

미국 캘리포니아 주의 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에 제시된 분수 개념에 관한 내용 분석

이대현¹⁾

여러 나라의 교육과정이나 교과서를 비교·분석하는 것은 그 나라 교육 관점과 방향을 파악하여 우리나라 교육과정 개정이나 교과서 집필 및 학생들의 수학 능력 향상을 위한 시사점을 도출하기 위한 것이다. 미국의 경우에 국가 수준의 교육과정을 운영하지 않지만, 2010년에 여러 주들이 주축이 되어 개발한 CCSSM이 주별로 채택되어졌고, 이에 따른 교과서가 개발·보급되고 있다. 이에 본 연구에서는 CCSSM에 적극적인 반응을 보이며 주의 관점을 반영한 캘리포니아 주의 CA-CCSSM과 이에 따른 교과서에 제시된 분수 관련 내용을 분석하였다. 분석에서는 분수 개념과 관련된 주제를 등분할, 분수 개념, 가분수와 대분수, 몫으로서 분수와 비로서 분수, 동치분수, 크기 비교 등으로 나누어 분석하였다. 분석 결과, 분수 개념 도입 전에 기하 영역에서 등분할을 다루거나, 수직선 위의 수로 분수를 도입하여 분수에 대한 수감각과 양감을 기르게 하는 특징이 있었다. 또한 대분수, 동치분수, 여러 가지 분수의 정의 방식, 도입 시기, 방법 등에서도 우리나라와 차이가 있었다.

주제어: CCSSM, CA-CCSSM, 교육과정, 교과서, 분수, 미국 캘리포니아 주

I. 서 론

학교에서 가르치는 수학의 근간은 수학과 교육과정이며, 학교 현장에서는 이를 구현한 교과서를 활용하여 교사와 학생들 간에 교육 활동이 이루어지게 된다. 우리나라는 1955년에 제1차 수학과 교육과정을 발표한 이후로 10번의 국가 수준의 교육과정을 마련하여 운영해 오고 있다. 최근에 개정·고시된 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015a)은 교과서가 년차로 개발되어가면서 2017년에 초등학교 1, 2학년을 시작으로 현장에 적용되기 시작하였다. 그리고 우리나라 초등 수학 교과서는 여전히 국가 차원의 단일 교과서를 제공하여 모든 학생들이 동일한 교과서를 이용하여 수학을 배우고 있다.

초등 수학의 경우에는 학습 내용에 따라 도입 시기나 방법 면에서 다양할 수 있기 때문에 여러 나라의 교육과정이나 교과서 내용을 살펴보는 것은 교육과정의 내용 구성이나 교과서 집필 및 교육 방법의 선택을 위해 중요한 일이다. 즉, 다른 나라의 교육과정이나 교과서를 분석하는 연구는 여러 나라들이 지향하는 수학교육의 방향과 내용 및 도입 상황이나 방식, 전개 과정, 평가 문항 등을 파악함으로써 우리나라 교육과정 개정이나 교과서 집필에 시사점을 얻을 수 있기에 중요하다.

1) 광주교육대학교

이런 면에서 여러 나라의 교육과정이나 교과서 내용을 분석한 연구가 꾸준히 진행되어 왔으며, 그 대상은 핀란드, 일본, 중국, 미국 등이 그 대상이기도 하였다(강홍재, 2016). 특히 미국은 국가 수준의 교육과정을 운영하지 않기 때문에 학교 교육 내용과 관련된 사항은 주 단위의 결정으로 이루어지고 있다. 그간 미국의 수학교육은 National Council of Teachers of Mathematics(이하 NCTM)가 발간한 기준집(NCTM, 1989, 2000)의 영향을 받아왔고, 이 기준집은 세계 수학교육의 방향 설정에도 많은 영향을 끼쳐왔다. 그렇지만 국제 학업 성취도나 PISA의 결과(조지민 외, 2011)에서 미국 학생들의 성적 부진은 미국 수학교육에 대한 개선을 강하게 요구하는 수준에 이르렀다. 이러한 상황에 대한 요구로 Common Core State Standards for Mathematics(이하 CCSSM)는 NCTM의 기준집보다 구체적이고 상세한 문서 체제로 출현하여 미국의 교육과정에 준하는 역할을 해 오고 있다(Common Core State Standards Initiative, 2010).

CCSSM은 미국의 주들이 주축이 되어 미국 내 교사, 연구자, 고등 교육자, 대중들의 의견을 수렴하여 2010년에 발표되었고, 발표 당시에 48개 주들이 채택하기도 하였다(김영옥, 최성웅, 이승미, 2010). 이 중에서 캘리포니아 주는 2010년 8월에 California State board of Education에 의해 CCSSM을 채택하고, 2013년 1월에 California Common Core State Standards-Mathematics(이하 CA-CCSSM)를 수정하여 제시하였다(The California Department of Education, 2013; 이하 C. D. E.). CA-CCSSM은 이 전에 발표된 CCSSM과 거의 유사하지만, 캘리포니아 주에서 몇 가지 추가한 내용을 수학 내용 기준의 끝 부분에 'CA'로 표기하여 제시하고 있다. 이 문서는 학교에서 다룰 내용에 대한 개략적인 내용만을 담고 있어서 이에 대한 해설서 격인 Mathematics Framework for California Public Schools를 제시하였다(C. D. E., 2015). 이 책에는 학년별로 다루어질 내용과 이에 대한 상세한 지도 방법이 기술되어 있기 때문에 국가 수준의 교육과정을 운영하지 않는 미국의 수학 지도 방향을 탐색하는데 유용하다. 그리고 CCSSM의 제안 내용에 맞추어 미국에서는 이를 반영한 교과서가 출판되고 있는데, 이 교과서들은 CCSSM의 내용을 반영했다는 것을 책 표지에 명시하고도 있다(예: Bell, et. al., 2012; Charles et al., 2012a, 2012b, 2012c; McGraw-Hill, 2012 등).

한편, 초등학교 수학에서 다루어지는 학습 내용 중에서 분수는 오랜 시간 동안 학생들에게 어려운 대상이었으며(최근배, 2015), 교과서에 제시된 도입 상황도 분수 개념 발생 과정의 맥락과 맞지 않는 인위적인 영역 모델만을 사용한다는 지적이 있어 왔다(서동엽, 2005). 또한 분수 지도에 대한 비형식적 지식을 강조하며 다양한 분수 모델의 사용을 강조하는 미국 교육의 특성을 고려할 때(Empson & Levi, 2011; Baroody & Coslick, 1998) 학년별 지도 내용이 상세하게 기술된 CA-CCSSM과 이를 반영한 교과서의 내용을 분석할 필요가 있다. 이것은 새로운 교과서 집필 과정에 대한 시사점 도출뿐만이 아니라, 다양한 분수 지도 방안에 대한 아이디어도 추출할 수 있기 때문이다.

이에 본 연구에서는 미국의 CA-CCSSM에 제시된 분수 관련 내용 분석과 더불어, 이를 바탕으로 집필된 미국 교과서의 분수 관련 내용을 주요 주제별에 따라 분석하고자 한다. 이를 통해 우리나라와 미국의 분수 도입 및 지도 방법에 대해 비교하고 분수 지도에 관한 시사점을 도출하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. CCSSM의 이해

각 나라의 교육과정과 교과서는 그 나라 교육 관점과 방향을 파악할 수 있게 해 준다는 면에서 교육과정과 교과서 분석은 교육적 시사점을 도출하기 위해 필요하다. 특히 미국은 국가 수준의 교육과정을 운영하지 않으면서 주별로 교육 내용을 선정하여 가르치기 때문에 주별로 다루는 내용과 시기에서 많은 차이가 나타나기도 하였다(Teuscher, Reys, Dingman & Thomas, 2014). 그런 문제로 인해 발생하는 문제들을 해결하려는 의지로 나타난 것이 CCSSM이다. 특히 캘리포니아 주는 CCSSM을 구체화시킨 Mathematics Framework for California Public Schools-Kindergarten through Grade Twelve를 발간하여 학교 교육의 내실화를 꾀하고 있다(C. D. E., 2015).

CA-CCSSM은 이 전의 NCTM(1989, 2000) 기준집과는 달리, 학년별로 구성 방식을 택하고 있으며, 가르칠 내용에 더 주안점을 두고 기술되었다. 그리고 전 학년에 걸쳐 일관된 공통의 내용 영역을 설정한 NCTM 기준집과는 달리, 학년별 특성에 따라 수학 내용 기준(Standards for Mathematics Content)을 제시하고 있다. 이에 <표 1>은 유치원에서 8학년 과정에 제시된 내용 영역이다.


<표 1> 유치원-8학년 과정에 제시된 수학 내용 영역

학 년	내용 영역
유치원	· 수세기와 기수, 연산과 대수적 사고, 십진수에서 수와 연산, 측정과 자료, 기하
1	· 연산과 대수적 사고, 십진수에서 수와 연산, 측정과 자료, 기하
2	· 연산과 대수적 사고, 십진수에서 수와 연산, 측정과 자료, 기하
3	· 연산과 대수적 사고, 십진수에서 수와 연산, 수와 연산-분수, 측정과 자료, 기하
4	· 연산과 대수적 사고, 십진수에서 수와 연산, 수와 연산-분수, 측정과 자료, 기하
5	· 연산과 대수적 사고, 십진수에서 수와 연산, 수와 연산-분수, 측정과 자료, 기하
6	· 비율과 비례관계, 수 체계, 표현과 방정식, 기하, 통계와 확률
7	· 비율과 비례관계, 수 체계, 표현과 방정식, 기하, 통계와 확률
8	· 수 체계, 표현과 방정식, 기하, 통계와 확률, 함수

CA-CCSSM은 수학 내용 기준과 더불어 수학 실천 기준(Standards for Mathematics Practice; 이하 MP.)을 제시하고 있는데, 수학 실천 기준은 모든 학년 수준에서 반복적으로 제시되면서 강조되고 있다. 특히 수학적 실천은 수학적으로 유능한 학생을 기르는데 초점을 두고 있는데(장혜원, 2012), 수학적 실천으로 제시한 8가지 기준은 다음과 같다.

- 문제를 이해하고 끈기 있게 해결하라.
- 추상적으로, 정량적으로 추론하라.
- 실행 가능한 논쟁을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하여라.
- 수학적으로 모델을 만들어라.
- 전략적으로 적절한 도구를 사용하여라.
- 정확성에 주의를 기울여라.
- 구조를 발견하고 활용하라.
- 반복되는 추론에서 규칙성을 찾고 표현하여라.

수학 실천 기준은 모든 학년에서 수학 내용 기준과 연결하여 CA-CCSSM에 설명과 예시로 제시되어 있다. 이 기준 중 한 가지인 MP. 3 ‘실행 가능한 논쟁을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하여라.’가 교과서에 반영된 예로 [그림 1]을 들 수 있다. 이 예시에서는 ‘ $\frac{1}{8}$ 이 $\frac{1}{4}$ 보다 크다고 말한 이유가 8이 4보다 크기 때문’이라고 말한 것에 대하여 옳음을 설명하도록 요구하고 있다.

 **3. Critique Reasoning** Julia says that $\frac{1}{8}$ is greater than $\frac{1}{4}$ because 8 is greater than 4. Is she correct? Explain.

[그림 1] 교과서에 제시된 수학 실천 기준 예시(Charles et al., 2012a, p. 248)

2010년에 CCSSM이 발표된 이후, 우리나라에서는 이에 대한 연구들이 진행되어 왔는데, CCSSM 전반에 대한 안내와 내용 영역별 분석 및 우리나라 교육과정과 비교·분석한 연구 등이 있다. 이에 몇 가지 예를 들면 김영옥, 최성웅, 이승미(2010)는 CCSSM의 유치원에서 8학년까지의 수학 내용 기준과 고등학교 수학 내용 기준을 소개하였다. 또, 이광호(2010)는 CCSSM의 수학적 실행 기준과 유치원에서 6학년까지의 학년별 내용에 대해 소개하면서 CCSSM이 학생들의 수학적 이해에 대하여 충분한 정보와 미국의 수학교육의 방향을 제시하였다고 하였다. 장혜원(2012)은 CCSSM의 수학 실천 기준의 의미 파악을 목적으로 수학 실천 기준에 대한 분석을 통해 수학 실천 기준이 매 학년의 지도 내용과 함께 매년 제시되면서 강조되고 있고, 2009 개정 수학과 교육과정의 중요 사항인 수학적 과정에 비견될 성질로 안내하였다. 이 연구들은 우리나라 수학교육계에 CCSSM에 대한 관심을 촉발시켰으며, 본 연구 주제인 분수 개념 분석과 같이 CCSSM에서 제시하는 학습 주제별 도입 시기와 방법, 내용 면에 대한 분석 연구의 필요성을 제시하였다.

내용 영역별 분석 연구의 예를 들면, 김지원, 박교식, 이정은(2014)은 2011 개정 교육과정과 CCSSM을 영역별·학습내용별로 비교·분석하였다. 안지영, 전영주, 윤마병, 이종학(2014)은 수와 연산 영역을 중심으로 2009 개정 수학과 교육과정과 CCSSM을 비교·분석하였다. 이 연구에서는 CCSSM의 학년별 내용 영역과 기준 체계를 분석하고, 수와 연산 영역에 대해 학년군 별로 세부 학습 내용을 우리나라 교육과정의 도입 학년, 방법 등에서 각각

비교·분석하였다. 이를 통해 CCSSM은 학생들이 학습하고 교사들이 가르칠 내용이 상세하게 기술되어 있어 수업에 적용하기가 용이하다는 것과 수와 연산 영역의 도입 시기에서 한국이 미국보다 앞서 있다는 것을 밝히고 있다. 특히 분수와 관련하여 CCSSM과 우리나라의 도입 시기와 방법에서 차이점을 언급하며, 관련 내용의 도입 및 완성 시기 등에 대한 후속 연구를 제안하기도 하였다. 강홍재(2016)는 CA-CCSSM에 제시된 초등학교 도형 영역을 상세하게 분석하였는데, 학년별로 도형 영역의 기준을 제시하고, 이에 대한 해설을 제공하였다. 이 연구에서는 도형 내용이 핵심과 일관성을 강조하며 다른 영역의 학습 내용도 함께 다루는 다양성이 있음을 밝혔는데, 분수와 관련하여 등분할 개념을 1, 2학년에 제시하면서 수로서 분수를 이해하는데 도움을 주도록 하고 있음을 제시하고 있다.

2. 분수의 지도

분수는 다양한 하위 개념과 모델 및 도입 방식으로 인해 학생들에게 어려운 학습 주제의 하나로 인식되어 왔다(김성준 외, 2013). 역사적으로 분수는 측정과 분배 맥락에서 도입되었음에도 불구하고(서동엽, 2005), 학교 수학에서는 영역을 등분할하는 것으로 분수를 도입하고 있다(교육부, 2015b, pp. 198-199). 또한 분수는 가분수, 대분수, 진분수, 동치분수와 같은 다양한 용어와 이를 도입하는 방식에서 차이가 나타난다. 예를 들어 대분수를 우리나라는 ‘자연수와 진분수로 이루어진 분수’로 정의하고 있지만(교육부, 2014a, p. 120), 미국 교과서에서는 ‘범자연수와 분수로 이루어진 수’로 정의하고 있다(Charles et al., 2012a, p. 231).

이러한 이유로 분수에 대하여 여러 유형의 비교·분석 연구가 이루어져 왔다. 예를 들면, 최민아(2014)는 한국과 중국의 초등학교 수학 교과서를 비교·분석하여 두 나라 간에 분수 지도에서 차이점이 있음을 밝히고, 역사 발생적 맥락에 의한 분수지도, 교과서에서 문장제의 확대 등과 같은 분수지도 방안을 제시하였다. 유사하게 조형미(2015)는 한국, 대만, 중국의 초등학교 수학 교과서에 나타난 분수 개념 지도 방법에 대해 비교·분석하였다. 이 연구에서는 분수의 여러 가지 개념의 도입 시기가 서로 다르다는 것과 우리나라의 경우에 분수의 양적 개념이나 이산량 개념이 부족하다는 것 등을 제시하였다. 정은실(2009)은 우리나라와 싱가포르의 분수 개념의 지도 방법을 두 나라의 교과서 비교·분석을 통해 제시하였다. 이 연구에서는 양분수를 좀 더 비중 있게 다루는 것이 실생활과의 관련성 뿐 아니라, 가분수를 도입할 때에 이해를 쉽게 해준다는 것과 우리나라의 경우에 분수를 다루는 과정을 세분하여 명시하는 제한에 문제점이 있음을 지적하고 있다. 이외에도 우리나라와 미국 교과서를 분석한 최근배(2015)의 연구도 있다. 이와 같은 분수 관련 내용에 대한 국가 간 교육 내용 비교·분석 결과들은 각 나라마다 분수지도에 차이가 있음을 말해준다. 따라서 지도 내용에 대한 새로운 교육 방향을 설정한 외국의 문서나 교과서 등의 사례가 나타날 경우 그 사례에 대한 분석을 통해 우리나라 교육에 시사점을 찾는 것이 바람직하다.

한편, 여러 가지 분수에 대하여 우리나라는 분수를 분류하는데 주안점이 주어진 반면에, 미국은 분수를 표현하는데 초점을 두고 있다(최근배, 2015). 또한 분수를 도입할 때 미국은 수직선 위의 수로 분수를 이해하도록 하고, 수직선 그림 위에 분수를 표현하도록 권하고 있다. 이런 이유로 전체 1을 n 으로 나누게 되면 $\frac{1}{n}$ 의 위치를 수직선 위에 정하게 되고 그 크기를 인식하도록 하는데 초점을 두게 된다(C. D. E., 2015, p. 170). 이런 연구에서는 CCSSM과 우리나라의 분수 지도에 대하여 분수 도입과 순서에 대한 이해와 분수의 생성원

으로서 단위분수 개념의 도입의 장점 등에 대해 비교·분석할 필요성을 제기한다. 이것은 분수에서 전체와 단위에 대한 우리나라 학생들의 오류 발생 정도에 대한 연구의 시사점에 서도 그 이유를 찾을 수 있다(이지영, 방정숙, 2014).

분수와 관련된 여러 가지 요소들에 대한 교육과정과 교과서의 도입 방식의 차이는 그 개념의 의미를 지도하는데 영향을 끼치기 마련이다. 그렇지만 다른 나라의 교육과정과 교과서를 분석하는 연구에서는 다른 점만을 강조하거나, 다르기 때문에 바꾸어야 한다는 논리보다는 유사점과 차이점을 비교·분석하는 가운데 교수·학습 과정에 유의미한 시사점을 도출하는데 초점을 두어야 한다(박경미, 2010). 이에 본 연구에서는 분수와 관련하여 분수 개념의 이해와 관련된 주요 내용을 바탕으로 CA-CCSSM과 이를 반영한 교과서의 분수 내용을 분석하고자 한다.

III. 연구 대상 및 방법

본 연구에서는 교육과정 개발 및 정책에 관한 결정권을 주 단위로 가지고 있는 미국의 교육 상황과 그런 상황에서 교육활동 개선의 노력으로 발표한 CCSSM의 기준 중 캘리포니아 주의 CA-CCSSM에 제시된 분수 관련 내용과 CCSSM을 바탕으로 집필된 교과서의 분수 관련 내용을 분석하였다. 분석 대상으로는 CA-CCSSM의 자료 중에서 2013년에 수정·발간한 CA-CCSSM(C. D. E., 2013)과 2015년에 발간한 Mathematics Framework for California Public Schools를 선정하였다(C. D. E., 2015). 또한 CCSSM이 발표된 이후로 이를 반영하여 제작된 교과서들 중 McGraw-Hill과 Pearson Education에서 출판한 교과서를 분석 대상으로 삼았다(McGraw-Hill, 2013a, 2013b; Charles et al., 2012a, 2012b, 2012c).

<표 2> 분석 교과서와 학년별 단원

학년	교과서	단원명
1	McGraw-Hill(2013a)	9. Two-Dimensional Shapes and Equal Shapes
2	McGraw-Hill(2013b)	12. Geometric Shapes and Equal Shares
3	Charles et al.(2012a)	3. Understanding Fractions 10. Fraction Comparison and Equivalence
4	Charles et al.(2012b)	11. Fraction Equivalence and Ordering 12. Adding and Subtracting Fractions and Mixed Numbers with like Denominators 13. Extending Fraction Concepts
5	Charles et al.(2012c)	11. Multiplying and Dividing Fractions and Mixed Numbers

CA-CCSSM과 이를 반영한 교과서 내용 분석에서는 분수 개념과 관련된 주요 내용을 CA-CCSSM과 교과서 내용을 병행하여 분석하였다. 구체적으로는 분수 개념에 대하여 등분할 개념, 분수 개념의 도입, 가분수와 대분수와 같은 여러 가지 분수 개념의 도입, 몫으로서 분수와 비로서 분수, 동치분수, 그리고 분수의 크기 비교 등으로 구분하여 분석하였다.

이를 바탕으로 우리나라의 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서 및 2015 개정 수학과 교육과정에 제시된 분수 내용과 비교하면서 분수 지도에 대한 시사점을 도출하였다.

IV. 분석 결과

1. 등분할 개념

분수는 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에서 3학년 과정에 도입되고 있다(C. D. E., 2013; 2015). 그렇지만 1, 2학년 과정의 기하 영역에는 <표 3>과 같이 분수 도입과 이해에 필요한 개념으로 원과 직사각형을 등분할하고, 각 부분을 ‘반, 삼분의, 사분의’ 용어를 이용하여 설명하는 등분할 개념을 제시하고 있다. 이것은 분수 학습에 필요한 내용인 등분할 개념을 명시적으로 분수를 도입하기 전에 기하 영역에서 다루는 특징이 있는 것이다.

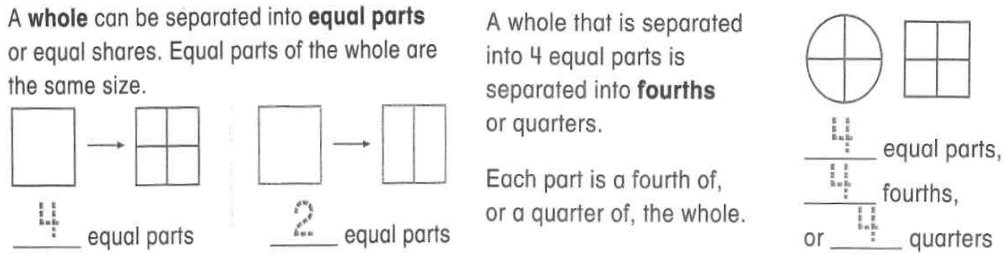
<표 3> 1, 2학년 ‘기하’ 내용 기준(C. D. E., 2015, p. 111; 149)

학년-내용영역	규 준 내 용
1. G ²⁾	3. 원과 직사각형을 2개 또는 4개의 똑같은 부분으로 나누고, 부분을 ‘반, 사분의’ 용어를 이용하여 설명하며, ‘~의 반, ~의 사분의’의 어구를 사용한다. 부분 2개나 4개로 전체를 설명한다. 좀 더 많은 부분으로 분해하면 각 부분이 작아진다는 것을 이해한다.
2. G	3. 원과 직사각형을 2개, 3개, 4개의 똑같은 부분으로 나누고, 부분을 ‘반, 삼분의, 사분의’ 용어를 이용하여 설명하며, ‘~의 반, ~의 삼분의, ~의 사분의’의 어구를 사용한다. 부분 2개, 3개, 4개로 전체를 설명한다. 동일한 전체에 대해 균등하게 분할된 부분이 같은 모양일 필요는 없다는 것을 인식한다.

구체적으로 1학년 과정에서는 원과 직사각형을 2개나 4개로 등분할하는 것을 다루고 있고, 2학년 과정에서는 원과 직사각형을 2개, 3개, 4개로 등분할하는 것을 다루고 있다. 2학년 과정에서는 1학년 과정보다 등분할하는 부분의 수를 더 다루고 있는 것이다. 그리고 2학년 과정에서는 같은 모양을 갖는 전체에 대하여 여러 가지로 등분할하는 방법을 통해 분할된 부분들이 같은 모양이 아닐 수도 있다는 것도 다루고 있다. 이러한 경험은 같은 분수로 표현되는 부분들의 모양이 다를 수 있다는 것과 전체를 다양한 방법으로 분할할 수 있는 개방적인 사고를 요구하는 기준으로 해석할 수도 있다.

이에 대한 미국의 교과서 내용으로 1학년 교과서에서는 [그림 2]와 같이 전체를 2개나 4개로 등분할하고, 전체의 등분할된 부분들은 같은 크기를 가진다는 것을 다루고 있다. 그리고 등분할된 부분을 전체의 half, fourth, quarter로 표현하고 있다. 한편 영역을 등분할된 것과 아닌 것을 비교하여 선택하도록 하고 있다.

2) G는 Geometry를 의미한다.



[그림 2] 교과서에 제시된 등분하기1(McGraw-Hill, 2013a, p. 682; 694)

2학년 교과서에서는 1학년과 유사한 내용으로 제시되어 있지만, 1학년에서 다른 2개, 4개 부분으로 등분할한 것에 추가하여 [그림 3]과 같이 3개로 등분할하는 것을 다루어지고 있다.

You can **partition**, or separate, shapes into equal parts.

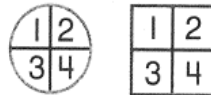
Two equal parts or two **halves**.
Each part is **half of** the whole.



Three equal parts or three **thirds**.
Each part is a **third of** the whole.



Four equal parts or four **fourths**.
Each part is a **fourth of** the whole.

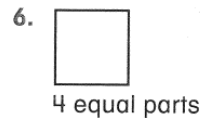
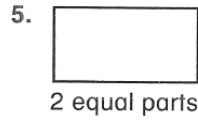


[그림 3] 미국 교과서에 제시된 등분하기2(McGraw-Hill, 2013b, p. 778)

이러한 도입 방법은 분수 도입을 위한 등분할-세기-용어와 기호 도입의 과정 중에서 등분할 과정에 해당된다(이대현, 2013). 우리나라의 경우에 등분할 관련 내용은 분수 도입 첫 부분에 분수 학습을 위한 학습 활동으로 수와 연산 영역의 내용으로 다루고 있다. 이에 비해 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에서는 기하 영역에서 등분할을 다루고 있으며, 도형을 등분할함으로써 나타나는 부분의 모양에 초점을 두고 있다. 또한 분수를 수로 인식하여 다루기 전에 생활에서 경험할 수 있는 다양한 등분할 개념을 일상 언어로 취급하여 다룸으로써 추후에 부분-전체 개념의 분수를 도입하고 다루는 데에도 비형식적 지식으로 유용한 이점이 있다.

2학년 교과서에서 등분할을 다루는 과정에 나타난 미국 교과서의 또 다른 특징으로는 [그림 4]와 같이 학생 스스로 다양한 등분할 방법을 탐구하여 그 결과를 제시할 수 있는 문제와 의사소통 능력의 향상을 위한 ‘Write math나 Talk math’를 지속적으로 제시하고 있다는 것이다. 교과서에서 다양한 접근 방식을 제시할 수 있는 것은 일정한 형식에 국한되어 기술되지 않는 미국 교과서의 특징이면서 장점이라고 할 수 있다.

Draw lines to partition each shape.



Talk Math

Explain how you can divide a pie so that four people each get an equal part.

[그림 4] 미국 교과서에 제시된 문제 예시(McGraw-Hill, 2013b, p. 778)

2. 분수 개념

CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에서 분수는 3학년 과정에 처음 소개되고 있다(C. D. E., 2015). CA-CCSSM에서 분수의 도입은 <표 4>와 같이 단위분수 개념을 바탕으로 출발하여 수직선 위의 수로서 분수를 다루는 특징이 있다.

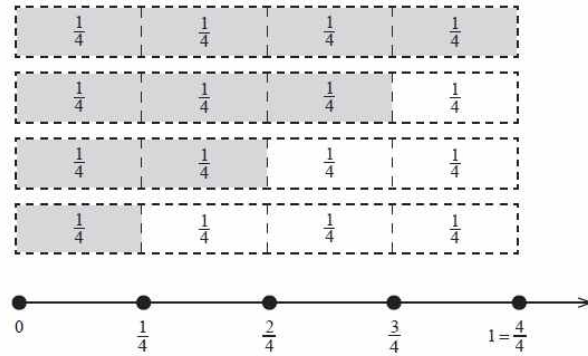
<표 4> 3학년 수와 연산-분수 내용 기준 (C. D. E., 2015, p. 170)

학년-내용영역	규 준 내 용
3. NF ³⁾	<p>전체를 동일한 부분 b로 나누었을 때 한 부분으로 만들어진 양으로서 분수 $\frac{1}{b}$을 이해한다. $\frac{1}{b}$의 a부분으로 만들어진 양으로서 분수 $\frac{a}{b}$를 이해한다.</p> <p>2. 수직선 위의 수로서 분수를 이해한다. 수직선 그림 위에 분수를 표현한다.</p> <p>(a) 전체를 0에서 1까지로 하고, 그것을 동일한 부분 b로 나누어진 수직선 그림 위에 분수 $\frac{1}{b}$을 나타낸다. 각각의 부분은 $\frac{1}{b}$의 크기이고, 0이 기준인 부분의 끝 지점은 수직선 위에 수 $\frac{1}{b}$이 위치한다는 것을 인식한다.</p> <p>(b) 0부터 $\frac{1}{b}$의 a만큼을 표시함으로써 수직선 그림 위에 분수 $\frac{a}{b}$를 나타낸다. 구간은 $\frac{a}{b}$의 크기이고, 끝 점은 수직선 위에 수 $\frac{a}{b}$이 위치한다는 것을 인식한다.</p>

이 과정에서는 1, 2학년 기하 내용 영역에서 다룬 등분할 개념과 분수 언어를 바탕으로 수로서 분수를 다루게 된다. CA-CCSSM에서 분수 도입의 특징으로는 단위분수 $\frac{1}{b}$ 을 이해하고, $\frac{a}{b}$ 는 $\frac{1}{b}$ 이 a 개로 구성됨을 강조하고 있다. 그리고 위 <표 4>의 기준과 [그림 5]와

3) NF는 Number and Operations-Fractions를 의미한다.

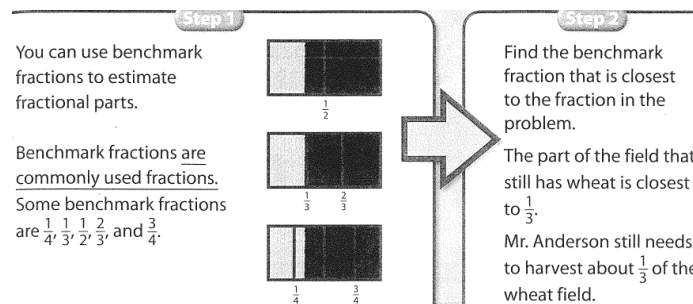
같이 분수 띠와 수직선을 결부시켜 양과 수를 연결시킴을 알 수 있다. 이것은 분수를 하나의 수로 인식시키고, 그 크기에 대한 양감을 가지도록 하는데 유용할 것으로 판단된다.



[그림 5] 분수의 표현(C. D. E., 2015, p. 173)

CA-CCSSM에 따른 교과서에서는 3. NF에 분수 개념을 처음으로 도입하고 있다. 먼저, 1, 2학년에서 2개, 3개, 4개로 영역을 등분할 했던 것을 3학년에서는 6개, 8개와 같은 개수로 등분할하는 과정을 확장하여 다루고 있다. 그리고 영역 모델을 이용하여 단위분수 $\frac{1}{6}$ 을 도입하고, $\frac{2}{6}$ 는 2개의 $\frac{1}{6}$ (two $\frac{1}{6}$ pieces)로 제시하여 단위분수의 몇 개 부분으로 진분수가 만들어진다는 것을 제시하고 있다. 또한 분수의 도입과 동시에 분모와 분자를 소개하고 있다.

3학년 과정에서 분수 개념은 영역 모델을 시작으로 이산량 모델-수직선 위에 분수 나타내기-길이 모델로 분수를 도입하고 있다. 우리나라의 경우에 이러한 내용들은 3학년 1학기과 2학기에 각각 다루어지는 것과 달리(교육부, 2014a, 2015b), 한 단원에서 부분-전체(part-whole) 개념에 속하는 영역 모델, 이산량 모델, 길이 모델로 표현되는 분수를 집중적으로 다룰 수 있다는 특징이 있다.

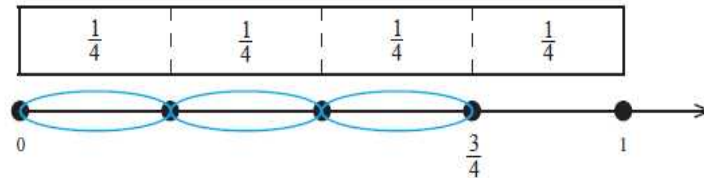


[그림 6] 기준 분수(Charles et al., 2012a, p. 233)

구체적으로 살펴보면, 이산량 모델에서는 집합을 이루는 원소의 수가 분모의 수와 일치하는 것과 같이 부분들이 하나의 원소로 이루어진 것만을 다루고 있다. 그렇지만 집합의

분수만큼을 구하는 차시에서는 8의 $\frac{1}{4}$ 과 같이 이산량이 몇 개씩 등분할된 분수도 다루고 있다. 또한 [그림 6]과 같이 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ 과 같은 기준 분수(benchmark fraction)를 이용하여 양을 어렵하도록 하고 있다. 이것은 명료하게 등분할할 수 없는 양을 기준 분수와 비교함으로써 분수에 대한 양감을 기르도록 함과 동시에 이후의 분수의 크기 비교에도 활용할 수 있다는 장점이 있다.

‘수직선 위에 분수 나타내기’에서는 각각의 분수를 수직선 위의 점으로 표현할 수 있음을 제시하고 있다. 이것은 CA-CCSSM에서 수직선 위에 수로서 분수를 이해하도록 하는 기준의 구현이면서, 분수에 대한 이해는 먼저 분수 막대나 도형과 같은 구체적인 모델을 이용하여 도입하고, 수직선 위에 분수를 이해하도록 하는 것이 핵심이 되어야 한다는 제안의 실현인 것이다(C. D. E., 2015). 분수를 수직선 위에 나타나는 차시에서는 수직선을 이용하여 0~1사이의 분수를 1이상의 수로 확장하여 수직선 위의 점을 나타내기 위하여 대분수(mixed number)도 도입하고 있다. 이를 통해 진분수와 대분수를 수직선 위에 나타낼 수 있도록 하며, 수 체계를 확장하는 요소로서 대분수를 이해하도록 하고 있다. 특히 분수에서 수직선의 활용은 자연수에서 3이 1의 3배를 통해 도달되는 점에 대응되는 수와 마찬가지로, $\frac{3}{4}$ 이 $\frac{1}{4}$ 의 3배로 도달되는 점에 대응되는 수와 같은 맥락이라는 유추적 사고를 통한 분수 이해에도 유용하기 때문이다(C. D. E., 2015).

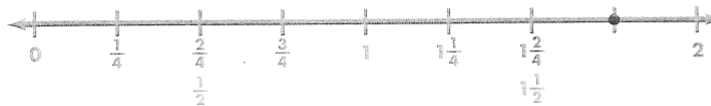


[그림 7] 진분수의 도입(C. D. E., 2015, p. 172)

3. 여러 가지 분수

CA-CCSSM에서는 $\frac{5}{2}$ 와 같이 1보다 큰 분수를 가분수로 명시하지 않고, 그 자체로 수이며, $\frac{1}{2}$ 씩 나누어진 분수 띠에서 $\frac{1}{2}$ 을 5번 세어 얻어지는 수로 다루고 있다. 따라서 가분수에 대한 기준은 제시되어 있지 않다. 이것은 대분수에 대해서도 마찬가지이다.

Mixed numbers are numbers that have a whole number part and a fraction part. You can use mixed numbers to name points on a number line.

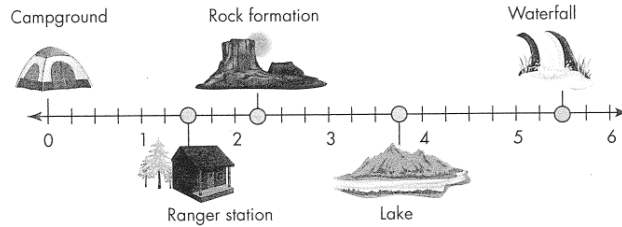


Each mixed number names a point on the number line. One name for the missing mixed number on the number line is $1\frac{3}{4}$.

[그림 8] 대분수의 도입(Charles et al., 2012a, p. 231)

CA-CCSSM에 따른 3학년 교과서에서 대분수는 앞 절에서 기술한 바와 같이 수직선 위의 수를 다루는 과정에서 도입하고 있다. 여기에서 대분수는 ‘범자연수(whole number) 부분과 분수 부분을 가지는 수’로 정의하고, 수직선 위에 이를 나타내도록 하고 있다. 미국 교과서에 제시된 대분수 정의 방식은 우리나라 교과서에서 ‘자연수와 진분수로 이루어진 분수(교육부, 2014a, p. 120)’로 정의하는 것과 차이가 나타난다.

대분수를 수직선과 결부시켜 다루는 것은 분수를 수직선 위의 한 점에 대응하는 수로 도입하는 방식에 따라 자연스런 과정이며, 실세계의 예에서도 교통 표지판의 경우에 남은 거리를 ‘ $1\frac{3}{4}$ mi’와 같이 대분수로 표현하는 방법에 익숙한 미국 문화의 특성을 고려할 때 적절한 것으로 보인다. 이것은 [그림 9]와 같이 교과서에 제시된 문제에서도 그대로 반영되어 있다.

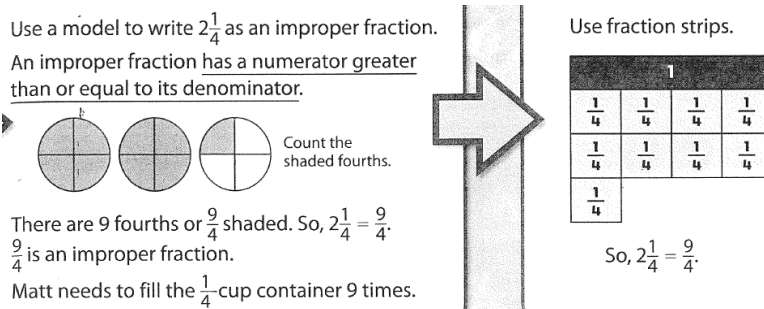


9. How many miles from the campground is the ranger station?

10. What is $3\frac{3}{4}$ miles from the campground?

[그림 9] 대분수 관련 예시 문제(Charles et al., 2012a, p. 231)

미국 교과서의 대분수 정의 방식의 경우에 범자연수 부분과 분수 부분을 가지는 수로 정의하기 때문에 $\frac{1}{2} = 0\frac{1}{2}$ 과 같이 진분수를 대분수로도 표현 가능하며, 이는 대분수가 분수를 분류하는 관점보다는 분수를 표현하는 용어의 의미로 보는 것이 적합한 이유이다(최근배, 2015). 즉, 우리나라 교과서의 경우에 대분수는 진분수, 가분수, 대분수와 같이 분류의 관점이 강한 반면에, 미국 교과서에서는 분수의 표현과 관련된 용어의 관점이 강하다고 볼 수 있는 것이다.



[그림 10] 대분수와 가분수의 변환(Charles et al., 2012b, p. 303)

CA-CCSSM에 따른 4학년 교과서에서 가분수는 분자가 분모보다 크거나 같은 분수로 도

입을 한다. 그리고 대분수를 가분수로 변환하는 내용을 다루고 있다. 변환에서는 [그림 10]과 같이 분수 모델을 이용하여 대분수를 가분수로 변환하고 있다. 즉, 대분수에서 색칠된 부분의 개수를 세어서 단위분수의 몇 개분에 해당되는가를 바탕으로 가분수로 표현하는 것이다. 그리고 5학년 교과서에서는 알고리즘을 활용하여 가분수와 대분수의 변환을 다루고 있다. 이것은 우리나라 현행 교과서에서 가분수를 대분수로 변환할 때 $1+\frac{1}{4}$ 을 $1\frac{1}{4}$ 로 쓰기로 하고, $1\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ 의 과정을 거치는 것과 유사하다(교육부, 2014a). 따라서 미국 교과서에서는 저학년에서 분수 개념에 충실하여 가분수와 대분수의 변환을 다루는 과정과 고학년에서 알고리즘을 활용하여 형식적으로 가분수와 대분수의 변환을 다루는 과정으로 상호 보완적으로 제시되는 특징이 있다.

4. 몫으로서 분수와 비로서 분수 개념

CA-CCSSM에서 몫으로서 분수는 <표 5>와 같이 5. NF에 제시되어 있다. 이것은 우리나라 교육과정에서 몫으로서 분수가 5-6학년군 ‘수와 연산’ 영역의 [6수01-10]에 ‘(자연수)÷(자연수)에서 나눗셈의 몫을 분수로 나타낼 수 있다(교육부, 2015a, p. 22)’로 제시되어 있는 것과 유사하다.

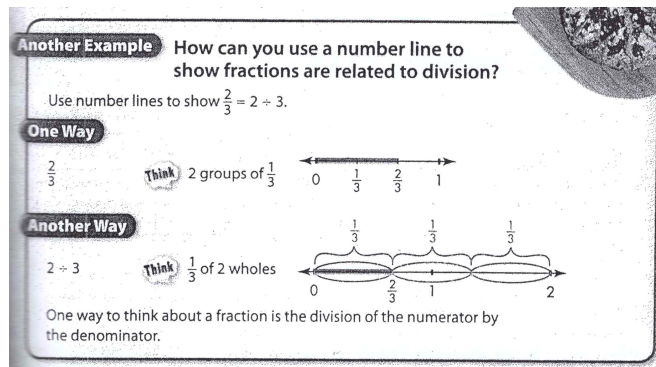
<표 5> 5학년 수와 연산-분수 내용(몫으로서 분수) 기준 (C. D. E., 2015, p. 253)

학년-내용 영역	규 준 내 용
5. NF	3. 분자를 분모로 나눈 나눗셈($\frac{a}{b}=a \div b$)으로 분수를 이해한다. 시각적 분수 모델이나 문제를 표현하는 방정식을 이용하여 분수나 대분수 형태로 답을 유도하는 범자연수의 나눗셈을 포함하는 문장제를 해결한다. 예를 들어, $\frac{3}{4}$ 곱하기 4는 3과 같고, 3개를 4명이 똑같이 나누어 가지면 한 사람은 $\frac{3}{4}$ 을 가진다는 것을 주목하여 $\frac{3}{4}$ 을 3 나누기 4의 결과로 해석한다. 만약 9명이 50파운드 쌀자루를 무게가 같게 나누어 가진다면 각각은 몇 파운드의 쌀을 갖게 되는가? 여러분의 답은 어떤 범자연수 사이에 있게 되는가?

CA-CCSSM에 따르면 5학년 학생들은 나눗셈과 분수를 관련짓게 된다. 즉 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 를 이해하고, 더 나아가 일반적으로 $a \div b = \frac{a}{b}$ 라는 것을 이해하게 된다. 이것은 균등분배(equal sharing) 문제로 나눗셈을 이해하게 되는 것이다. 예를 들어, 5개의 파이를 3명이 똑같이 나누어 가지면 한 사람이 가지는 양은 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 가 되는 것이다. 특히 균등분배 문제는 형식적으로 분수를 배우기 이전의 아이들도 비형식적 지식을 이용하여 해결 가능한 문제 상황으로(Empson & Levi, 2011), 5학년 학생들은 나눗셈과 분수를 명시적으로 관련짓게 되는 것이다. 즉 학생들은 균등분배 문제를 경험하면서 5를 똑같은 3개 부분으로 나누

면($5 \div 3$), 그 결과는 3등분된 것이 5개($\frac{5}{3}$)가 된다는 것으로 일반화할 수 있게 된다.

몫으로서 분수를 다루는 미국 교과서의 예를 보면 분수와 나눗셈이라는 주제를 바탕으로 [그림 11]과 같이 분수가 나눗셈과 관련있다는 것을 보이기 위해 수직선을 활용하고 있다. 이 차시에서는 피자과 같은 구체물을 여러 명이 똑같이 나누는 상황을 제시한다. 그리고 $\frac{2}{3}$ 와 $2 \div 3$ 을 각각 수직선 위에 각각 나타내어 분수를 (분자) \div (분모)로 생각하도록 제시하고 있다. 즉 분수가 초점이 되어 분수를 분자를 분모로 나눈 나눗셈으로 해석하는데 초점을 두고 있다.



[그림 11] 몫으로서 분수 예시(Charles et al., 2012c, p. 276)

몫으로서 분수에 대하여 우리나라 교육과정에는 ‘[6수01-10] (자연수) \div (자연수)에서 나눗셈의 몫을 분수로 나타낼 수 있다(교육부, 2015a, p. 22)’ 로 제시하고 있으며, 이는 분수의 연산에 포함되어 있다. 그리고 교과서에서는 [그림 12]와 같이 나눗셈의 몫을 분수로 나타내는데 초점을 두고 있다. 이것은 분수의 하위 개념의 하나인 몫으로서 분수의 의미보다는 연산 결과를 표현하는 한 가지 방법으로 분수를 제시하는 것임을 알 수 있다.

활동 1 $1 \div 4$ 의 몫을 분수로 나타내는 방법을 알아보시오.

- $1 \div 4$ 를 분수의 곱셈으로 나타내어 보시오.
- 1은 4의 몇 분의 몇입니까?
- $1 \div 4$ 의 몫을 분수로 나타내어 보시오.

[그림 12] 몫으로서 분수 예시(교육부, 2016, p. 90)

다음으로 CA-CCSSM에서 비로서 분수는 <표 6>과 같이 6. RP ‘비와 비례적 관계(ratios and propositional relationships)’ 에 제시되어 있다. 이것은 우리나라 교육과정에서 비로서의 분수가 5-6학년군 규칙성 영역의 [6수04-03]에 ‘비율을 이해하고, 비율을 분수, 소수, 백분율로 나타낼 수 있다(교육부, 2015a, p. 26)’ 로 제시되어 있는 것과 유사하다.

<표 6> 6학년 비와 비례적 관계 내용(비로서 분수) 기준 (C. D. E., 2015, p. 280)

학년-내용영역	규 준 내 용
6. RP ⁴⁾	2. 비율 $\frac{a}{b}$ 의 개념은 비 $a:b(b \neq 0)$ 와 관련 있다는 것을 이해한다. 비 관계의 맥락에서 비율 언어를 이용한다. 예를 들면, “이 요리법은 밀가루 3컵 대 설탕 4컵의 비를 이룬다. 그래서 설탕 한 컵 당 $\frac{3}{4}$ 컵의 밀가루가 있어야 한다. 햄버거 하나에 5달러이므로 15개 햄버거에 75달러를 지불하였다.”


CA-CCSSM에서는 <표 6>과 같이 두 양사이의 곱셈적 관계인 비 $a:b$ 를 비율(r)과 관계 짓는데, $r = \frac{a}{b}$ 로 표현하여 r 를 단위 비율(unit rate)이라고 한다. 여기서 $r = \frac{a}{b}$ 는 두 양을 견주어 비교하는 양이 1단위일 때 표현하는 방법으로, 비를 분수와 관련지어 하나의 수로 나타내게 된다.

비로서 분수를 다루는데 있어서 CA-CCSSM에서는 두 가지 해설을 제시하고 있다. 첫째는 학생들이 초기에는 분수 표현을 이용하여 비를 표현할 수 없으며, 그렇기 때문에 학생들은 분수와 비율을 비와 다르게 생각한다는 것이다. 그렇지만 6학년에 이르러 학생들은 비가 분수 형태로 표현될 수 있다는 것을 배울 수 있다는 것이다. 둘째로 비가 분수 표기로 표현되지만, 몇 가지 면에서 분수와는 다르다는 것을 알아야 한다(C. D. E., 2015). 예를 들면 흰 강아지가 3마리이고 검은 강아지가 4마리이면 흰 강아지와 검은 강아지의 비는 3:4가 된다. 그렇지만 흰 강아지가 차지하는 분수는 $\frac{3}{4}$ 이 아니라, $\frac{3}{7}$ 이 된다. 그리고 분수의 크기 비교는 전체의 부분만을 비교하지만, 비는 부분과 부분, 부분과 전체를 모두 비교하게 된다는 차이가 있는 것이다.

Why Learn This?

In recipes, the amounts of the ingredients are related to each other. You can use ratios to compare these amounts.

A **ratio** is a comparison of two numbers by division. The table below shows three ways to write the ratio of cups of party mix to cups of pretzels. All three ratios are read “six to two.”



Statement	Ways to Write a Ratio		
	In Words	With a Symbol	As a Fraction
6 cups party mix to 2 cups pretzels	6 to 2	6 : 2	$\frac{6}{2}$

[그림 13] 비로서 분수 예시(Charles et al., 2011, p. 160)

비로서 분수를 다루는 미국 교과서의 예를 보면 [그림 13]과 같이 비를 표현하는 3가지

4) RP는 Ratios and Proportional Relationships를 의미한다.

방법(용어, 기호, 분수) 중 하나로 분수를 제시하고 있다. 우리나라의 경우에 비율을 (비교하는 양)÷(기준량)으로 제시하는 것과 유사하면서도, 비와 비율을 엄밀하게 구분하지 않는다는 면에서 차이가 있다. 즉, 미국 교과서에서는 두 양을 견주는 상황에서 비를 표현하는 방법으로 분수를 제시하고 있음을 알 수 있다.

5. 동치분수

동치분수는 하나의 분수를 크기가 같은 다른 분수로 표현하여 통분이나 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 하는데 중요한 개념이다. CA-CCSSM에서 동치분수는 <표 7>과 같이 3. NF와 4. NF에 제시되어 있다.

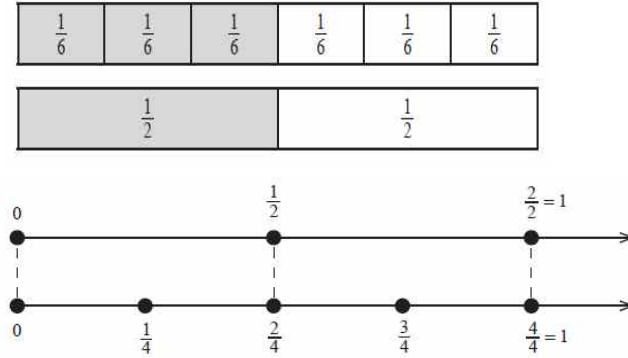
<표 7> 3, 4학년 수와 연산-분수 내용(동치분수) 기준 (C. D. E., 2015, p. 174, 210)

학년-내용영역	규 준 내 용
3. NF	<p>3. 특별한 경우에 분수의 동치를 설명하고, 크기에 관하여 추론함으로써 분수를 비교한다.</p> <p>(a) 두 분수가 같은 크기이거나 수직선 위에 같은 점일 때 두 분수는 동치라는 것을 이해한다.</p> <p>(b) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$와 같은 간단한 동치분수를 인식하고 만들 수 있다. 시각적 분수 모델을 이용하는 방법 등으로 분수가 왜 동치인가를 설명한다.</p> <p>(c) 범자연수를 분수로 표현하고, 범자연수와 동치인 분수를 인식한다. 예를 들면 $3 = \frac{3}{1}$으로 3을 표현하고, $\frac{6}{1} = 6$임을 인식한다. 수직선 그림 위의 같은 점에 $\frac{4}{4}$와 1을 위치시킨다.</p>
4. NF	<p>1. 두 분수가 같은 크기를 가지지만 부분들의 수와 크기가 어떻게 다른가에 주목하면서 시각적 분수 모델을 이용하여 분수 $\frac{a}{b}$가 $\frac{n \times a}{n \times b}$와 동치라는 것을 설명한다. 동치분수를 인식하고 만들어내는데 이 원리를 이용한다.</p>

먼저, 3학년 과정에서는 [그림 14]와 같이 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 와 같은 동치분수를 도입하거나, $3 = \frac{3}{1}$ 과 같이 범자연수를 분수로 나타내고 설명하기 위하여 시각적 모델이나 수직선을 이용한다. 구체적으로 살펴보면, 분수를 하나의 수로 이해하도록 하기 위해 사용한 수직선 위에 같은 점으로 분수가 표현될 때 동치분수임을 알도록 제시하고 있다. 또한 범자연수를 분수로 표현하기 위하여 범자연수와 동치인 분수를 인식하도록 하여 $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ 라는 것을 명시적으로 제시하고 있다.

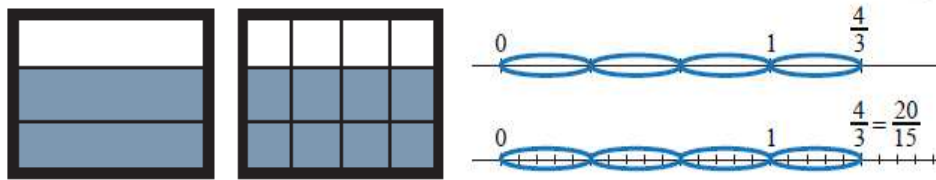
이런 의도에서 CA-CCSSM에서는 분수를 나타내는 시각적 모델이나 수직선을 이용하여 동치분수에 대한 이해를 발달시키도록 제안하고 있다. 이것은 같은 전체를 다른 조각의 수로 등분할 때 봄으로써 같은 양을 다른 수의 조각으로 나눌 수 있음을 확인하여 두 분수가 같다는 것을 확인하도록 해야 한다는 것이다. 특히 이 단계에서는 범자연수를 분수

로 표현하는 과정을 강조함으로써 $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 과 같이 대분수를 가분수로 변환하는 과정에도 유용하게 활용할 수 있다는 장점이 있다.



[그림 14] 모델과 수직선을 이용한 동치분수의 이해(1)(C. D. E., 2015, p. 175)

4학년 과정에서는 $\frac{a}{b} = \frac{n \times a}{n \times b}$ 와 같은 동치분수에 대한 기본 성질을 배우게 된다. 학생들은 [그림 15]와 같이 이 전 학년에서 이용한 시각적 모델과 수직선을 이용하여 두 분수가 왜 동치인가를 추론하고 설명하도록 하고 있다.



[그림 15] 모델과 수직선을 이용한 동치분수의 이해(2)(C. D. E., 2015, p. 211)

Find how many $\frac{1}{8}$ s are equal to $\frac{1}{2}$.

Four $\frac{1}{8}$ strips are equal to $\frac{1}{2}$, so $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$.

Another name for $\frac{1}{2}$ is $\frac{4}{8}$.

[그림 16] 동치분수 찾기(Charles et al., 2012a, p. 255)

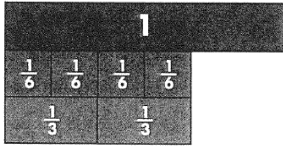
동치 분수에 대한 미국 교과서의 예를 보면, 3학년 과정에서는 전체에 대해 같은 부분을 갖는 분수를 동치분수(equivalent fraction)로 제시하고 있다. 그리고 [그림 16]과 같이

분수 띠와 같은 시각적인 분수 모델을 이용하여 두 분수가 동치분수가 된다는 것을 보이고 있다.

또한 분모와 분자를 1이외의 같은 수로 나눌 수 없는 수를 기약분수(simplest form of a fraction)로 약속하고, 동치분수를 다루는 차시에 기약분수를 찾는 과정을 [그림 17]과 같은 방법으로 제시하고 있다. 우리나라 교과서에서는 약분을 다루는 과정에서 약분을 통해 기약분수로 나타내는 내용을 다루는 것과 차이가 있다(교육부, 2014b, p. 79). 즉, 미국 교과서에서 기약분수는 동치분수의 하나로 기약분수를 찾는 과정을 다루어지고 있고, 우리나라에서는 약분을 하여 기약분수로 표현하는데 초점을 두고 있다.

One Way

Use models.



$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$


The simplest form of $\frac{4}{6}$ is $\frac{2}{3}$.

Another Way

Divide the numerator and denominator by the same number.

Find a divisor that both the numerator and denominator can be divided by evenly.

Both 4 and 6 can be evenly divided by 2.



The numerator and denominator of $\frac{2}{3}$ cannot be divided evenly by the same divisor except 1.

The simplest form of $\frac{4}{6}$ is $\frac{2}{3}$.

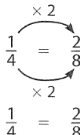
[그림 17] 기약분수 찾기(Charles et al., 2012a, p. 254)

또한 동치 분수와 관련하여 3학년 교과서에서는 두 분수가 같다는 것을 수직선을 이용하여 수직선 위에 같은 점을 나타내는 다른 이름으로 동치분수를 제시하고 있다. 이것은 CA-CCSSM에서 동치분수에 대한 이해를 위한 권고의 구현이기도 하다. 그리고 범자연수를 분수로 나타내는 과정에 수직선을 이용하여 범자연수 1과 $\frac{4}{4}$ 가 동치임을 보이고 있다.

동치분수에 대해 미국 교과서의 4학년 과정에서는 분모와 분자에 같은 수를 곱하여 동치분수를 구하는데 초점을 두고 있다. 그리고 이 과정을 통해 만들어진 두 분수가 동치분수임을 [그림 18]과 같이 분수 모델을 사용하여 밝히고 있음을 알 수 있다. 또한 두 분수가 동치임을 밝히기 위해 같은 길이의 두 수직선 위에서 같은 위치에 있는 점이 나타내는 분수를 동치분수로 제시하고 있다.

The numerator tells how many equal parts are described. The denominator tells how many equal parts in all.

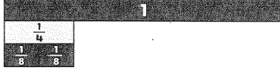
You can multiply the numerator and the denominator by the same number to find an equivalent fraction.



$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Use fraction strips to find equivalent fractions.

Both $\frac{1}{4}$ and $\frac{2}{8}$ name the same part of a whole.



So, $\frac{1}{4}$ and $\frac{2}{8}$ are equivalent fractions.

[그림 18] 동치분수 찾기(Charles et al., 2012b, p. 265)

6. 분수의 크기 비교

CA-CCSSM에서 분수의 크기 비교는 3. NF와 4. NF에 <표 8>과 같이 제시되어 있다. 먼저 3학년 과정에서 분모가 같은 경우에는 분수 개념의 도입 과정에서 이용한 수직선을 이용하여 분수를 수직선 위에 나타내고 오른쪽에 위치한 분수가 더 크다는 것을 이해하도록 하고 있다. 다음으로, 분자가 같고 분모가 다른 경우에는 전체 1을 8조각으로 나누었을 때 한 조각의 크기가 전체 1을 2조각으로 나누었을 때 한 조각의 크기보다 작기 때문에 $\frac{1}{8}$ 이 $\frac{1}{2}$ 보다 작은 것처럼, 크기와 관련하여 부분의 크기와 부분의 수를 고찰하여 비교하도록 하고 있다. 또한 분자가 같고 분모가 다른 경우에 3개로 나눈 것의 2조각보다 5개로 나눈 것의 2조각이 작은 것처럼 같은 수의 작은 조각이 같은 수의 큰 조각보다 작다는 것을 추론할 수 있게 한다(C. D. E., 2015, p. 174).

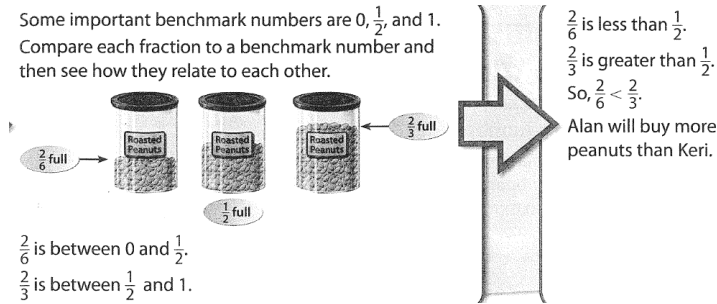
<표 8> 3, 4학년 수와 연산-분수 내용(크기 비교) 기준 (C. D. E., 2015, p. 174, 210)

학년-내용영역	규 준 내 용
3. NF	3. 특별한 경우의 분수의 동치를 설명하고, 크기에 관하여 추론함으로써 분수를 비교한다. (d) 크기에 관해 추론함으로써 분모가 같거나 분자가 같은 두 분수를 비교한다. 비교는 두 분수가 같은 전체를 가리킬 때 타당하다는 것을 인식한다. 기호 >, =, < 으로 비교 결과를 기록하고, 시각적인 분수 모델을 이용하는 방법 등으로 결론을 정당화한다.
4. NF	2. 같은 분모나 같은 분자를 만들거나 $\frac{1}{2}$ 과 같은 기준 분수와 비교함으로써 서로 다른 분모와 분자를 가지는 두 분수를 비교한다. 비교는 두 분수가 같은 전체를 가리킬 때 타당하다는 것을 인식한다. 기호 >, =, < 으로 비교 결과를 기록하고, 시각적 분수 모델을 이용하는 방법 등으로 결론을 정당화한다.

4학년 과정에서는 학생들이 일반 분수의 크기를 비교하기 위하여 동치분수에 대한 이해를 적용해야 한다. 이 단계에서는 분수의 크기를 비교하기 위하여 기준 분수를 이용하거나 같은 수의 분모나 분자를 만들어 비교할 수 있다. 이 3가지 예로 첫째, 기준분수를 이용하는 경우는 $\frac{3}{8}$ 과 $\frac{2}{3}$ 를 $\frac{1}{2}$ 과 비교하여 $\frac{3}{8} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ 이고, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} > \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{3}{8} < \frac{2}{3}$ 이다. 둘째, 같은 수의 분모로 만드는 경우에는 $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96}$ 이고, $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{56}{96}$ 이므로 $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ 이다. 마지막으로 같은 수의 분자를 만드는 경우는 $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{35}{56}$ 이고, $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{35}{60}$ 이므로 $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ 인 경우이다(C. D. E., 2015, p. 212).

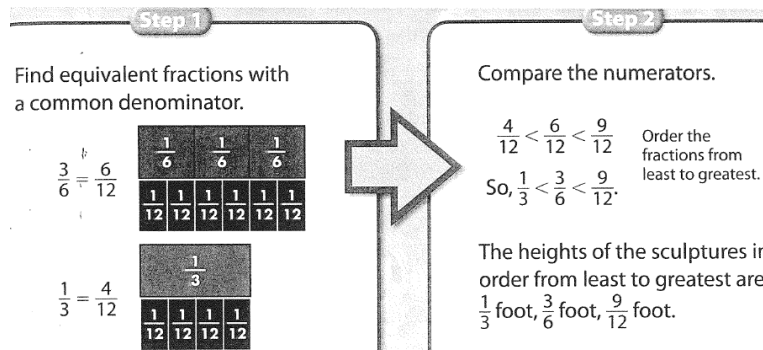
분수의 크기 비교에 대한 미국 교과서의 예를 보면, 3학년 과정에서는 동분모 분수의 크기 비교-분자가 같고 분모가 다른 분수의 크기 비교-기준 분수를 이용한 이분모 분수의 크기 비교(분자가 같은 경우)-수직선을 이용한 동분모 분수, 분자가 같은 분수의 크기 비

교-세 분수의 크기 비교로 구성되어 있다. 3학년 과정에서 분수의 크기 비교는 분수 모델, 기준 분수, 수직선 등을 이용하여 분수의 크기를 비교하고 정당화하는 과정으로 구성되어 있다. 분수의 크기 비교에 대해 교과서에 제시된 한 가지 일례가 [그림 19]이다. 여기에 제시된 분수의 크기 비교는 분수의 개념 도입 과정에 이용한 기준 분수를 활용하여 분자가 같은 두 분수의 크기를 비교하고 있음을 알 수 있다.



[그림 19] 기준분수를 이용한 분수의 크기 비교(Charles et al., 2012a, p. 251)

4학년 과정에서 분수의 크기 비교는 3학년 과정과 크게 다르지 않다. 예를 들어 기준 분수를 이용하거나, 분수 모델을 이용하여 분수의 크기를 비교하고 있다. 그렇지만 분수 모델을 이용하는 과정에서도 [그림 20]과 같이 한 분수의 동치분수를 구하여 분모가 같은 분수로 변형하여 비교하는 과정이 다루어지고 있다는 차이가 있다.



[그림 20] 동치분수를 이용한 분수의 크기 비교(Charles et al., 2012b, p. 275)

분수의 크기 비교 경우에 우리나라 교과서에서는 3학년 1학기 과정에 동분모 분수의 크기 비교-단위 분수의 크기 비교를 다루고 있고(교육부, 2015b), 5학년 1학기 과정에 이분모 분수의 크기 비교를 다루고 있다(교육부, 2014b). 방법 면에서는 3학년 과정에서는 분수 모델을 이용하여 크기를 비교하는데 초점을 두고 있고, 5학년 과정에서는 통분하여 크기를 비교하는 데 초점을 두고 있다.

우리나라와 미국 교과서의 분수의 크기 비교 지도와 관련해서는 우리나라와 미국 모두 분수 모델을 기본적으로 사용한다는 유사성이 있다. 차이점으로는 우리나라의 경우에 차시별로 다루는 분수 유형이 엄밀하게 정해져 있다는 것이다. 반면에 미국 교과서에서는 여러 유형의 분수를 반복하여 제시하면서 다양한 방법으로 분수의 크기를 다루고 있고,

수직선이나 기준 분수와 같은 다양한 소재를 활용하여 분수의 크기 비교 결과를 정당화하도록 제시하고 있다는 특징이 있다.

7. 우리나라와 미국의 분수 지도 내용 비교

이 절에서는 우리나라 교과서와 미국 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에 제시된 분수 개념과 관련된 교육 내용에 대해 비교하였다. 이를 위해 각 내용의 도입 시기 및 방법의 차이를 비교하였으며, 그 결과는 <표 9>와 같다. 먼저 분수 도입을 위한 등분할 개념의 지도를 살펴보면, 우리나라는 분수 도입 단원의 첫 차시 부분에 전체를 똑같은 부분으로 분할하는 내용으로 다루고 있다(교육부, 2015b). 반면에 미국에서는 기하 영역에 배치하여 1, 2학년 과정에 다양한 등분할을 다루고 있다(C. D. E., 2015). 이에 등분할 도입 시기가 미국이 우리나라보다 빠른 것으로 나타났으며, 사용되는 용어에서도 ‘half’와 같은 일상 언어를 사용하여 덜 형식적인 용어로 다루고 있었다.

<표 9> 우리나라와 미국의 분수 지도 내용 비교

내 용	우리나라 교과서	CA-CCSSM/교과서	비고
등분할 개념	★3-1: 분수 도입을 위한 선수학습 과정	★1G: 2, 4개 등분할 2G: 2, 3, 4개 등분할	⇒미국은 기하 영역에서 등분할 취급
분수도입	★3-1: 분수(영역) ★3-2: 분수(이산량, 길이)	★3NP: 분수(영역, 이산량, 길이)	⇒미국은 영역과 이산량을 동시 제시
가분수 대분수	★3-2: 진분수, 가분수, 대분수, 가분수와 대분수 변환	★3년 교과서: 대분수 ★4년 교과서: 가분수, 가분수와 대분수 변환 ★5년 가분수와 대분수 변환	⇒미국은 가분수와 대분수를 구분하여 제시
비/몫으로서 분수	★5-2: 몫으로서 분수 (분수의 나눗셈) ★6-1: 비로서 분수 (비와 비율)	★5NP: 몫으로서 분수 (분수의 나눗셈) ★6RP: 비로서 분수 (비와 비례적 관계)	⇒두 나라의 도입 방법이 유사함
동치분수	★5-1: 크기가 같은 분수	★3NP: 동치분수 개념 간단한 동치분수, 범자연수와 동치인 분수 ★4NP: 동치분수 성질	⇒미국은 모델, 수직선을 이용하여 2개 학년에 걸쳐 동치분수 지도
분수크기 비교	★3-1: 동분모 분수, 단위분수 ★3-2: 가분수와 대분수 ★5-1: 이분모 분수	★3NP: 분모, 분자가 같은 경우 ★4NP: 같은 분모나 같은 분자로 변형하여 비교, 이분모 분수	⇒미국은 모델을 이용한 비교 결과에 대한 정당화 과정 중시

분수의 도입에서는 우리나라와 미국 모두 3학년 과정에서 다루고 있다는 것과 분수 도입 시 분모와 분자에 대한 정의도 함께 이루어진다는 공통점이 나타났다. 그렇지만 우리나라의 경우에 부분-전체 모델의 하위 개념인 영역과 이산량, 길이를 학기를 달리하여 제

시하고 있는 반면에, 미국에서는 3가지 하위 개념을 동시에 지도하는 차이가 나타났다. 그리고 미국의 경우에는 분수를 도입할 때 분수를 하나의 수로 간주하고 수직선 위에 분수를 나타내는데 초점을 두고 있으며, 분수 띠와 같은 분수 모델과 수직선을 이용하여 분수 개념을 지도하는데 관심을 두고 있었다.

가분수와 대분수와 관련해서 우리나라의 경우에는 가분수와 대분수를 한 단원에서 다루는 반면에(교육부, 2014a), 미국에서는 학년을 달리하여 다루고 있다(C. D. E., 2015). 그리고 대분수의 정의 방식에서도 우리나라와 달리 ‘범자연수와 분수로 이루어진 수’로 약속하는 차이가 있었다. 비로서 분수와 묶으로서 분수에서는 도입 단원이나 방식에서 두 나라가 유사하였다.

동치분수의 경우에는 우리나라는 5학년 과정에서 다루는 반면에(교육부, 2014b), 미국에서는 4학년 과정에서 동치분수의 성질을 다루기 전에 3학년 과정에서 동치분수의 개념과 분수 모델을 이용하여 여러 가지 방법으로 동치분수인 이유를 설명하도록 요구하고 있다(C. D. E., 2015). 분수의 크기 비교에서 우리나라 경우에는 도입되는 분수 개념에 따라 3학년과 5학년 과정에서 학년별로 구분하여 제시하고 있으나(교육부, 2014a; 2014b; 2015a), 미국에서는 3학년과 4학년 과정에서 분수의 유형보다 분모와 분자의 수의 관계에 따라 크기를 비교하는 여러 가지 방법을 제시하고 있다(Charles et al, 2012a; 2012b).

V. 결론 및 논의

수학교육 연구에서 외국의 교육과정이나 교과서 내용을 분석하는 이유는 각 나라들이 지향하는 교육의 방향과 내용을 파악함과 동시에 수학 내용의 도입 상황이나 접근 방식, 전개 과정, 평가 문항 등을 파악하기 위한 것이다. 이를 통해 우리나라 수학 교과서 집필뿐만 아니라, 학생들의 수학적 능력을 길러주는 수학 학습을 위한 시사점을 도출할 수 있기 때문이다. 본 연구에서는 학생들의 학업성취도가 낮을 뿐만 아니라, 학습 주제의 도입 상황과 전개 방식에서 다양한 요구가 있는 분수에 대하여 미국의 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서를 선정하여 분석하였다. 또 우리나라 비교 대상 자료로는 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서와 2015 개정 수학과 교육과정에 제시된 분수 내용이었다. 분석에서는 분수 개념의 이해에 필요한 등분할 개념, 분수 개념의 도입, 가분수와 대분수와 같은 여러 가지 분수 개념의 도입, 묶으로서 분수와 비로서의 분수, 동치분수, 그리고 분수의 크기 비교에 대하여 분석하였다.

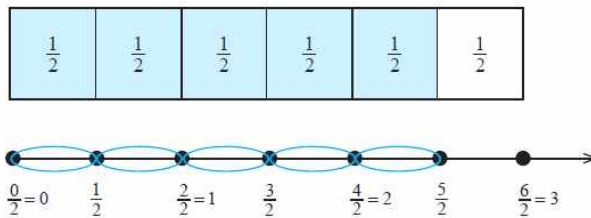
미국의 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에 제시된 분수 내용을 분석한 결과와 이를 바탕으로 분수 개념 지도에 관한 시사점과 논점을 제시하면 다음과 같다. 먼저, 우리나라와 미국의 분수의 주요 내용에 대한 도입 시기와 방법을 비교해 보았다. 우리나라와 미국 모두 분수는 3학년 과정에서 도입되는 공통점이 있었다. 그렇지만 미국에서는 분수 도입을 위한 등분할 과정을 1, 2학년 기하 영역에서 미리 지도한다는 것과 이산량과 길이 개념의 분수를 영역 모델과 함께 지도한다는 차이가 있었다. 진분수와 가분수, 대분수에 대해서는 우리나라의 경우에는 동일 단원 안에서 동시에 다루면서 분류의 측면을 강조한 반면에, 미국에서는 분수 도입 과정에 이용한 수직선을 활용하여 수직선 위에 대응하는 수를 표현하는 과정으로 제시하는 특징이 있었다. 동치분수와 크기 비교에서는 두 나라 간에 가르치는 학년에서 차이가 있었다. 그리고 미국은 모델이나 수직선을 이용하여 동치분수를 만

들고 정당화 하는 과정을 중시한 반면, 우리나라는 크기가 같은 분수를 만드는 과정에 치중하고 있었다. 크기 비교에서도 우리나라에 비해 미국은 같은 분모나 같은 분자로 만들어 비교하는 활동과 같이 분모를 통분하여 비교하는 형식화 과정보다는 분수의 특징에 따라 비교하고 정당화하는 과정을 중시하고 있었다.

분수의 도입 시기와 방법 면에 대한 비교·분석 결과, 분수 개념을 형식적으로 도입하기 전에 등분할 과정을 중시하여 다루는 것을 고려할 필요가 있다. 이것은 다양한 등분할 경험이 분수 지도를 위한 비형식적 지식으로 형성되는 데에도 유용할 것이기 때문이다. 다음으로 분수를 영역 모델과 더불어 이산량 모델이나 길이 모델을 함께 다루는 것을 고려할 필요가 있다. 이것은 우리나라 학생들의 경우에 분수에 대한 개념이 영역을 등분할하는 부분과 전체의 의미에 치중되어 있다는 결과에서도 그 이유를 찾을 수 있다(소성숙, 2003). 또한 분수를 도입하는 과정에서 분수를 수직선 위의 수에 대응시키는 활동을 통하여 분수를 하나의 수로 인식시키면서 크기에 대한 양감을 기르도록 하는 방안도 고려할 수 있다. 분수 개념 지도에서 수직선을 도입하고 활용하는 것은 이 후에 여러 가지 분수나 동치분수, 분수의 크기 비교, 분수의 연산과 같은 내용을 지도하는데 유용한 모델이 될 것으로 판단된다.

둘째, 미국의 경우에 분수 지도에 기본이 되는 등분할 내용을 1, 2학년 과정의 기하영역에서 다루어지고 있었다. 이것은 각 내용 영역을 서로 구분하지 않고 내용의 특성에 따라 영역에 구애받지 않고 내용을 다양하게 구성하는 특징이라고 할 수 있다(강홍재, 2016). 이것은 단원 간 학습내용이 명확히 구별되는 우리나라 단일 교과서의 경우에 단원 내용이 엄밀하게 구분되어 내용의 연계성을 피하기 어려운 상황에 시사점을 줄 수 있는 부분이다. 즉 등분할의 지도 면에서 현행 교과서 개발 체제에서는 도형이나 측정 영역의 탐구 활동이나 문제해결 활동에서 다양한 등분할 활동을 융합적으로 제시함으로써 단원 간 내용의 특성과 차별화를 피하면서도 수학적 역량을 기르도록 유도할 수 있는 대안을 고려할 수 있는 것이다. 더불어 미래의 교과서 개발 방침이 교과 내적 연결성을 피할 수 있는 방향으로 마련되어 교과서가 개발되어질 필요가 있다.

셋째, CA-CCSSM의 3학년 과정에서 학생들은 수로서 분수를 형식적으로 도입하고, 수 체계에 대한 이해를 확장하게 된다. 이를 위해 단위분수의 합성으로서 일반 분수를 이해하도록 하며, 분수를 수직선 위의 점에 대응시킴으로써 수 체계를 확장하도록 하고 있는 것이다. 즉 자연수 1의 몇 배에 해당되는 수직선 위의 점에 새로운 자연수가 대응하는 것과 마찬가지로, 단위분수의 몇 배에 해당되는 수직선 위의 점에 새로운 분수를 대응시킴으로써 분수를 수직선 위의 점과 대응시키는 것이다(C. D. E., 2015).



[그림 21] 가분수의 도입(C. D. E., 2015, p. 173)

이 원리를 적용하여 가분수를 별도로 다루지 않는 CA-CCSSM에서는 [그림 21]과 같이

가분수 $\frac{5}{2}$ 를 단위분수 $\frac{1}{2}$ 을 5배하여 얻는 수로 도입하고 있다. 이런 접근 방식은 우리나라 경우에 여러 가지 분수를 분류의 관점에서 정의하는 것과는 구별이 되는 부분이다. 분수를 수직선 위의 수로 소개하는 관점은 가분수나 대분수를 제시할 때나 분수의 크기 비교 등에도 활용함으로써 수의 관점에서 일관되게 학습 모델을 이용하여 분수를 다루는 장점이 있을 수 있다. 또한 동일한 학습 주제에 대하여 같은 모델을 활용하는 것은 내용 접근 방식에서 일관성을 유지할 수 있는 장점이 있다는 것도 고려할 필요가 있다.

넷째, 가분수와 대분수와 관련해서는 도입 시기가 우리나라의 경우에는 한 단원에서 동시에 도입하는 것과는 달리, 미국은 대분수와 가분수의 도입을 시기를 달리하고 있으며, 교과서에서도 정의를 반복하여 다루고 있다. 또한 대분수와 가분수의 도입에서도 우리나라는 가분수와 대분수를 다룬 이후에 변환을 다루는 것에 비해, 미국은 학년 수준에 따라 4학년 교과서에서는 분수 모델을 이용하여 대분수를 가분수로 변환하고 있고, 5학년 교과서에서는 자연수 부분과 분수 부분의 합으로 이루어진 알고리즘을 활용하여 가분수와 대분수의 변환을 다루고 있다. 이것은 우리나라의 경우에 교육과정의 변화에 따라 집필된 교과서마다 두 가지 중 한 가지 변환 방법만을 제시해 왔다는 면에서 추후의 교과서 집필에서는 분수에 대한 개념적 이해를 바탕으로 한 변환과 수학의 형식적 측면을 활용한 변환의 두 측면에서 다룰 필요가 있음을 의미한다(이대현, 2016).

다섯째, 분수의 하위 개념 이해의 관점에서 뒤편으로서 분수와 비로서의 분수 개념은 분수 개념 이해에 초점을 두어야 한다. 미국 교과서의 경우에 뒤편으로서 분수 개념은 분수가 초점이 되어 분수를 분자를 분모로 나눈 나눗셈으로 해석하는데 초점을 두고 있는 것이 고무적이었다. 그렇지만 비로서의 분수에서는 비와 비율을 분수로 표현하는 과정에 치중해 있어 우리나라와 유사하였다. 따라서 분수의 하위 개념에 집중하여 분수의 여러 가지 하위 개념을 지도할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있다. 즉, 뒤편으로서 분수는 미국과 마찬가지로 분자를 분모로 나눈 나눗셈의 관점으로 분수를 명시적으로 교과서에 집필될 필요가 있다. 또한 비로서 분수 개념도 비와 비율을 다루는 부분에서 다를지라도 분수의 의미가 부각되도록 명시적으로 교과서가 집필될 필요가 있다.

여섯째, 동치 분수와 분수의 크기 비교에서 미국의 경우에는 3학년 과정에서 분수 모델을 이용하여 여러 가지 방법으로 동치분수를 구하고 이유를 설명하도록 하며, 4학년 과정에서 점차적으로 형식화된 방법을 도입하는 특징이 있었다. 분수의 크기 비교에서도 우리나라 경우에 새로 도입하는 분수 유형에 따라 분수의 크기 비교를 함께 제시하는 것과는 달리, 미국은 분수의 유형보다 분모와 분자의 수의 관계에 따라 크기를 비교하는 여러 가지 방법을 제시하고 있는 특징이 있었다. 그리고 분수의 크기 비교 결과를 정당화하는 과정을 중시하는 특징이 있다. 이것은 학생들의 사고의 발달 과정을 반영한 수학교육 및 수학적 추론과 정당화를 강조하는 방향에 비추어 우리나라 분수 학습 내용의 구성을 재고할 필요를 시사한다. 즉 동치분수를 구하는 과정이나 분수의 크기 비교에 관한 내용 전개가 형식화된 변환 과정을 중시하는 접근 방식보다, 학생들의 사고의 유연성과 학습 내용의 특성에 비추어 내용의 배열이나 전개 방식에서 재구성을 고려할 필요가 있다.

이상에서 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에 제시된 분수 개념 내용을 분석한 결과에 대해 알아보았다. 전술한 바와 같이, 다른 나라의 교육과정이나 교과서 분석은 객관적 기준에 의해 옳고 그름을 판단하기는 어렵다. 그렇지만 학생들의 수학적 능력과 이해의 향상을 위해 분석 결과에서 얻은 장점을 파악하여 우리나라의 교육과정 구성과 교과서 내용 전개에 활용하는 것은 필요하다.

참 고 문 헌

- 강홍재 (2016). 미국 캘리포니아 주의 수학과 교육과정 고찰-초등학교 도형 영역을 중심으로-. **한국초등수학교육학회지**, 20(2), 239-257.
- 교육부 (2014a). **수학 3-2**. (주)천재교육.
- 교육부 (2014b). **수학 5-1**. (주)천재교육.
- 교육부 (2015a). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호[별책 8].. 교육부.
- 교육부 (2015b). **수학 3-1**. (주)천재교육.
- 교육부 (2016). **수학 5-2**. (주)천재교육.
- 김성준, 김수환, 신준식, 이대현, 이종영, 임문규, 정은실, 최창우 (2013). **초등학교 수학과 교재연구와 지도법**. 동명사.
- 김영옥, 최성용, 이승미 (2010). 미국 Common Core State Standards for Mathematics 소개. **수학교육학 논총 제38집**, 27-36.
- 김지원, 박교식, 이정은 (2014). 2011 개정 초등학교 수학과 교육과정과 미국 CCSSM 비교·분석 연구. **한국초등수학교육학회지**, 18(2), 279-295.
- 박경미 (2010). ‘학년군’ 과 ‘수학적 과정’ 을 중심으로 한 외국 수학과 교육과정의 최근 경향 비교·분석. **학교수학**, 12(4), 667-686.
- 서동엽 (2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. **수학교육학연구**, 15(3), 233-249.
- 소성숙 (2003). **초등학교 학생들의 분수감각에 대한 실태 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 안지영, 전영주, 윤마병, 이종학 (2014). 한국의 2009 개정 수학과 교육과정과 미국의 수학과 교육과정 기준 CCSSM의 비교·분석. **한국학교수학논문집**, 17(4), 437-464.
- 이광호 (2010). Common Core State Standards for Mathematics 소개. **수학교육학 논총 제38집**, 717-726.
- 이대현 (2013). **초등 수학과 교육과정과 교재연구**. 동명사.
- 이대현 (2016). 대분수와 가분수의 상호 변환에 관한 교과서 내용 분석. **초등수학교육**, 19(4), 177-191.
- 이지영, 방정숙 (2014). 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 실태 조사. **수학교육학연구**, 24(1), 83-102.
- 장혜원 (2012). 미국의 수학교육과정 기준 CCSSM의 수학적 실천에 대한 고찰. **수학교육학연구**, 22(4), 557-580.
- 정은실 (2009). 싱가포르와 우리나라 교과서의 비교 분석을 통한 분수 개념 지도 방안 탐색. **수학교육학연구**, 19(1), 25-43.
- 조지민, 김수진, 이상하, 김미영, 옥현진, 임해미, 박연복, 이민희, 한희진, 손수경 (2011). **2011년 국제 학업성취도 평가 연구(PISA/TIMSS): PISA 2012 예비검사 시행보고서**.

- 한국교육과정평가원 연구보고 RRE-2011-4-2.
- 조형미 (2015). **한국, 대만, 중국의 초등학교 수학교과서에 나타난 분수 개념 지도 방법**. 서울교육대학교 교육전문대학원 석사학위논문.
- 최근배 (2015). 한국과 미국(Harcourt Math)의 초등 수학 교과서 비교 분석: 분수와 소수의 도입과 연산을 중심으로. **한국초등수학교육학회지**, 19(1), 17-37.
- 최민아 (2014). **분수 지도에 대한 한국과 중국의 초등학교 수학 교과서 비교 분석**. 서울교육대학교 교육전문대학원 석사학위논문.
- Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematics power: an investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Bell, M., Isaacs, A., Bell, J., McBride, J., Bretzlauf, J., Moran, C. G., Dillard, A., Pitvorec, K., Hartfield, R., & Saecker, P. (2012). *Everyday mathematics-common core state standards edition, The university of Chicago school mathematics project, Student Math Journal Grade 2 Volume 1-*. IL: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Murphy, S., Sammons, K., Schielack, J., & Tate, W. (2012a). *enVision MATH grade 3 common core*. NJ: Pearson Education, Inc.
- Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Murphy, S., Sammons, K., Schielack, J., & Tate, W. (2012b). *enVision MATH grade 4 common core*. NJ: Pearson Education, Inc.
- Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Murphy, S., Sammons, K., Schielack, J., & Tate, W. (2012c). *enVision MATH grade 5 common core*. NJ: Pearson Education, Inc.
- Charles, R., Illingworth, M., McNemar, B., Mills, D., Ramirez, A., & Reeves, A. (2011). *Mathematics-common core, teacher's edition-*. NJ: Pearson Education, Inc.
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Common Core State Standards Initiative.
- Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics-fraction and decimals-*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- McGraw-Hill (2012). McGraw-Hill's math, grade 3. IL: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- McGraw-Hill (2013a). *My math 1, vol 2*. IL: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- McGraw-Hill (2013b). *My math 2, vol 2*. IL: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Teuscher, D., Reys, B., Dingman, S., & Thomas, A. (2014). Transitioning to common

mathematics standards: Computational fluency in the K-5 curriculum. In K. Karp & A. R. McDuffie(Eds.), *Using Research to improve instruction*(pp. 3-12). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

The California Department of Education (2013). *California common core state standards-mathematics*. The California Department of Education.

The California Department of Education (2015). *Mathematics framework for California public schools-kindergarten through grade Twelve-*. The California Department of Education.

<Abstract>

An Analysis on the Contents of Fraction in CA-CCSSM and
its Textbook

Lee, Dae Hyun⁵⁾

The purpose of analysis of foreign curriculums and textbooks is to aimed to get the implications for the revision of curriculum, publishment of textbooks and teaching mathematics. In this study, Common Core State Standards and its textbooks was analyzed. The U. S. doesn' t have the national mathematics curriculum. So, it can be happen some problems: students' lower mathematical achievement, assessment policy, decision of teaching contents, etc. In 2010, Common Core State Standards was developed by states. Furthermore, The California Department of Education reshaped standards: CA-CCSSM.

This study analyzed the contents of fraction in CA-CCSSM and its textbooks. Fraction has many concepts and methods and models in teaching process. This study analyzed the equal parts, introducing fraction concept, the types of fraction, equivalent fractions, comparison of fractions. The conclusions are as follows; The equal parts are the important concept of fraction and introduced in geometry area before teaching of fraction. CA-CCSSM aims to understand a fraction as a number on the number line and represent fractions on a number line diagram. There are some similarity and difference in mixed number, fractions as a division and ratio, equivalent fractions and comparison of fractions between Korean curriculum and textbooks and CA-CCSSM.

Key words: CCSSM, CA-CCSSM, Curriculum, Textbook, Fraction, The California State in the U. S.

논문접수: 2017. 10. 12

논문심사: 2017. 11. 03

게재확정: 2017. 11. 20

5) leedh@gnue.ac.kr