

# 정방형 방사면을 갖는 초음파 진동자의 자기방사임피던스 측정

## Measurement of the self-radiation impedance of an ultrasonic transducer with a square vibrating surface

김정순<sup>1</sup>, 김무준<sup>2†</sup>

(Jungsoon Kim<sup>1</sup> and Moojoon Kim<sup>2†</sup>)

<sup>1</sup>동명대학교 전기공학과, <sup>2</sup>부경대학교 물리학과  
(Received January 11, 2017; accepted March 29, 2017)

**초 록:** 수중 초음파 탐지 시스템에서 배열 진동소자로 사용되는 정방형의 방사면을 갖는 초음파 트랜스듀서의 자기 방사임피던스를 실험적으로 해석하였다. 7개의 진동수가 서로 다른 란주반형 진동자를 제작하여 파수와 진동자의 한 변의 길이의 곱인  $ka$ 의 값이 1~3의 범위에 대해서 방사리액턴스 및 방사저항을 측정하였다. 이 결과를 수열을 이용한 방사임피던스의 이론계산 결과와 비교하여 본 연구에서 수행한 실험방법의 유효성을 확인 하였고 정방형의 방사면에 대한 방사임피던스의 변화경향을 실험적으로 확인할 수 있었다.

**핵심용어:** 초음파 트랜스듀서, 정방형 방사면, 란주반형 진동자, 방사리액턴스, 방사저항, 자기 방사임피던스

**ABSTRACT:** We have experimentally analyzed the self-radiation impedance of an ultrasonic transducer with a square radiation surface that is used as a vibrator in underwater ultrasonic detection systems. The radiation reactance and the radiation resistance were measured in the range from 1 to 3 of  $ka$  that is the product of a wave number and a length of the edge of the square vibrator. By comparing the measured results with those of theoretical calculation of the radiation impedance using a series, we confirmed the validity of the experimental method and experimentally confirmed the variation trend in the radiation impedance of the square radiation surface.

**Keywords:** Ultrasonic transducer, Regular square radiation surface, Langevin type transducer, Radiation reactance, Radiation resistance, Self-radiation impedance

**PACS numbers:** 43.58.Bh, 43.38.Hz

### 1. 서 론

정방형의 방사 면을 갖는 초음파 트랜스듀서는 배열음원의 설계 시 소자간의 배열간격을 좁혀 음원 밀도를 높일 수 있다는 기하학적 특징 때문에 많이 사용되고 있다.<sup>[1-4]</sup> 특히 수중에서 사용되는 소나 시스템과 같이 방사음의 지향성 및 조향 각을 제어해야 하는 시스템에 있어서는 평면 및 곡면위에 많은 수의 초음파 트랜스듀서를 배열하여야 하며 이 때

배열간격은 매우 중요한 설계 변수이다.<sup>[5-7]</sup> 목적하는 방사특성을 얻기 위해 결정된 중심 간의 거리로 초음파 트랜스듀서들을 배열함에 있어서 원형의 방사 면을 가진 경우에 비해 정방형의 방사 면을 가진 초음파 트랜스듀서의 경우가 더욱 정확한 배열간격의 구현이 용이하다.

초음파트랜스듀서의 방사특성을 결정하는 요소 중 방사임피던스는 중요한 요소 중의 하나이다.<sup>[8]</sup> 방사임피던스의 이론적 해석은 많은 연구가 수행되어 있다.<sup>[9-14]</sup> 특히 정방형의 방사 면에 대해서는 원형의 방사 면과는 달리 기하학적 대칭성이 작아 그 해석방

†Corresponding author: Moojoon Kim (kimmj@pknu.ac.kr)  
Department of Physice, Pukyong National University, 45,  
Yongso-ro, Nam-gu, Busan 48513, Republic of Korea  
(Tel: 82-51-629-5572, Fax: 82-51-629-5549)

법에 대한 많은 고찰이 수행되고 있다.<sup>[15-19]</sup> Kim *et al.*<sup>[20,21]</sup>이 제안한 수열을 이용한 정방형 방사면에 대한 방사임피던스의 해석법은 비교적 작은 오차범위와 빠른 계산시간 등의 장점을 가지고 있다. 그러나 많은 이론적인 고찰에도 불구하고 실험적인 해석에 대한 보고는 매우 한정되어 있다.<sup>[22]</sup>

본 연구에서는 전기음향변환 이론에 근거한 미소 질량을 이용한 자기방사임피던스 측정법을 사용하여 정방형 방사면에 대한 방사임피던스의 변화경향을 실험적으로 확인 하였다. 실험을 위해서 공진주파수가 다른 7개의 란주반형 압전 초음파 트랜스듀서를 제작하여 이론계산 결과와 비교하였다.

## II. 계산 및 측정원리

정방형 진동면에 대한 방사임피던스의 이론계산을 위하여 Fig. 1에 나타난 바와 같이 사각 진동판의 진동면을  $n \times n$  개의 요소로 나누어 각각의 요소가 진동함으로써 다른 요소에 미치는 영향을 고려하는 방법을 택한다.<sup>[20]</sup> 즉, 요소  $e_{pq}$ 가 진동면상의 임의의 요소  $e_{lm}$ 에 미치는 영향으로 나타내는 음압  $f(r)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

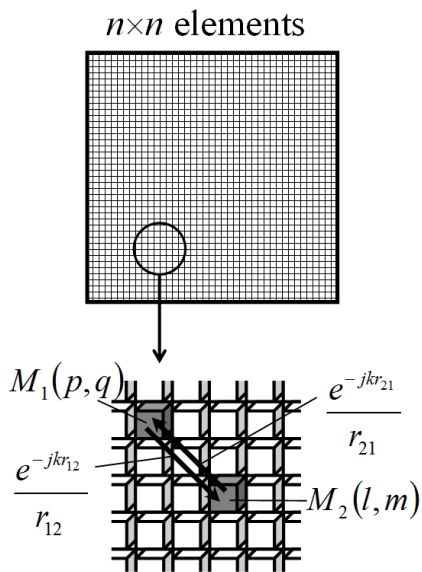


Fig. 1. Vibration surface regarded to have  $n \times n$  elements.

$$f(r) = \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad (1)$$

여기서  $k$ 는 파수이며  $r$ 은 요소간의 거리이다. 이에 대한 계산을 위해서는 각 요소의 위치를 나타내는 첨자  $p, q, l, m$ 에 대하여 연산을 수행하여야 하므로 결국 계산에 있어서 4중 루프를 수행하게 된다. 이때 계산의 정도를 높이기 위하여 요소의 수  $n$ 을 크게 할 경우 엄청난 계산 량이 되어 현실적으로 매우 곤란하다. 그러나 Eq. (1)이 나타내는 전달함수는 두 요소간의 거리만의 함수로 주어지기 때문에 모든 요소들이 동일한 진폭으로 진동한다고 가정하면 요소간의 거리가 동일한 경우에 대한 계산이 매우 많이 포함되게 된다. 동일한 연산의 중복을 피하기 위하여  $n \times n$  개의 요소로 이루어진 사각 진동판에 대하여 요소간의 상대좌표를  $(p, q)$ 라 두었을 때 각 요소간의 거리가 동일한 경우의 수를 나타내는 일반항을 각각  $N_1, N_2$  및  $N_3$ 라고 두면 아래의 세 가지 경우에 대하여 일반항 들은 다음과 같이 구해진다.

(1)  $p = q$ 인 경우

$$N_1 = \sum_{p=1}^{n-1} (2p)^2, \quad (2)$$

(2)  $q$ 가 1인 경우(혹은  $p$ 가 1인 경우)

$$N_2 = \sum_{p=1}^{n-1} 4p, \quad (3)$$

(3)  $p \neq q$ 인 경우

$$N_3 = \sum_{q=2p=1}^{n-1} \sum_{q=2p=1}^{n-1} 8qp \quad (4)$$

이다. 또한, 위의 세 경우에 대한 전달함수를 나타내면, 다음과 같다.

(1)  $p = q$ 인 경우

$$f_1 = \frac{\exp\left[-jk\sqrt{2\left(\frac{n-p}{n}\right)^2}\right]}{\sqrt{2\left(\frac{n-p}{n}\right)^2}}, \quad (5)$$

(2)  $q$ 가 1인 경우(혹은  $p$ 가 1인 경우)

$$f_2 = \frac{\exp\left[-jk\left(\frac{n-p}{n}\right)\right]}{\left(\frac{n-p}{n}\right)}, \quad (6)$$

(3)  $p \neq q$ 인 경우

$$f_3 = \frac{\exp\left[-jk\sqrt{\left(\frac{n-p}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-q}{n}\right)^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{n-p}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-q}{n}\right)^2}}. \quad (7)$$

위의 일반항과 전달함수를 이용하면  $n \times n$  개의 요소로 나눈 사각 진동체에 대한 자기 방사 임피던스  $Z_s$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{Z_s}{\rho c} = \frac{jk}{2\pi}(N_1 f_1 + N_2 f_2 + N_3 f_3). \quad (8)$$

계산의 정도를 높이기 위해서는 요소의 수  $n$ 을 큰 값을 사용하여야 한다. 그러나 사전 연구에 의하면  $n = 200$  이상에서는 계산 결과의 변화가 유효숫자 이내로 줄어든다는 것이 보고되어 있어 본 연구에서는 계산 요소로  $n = 200$ 을 사용하였다.

방사임피던스의 측정을 위하여 다음의 관계를 이용한다. 압전진동자의 동 어드미턴스  $Y_m$ 과 기계임피던스  $z$ 는 다음과 같은 관계를 갖는다.<sup>[23]</sup>

$$Y_m = \frac{A^2}{z} = \frac{A^2}{z_0 + z_x}, \quad (9)$$

여기서  $A$ 는 진동면을 부하매질에 접촉시켰을 때의 역계수,  $z_0$ 는 진동자 자체의 기계임피던스,  $z_x$ 는 진동면에서 부하매질의 기계임피던스 즉, 방사임피던스이다. 따라서 방사임피던스의 저항성분을  $r_x$ , 리액턴스성분을  $x_x$ 라고 두면

$$z_x = r_x + jx_x \quad (10)$$

이다. 또  $z_0$ 는 공진주파수 부근에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z_0 = r_0 + j\omega m_0 + \frac{s_0}{j\omega}, \quad (11)$$

여기서  $r_0$ 는 진동자의 내부손실,  $m_0$ 는 등가질량,  $s_0$ 는 등가 스티프네스이다. 이 때 공진 각주파수는 다음과 같이 구해진다.

$$\omega_0^2 = \frac{s_0}{m_0}, \quad (12)$$

한편 진동면에 기지의 임피던스로서  $m_0$ 에 비해 매우 작은 질량  $m_k$ 를 부착하였을 경우에는 진동자 자체의 기계임피던스는

$$z_0' = r_0 + j\omega'(m_0 + m_k) + \frac{s_0}{j\omega'} \quad (13)$$

이고, 이때의 공진 각주파수  $\omega_k$ 는

$$\omega_k^2 = \frac{s_0}{m_0 + m_k} \quad (14)$$

로 주어진다.  $m_k/m_0 \ll 1$ 이므로 급수전개시 이차항 이상을 무시하면, Eqs. (12)와 (14)로부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{f_k}{f_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{m_k}{m_0}. \quad (15)$$

$m_k$ 에 의해 생긴 공진주파수의 변화 분을  $\Delta f_k$ 라 하면  $m_0$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$m_0 = \frac{m_k f_0}{2 \Delta f_k}. \quad (16)$$

또한 진동자의 내부손실  $r_0$ 와 등가질량  $m_0$  및 무부하시의 기계적 품질계수  $Q_0$ 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$r_0 = \frac{2\pi f_0 m_0}{Q_0}. \quad (17)$$

진동면을 부하매질에 접촉시켰을 때 부하매질에 의한 공진주파수의 변화분을  $\Delta f_x$  라 하면 이때의 기계적 품질계수  $Q_x$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$Q_x = \frac{2\pi f_0 m_0 + x_x}{r_0 + r_x} \simeq \frac{2\pi f_0 m_0}{r_0 + r_x}. \quad (18)$$

이상으로부터, 부하시의 동어드미턴스  $Y_{mx}$  와 무부하시의 동어드미턴스  $Y_{m0}$  의 비는,

$$\frac{r_0 + r_x}{r_0} = \frac{Y_{mx}}{Y_{m0}} \simeq \frac{Q_0}{Q_x} \quad (19)$$

가 되고, 이로부터 방사저항  $r_x$ 가 구해진다.

한편, 부하매질이 있을 경우 임피던스는 공진 주파수 부근에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$z_0'' = r_0 + j\omega m_0 + \frac{s_0}{j\omega} + r_x + jx_x, \quad (20)$$

여기서 공진시에는 리액턴스 성분이 없으므로

$$x_x = \frac{s_0}{\omega_x} - \omega_x m_0 \quad (21)$$

이 되고, Eq. (12)의 결과를 이용하여

$$\frac{x_x}{\omega_0} = m_0 \left( \frac{\omega_0}{\omega_x} - \frac{\omega_x}{\omega_0} \right) \quad (22)$$

이 된다. 이를  $\Delta f_x$ 를 이용하여 표현하면

$$\frac{x_x}{\omega_x} = 2m_0 \frac{\Delta f_x}{f_0} + m_0 \frac{\Delta f_x^2}{f_0^2} \simeq 2m_0 \frac{\Delta f_x}{f_0} \quad (23)$$

으로 나타낼 수 있다. Eq. (23)에 Eq. (16)을 대입하면 다음과 같이 기지의 양들로 방사 리액턴스를 구할 수 있다.

$$\frac{x_x}{\omega_x} = \frac{\Delta f_x}{\Delta f_k} m_k. \quad (24)$$

### III. 방사임피던스 측정방법

본 연구에서는 방사임피던스의 측정을 위하여 Fig. 2에 나타낸 구조의 볼트결합 란주반형 초음파 트랜스듀서를 공진주파수가 서로 다르게 하여 7개 제작 하였다. 이를 위하여 트랜스듀서의 양 팔에 해당하는 알루미늄봉의 길이  $x$ 를 다르게 하였으며 무한배플의 조건을 만족시키기 위하여 두께 20 mm의 구리판에  $15 \times 15 \text{ mm}^2$ 의 정방형 구멍을 내어 트랜스듀서의 방사면을 삽입하였다. 이때 배플과 진동면 간의 간극 0.15 mm이고, 사용한 구동주파수 중 가장 높은 주파수의 파장이 약 30 mm인 것을 고려하면 매우 작은 간격이다. 즉, 진동면 가장자리에서 일어나는 진동의 회절이 충분히 배플면에 전달되는 조건으로 생각할 수 있다. 제작한 7개의 트랜스듀서의 사진을 Fig. 3에 나타내었으며 각각의 크기에 대한 공진

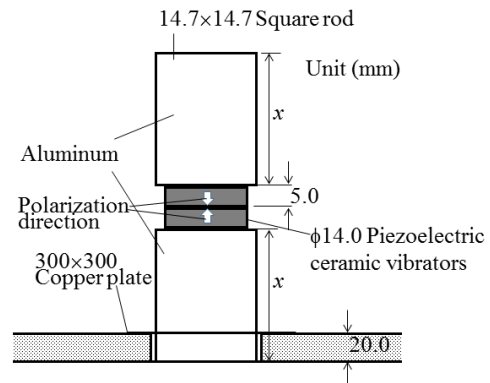


Fig. 2. Construction of bolt-clamped type Langevin ultrasonic transducer.

Table 1.  $ka$  values for different length of transducers.

$x$ (mm)	$ka$
65	1.02416
55	1.14668
45	1.37319
35	1.64745
25	1.83595
20	2.12686
15	2.77277

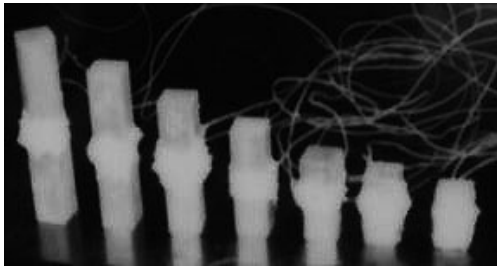


Fig. 3. Picture of ultrasonic transducers used in experiment.

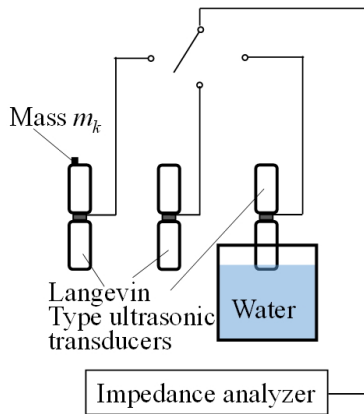
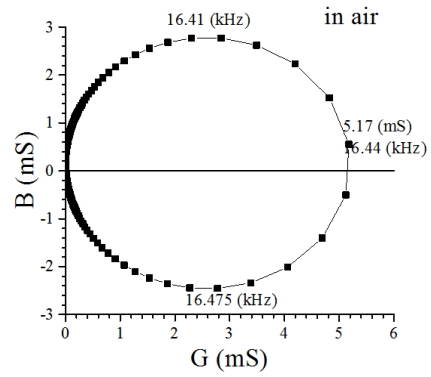
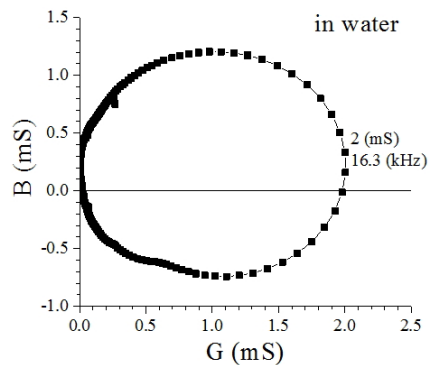


Fig. 4. Experimental setup for radiation impedance measurement.

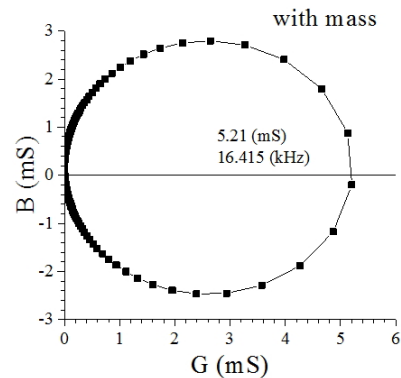
시의  $ka$  값을 Table 1에 나타내었다. Fig. 4는 제작된 트랜스듀서를 가지고 방사임피던스를 측정하기 위한 실험 모식도를 나타낸 것이다. 7개 각각의 트랜스듀서에 대하여, Fig. 4에 나타낸 것과 같이, 진동면에 미소질량  $m_k$ 를 부착한 경우, 아무것도 부착하지 않은 경우, 그리고 진동면에 음향부하인 물을 가한 경우에 대하여 필요한 파라미터를 측정한다. 즉, 진동면에 부하를 가하지 않은 상태에서 동 어드미턴스  $Y_{m0}$ , 공진주파수  $f_0$ , 기계적 품질계수  $Q_0$  등을 임피던스 어날라이저(HP 4294A)로 측정하고, 진동모드에 영향을 주지 않을 정도의 작은 질량  $m_k$ 을 진동면에 부착하였을 때의 공진주파수의 변화  $\Delta f_k$ 를 측정한다. 그리고 진동면을 음향부하인 물에 접촉시켰을 때의 동 어드미턴스  $Y_{mx}$ 와 기계적 품질계수  $Q_x$ 를 측정하고 공진주파수의 변화  $\Delta f_x$ 를 측정한다. 측정된 결과들을 Eqs. (19) 및 (24)에 대입하면 방사임피던스의 저항성분  $r_x$  및 리액턴스성분  $x_x$ 를 구할 수 있다. Fig. 5는 7개의 볼트결합 란주반형 초음파 트랜스듀



(a)



(b)



(c)

Fig. 5. Admittance locus for different condition in radiation surface ( $x = 65 \text{ mm}$ ,  $ka = 1.02416$ ).

서중 하나의 예로 16 kHz부근의 공진주파수를 갖는 트랜스듀서에 대한 측정 결과를 나타내었다. 먼저 진동면에 부하를 가하지 않은 상태에서 어드미턴스 로커스를 측정된 결과를 Fig. 5(a)에 나타내었다. 진동면을 음향부하인 물에 접촉시켰을 때의 어드미턴스 로커스의 변화를 Fig. 5(b)에 나타내었다. 음향부하, 물에 의해 어드미턴스 로커스의 직경이 많이 줄어들고 공진주파수는 16.3kHz로 변화한 것을 알 수 있다.

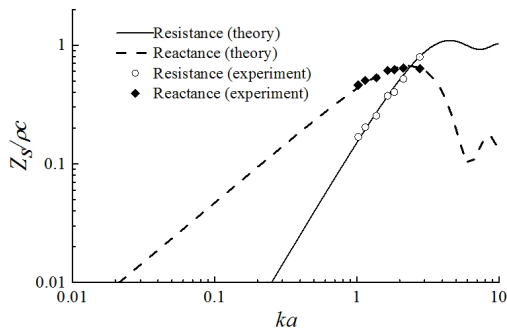


Fig. 6. Experimental results of self-radiation impedance compared with theoretical ones.

트랜스듀서의 진동면에 매우 작은 질량  $m_k = 0.536$  g 을 부착하였을 경우 어드미턴스 로커스의 변화를 Fig. 5(c)에 나타내었다. 이 결과를 보면 무부하시의 공진주파수 16.44 kHz가 미소질량  $m_k$ 에 의해 16.415 kHz로 변화한 것을 알 수 있다. 이들의 결과를 상술한 Eqs.(19) 및 (24)에 대입하여 방사임피던스를 구하면 저항성분  $r_x$ 는 0.16863, 그리고 리액턴스성분  $x_x$ 는 0.46026로 구해진다.

나머지 6개의 초음파 트랜스듀서에 대해서도 같은 방법으로 측정하였고, 그 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 이론값과의 비교를 위하여,  $n = 200$ 인 경우의 계산 결과를 함께 나타내었다. 이 결과를 보면 측정되어진 범위 내에서 이론 계산 결과와 측정결과는 좋은 일치를 보이고 있음을 알 수 있다. 실험결과에서는  $ka = 1\sim 3$ 의 범위에 대해 자기방사임피던스를 측정하였다. 일반적으로 배열 초음파 트랜스듀서의 설계에 있어서 최적의 방사 빔을 설계할 경우 실용적으로 결정되는 진동자 중심간 거리는  $ka$  값이 1~3의 영역이 되도록 결정된다. 따라서 본 연구에서 실험적으로 확인한 자기방사임피던스의 결과는 현실적으로 유용한  $ka$ 의 영역에서 측정되었다고 볼 수 있다.

#### IV. 결 론

정방향 방사면을 가진 초음파 트랜스듀서의 자기방사임피던스를 측정하였다.  $ka$ 의 범위가 1~3인 영역에 대하여 방사리액턴스 및 방사저항을 측정한 결과 수열을 이용한 이론계산 결과와 좋은 일치를 보였다. 본 연구에서 수행한 방사임피던스의 측정 방

법은 소나용 배열 초음파 진동자뿐만 아니라 생체 진단용 초음파 프로브의 진동 요소의 특성해석 및 설계에 적용 가능할 것으로 기대된다.

#### 감사의 글

이 논문은 부경대학교 자율창의학술연구비(2016년)에 의하여 연구되었음.

#### References

1. J. L. Butler, "Radiating head flexure and its effect on transducer performance," *J. Acoust. Soc. Am.* **70**, 500-503 (1981).
2. P. R. Stepanishen, "Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle," *J. Acoust. Soc. Am.* **49**, 1629-1638 (1971).
3. J. A. Jensen and N. B. Svendsen, "Calculation of pressure fields from arbitrarily shaped, apodized, and excited ultrasound transducers," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control*, **39**, 262-267 (1992).
4. H. Kim and Y. Roh, "Analysis of the radiation pattern in relation to the head mass shape applicable to a Tonpilsz transducer" (In Korean), *J. Acoust. Soc. Kr.* **29**, 422-430 (2010).
5. L. J. Ziomek, *Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing* (CRC Press, Boca Raton, 2000), pp. 401-579.
6. F. P. Mechel, *Formulas of Acoustics* (Springer, San Diego, 1998), pp. 431-521.
7. G. R. Lockwood, P. Li, M. O'Donnell, and F. S. Foster, "Optimizing the radiation pattern of sparse periodic linear arrays," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control*, **43**, 7-14 (1996).
8. L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics 4<sup>th</sup> edition* (John Wiley & Sons, New York, 2000), pp. 171-204.
9. P. R. Stepanishen, "The time-dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle," *J. Acoust. Soc. Am.* **49**, 841-849 (1971).
10. R. R. Smith, "Finite element analysis of acoustically radiating structures with applications to sonar transducers," *J. Acoust. Soc. Am.* **54**, 1277-1288 (1973).
11. C. E. Wallace, "Radiation resistance of a baffled beam," *J. Acoust. Soc. Am.* **51**, 936-945 (1972).
12. H. A. Schneck, "Improve integral formulation for acoustic radiation problems," *J. Acoust. Soc. Am.* **44**, 41-58 (1968).
13. G. Chertock, "Sound radiation from vibrating surfaces," *J.*

- Acoust. Soc. Am. **36**, 1305-1313 (1964).
14. P. R. Stepanishen, "The time-dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle," J. Acoust. Soc. Am. **49**, 841-849 (1970).
  15. J. Lee and I. Seo, "Self-radiation impedance of rectangular acoustic sensor without baffle (in Korean)," J. Acoust. Soc. Kr. **14**, 82-88 (1995).
  16. G. Bank and J. R. Wright, "Radiation impedance calculations for a rectangular piston," J. Audio Eng. Soc. **38**, 350-354 (1990).
  17. D. S. Burnett and W. W. Soroka, "Tables of rectangular piston radiation impedance functions with application to sound transmission loss through deep apertures," J. Acoust. Soc. Am. **51**, 1618-1623 (1972).
  18. H. Levine, "On the radiation impedance of a rectangular piston," J. Sound Vib. **89**, 447-455 (1983).
  19. P. R. Stepanishen, "The radiation impedance of a rectangular piston," J. Sound Vib. **55**, 275-288 (1977).
  20. M. Kim, C. Kim, and K. Ha, "A new method of calculating radiation impedance for vibrating surface with finite baffle," Jpn. J. Appl. Phys. **40**, 3815-3816 (2001).
  21. M. Kim, C. Kim, and K. Ha, "A new calculation method of radiation impedance for vibrating surfaces with an arbitrary shape," Jpn. J. Appl. Phys. **39**, 3174-3179 (2000).
  22. J. Kim, M. Kim, K. Ha, H. Seo, and C. Joh. "Experimental study of radiation impedance with effect of reflected wave from sonar dome," Jpn. J. Appl. Phys. **49**, 07HG07 (2010).
  23. L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics 4<sup>th</sup> edition* (John Wiley & Sons, New York, 2000), pp. 390-430.

## 저자 약력

### ▶ 김 정 순 (Jungsoon Kim)



1996년 2월: 부경대학교 물리학과 이학사  
 1999년 2월: 부경대학교 음향진동공학  
 협동과정 공학석사  
 2002년 3월: Tokyo University of A&T,  
 Bio-Applications and Systems of Eng.  
 공학박사  
 2006년 3월~현재: 동명대학교 전기공학과  
 조교수

### ▶ 김 무 준 (Moojoon Kim)



1985년 2월: 부경대학교 물리학과 이학사  
 1990년 2월: 부경대학교 물리학과 이학석사  
 1994년 3월: 일본, 토호쿠대학 공학박사  
 1995년 3월~현재: 부경대학교 교수