2016)에 기초하여 검사 참여자가 실제로 산술적 사고를 통해 문제를 해결할 수 있도록 유의하여 문항을 구성하였다.

1) 1차 검사 도구의 각 문항별 정답률

1차 검사 도구의 각 문항별 정답률은 〈표 5〉와 같다. 일반적으로 정답률이 높은 문항은 낮은 수준의 산술적 사고와, 정답률이 낮은 문항은 높은 수준의 산술적 사고와 관련될 것이므로, 현재 문항이 위치한 수준과 정답률이 맞지 않은 경우에는 해당 문항의 수준이나 그와 관련된 산술적 사고 요소의 수준을 조정할 필요가 있다.

<표 5> 1차 검사 도구의 각 문항별 정답률 (n=499)

수준	1수준 (예상)							2수준 (예상)							
문항	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번	11번	12번	13번	14번	15번
정답률(%)	86.6	82.4	99.4	93.0	55.7	82.8	90.0	49.1	80.6	72.6	58.7	57.1	58.9	44.5	74.4

수준	3수준 (예상)								4수준 (예상)						
문항	16번	17번	18번	19번	20번	21번	22번	23번	24번	25번	26번	27번	28번	29번	30번
정답률(%)	59.5	67.7	43.1	70.5	69.9	27.1	55.9	41.1	43.3	24.6	31.9	45.1	40.1	22.2	32.7

분석 결과, 1수준으로 예상했던 1번~7번 중 5번을 제외한 6개의 문항은 82% 이상의 정답률을 보였다. 다른 문항에 비해 매우 낮은 정답률을 보인 5번(55.7%)은 초기 문항 구성 시 o1(사칙연산의 의미와 원리 이해하기), o2(사칙연산 수행하기)에 관한 문항으로 구성하였으나, 1차 검사의 낮은 정답률(55.7%)은 이 문항이 o1, o2가 아닌 다른 요소와 관련된 문항일 수 있음을 추측케 한다. 이에 5번 문항에 대한 추가적인 고찰을 실시한 결과, 이 문항은 단순히 사칙연산을 이해하고 계산을 하는 것을 넘어서 주어진 수를 이용하여 덧셈식, 뺄셈식, 곱셈식, 나눗셈식을 만드는 것과 관련되므로 o6(식으로 표현하기)과 직접적으로 연관됨을 파악할 수 있었다. 이에 5번 문항의 관련 산술적 사고 요소를 o6으로 수정하고 이 문항을 정답률이 유사한 2수준 또는 3수준으로 이동할 필요를 확인하였다.

2수준으로 예상했던 8번~15번 중 8번, 14번을 제외한 6개의 문항은 57% 이상 81% 이하의 정답률을 보였다. 가장 낮은 정답률을 보인 14번(44.5%)의 경우를 통해 관련 산술적 사고 요소인 o4(효율적인 계산 방법 개발하기), o5(연산의 성질 이해하기)가 2수준보다는 상위 수준의 산술적 사고 요소일 수 있음을 추측할 수 있었다. 8번(49.1%)은 n3(수 표현하기) 중 분수의 표현과 관련된 문항으로, 다른 문항들보다 정답률은 낮은 편이나 14번에 비해서는 그 차이의 폭이 크지 않고 57.1%의 정답률을 보인 12번과의 차이도 10%p 이내로 나타나, 일단 현재 수준을 유지한 상태로 2차 적용을 통해 재확인이 필요한 문항으로 파악되었다. 이처럼 8번을 2차 적용 시에는 2수준으로 보류하되, 그 문항이 다른 문항들에 비해 정답률이 낮았기 때문에 2수준 내에서 문항의 제시 순서를 현재보다 뒷부분으로 배치하는 것으로 수정하여 학생들의 인지적 어려움을 최소화하고 추후 3수준 문항들과의 정답률 차이를 파악하고자 하였다. 한편 n4(자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기)는 9번과 10번에서 중복으로 다루었는데, 1차 적용 결과 9번(80.6%)에 비해 10번(72.6%)이 1수준과의 정답률 차이가 커, 보다 변별력 높은 문항으로 파악되었다. 따라서 동일한 요소를 다루는 두 문항 중 9번은 삭제 가능한 문항으로 볼 수 있다. 또한 o6(식으로 표현하기) 관련인 15번은 앞서 1수준에 포함되었던 5번이 o6 관련 문항으로 수정되기 때문에 5번이 2수준으로 상향 이동할 경우 삭제가 가능할 것으로 판단되었다. 이때 5번이 아닌 15번을 삭제하는 이유는 5번이 이미 Guberman(2016)에서 검증된 문항일 뿐만 아니라 둘 중 o6을 보다 직접적으로 구현한 것으로 파악되었기 때문이다.

3수준으로 예상하였던 16번~23번 중 17번, 19번, 20번, 21번을 제외한 4개의 문항은 41% 이상 60% 이하의 정답률을 보였다. 이때 n5(수의 크기 및 수 계열 이해하기) 중 분수의 크기 비교와 관련된 16번(59.5%)은 2수준의 정답률과 겹치는 영역에 속하는 것으로 파악되었으나 2수준에서도 낮은 정답률 영역에 해당되기 때문에, 2차 적용 후 그 결과를 면밀히 분석할 필요가 있는 것으로 드러났다. 다른 문항들에 비해 높은 정답률을 보인 17번, 19

번, 20번 중 17번(67.7%)은 그 차이의 폭이 19번, 20번에 비해 크지 않을 뿐만 아니라, 17번이 16번과 동일한 요소 관련 문항이라는 점을 고려하여 일단 2차 적용 시 3수준을 유지하고 추후 검사 결과에 따라 조정 여부를 결정해야 할 것으로 판단되었다. 한편 다른 문항들에 비해 높은 정답률을 보인 19번(70.5%)은 o7(연산 사이의 관계 이해하기) 관련, 20번(69.6%)은 o8(예상하고 확인하기) 관련 문항이다. 이때 o7은 18번에서, o8은 21번, 22번에서도 다루고 있기 때문에 19번과 20번은 삭제가 가능할 것이다. 또 동일한 요소를 구현한 21번(27.1%)과 22번(55.9%) 문항 중에서는 정답률이 다른 문항에 비해 현저하게 낮은 21번을 삭제할 필요가 있는 것으로 드러났다.

4수준으로 예상된 24번~30번은 모두 46% 이하의 정답률을 보였다. 이때 24번(43.4%), 27번(45.1%)은 이전 수준의 정답률과 겹치는 영역에 속하지만 3수준에서도 낮은 정답률 범위와 겹치는 것이므로, 2차 적용 후 그 결과를 보다 면밀히 분석할 필요가 있다. 다만 27번은 o11(문제 상황에 적절한 연산 선택하기) 관련 문항으로서 28번과 중복되기 때문에 삭제 가능성이 있다. 그 밖에 o10(상황을 수학적으로 모델링하기)을 구현한 29번(22.2%), 30번(32.7%)의 경우, 구현한 요소는 동일하나 문항의 성격이 다르기 때문에 둘 다 유지하되, 29번이 정답률이 더 낮기 때문에 둘 사이의 순서를 바꾸는 것이 적절하다고 판단되었다.

2) 1차 검사 도구의 수준별 변별도, Guttman 척도 분석, 신뢰도

1차 검사 도구의 4가지 수준별 변별도를 알아보기 위해 1수준(1번~7번 문항)과 2수준(8번~15번 문항), 2수준과 3수준(16번~23번 문항), 3수준과 4수준(24번~30번 문항) 결과에 유의미한 차이가 있는지를 z-검정을 통해 확인하였고, 분석 결과 $p<0.001$ 수준에서 각 수준별 결과에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

본 연구에서 개발한 검사 도구는 검사 결과가 Guttman 척도를 따르는지 파악하는 것이 타당도를 확인하는 중요한 절차상 과정이다. 다만, 최초 적용의 성격을 띠며 검사 도구의 전체적인 경향성을 파악하는 것을 주요 목적으로 하는 1차 적용 시에는 적절하다고 예상한 문항을 모두 포함하였기 때문에 불가피하게 각 수준별로 문항 수가 상이하였다. 따라서 1차 적용 시는 예외적으로, 정답 수가 아닌 오답 수로 오류를 판별하였다. 구체적으로, 2수준은 1수준보다, 3수준은 2수준보다, 4수준은 3수준보다 오답 수가 크거나 같아야 하는 것이다. 1차 적용 시, 가능한 오류의 총 개수는 1,996개(4개 수준×499명)이고 이 중 282개의 오류가 추출되었기 때문에 재생 계수(CR)는 $1-\frac{282}{1,996} \fallingdotseq 0.86$ 으로 나타났다. 따라서 1차 검사 도구는 Guttman 척도를 따르지 않는 것으로 분석된다.

한편, 척도의 내적합치도는 Cronbach’s Alpha 계수를 산출하여 분석하였고, 그 결과 1차 검사 도구가 Cronbach α=0.790의 신뢰도를 보임을 알 수 있다.

3) 2차 적용을 위한 문항 수정

1차 적용 결과에 기초하여 2차 적용을 위한 문항 수정 사항을 정리하면 <표 6>과 같다.

1차 검사 도구를 이와 같이 24개 문항으로 구성된 검사 도구로 수정하였다고 가정하고 신뢰도 검사를 재실시하였다. 그 결과, Cronbach α=0.733의 신뢰도를 보이는 것으로 나타났다. 이를 통해 이와 같은 검사 도구의 수정이 수용 가능함을 확인하였다.

<표 6> 1차 적용 후 2차 적용을 위한 문항 수정 사항

수준	1수준 (예상)							
문항	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	
수정 사항	-	-	-	-	[redacted]	-	-	

수준	2수준 (예상)							
문항	8번	9번	10번	11번	12번	13번	14번	15번
수정 사항	순서 조정 (2차 적용 후 조정 가능)	삭제	-	-	-	순서 조정	[redacted]	삭제

수준	3수준 (예상)							
문항	16번	17번	18번	19번	20번	21번	22번	23번
수정 사항	(2차 적용 후 조정 가능)	(2차 적용 후 조정 가능)	-	삭제	삭제	삭제	-	-

수준	4수준 (예상)							
문항	24번	25번	26번	27번	28번	29번	30번	
수정 사항	-	-	-	삭제	-	순서 조정	순서 조정	

나. 2차 적용 및 결과

1) 2차 검사 도구의 각 문항별 정답률

2차 검사 도구의 24개 각 문항별 정답률은 <표 7>과 같다.

<표 7> 2차 검사 도구의 각 문항별 정답률 (n=498)

수준	1수준 (예상)						2수준 (예상)					
문항	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번	11번	12번
정답률(%)	91.2	84.7	99.2	93.0	83.7	94.2	78.1	60.8	51.2	50.6	70.5	63.3

수준	3수준 (예상)						4수준 (예상)					
문항	13번	14번	15번	16번	17번	18번	19번	20번	21번	22번	23번	24번
정답률(%)	63.1	65.7	48.2	46.0	56.8	48.8	47.6	26.1	32.7	34.1	28.1	21.9

1수준으로 예상했던 1번~6번은 모두 83% 이상의 정답률을 보였다. 따라서 3차 적용을 위한 검사 도구 수정 시 가장 정답률이 낮아 2수준과의 간격이 좁으면서도 관련 산술적 사고 요소가 중복하여 문항으로 구성되어 있고 Guttman 척도 재생 계수에 따른 타당도

분석 결과를 고려할 때 삭제해도 무방한 문항을 선택해야 할 것이다. 정답률 분석 결과는 2번(84.7%) 또는 5번(83.7%)이 고려될 수 있음을 보여준다. 이 중 2번은 n1(수의 의미 이해하기), n3(수 표현하기) 관련으로 n1은 1번, 4번에서, n3은 1번에서도 구현되고 있다. 5번은 o1(사칙연산의 의미와 원리 이해하기), o2(사칙연산 수행하기) 관련으로 o1은 3번, 4번에서, o2는 4번, 6번에서도 구현되고 있다. 따라서 두 문항 중 어떤 것을 삭제하더라도 관련 산술적 사고 요소는 다른 문항에서 다루어지는 것을 확인할 수 있다.

2수준으로 예상했던 7번~12번 중 9번, 10번을 제외한 4개의 문항은 60% 이상 79% 이하의 정답률을 보였다. 다른 문항보다 낮은 정답률은 보인 9번(51.2%)은 o6(식으로 표현하기), 10번(50.6%)은 n3(수 표현하기) 관련이며, 두 문항 모두 2수준에서 해당 요소를 구현하는 유일한 문항이기 때문에 삭제를 고려하기 보다는 수준의 이동 또는 문항의 수정 가능성을 파악할 필요가 있다. 먼저 9번은 1차 적용 시 1수준으로 포함되었다가 2수준 또는 3수준으로의 상향 조정의 필요성이 파악되어 일차적으로 2수준으로 이동되었던 문항이다. 그러나 2차 적용 결과의 문항별 정답률은 9번이 2수준보다 상위 수준인 3수준에 해당하는 문항일 가능성을 보여준다. 한편 분수 표현과 관련된 10번은 1차 적용 시와 마찬가지로 낮은 정답률을 보였다. 이 또한 상위 수준으로의 조정 가능성을 고려할 수 있는 것이다. 그러나 동일한 2수준에 해당하면서도 10번과 같거나 상위 수준일 것으로 예상되는 분수와 소수의 사칙연산 수행하기 관련인 11번(70.5%)과 12번(63.3%)이 10번보다 높은 정답률을 보였음을 고려할 때, 10번이 3수준일 것이라는 해석보다는 10번을 해결하는 데 있어서 별개의 어려움이 작용한 것은 아닌지 추가적인 분석이 요구되었다. 이에 연구 대상 중 10번을 맞히지 못한 5명을 임의로 선정하여 추가적으로 면담을 통해 문제 해결 과정을 물어본 결과, 3명의 학생이 문제 자체에 대한 이해에 어려움을 보이는 것으로 나타났다. 3차 적용을 위한 수정 시 10번의 진술을 이해도를 높이는 방향으로 수정할 필요를 보여준다.

3수준으로 예상했던 13번~18번 중 13번, 14번을 제외한 4개 문항은 46% 이상 49% 이하의 정답률을 보였다. 한편 13번(63.1%)과 14번(65.7%)은 2수준의 정답률에 해당하는 것으로 나타났다. 이때 13번은 분수의 크기 비교, 14번은 소수의 크기 비교에 대한 문항으로 둘 다 n5(수의 크기 및 수 계열 이해하기) 관련이다. 두 문항은 동일한 요소를 다루고 있고 정답률 또한 동일하게 2수준에 해당하기 때문에 전체적인 수준별 문항 수를 고려하여 둘 중 한 문항만을 2수준으로 이동 조정하고 나머지 한 문항은 삭제할 필요가 있다.

4수준으로 예상된 19번~24번 중 19번(47.6%)을 제외한 5개 문항은 모두 21% 이상 35% 이하의 정답률을 보였다. 19번은 c2(양적 추론하기) 관련 문항이며, 20번, 21번 또한 c2에 대한 문항이기 때문에 정답률이 4수준에 해당하지 않는 19번은 삭제가 가능하다.

2) 2차 검사 도구의 수준별 변별도, Guttman 척도 분석, 신뢰도

2차 적용 후 수준별 변별도를 분석한 결과, $p<0.001$ 수준에서 각 수준별 결과에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타나 2차 검사 도구는 산술적 사고의 각 수준을 잘 변별함을 보여준다.

2차 적용 시, 가능한 오류의 총 개수는 1,992개(4개 수준×498명)이고 그 중 217개의 오류가 발견되었기 때문에 재생 계수(CR)는 $1-\frac{498}{1,992}\fallingdotseq 0.89$ 이다. CR 값이 0.9 미만이므로 2차 검사 도구에 대한 수정이 요구되었다.

이에, 분석 결과에 기초하여 수정 가능한 경우를 모두 고려하여 4가지 수정안을 마련하고, 각각의 경우의 Guttman 척도의 재생 계수(CR)를 구하였다(<표 8>). 이때 수정안은 앞

서 분석 결과에서 삭제가 가능한 것으로 파악된 1수준에서의 2번 또는 5번, 2수준에서의 12번, 3수준에서의 13번 또는 14번, 4수준에서의 19번을 삭제하거나, 수준의 상호 간 이동이 필요하다고 나타난 9번과 13번 또는 14번간의 수준 조정을 실시하여 각 수준별 5개 문항씩 총 20개 문항으로 3차 적용을 위한 검사 도구를 재구성하는 방식으로 이루어졌다. 이와 같이 4가지 수정안을 통해 수정이 가능한 모든 경우별로 타당도 및 신뢰도를 재산출하여 어떤 경우로의 수정이 가장 타당할 것인지 확인하고자 하였다.

<표 8> 4가지 수정안에 대한 Guttman 척도 재생 계수 분석 결과

수준	1수준 (예상)						2수준 (예상)						3수준 (예상)						4수준 (예상)						재생 계수
문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	(CR)
수정1	•	•	•	•	×	•	•	•	▨	•	•	×	×	▧	•	•	•	•	×	•	•	•	•	•	**0.910**
수정2	•	•	•	•	×	•	•	•	▨	•	•	×	▧	×	•	•	•	•	×	•	•	•	•	•	**0.910**
수정3	•	×	•	•	•	•	•	•	▨	•	•	×	×	▧	•	•	•	•	×	•	•	•	•	•	0.909
수정4	•	×	•	•	•	•	•	•	▨	•	•	×	▧	×	•	•	•	•	×	•	•	•	•	•	**0.910**

• : 유지 / × : 삭제 / ▨ : 3수준으로 이동 / ▧ : 2수준으로 이동

이와 같은 4가지 수정안의 경우별 오류 개수를 확인한 결과, 수정1안과 수정4안은 179개, 수정2안은 180개, 수정3안은 183개의 오류가 추출되었다. 4가지 수정안 모두 가능한 오류의 총 개수는 1,992개이므로 수정1안과 수정4안은 CR이 $1-\frac{179}{1,992}\fallingdotseq 0.910$, 수정2안은 $1-\frac{180}{1,992}\fallingdotseq 0.910$, 수정3안은 $1-\frac{182}{1,992}\fallingdotseq 0.909$ 로 파악되었다. 이로부터 4가지 수정안 모두 CR이 0.9 이상인 것으로 나타났다. 그러나 CR 차이가 0.001로 크지 않기는 하나 그 값이 클수록 완벽한 Guttman 척도에 가까움을 고려할 때, 4가지 수정안 중 CR이 0.910인 수정1안, 수정2안, 수정4안 중 하나를 선택하는 것이 보다 적절할 것으로 판단되었다.

2차 검사 도구의 신뢰도는 Cronbach α=0.781로 내적합치도가 높음을 보여 준다. 한편 4가지 수정안에 대한 각각의 신뢰도를 분석한 결과 역시 Cronbach α값이 0.7 이상(1안 0.725, 2안 0.730, 3안 0.724, 4안 0.730)으로 신뢰도 측면에서 수용 가능함을 알 수 있다.

3) 3차 적용을 위한 문항 수정

4가지 수정안에 대한 분석 결과를 고려할 때 3차 적용을 위한 수정 시 가장 수용 가능한 경우로 수정4안이 선택되었다. 이는 수정1안, 수정2안, 수정4안의 재생 계수(CR)가 약 0.910으로 동일하기 때문에 Cronbach α 값이 가장 높은 것을 선택한 결과이다. 이때 수정2안과 수정4안 모두 Cronbach α값이 0.730으로 동일했기에 둘 중 어떤 수정안을 선택할 것인지에 대한 수학교육 전문가 2인의 검토를 실시하였다. 이 둘은 다른 조건은 모두 동일하고 1수준에서 2번과 5번 중 어느 것을 삭제하느냐의 차이이다. 수학교육 전문가의 내용타당도 검증 결과, 산술적 사고 수준을 검사하는 데 있어 보다 유의미한 문항으로 판단된 5번을 남기고 2번을 삭제하는 수정4안에 따라 검사 도구를 수정하였다. 최종적으로 2차 적용 후의 결과 분석에 기초하여 2번, 12번, 14번, 19번을 삭제하고 9번을 3수준으로, 13번을 2수준으로 조정하여 3차 적용을 위한 검사 도구를 구성하였다.

다. 3차 적용 및 결과

1) 3차 검사 도구의 각 문항별 정답률

3차 검사 도구의 각 문항별 정답률은 <표 9>와 같다.

<표 9> 3차 검사 도구의 각 문항별 정답률 (n=496)

수준	1수준 (예상)					2수준 (예상)				
문항	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번
정답률(%)	94.8	99.0	94.8	94.2	92.9	76.4	66.3	68.6	60.9	77.6
수준	3수준 (예상)					4수준 (예상)				
문항	11번	12번	13번	14번	15번	16번	17번	18번	19번	20번
정답률(%)	76.0	49.4	40.1	61.5	54.6	24.8	37.3	38.9	31.5	27.6

분석 결과, 2수준과 3수준을 제외한 1수준, 4수준은 적절한 정답률 범위를 보였다. 2수준으로 예상했던 6번~10번 중 9번을 제외한 4개의 문항은 66% 이상 78% 이하의 정답률을 보였다. 이보다 낮은 정답률을 보인 9번은 분수의 크기를 비교하는 n5(수의 크기 및 수 계열 이해하기) 관련 문항이며, 60.9%의 정답률을 보임으로써 3수준의 정답률 범위에 속하는 것으로 드러났다. 3수준으로 예상했던 11~15번 중 11번을 제외한 4개 문항은 40% 이상 62% 이하의 정답률을 보였다. 이보다 낮은 정답률은 보인 11번은 o6(식으로 표현하기) 관련 문항으로, 76%의 정답률을 보여 2수준의 정답률 범위에 속함을 알 수 있다. 이때 주목할 점은 2차 적용 시 현재의 9번은 3수준, 11번은 2수준으로 배치되었으나 각각에 대한 정답률이 9번은 2수준에, 11번은 3수준에 해당하는 것으로 분석되어 수준을 조정하였던 경우라는 점이다. 3차 적용 시, 2차 적용과 상이한 결과가 파악됨으로써 두 문항의 수준을 다시 한 번 재배치한 뒤 재검사를 실시할 필요를 확인하였다.

2) 3차 검사 도구의 수준별 변별도, Guttman 척도 분석, 신뢰도

3차 적용 후 수준별 변별도를 분석한 결과, $p<0.001$ 수준에서 각 수준별 결과에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

3차 검사 후 수합된 자료로부터 모두 163개의 오류가 추출되었다. 가능한 오류의 총 개수는 1,984개(4개 수준×496명)이므로 재생 계수(CR)는 $1-\frac{163}{1,984} \fallingdotseq 0.92$ 이다. 따라서 3차 적용 시의 검사 도구는 Guttman 척도에 따라 수용 가능하다고 분석되었다.

그러나 앞서 9번과 11번의 정답률이 각 수준의 해당 범위를 벗어났기 때문에 이 문항들의 수준을 재배치해야 할 필요가 제기된 바 있다. 따라서 9번을 3수준으로, 11번을 2수준으로 재배치한 것으로 수정안을 마련하여 Guttman 척도의 재생 계수(CR)를 구하였다. 그 결과, 오류의 개수는 133개로 줄어 CR이 $1-\frac{133}{1,984} \fallingdotseq 0.93$ 으로 상향되었다. 수정안의 CR이 0.93으로, 원안의 CR 0.92보다 약 0.01 크기 때문에 수정안에 맞게 검사 도구를 재구성하여 재검사를 실시할 필요를 파악하였다.

3차 검사 도구의 신뢰도 분석 결과는 Cronbach α=0.735로 내적합치도가 높음을 보여

준다. 한편, 3차 검사 도구를 앞서 제시한 수정안과 같이 수정하였다고 가정하고 신뢰도를 분석한 결과, Cronbach α=0.725로 내적합치도가 높았다.

라. 4차(최종) 적용 및 결과

3차 적용 결과에 기초하여 9번을 3수준으로, 11번을 2수준으로 재배치하여 검사 도구의 문항을 수정하였고, 그에 따른 분석 결과는 다음과 같다.

1) 4차 검사 도구의 각 문항별 정답률

4차 검사 도구의 문항별 정답률은 <표 10>과 같다. 분석 결과, 20개의 문항 모두 수준별로 적절하게 배치된 것으로 파악되었다.

<표 10> 4차(최종) 검사 도구의 각 문항별 정답률 (n=494)

수준	1수준 (예상)					2수준 (예상)				
문항	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번
정답률(%)	96.8	99.6	96.2	94.3	94.1	82.8	78.1	79.8	77.9	87.7
수준	3수준 (예상)					4수준 (예상)				
문항	11번	12번	13번	14번	15번	16번	17번	18번	19번	20번
정답률(%)	74.1	57.9	55.5	70.0	65.0	39.9	48.4	48.2	34.2	28.7

2) 4차 검사 도구의 수준별 변별도, Guttman 척도 분석, 신뢰도

4차 적용 후 수준별 변별도를 알아보기 위한 z-검정 실시 결과는 <표 11>과 같다. 이는 $p<0.001$ 수준에서 각 수준별 결과에 유의미한 차이가 있으며, 검사 도구가 산술적 사고의 각 수준을 잘 변별하고 있음을 보여준다.

<표 11> 4차(최종) 검사 도구의 수준별 변별도

집단	평균	표준편차	사례 수	z	p
1수준	4.810	0.418	494	14.380***	0.000
2수준	4.063	0.915			
2수준	4.063	0.915	494	12.727***	0.000
3수준	3.225	1.227			
3수준	3.225	1.227	494	17.198***	0.000
4수준	1.994	1.303			

*** $p < 0.001$

4차 적용에서는 모두 115개의 오류가 추출되었다. 가능한 오류의 총 개수가 1,976개(4개 수준×494명)이므로 재생 계수(CR)는 $1-\frac{115}{1,976}\fallingdotseq 0.94$ 이다. 따라서 4차 검사 도구는 Guttman 척도에 따라 수용 가능하다고 최종 분석되었다.

4차 검사 도구는 신뢰도 Cronbach α=0.735로 내적합치도가 높은 것으로 나타나, 신뢰도 측면에서도 수용 가능함을 알 수 있다.

Ⅴ. 산술적 사고 수준의 수준별 특징 분석 결과

본 연구에서는 4차에 걸친 검사 도구의 적용 및 자료 수집, 분석을 통해 [부록]과 같이 최종 산술적 사고 수준 검사 도구를 개발하였다. 이와 같은 산술적 사고 수준 검사 도구는 실제 학교 현장에서 학생들의 산술적 사고 수준을 파악하기 위해 이용될 것을 주요 목적으로 하여 개발되었지만, 그와 더불어 1수준, 2수준, 3수준, 4수준의 각 수준별 특징을 파악케 하였다. 산술적 사고 수준 검사 도구 개발 결과, 20개의 문항을 5개씩 4개 수준으로 범주화할 수 있었고, 이는 각 문항과 관련된 산술적 사고 요소의 범주화를 의미하기 때문이다. 구체적으로, 각각의 산술적 사고 요소가 어느 수준에 해당하는지를 확인함으로써 산술적 사고 수준별 특징을 파악할 수 있는 것이다. 최종적으로 본 연구에서 파악된 산술적 사고 수준별 특징은 <표 12>와 같다.

<표 12> 산술적 사고 수준별 특징

수준		각 산술적 사고 수준에 해당하는 특징	사고 요소
1수준	행동 수준	· 개수를 세고, 수(자연수) 개념을 이해한다. · 산술 용어 및 기호를 이해한다. · 사칙연산의 의미와 원리를 알고 자연수의 사칙연산을 수행한다.	n1, n2, n3 o1, o2 c1
2수준	표현 수준	· 수(분수, 소수)를 다양하게 표현한다. · 자릿값, 십진법, 위치적 기수법을 이해한다. · 자연수의 크기를 비교하고 수 계열을 이해한다. · 분수, 소수의 사칙연산을 수행한다. · 혼합 계산을 절차에 맞게 순차적으로 계산한다. · 식으로 표현한다.	n3, n4, n5 o2, o3, o6
3수준	관계 수준	· 분수, 소수의 크기를 비교한다. · 효율적인 계산 방법을 개발한다. · 연산의 성질을 이해한다. · 연산 사이의 관계를 이해한다. · 예상하고 확인한다. · 연산 과정 및 결과에서 오류를 인지한다.	n5 o4, o5, o7, o8, o9
4수준	적용 수준	· 양적 추론을 한다. · 주어진 상황을 수학적으로 모델링한다. · 관련 연산이 직관적으로 파악되지 않는 문제 상황에서 적절한 연산을 선택한다.	o10, o11 c2

본 연구를 통해 최종적으로 파악된 산술적 사고 수준별 특징은 앞서 <표 2>에서 예상하였던 것과 큰 차이가 없었으며, 1수준에서 4수준으로 이동할수록 상위 수준의 성격을 띠고 각 사고 수준은 그와 관련된 산술적 사고 요소에 기초한 특징을 지님으로써 전후의 사고 수준과 구별되는 양상을 보였다. 다만, 2수준으로 예상했던 o4(효율적인 계산 방법 개발하기)와 o5(연산의 성질 이해하기)가 2수준이 아닌 3수준에 해당하는 요소라는 점이 파악되었다. 이는 효율적인 계산 방법을 개발하거나 교환법칙, 결합법칙 등 연산의 성질을

이해하는 것은 단순히 사칙연산을 이해하고 이를 수행하는 수준을 넘어서 식의 각 부분들 간의 관계를 파악할 수 있는 사고 수준과 관련됨을 보여준다.

Ⅵ. 결 론

본 연구는 산술적 사고 요소에 기초하여 산술적 사고 수준별 특징을 탐색할 뿐만 아니라, 학생의 산술적 사고 수준을 파악할 수 있는 산술적 사고 수준 검사 도구를 개발하는 것을 목적으로 한다. 본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 산술적 사고는 산술적 사고 요소에 따라 4가지 수준으로 구별 가능하며, 각 수준은 다음과 같은 특징을 지닌다. 1수준(행동 수준)에서는 사물의 개수를 세고 자연수의 개념을 이해한다. 숫자뿐만 아니라 +, −, ×, ÷, =와 같은 산술 기호와 용어를 이해하며, 사칙연산의 기본적인 의미와 원리를 알고 자연수의 사칙연산을 수행할 수 있다. 2수준(표현 수준)에서는 자릿값과 십진법, 위치적 기수법을 이해하고, 자연수의 크기를 비교하며 자연수 범위에서 수 계열을 이해하게 된다. 또한 분수와 소수를 다양하게 표현할 수 있으며, 분수와 소수의 사칙연산을 수행할 수 있다. 이 수준에서는 혼합 계산을 절차에 맞게 순차적으로 계산하고, 식으로의 표현도 가능하다. 3수준(관계 수준)에서는 분수와 소수의 크기를 비교할 수 있다. 또한 단순히 순차적인 계산 수행을 넘어서 효율적인 계산 방법을 개발하고, 연산의 성질을 이해한다. 여러 연산 사이의 관계를 이해하며, 연산 과정 및 결과에서의 오류를 인지하고 찾을 수 있다. 또한 예상하고 확인하기를 통해 문제를 해결할 수 있다. 4수준(적용 수준)에서는 양적 추론이 가능하며, 문제 상황에 적절한 연산을 선택하여 문제를 해결할 수 있다. 또한 주어진 상황을 수학적으로 모델링할 수 있다.

수학 교과의 위계성을 고려할 때 성공적인 산술 교육을 위해서는 산술적 사고 수준을 파악하여 그에 적합한 교육을 실시함으로써 학생들의 산술적 사고를 신장하는 것이 중요하다. 본 연구 결과, 학생들이 서로 다른 산술적 사고 수준에 위치함을 예상할 수 있다. 동일한 산술 문제를 해결할 지라도 학생별로 내면에서 작용하는 산술적 사고 수준은 상이하다는 Guberman(2016), van Hiele(1986)의 주장을 뒷받침하는 것이다. 각 수준별 특징을 충분히 이해하여 학생별 산술적 사고 수준에 적합한 지도 방안을 마련함으로써 단순히 산술 기능 숙달을 넘어서서 산술적 사고를 신장할 수 있도록 지도해야 할 필요를 함의한다. 이때 학생의 산술적 사고 수준에 따른 적절한 학습이 수반될 때 상위 수준으로의 발달이 가능하며(van Hiele, 1986), 적절한 지도 방안을 수립하기 위해서는 산술적 사고의 요소와 각 수준별 특징을 면밀히 파악해야 한다. 따라서 본 연구에서 파악된 산술적 사고의 각 수준별 특징을 토대로 학교수학에서 산술적 사고 수준을 발달시킬 수 있는 적절한 교수·학습 방안을 모색하고 실제 그에 맞는 교수・학습을 실시할 필요가 있다.

한편, 3수준에 해당하는 것으로 파악된 효율적인 계산 방법 개발하기, 연산의 성질 이해하기, 연산 사이의 관계 이해하기의 3가지 요소를 주목할 필요가 있다. 현행 우리나라 초등 수학에서는 이와 관련된 내용이 1~2학년군부터 등장하기 시작한다. 본 연구의 결과는 이와 같은 산술 학습이 3수준에 해당하는 산술적 사고 요소를 요구함을 보여 준다. 따라서, 만약 1수준이나 2수준의 산술적 사고 수준에 해당하는 학생들에게는 이러한 학습이 인지적 어려움을 야기할 가능성이 크다. 저학년 학생 중 다수는 아직 1수준이나 2수준의 산술적 사고 수준에 머물러 있을 수 있고, 기초적인 산술 학습을 완료한 고학년 학생이라

할지라도 1수준이나 2수준에 머물러 있을 가능성이 있다. 1수준이나 2수준에 해당하는 학생이 연산의 성질을 이해하거나 연산 사이의 관계를 이해하는 것, 효율적인 방법으로 계산하는 것은 그 학생의 사고 수준에 맞지 않아 수학 학습에 부정적인 영향을 미칠 것이다. 따라서 1수준이나 2수준에 해당하는 학생에게 3수준의 학습 경험을 효과적으로 제공하는 방안을 탐색하고 보다 세심하게 교수・학습을 설계하여 적용할 필요가 있다. 따라서 학생 개개인의 산술적 사고 수준을 파악한 후 산술적 사고의 관점에서 결손을 파악하고, 현재의 수준에서 상위 수준으로 산술적 사고 수준을 향상시킬 수 있도록 그에 맞는 과제를 제공하고 적절한 언어 수준으로 지도해야 한다. 즉 학생별 산술적 사고 수준에 맞는 산술 지도를 실시함으로써 학생들의 문제 해결 및 산술적 사고 신장을 지원할 수 있다.

둘째, 본 연구에서 개발한 산술적 사고 수준 검사 도구는 산술적 사고 요소에 기초하여 1수준부터 4수준까지의 산술적 사고 수준별 특징을 반영하며 Guttman 척도를 따르도록 구성되었고, 이를 활용하여 학생들의 산술적 사고 수준을 판별할 수 있다. 하나의 요소가 1수준과 2수준, 2수준과 3수준과 같이 두 수준에 걸쳐 해당되는 경우도 있을 수 있으므로 이를 고려하여 문항을 구성하였다. 검사 도구를 4차에 걸쳐 총 1,987명의 연구 대상에게 적용하고, 수집된 자료의 문항별 정답률, 수준별 변별도, 타당도 및 신뢰도를 분석하여 수정・보완하는 일련의 과정에 따라 개발하였다. 최종 적용 시 문항별 정답률이 4개 수준별로 잘 범주화되었고, 각 수준별 변별도도 $p<0.001$ 수준에서 유의미한 차이가 있었다. 또한 Guttman 척도의 재생 계수(CR)가 0.94로 Guttman 척도에 따라 수용 가능한 것으로 분석되었으며, 신뢰도도 Cronbach $\alpha=0.735$로 내적합치도가 높은 것으로 나타났다.

셋째, 산술적 사고 수준 검사 도구의 최종 적용 시 연구 대상인 5, 6학년의 산술적 사고 수준을 판별한 결과에 기초할 때, 학생들의 산술적 사고 수준을 신장하기 위해서 우리나라 초등 수학에서 산술적 사고의 관계 수준(3수준) 및 적용 수준(4수준)에 관련된 학습 경험을 더욱 풍부히 제공해야 한다. 산술적 사고 수준 검사 도구의 최종 적용 시 학생들의 산술적 사고 수준을 분석한 결과, 494명의 연구 대상 중 1수준 184명(37.2%), 2수준 200명(40.5%), 3수준 87명(17.6%), 4수준 18명(3.6%)으로 나타났다. 심지어 1수준에 미치지 못하는 학생도 5명(1%) 있었다. 이러한 결과는 기본적인 산술 교육을 완료했다고 여겨지는 초등학교 5, 6학년 학생 중 약 80%가 여전히 산술적 사고의 1수준(행동 수준) 또는 2수준(표현 수준)에 해당함을 보여 준다. 이러한 결과는 학생들이 특히 산술적 사고의 2수준에서 3수준으로 이동함에 있어서 어려움을 경험함을 추측케 한다. 이는 3수준에 해당하는 산술적 사고 요소가 학생들에게 인지적 어려움을 야기하기 때문일 수도 있으나, 한편으로 이러한 요소들이 상위 수준에 해당함에도 불구하고 초등 수학에서 적절한 시기에 충분히 다루어지지 않았기 때문일 수도 있다. 따라서 우리나라 초등 수학에서 산술 교육 시 학생들의 산술적 사고를 보다 신장하기 위하여 일차적으로 산술적 사고의 3수준(관계 수준)에 해당하는 요소들을 교육과정에서 보다 의미 있게, 충분히 다룰 필요가 있다. 또한 3수준에 해당하는 학생에게 4수준(적용 수준)에 관한 요소들을 경험할 수 있는 기회를 확대하여 제공할 필요가 있다.

참 고 문 헌

고창수, 오영열 (2015). 수학적 모델링 활동이 수학적 문제해결력 및 수학적 성향에 미치는 영향. **한국초등수학교육학회지, 19**(3), 347-370.

김정원, 방정숙, 최지영 (2016). Rasch 모델을 통한 초등학교 학생들의 등호 이해 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 55**(1), 1-19.

우정호 (2011). **학교수학의 교육적 기초(제2증보판)**. 서울: 서울대학교출판문화원.

이화영 (2011). **초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수(Early Algebra) 지도**. 건국대학교 박사학위논문.

임미인 (2017). **산술적 사고의 요소 및 수준에 관한 연구**. 서울교육대학교 박사학위논문.

전형옥, 이경화, 방정숙 (2009). 초등학교 6학년 학생의 양적 추론 사례 연구. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 19**(1), 81-98.

홍종선 (1997). **조사방법과 통계자료분석**. 서울: 박영사.

Abdi, H. (2010). Guttman scaling. In Salkind, N. (Ed.), *Encyclopedia of research design.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Babbie, E. (1994). *The Practice of social research*. Belmont Cal: Wadworth.

Berman, J. (2011). SToPV: A five minute assessment of place value. *Australian Primary Mathematics Classroom, 16*(4), 24-28.

Gay, L. R., Mills, G. E., & Airasian, P. W. (2000). *Educational research: competencies for analysis & application*. New York: Longman.

Guberman, R. (2016). Development of arithmetical thinking: evaluation of subject matter knowledge of pre-service teachers in order to design the appropriate course. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(4), 739-755.

Howe, R. (2015). The most important thing for your child to learn about arithmetic. c. In X. Sun., B. Kaur., & J. Novotná. (Eds). *Conference proceedings of ICMI study 23: primary mathematics study on whole numbers*, 107-114.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. Routledge. 김판수, 박성택 (역) (1996). **초등수학교육**. 서울: 교우사.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. CDASSG Project. Chicago: University of Chicago.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Fla: Academic Press.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137.

<Abstract>

An Analysis on Levels of the Arithmetical Thinking and Development of the Arithmetical Thinking Level Test

Lim, Miin[4]; & Chang, Hyewon[5]

This study aims to explore the level-specific characteristics of arithmetical thinking based on the arithmetical thinking factors and develop an arithmetical thinking level test that can identify students' arithmetical thinking levels by specifying the levels of arithmetical thinking based on the factors.

In order to solve the research problems, we categorized the arithmetical thinking factors into 1∼4 levels based on the literature review and constructed items of the arithmetical thinking level test considering both content and process based on the arithmetical thinking factors and the level-specific characteristics of the arithmetical thinking which conformed to the Guttman scale. To investigate the adequacy of the analysis of the arithmetical thinking levels, we reanalyzed the level-specific characteristics of the arithmetical thinking by checking that it matched the factors classified to the test developed by the Guttman scale.

From the results of this research, the following conclusions were drawn. First, the arithmetical thinking factors are categorized into four levels which have different characteristics. Second, the arithmetical thinking level test of this study was developed satisfying the Guttman scale and it reflects the level-specific characteristics of the arithmetical thinking levels from 1 to 4. It is possible to determine the students' arithmetical thinking level using this test. Third, according to the results of the final application of the arithmetical thinking level test for 5th and 6th graders, teachers should provide more abundant learning experiences related to the relation level (the level 3) and the application level (the level 4) to increase students' arithmetical thinking level.

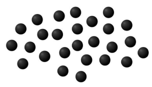
Key words: arithmetical thinking, arithmetical thinking levels, arithmetical thinking level test

논문접수: 2017. 10. 15
논문심사: 2017. 11. 03
게재확정: 2017. 11. 20

4) ssbin22@naver.com
5) hwchang@snue.ac.kr

[부록] 산술적 사고 수준 검사 도구

1. 바둑돌의 수를 옳게 센 것을 고르시오. (　　　)



① 1개씩 세면 모두 25개이다.　② 3개씩 묶으면 8묶음이 되므로 38개이다.
③ 4개씩 묶으면 6묶음이 되고 2개가 남으므로 62개이다.　④ 5개씩 묶으면 5묶음이 되고 1개가 남으므로 26개이다.
⑤ 10개씩 묶으면 2묶음이 되므로 20개이다.

2. 다음 식을 옳게 읽은 것을 고르시오. (　　　)

57÷3=19

① 57과 3의 합은 19이다.　② 57과 3의 차는 19이다.　③ 57과 3의 곱은 19이다.
④ 57을 3으로 나눈 몫은 19이다.　⑤ ①~④는 모두 옳지 않다.

3. 352에 대한 설명 중 옳지 않은 것을 고르시오. (　　　)

① 352=300+50+2이다.　② 352=350+2이다.　③ 352=352+0이다.
④ 352=352-0이다.　⑤ 352=352×0이다.

4. 다음 설명 중 옳은 것을 고르시오. (　　　)

① 7×4는 7×2에 7을 더한 것과 같다.
② 4+4+4+4+4+4+4는 4×7과 같다.
③ 28÷4=7은 28-7-7-7-7=4로 나타낼 수 있다.
④ 28-4-4-4-4-4-4-4=0은 28÷7=4로 나타낼 수 있다.
⑤ ①~④는 모두 옳지 않다.

5. 다음 중 옳게 계산한 것을 고르시오. (　　　)

① 54+59=112　② 68+45=103　③ 124-76=52
④ 125-68=67　⑤ 154-97=57

6. 다음은 몇몇 자리의 숫자가 지워진 두 수이다. 다음 주장 중 옳은 것을 고르시오. (　　　)

A : ⋆ ⋆ ⋆ 3 ⋆ ⋆　　B : ⋆ ⋆ ⋆ 8 ⋆

① 3<8이므로 B가 더 크다.
② A의 자리가 더 많으므로 A가 더 크다.
③ 모든 자리의 숫자를 아는 것이 아니므로 두 수의 크기를 비교할 수 없다.
④ A의 백의 자리 숫자가 B의 십의 자리 숫자보다 더 작기 때문에 A가 더 작다.
⑤ 두 수의 크기를 비교하기 위해서는 맨 앞자리 숫자를 알아야 하는데 알 수 없으므로 두 수의 크기를 비교할 수 없다.

7. 1000-200÷4×2와 (1000-200)÷4×2에 대해 옳게 설명한 것을 고르시오.
(　　　)

① 1000-200÷4×2에서 가장 먼저 계산해야 할 식은 1000-200이다.　② 1000-200÷4×2=975이다.
③ (1000-200)÷4×2=100이다.　④ 두 식의 계산 결과는 서로 같다.
⑤ ①~④는 모두 옳지 않다.

8. 각각의 세 수를 한 번씩만 사용하여 식(=가 있는 식)을 만들려고 한다. 식을 만들 수 없는 것을 고르시오. (단, 덧셈식, 뺄셈식, 곱셈식, 나눗셈식 중 어떤 식이라도 상관없다.) (　　　)

① 2, 4, 24　② 15, 14, 1　③ 3, 3, 9
④ 100, 10, 10　⑤ 모두 식을 만들 수 있다.

9. 다음 모양들에 대한 설명으로 옳은 것을 고르시오. (　　　)

① 위의 모양은 모두 똑같은 세 부분으로 나누어져 있다.
② 위의 모양에서 색칠한 부분은 모두 $\frac{1}{4}$을 나타낸다.
③ 위의 모양 중 색칠한 부분이 $\frac{1}{4}$을 나타내는 것은 2가지이다.
④ 위의 모양 중 색칠한 부분이 $\frac{1}{4}$을 나타내는 것은 3가지이다.
⑤ $\frac{1}{4}$은 위의 모양이 아닌, 원과 정사각형에서만 나타낼 수 있다.

10. 다음 식에 대해 여러분이 생각하는 옳은 답은 무엇인지 고르시오. (　　　)

$1\frac{1}{2} \div (2\frac{2}{6} - 1\frac{5}{6}) =$

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

11. 크기가 작은 분수부터 차례대로 나열한 것을 고르시오. (　　　)

㉠ $\frac{1}{2}$	㉡ $\frac{1}{3}$	㉢ $\frac{3}{5}$	㉣ $\frac{4}{5}$	㉤ $\frac{5}{6}$	㉥ $\frac{11}{15}$

① ㉠-㉡-㉢-㉣-㉤-㉥　　② ㉠-㉡-㉥-㉢-㉣-㉤　　③ ㉡-㉠-㉣-㉢-㉤-㉥
④ ㉡-㉠-㉢-㉣-㉥-㉤　　⑤ ㉡-㉠-㉢-㉥-㉣-㉤

12. 다음 5개의 수의 합을 빠르게 계산하려고 한다. 계산을 가장 빨리 할 수 있다고 생각하는 식을 고르시오. (　　　)

1116	704	258	884	296

① (1116 + 296) + (704 + 884) + 258　　② 258 + (704 + 296) + (884 + 1116)
③ 258 + (884 + 296) + (704 + 1116)　　④ 296 + (884 + 258) + (704 + 1116)
⑤ (884 + 704) + (258 + 296) + 1116

13. 다음 중 옳은 설명을 모두 고른 것을 찾으시오. (　　　)

㉠ 25+35=60이므로 60-25=35이다.
㉡ 83×11은 덧셈식으로 바꾸어 쓸 수 있다.
㉢ 13×7=91을 이용하여 91÷13을 구할 수 있다.
㉣ 75÷15는 뺄셈식으로 바꾸어 쓸 수 있다.

① ㉠, ㉢　　② ㉠, ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉢, ㉣　　④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

14. 어떤 진분수의 분자와 분모에 각각 1을 더하여 새로운 분수를 만들었다. 처음 분수와 새로운 분수에 대한 설명으로 옳은 것을 고르시오. (　　　)

① 새로운 분수는 처음 분수보다 클 것이다.
② 새로운 분수는 처음 분수보다 작을 것이다.
③ 처음 분수는 변하지 않을 것이다.
④ 결론을 내리는 것은 불가능하다.
⑤ ①~④는 모두 옳지 않다.

15. 다음 중 풀이 과정과 결과가 옳은 것을 고르시오. (　　　)

①

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ 2.3\,\overline{)\,7.5} \\ 6.9 \\ \hline 0.6 \end{array}$$

②

$$2.73\,\overline{)\,60} \Rightarrow \begin{array}{r} 21 \\ 273\,\overline{)\,6000} \\ 5733 \\ \hline 267 \end{array}$$

몫: 21
나머지: 0.267

③ $6 \div \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \times \frac{8}{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$　　④ $3\frac{3}{8} \div \frac{11}{8} = \frac{33}{8} \times \frac{8}{11} = 3$　　⑤ $2\frac{2}{3} \div \frac{16}{27} = \frac{8}{3} \times \frac{27}{16} = 4\frac{1}{2}$

16. 두 수의 덧셈에서 더하는 두 수(첫째 수, 둘째 수)를 다른 수로 바꾸어 계산해 보았다. 첫째 수가 원래의 수보다 $1\frac{1}{2}$만큼 작아졌고(감소했고) 결과적으로 두 수의 합이 $3\frac{2}{4}$만큼 커졌다면(증가했다면), 둘째 수는 어떻게 되어야 하는지 고르시오. (　　　)

① 2만큼 감소해야 한다.　　② 5만큼 감소해야 한다.　　③ 2만큼 증가해야 한다.
④ 5만큼 증가해야 한다.　　⑤ $2\frac{1}{4}$만큼 증가해야 한다.

17. 다음은 다이어트를 하고 있는 두 친구의 대화이다.

태환 : 나는 몸무게의 $\frac{1}{8}$을 뺐어. 그러니까 7kg이 빠진 거지.

미란 : 나는 몸무게의 $\frac{1}{6}$을 뺐는데, 이제 네가 나보다 1kg 적게 나가네.

다음 중 옳지 <u>않은</u> 설명을 고르시오. (　　　)

① 태환이 몸무게의 $\frac{1}{8}$이 7kg이므로 태환이의 처음 몸무게는 56kg이다.
② 태환이의 다이어트 후의 몸무게는 7kg의 7배이다.
③ 미란이가 몸무게의 $\frac{1}{6}$을 뺀 후의 몸무게는 57kg이다.
④ 미란이의 처음 몸무게의 $\frac{5}{6}$는 50kg이다.
⑤ 미란이의 처음 몸무게는 10kg의 6배이다.

18. 1.5L의 페인트로 2.5㎡의 벽을 칠할 수 있다면 3.1㎡의 벽을 칠하기 위해 필요한 페인트의 양은 얼마일까요? 이 문제를 해결하는 과정 중에 수행한 연산으로 옳은 것을 고르시오. (　　　)

① 2.5+3.1 : 덧셈으로 벽의 넓이의 합을 구한다.
② 3.1−2.5 : 뺄셈으로 벽의 넓이의 차를 구한다.
③ 1.5×2.5 : 곱셈으로 2.5㎡의 벽을 칠하는 데 필요한 페인트의 양을 구한다.
④ 1.5÷2.5 : 나눗셈으로 1㎡의 벽을 칠하는 데 필요한 페인트의 양을 구한다.
⑤ $1\frac{2}{3}\times 3.1$: 곱셈으로 3.1㎡의 벽을 칠하는 데 필요한 페인트의 양을 구한다.

19.

<쿠키의 양 구하기>

구청에서 실시하는 음식 축제 행사에서 지현이네 가족은 초코칩 쿠키를 만들기로 했다. 구청에서 쿠키 만들기에 필요한 밀가루 2kg과 초코칩 0.6kg을 지원해 준다고 한다.
지현이는 밀가루와 초코칩을 남김없이 사용하려면 쿠키를 종류별로 몇 상자씩 만들어야 할지 알아보려고 한다. (단, 다른 재료들은 무제한으로 사용할 수 있다.)

[쿠키를 만드는 데 필요한 재료]

기본 초코칩 쿠키

준비물 (1상자를 만들 때)
1상자 : 쿠키 10개 / 단위 : kg

밀가루 0.2
초코칩 0.03
버터 0.07
설탕 0.08
아몬드 0.02

다크 초코칩 쿠키

준비물 (1상자를 만들 때)
1상자 : 쿠키 10개 / 단위 : kg

밀가루 0.15
초코칩 0.06
버터 0.11
설탕 0.07
코코아 가루 0.02

다음 중 옳은 주장을 고르시오. (　　　)

① 문제를 해결하기 위해 필요한 재료의 수치는 밀가루, 초코칩, 아몬드, 코코아 가루이다.
② 밀가루가 전부 2kg이므로 기본 초코칩 쿠키 7상자, 다크 초코칩 쿠키 4상자를 만들면 된다.
③ 초코칩이 전부 0.6kg이므로 기본 초코칩 쿠키 10상자, 다크 초코칩 쿠키 5상자를 만들면 된다.
④ 0.2×기본 초코칩 쿠키 상자 수+0.03×다크 초코칩 쿠키 상자 수=2,
0.15×기본 초코칩 쿠키 상자 수+0.06×다크 초코칩 쿠키 상자 수=0.6과 같이 식을 세울 수 있다.
⑤ 문제를 간단히 만들기 위해 모든 재료의 수치에 100을 곱한 후,
20×기본 초코칩 쿠키 상자 수+15×다크 초코칩 쿠키 상자 수=200,
3×기본 초코칩 쿠키 상자 수+6×다크 초코칩 쿠키 상자 수=60과 같이 식을 세울 수 있다.

20. 행복 마을에 있는 집들에는 1부터 200까지의 번호판이 달려 있다. 마을에서 번호판 교체 작업을 하려고 한다. 이를 위해 번호의 각 자리 숫자를 서로 다른 타일 위에 써서 꾸미기로 하였다.
몇 개의 타일을 준비하면 좋을지 구하시오. (　　　)

① 약 200개　　② 약 500개　　③ 약 1000개　　④ 약 2000개
⑤ ①~④는 모두 옳지 않다.