측정 영역의 문제해결 과정에서 나타나는 초등학교 6학년 학생의 오류 분석

김성경*
한국교육과정평가원

Error Analysis of 6th Grade Elementary Students in Problem Solving in the Measurement Domain

Kim Seong-Kyeong*
Korea Institute for Curriculum and Evaluation

Abstract : This study analyzed the errors of 6th graders of elementary school in problem solving process of the measurement domain. By analyzing the errors that students make in solving difficult problems, this study tried to draw implications for teaching and learning that can help students reach their achievement standards. First, though the students were given enough time to deal with problems, the fact that about 30~60% of students, based upon the problems given, can't solve them show that they are struggling with a part of measurement domain. Second, it was confirmed that students' understanding of the unit of measurement, such as relationship between units, was low. Third, the students have a low understanding in terms of the fact that once the base is set in a triangle then the height can be set accordingly and from which multiple expressions, in obtaining the area of the triangle, can be driven.

keywords : measurement domain, error, elementary mathematics, problem solving

Ⅰ. 서론

학생들은 수학 문제를 해결하는 과정에서 다양한 오류를 보인다. 수학적 오류는 수학 학습 과정에서 범하는 잘못된 계산, 실수, 착각 등에 의해서 나타나는 것으로(Kim, 2005), 학생들의 사고방식 내에서 일관성 있게 나타나며 한 번 형성되고 나면 쉽게 변하지 않는 특성을 지니고 있다(Kim, 2003; Kim, 2004). 수학적 오류의 이러한 특성을 고려하면, 학생들은 자신이 범하는 오류로 인해 문제해결에서 계속 실패할 수 있으므로 학생들이 보이는 오류를 분석하고 그 원인을 찾는 등 관련 정보를 수집하는 과정은 중요하다. 학생들이 오류를 범하는 개념이나 절차에 대한 구체적인 정보는 학생들의 오류를 예방 및 처방하는 데 기초 자료로 활용될 수 있다.

수학적 오류에 대한 연구는 학생들이 범하는 오류의 유형을 분류하는 데 관심을 가져왔다(Fiori & Zuccheri, 2005; Kim, 2012; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987; Mun & Kim, 2011; Seok & Paik, 2004; Radatz, 1979). 학생들이 범

*교신저자: 김성경 (kimsk@kice.re.kr)
**2017년 10월 17일 접수, 2017년 12월 7일 수정원고 접수, 2017년 12월 7일 채택
http://dx.doi.org/10.21796/jse.2017.41.3.480

하는 오류를 유형별로 분류하고 이를 토대로 학생들의 학습을 돕는 활동이 중요하기 때문이다(Kim, 2005). 학생들의 전형적인 오류를 아는 것은 교사가 갖추어야 할 교수학적 내용지식 중 하나이기도 하다(Ball, Thames & Phelps, 2008; Choe, 2007; Marks, 1990). 학생들의 문제해결 과정을 주의 깊게 분석하면 학생들의 사고에 대한 통찰력을 얻을 수 있으나(Reihl & Steinthorsdottir, 2014), 교사들 중 일부는 학습자의 오류를 정확히 진단하지 못하거나, 오류를 무시하고 넘어가는 경우도 있다(Schleppenbach, Flevares, Sims & Perry, 2007; Son, 2013). 학생들의 수학적 오류를 막다른 길로 치부하기보다 학습을 위한 잠재적인 도구로 이용하기(NCTM, 2000) 위해서는 학생들이 범하는 오류에 대한 정보를 축적하고 교사들에게 공유할 필요가 있다.

특히 교육과정에서 제시하고 있는 성취기준과 관련하여 학생들이 보이는 오류에 관심을 가질 필요가 있다. 성취기준은 "교수·학습 및 평가에서의 실질적인 근거로서, 각 교과목에서 학생들이 학습을 통해 성취해야 할 지식, 기능, 태도의 능력과 특성을 진술한 것(Hong *et al.*, 2012, p. 13)"이다. 제7차 교육과정부터 국가수준 교육과정에서 교육 내용을 성취기준으로 제시하고 있으므로, 성취기준 중 학생들이 달성하기 어려워하는 부분이 있다면 이에 대한 원인 분석이 필요하다. 성취기준을 기반으로 출제된 문제에서 학생들이 범하는 오류를 확인하는 것은 이러한 원인을 분석하는 일환이 될 수 있다. Jin *et al.* (2015, 2016)은 2009 개정 교육과정에 근거하여 교육과정 이수 실태를 분석하였다. 이 연구에서는 국어, 영어, 수학 교과의 초등 1~2학년군, 3~4학년군, 5~6학년군의 핵심 성취기준을 바탕으로 검사 도구를 개발하였고 문항별로 정답률, 변별도 등의 검사 결과를 보고하였다. 수학과의 경우 검사 결과에서 정답률이 낮은 문항에 대한 분석 결과를 제시하였으나 선다형 또는 단답형 문항이어서 학생들의 풀이과정을 바탕으로 면밀한 분석이 이루어지지 못하였다.

Jin *et al.* (2016)의 연구에서 초등 1~2학년군, 3~4학년군, 5~6학년군 검사 결과 정답률이 50% 미만인 문항은 각각 0개, 1개, 5개로 나타났으며, 특히 5~6학년군의 5개 문항은 모두 측정 영역에 해당하였다. 이에 본 연구에서는 정답률이 낮은 문항이 많이 나타난 5~6학년군의 측정 영역에 주목하여 해당 문항에 대한 학생들의 문제해결 과정을 분석하고자 한다. 이를 통해 초등 5~6학년군의 내용에서 학생들이 어려워하는 부분에 대한 오류를 분석함으로써 학생들의 성취기준 도달을 도울 수 있는 교수·학습에서의 시사점을 도출하고자 한다.

II. 측정 영역에서의 오류에 대한 국내 연구

초등수학교육의 국내 연구 동향을 분석한 Kim & Pang(2017)은 내용영역별로 분류하였을 때 수와 연산 영역에 연구가 집중되어 있고 측정 영역의 연구가 적음을 보고하였다. 1998~2006년까지의 초등수학교육 연구의 동향을 분석한 Kwon & Choi(2008)의 연구에서도 측정 영역에서의 보다 활발한 연구가 필요하다고 제안하였다. 초등 수학에서 다루는 내용이 수와 연산 영역에 해당하는 부분이 많으므로 이와 관련된 연구가 활발한 것은 자연스러운 현상이지만, 측정 영역은 실생활과 깊은 관련성 때문에 초등 수학에서 중요하게 다루고 있으므로 이 영역에 대해서도 보다 다양한 연구가 이루어질 필요가 있다.

최근 7년간 초등수학교육의 연구 동향을 연구 주제별로 분류하였을 때 학습자의 오답, 오류 유형에 대한 연구는 약 2% 정도 차지하는 것으로 나타났다(Kim & Pang, 2017). 수학적 오류는 학생의 오개념에 의해 체계적으로 나타나는 학습 과정과 결과이며, 이러한 오류는 학생이 자신이 지닌 오개념을 바탕으로 알고리듬이나 정의를 체계적이나 부적합하게 조작하고 수행하는 과정에서 발생한다(Kim, 2005). 오개념이나 버그에 의해 발생하는 연속적인 오류의 경우 수학의 형식적 특성, 교과서나 교사의 오개념 등과 같은 학생 외적 원인, 직관이나 과신과 같은 학생의 내적 원인에 의해 발생할 수 있고

고착화되면 교정이 쉽지 않다(Kim, 2003)는 점을 고려할 때, 학생들의 오류에 대한 연구를 통해 오류의 예방과 처방을 돕는 자료를 축적할 필요가 있다. 오류에 대한 연구도 수와 연산 영역(Kim, 2012; Kim & Kang, 2008; Ko, 2012; Moon & Lee, 2014)에 집중되어 있으나 일부 연구가 측정 영역에 초점을 두고 이루어졌다. 측정 영역 전반에서 초등학생의 학업 성취를 분석한 Song & Park(2005)은 단위, 삼각형의 높이와 넓이의 관계 등에서 학생들이 어려움을 겪고 있음을 보고하였다. Kim & Kim(2011)의 연구에서는 측정 영역에서 수학저성취학생과 일반학생의 성취를 비교한 결과, 넓이, 부피, 근삿값은 수학저성취학생과 일반학생이 모두 어려워하는 내용으로 나타났다. 이 연구들은 측정 영역에서 학생들이 어려움을 겪고 있는 부분을 분석하였으나, 학생들이 보이는 구체적인 오류를 제시하지는 않았다.

초등학생들의 오류를 구체적으로 살펴본 연구로 Jeong & Yim(2011)은 평면도형의 넓이 공식에 대한 학생들의 이해를 조사한 결과, 직사각형이나 평행사변형에 비해 삼각형의 넓이 공식에 대한 이해가 상대적으로 낮은 것으로 보고하였다. Na(2012)의 연구에서도 평면도형의 넓이의 의미에 대한 학생들의 이해가 미흡한 것으로 나타났다. Ju & Kim(2009)은 측정 영역 중 실측과 관련해서 학생들이 보이는 오류를 분석하고 이를 개선하기 위한 지도 방안을 제시하였다. 이 연구에서는 실측에서 학생들이 보이는 오류는 단순한 기술적 오류가 아니라 단위 등과 같은 관련 개념에 대한 이해가 낮기 때문이라고 주장하였다. 단위와 관련된 연구로 Kang, Jeong & Roh(2014)의 연구를 살펴보면, 학생들은 단위를 포함한 문제를 해결함에 있어서 연산을 잘 수행하여도 연산 결과의 의미를 이해하는데 어려움을 보였다. Kang & Choi(2015)는 초등 수학 영재교육 대상자의 원주율 개념에 대한 이해를 분석한 결과, 학생들이 원주율과 원주율의 근삿값을 혼동하는 오류를 보이는 것으로 보고하였다. 이와 같이 평면도형의 넓이, 실측, 단위, 원주율 등과 관련하여 측정 영역에서 학생들이 범하는 오류에 대한 연구가 일부 이루어지는 했으나 오류에 대한 보다 다양한 정보를 수집하여 교수·학습에 활용할 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 두 개의 초등학교 6학년 학생을 연구 대상으로 하였다. A초등학교 6학년은 모두 3개 학급, B초등학교 6학년은 모두 4개 학급으로 이루어져 있었고, 두 학교의 6학년 학생 전체를 대상으로 검사를 실시하였다. Table 1과 같이 161명을 대상으로 검사를 실시하였으나 모든 문항의 풀이과정을 제시하지 않은 3명을 제외하고 158명의 답안을 분석하였다.

2. 검사 도구

본 연구의 검사 도구는 Jin *et al.* (2016)의 연구에서 개발한 초등학교 5~6학년군 수학 검사지에서 일부 문항을 선정하여 구성하였다. 전술한 바와 같이 Jin *et al.* (2016)의 검사지는 초등학생들의 교

Table 1. Participations

학교	학급(개)	학생 수(명)	분석 대상 답안 수(개)
A초등학교	3	77	76
B초등학교	4	84	82
합계	7	161	158

육과정 이수 정도를 알아보기 위해 2009 개정 교육과정의 핵심 성취기준으로부터 평가목표를 설정하여 개발된 도구이다. 5~6학년군 수학 검사지는 47개의 문항으로 구성되어 있으며 Jin *et al.* (2016)는 각 문항에 대한 정답률 및 변별도[1]를 보고하였다. Jin *et al.* (2016)에서는 정답률이 낮은 일부 문항에 대한 분석을 제시하였으나 학생 반응에 대한 심층 분석이 이루어지지 않았다. 이는 대부분의 문항이 보기에서 답을 선택하는 선다형 문항이고 서답형 문항도 풀이과정을 제시하는 서술형이 아닌 단답형 문항이므로 심층 분석이 이루어지기 어려웠다.

학생들의 학업성취 정도를 점검하는 일과 아울러 학생들이 범하는 오류를 면밀히 분석하여 이후 교수·학습을 위한 정보를 제공하는 일도 필요하다. 특히 정답률이 낮은 문항에 대해서는 학생들의 문제해결 과정을 기반으로 한 분석이 이루어질 필요가 있다고 판단하여 정답률 50% 이하인 문항 전체를 선택하였다. Jin *et al.* (2016)의 5~6학년군 수학 검사지는 대영역별로 '수와 연산' 17문항, '도형' 11문항, '측정' 11문항, '규칙성' 5문항, '확률과 통계' 3문항으로 구성되어 있는데, 정답률이 50% 이하로 나타난 문항 5개는 모두 '측정' 영역에 해당하였다. 본 연구에서는 Jin *et al.* (2016)의 연구에서 개발한 문항을 그대로 사용하되 문항 아래쪽에 학생들이 자신의 풀이과정을 쓸 수 있도록 박스를 추가로 제시하였다. 본 연구에서 사용한 5개 문항의 정보를 정리하면 Table 2와 같다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구의 검사는 2016년 12월 19~23일 사이에 담임교사의 지도 아래 이루어졌다. 연구자가 담임교사에게 검사 도구를 전달하였고, 검사 실시 후 우편으로 회수하였다. 담임교사들에게 학생들이 문제를 해결할 수 있는 충분한 시간을 제공해 줄 것

Table 2. Information of items

문항 번호*	대영역	문항 유형	평가 내용	정답률(%)**	문항 이름***
1(a20)	측정	선다형	삼각형의 넓이를 구하는 방법과 관련된 문제 해결하기	41.67	삼각형 넓이 문제
2(a15)	측정	선다형	1 t 을 알고, 무게 단위 사이의 단위 변환하기	35.15	비행기 무게 문제
3(a17)	측정	선다형	원의 넓이를 구하는 방법을 이해하고 구하기	43.12	원 넓이 문제
4(a23)	측정	서답형	정육면체의 겉넓이를 구하는 방법을 이해하고 구하기	39.86	정육면체 겉넓이 문제
5(a14)	측정	선다형	부피를 이해하고, 1 cm^3, 1 m^3의 단위를 알며, 부피 단위 사이의 단위 변환하기	46.74	직육면체 부피 문제

Jin *et al.* (2016, pp. 67-68, 281-284, 369-371)에 제시된 표의 내용을 재구성하였음
* 괄호 안에 제시된 문항 번호는 Jin *et al.* (2016)의 검사지의 문항 번호임
** Jin *et al.* (2016)에서 제시한 정답률임
*** '문항 이름'은 본 연구에서 각 문항을 지칭하게 위해 부여한 것임

[1] 9개 학교 6학년 276명을 대상으로 실시한 검사 시행 결과이고 구체적인 정답률, 변별도 등은 Jin *et al.* (2016, pp. 67-68)의 연구에서 확인할 수 있다.

을 당부하였고, 학생들이 자신의 풀이과정을 문제 아래쪽에 제시된 박스에 반드시 쓰도록 안내해 줄 것도 요청하였다.

분석은 다음과 같은 절차에 따라 진행하였다. 첫째, 학생들의 답안을 검토하여 모든 문항에 대한 풀이과정을 제시하지 않은 답안을 분석 대상에서 제외하였다. Table 1에서 제시한 바와 같이 3명의 답안이 제외되어 158명의 답안을 분석 대상으로 하였다. 둘째, 문항별로 학생의 풀이과정을 분석하여 답안을 유형화하였다. 풀이과정을 제시하지 않았거나 무의미한 그림 또는 말을 쓴 답안은 무응답으로 분류하였다. 타당한 풀이과정을 통하여 옳은 답을 도출한 경우를 문제해결에 성공한 정답으로 분류하였다. 무응답과 정답 이외에 오류를 포함한 답안을 오답으로 분류하였다. 무응답을 제외한 학생들의 답안을 문항별로 유형화하고, 정답/오답 여부와 문항 번호를 고려하여 각 유형에 이름을 부여하였다. 예컨대, S11은 문항 1번의 첫 번째 정답(S) 유형을 의미하고, E12는 문항 1번의 두 번째 오답(E) 유형을 의미한다. 셋째, 연구자가 문항별로 유형화한 내용을 초등학교 교사의 검토를 받은 후 수정하였다. 넷째, 확정된 문항별 유형에 따라 학생들의 답안을 코딩하였다. 학생 답안 코딩은 연구자와 수학교육 박사과정인 교사가 교차 코딩하였으며 의견이 다른 경우 협의를 거쳐 재분류하였다.

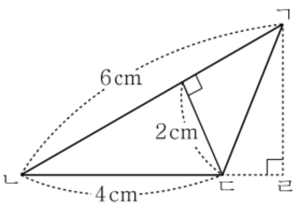
Jin *et al.* (2016)의 연구에서 밝힌 문항별 정답률(Table 2 참조)과 본 연구에서의 정답률은 차이가 있음을 밝혀둔다. 이는 두 연구의 검사 환경 및 분석 방법이 달랐기 때문이라고 본다. Jin *et al.* (2016)의 연구에서는 20문항 이상이 포함된 검사지가 학생들에게 제공되었고 검사 시간이 40분이었으나, 본 연구에서는 5개의 문항으로 구성된 검사지가 제공되었다. 또한 본 연구에서는 학생들의 문제해결 과정을 분석하는 데 목적이 있으므로 풀이과정 없이 답만 쓴 경우 정답으로 분류하지 않았기 때문에 Jin *et al.* (2016)과 정답률이 다를 수밖에 없다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 삼각형 넓이 문제(문항 1번)

이 문제는 삼각형의 넓이와 관련된 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문항이다. 5~6학년군에서 학생들은 직사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모 등 다각형의 넓이를 구하는 방법을 학습한다.[2] 삼각형의 넓이를 구하기 위해서는 삼각형의 밑변과 높이의 관계를 명확히 알고 있어야 한다. 이 문항을 해결하기 위해서는 밑변과 높이의 관계, 즉 변 ㄴㄷ을 밑변으로 할 때 높이가 선분 ㄱㄹ임

1. 삼각형 ㄱㄴㄷ에서 변 ㄴㄷ을 밑변으로 할 때, 높이는 몇 cm 입니까?



① 1 cm ② 2 cm ③ 3 cm ④ 4 cm

Figure 1. Item 1 : Problem for triangle's area

2) 2009 개정 수학과 교육과정에서 관련 학습내용 성취기준은 '직사각형의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 바탕으로 직사각형과 정사각형의 넓이를 구할 수 있다.'와 '평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구하는 방법을 다양하게 추론하고, 이와 관련된 문제를 해결할 수 있다.'이다(MEST, 2011, p. 25).

Table 3. Types of student's answers for item 1

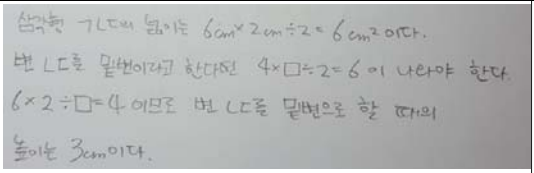
유형	내 용	빈도	(%)
S11	주어진 삼각형의 넓이는 $6\times2\div2=6$이고 변 ㄴㄷ을 밑변으로 할 때 높이가 선분 ㄱㄹ이므로 식 $4\times\square\div2=6$으로부터 높이 3 cm를 구한 경우	62	(39.24)
E11	다른 선분의 길이와 비교하여 어림하거나 자를 사용하여 높이를 측정한 경우	11	(6.96)
E12	변 ㄱㄴ을 밑변으로 할 때 높이가 2 cm이므로 변 ㄴㄷ을 밑변으로 해도 높이가 2 cm라고 답한 경우	5	(3.16)
E13	그림에서 주어진 세 선분의 길이를 임의대로 연산하여 높이를 도출한 경우	21	(13.29)
E14	그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우	23	(14.56)
무응답	모른다고 쓰거나 풀이과정이 백지인 경우	36	(22.78)
	합 계	158	(100.00)

을 알아야 하고, 삼각형의 넓이와 밑변을 알 때 높이를 구할 수 있어야 한다.

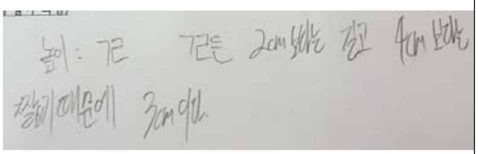
Table 3은 삼각형 넓이 문제(문항 1번)에 대한 학생 답안의 유형을 분류한 결과이다. 정답인 유형은 1개(S11)이고 62명(39.24%)의 답안이 해당하였고, 오답인 유형은 4개(E11, E12, E13, E14)로 60명(37.97%)의 답안이 해당하였으며, 무응답으로 분류된 경우가 36명(22.78%)이었다. 약 60%의 학생들은 이 문제를 해결하는 데 어려움을 보였다.

정답에 해당하는 유형 S11은 이 문제를 바르게 해결한 답안으로 62명(39.24%)의 학생들에게서 나타났다. 변 ㄱㄴ을 밑변으로 할 때 높이가 2 cm이므로 삼각형의 넓이 6 cm^{2}를 구할 수 있다. 그리고 변 ㄴㄷ을 밑변으로 할 때 선분 ㄱㄹ이 높이가 되므로 이미 찾은 삼각형의 넓이를 이용하여 식 $4\times\square\div2=6$을 세우고 높이가 3 cm임을 구할 수 있다(Figure 2의 '유형 S11의 예시' 참조).

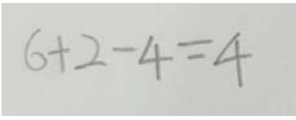
이 문제를 해결하는 데 실패한 학생들의 답안을 유형 E11, E12, E13, E14로 분류하였다. 먼저 유형 E11은 다른 선분의 길이와 비교하여 어림하거나 자를 사용하여 높이를 측정한 경우로 11명(6.96%)의 답안이 이에 해당하였다. Figure 2에서 '유형 E11의 예시'를 보면 이 학생은 다른 선분의 길이인 2 cm와 4 cm를 이용하여 높이인 선분 ㄱㄹ



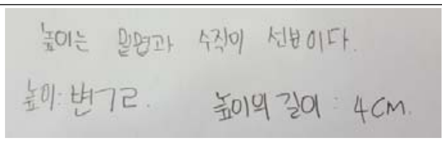
유형 S11의 예시



유형 E11의 예시



유형 E13의 예시



유형 E14의 예시

Figure 2. Examples of student's answers for item 1

의 길이를 3㎝로 어림하였다. 두 번째 오답 유형인 유형 E12는 밑변이 변 ㄱㄴ일 때 높이가 2㎝이므로 밑변이 ㄴㄷ으로 바뀌어도 높이는 여전히 2㎝라고 답한 경우로 5명(3.16%)의 답안이 이에 해당하였다. 이와 같은 오답을 보인 학생들은 높이는 삼각형의 내부에 존재한다고 생각하여 삼각형 내부에서 수선을 찾아 높이를 2㎝로 답했을 가능성이 크다. 이런 유형의 오답을 보이는 학생들에게는 삼각형의 높이와 관련된 오개념에 대한 보정이 반드시 이루어져야 한다.

세 번째 오답 유형인 유형 E13은 그림에서 주어진 세 선분의 길이를 임의대로 연산하여 높이를 도출한 답안으로 21명(13.29%)의 학생 답안에서 확인되었다. 예를 들면, 학생들은 $6-4=2$, $6\div2=3$, $6+2-4=4$(Figure 2의 '유형 E13의 예시' 참조)와 같이 타당한 근거 없이 연산한 결과를 답으로 제시하였다. 유형 E14는 그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 답안으로 23명(14.56%)의 답안이 이에 해당하였다. 이 학생들은 선다형 문항이므로 보기 중에 특정한 답안을 선택하고 그에 대한 타당한 논거를 찾을 수 없으므로 높이가 얼마라고 선언한 경우가 많았다. 선분 ㄱㄹ이 높이임을 알았으나 선분의 길이를 구하지 못한 경우(Figure 2의 '유형 E14의 예시' 참조)가 10명의 답안에서 확인되었다. 이 학생들은 변 ㄴㄷ을 밑변으로 할 때 선분 ㄱㄹ이 높이가 된다는 사실을 알고 있었으나, 변 ㄱㄴ을 밑변으로 할 때 높이가 2㎝임을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 단계로 나아가지 못했을 가능성이 크다. 또한 일부 학생들은 삼각형 ㄱㄴㄷ의 넓이는 구하였으나 선분 ㄱㄹ의 길이를 구하지 못하였다. 이 학생들은 변 ㄱㄴ을 밑변으로 하여 삼각형의 넓이는 구할 수 있으나, 삼각형의 밑변과 높이의 관계를 명확하게 알지 못할 가능성이 크다.

이 문제는 다른 문제에 비해서 무응답, 즉 풀이 과정 란에 모른다고 쓰거나 아무 것도 쓰지 않은 경우(36명, 22.78%)가 많았다. 2009 개정 수학과 교육과정에 '삼각형의 넓이는 높이가 삼각형의 내부, 외부에 있는 것을 모두 다룬다.'라고 명시되어 있고(MEST, 2011, p. 25), 이와 유사한 문항이 수학 교과서 및 수학익힘책[3]에 제시되어 있으나 학생들은 이 문제의 해결에 어려움을 겪고 있음을 알 수 있다. 학생들은 삼각형의 세 변이 모두 밑변이 될 수 있고 밑변에 따라 높이가 달라진다는 것, 이를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 여러 식을 세울 수 있다는 것에 대한 이해가 낮음을 알 수 있다.

2. 비행기 무게 문제(문항 2번)

이 문제는 1 t을 알고, 무게 단위 사이의 단위를 변환할 수 있는지 평가하는 문항이다. 학생들은 5학년 2학기 '여러 가지 단위' 단원에서 넓이 및 무게와 관련된 여러 가지 단위를 학습한다(MOE, 2015b). 학습내용 성취기준[4]에 비추어 보면 교사들은 학생들이 이전에 배운 넓이 단위(cm^2, m^2), 무게 단위(g, kg)를 바탕으로 더 큰 단위의 필요성을 느낄 수 있도록 안내한 후 새로운 단위를 지도할 것이다. 무게 단위와 관련하여 학생들은 3학년에서 1 kg과 1 g의 관계를 학습한 후 5학년 과정에서 더 큰 무게 단위의 필요성을 인식하고 1 t과 1 kg의 관계를 학습한다. 이 문제를 해결하기 위해서는 무게 단위 t을 kg으로 변환할 수 있어야 하고, 주어진 두 물체 사이의 무게 관계도 고려할 수 있어야 한다.

Table 4는 비행기 무게 문제(문항 2번)에 대한 학생 답안의 유형을 분류한 결과이다. 정답인 유형

---

[3] 2009 개정 5학년 1학기 수학교과서(MOE, 2015a, p. 151)와 수학익힘책(MOE, 2015d, pp. 89-90)에 유사한 문항이 제시되어 있다.

[4] 2009 개정 수학과 교육과정에서 관련 학습내용 성취기준은 '실생활에서 무게를 나타내는 새로운 단위의 필요성을 인식하여 1 t을 알고, 무게 단위 사이의 관계를 이해한다.'와 '실생활에서 넓이를 나타내는 새로운 단위의 필요성을 인식하여 1 km^2, 1 a, 1 ha를 알고, 그 관계를 이해한다.' 이다(MEST, 2011, p. 25).

2. 큰 비행기 무게는 작은 비행기 무게의 100배입니다. 작은 비행기 무게가 4.7 t 일 때, 큰 비행기 무게는 몇 kg 입니까?

4.7 t　　　　☐ kg

① 470 kg　② 4700 kg　③ 47000 kg　④ 470000 kg

Figure 3. Item 2 : Problem for airplane's weight

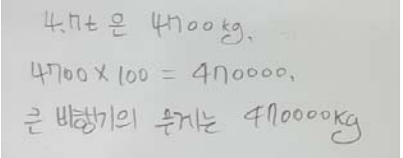
은 2개(S21, S22)이고 108명(68.35%)의 답안이 해당하였고, 오답인 유형은 4개(E21, E22, E23, E24)로 44명(27.85%)의 답안이 해당하였으며, 무응답으로 분류된 경우가 6명(3.80%)이었다. 문항 1번(무응답 22.78%)과 비교하면 무응답의 비율이 낮았으나 약 30%의 학생들은 이 문제를 바르게 해결하지 못하였다.

이 문제를 바르게 해결한 학생들의 답안은 2가지 유형으로 분류가 가능하였다. 첫째는 유형 S21로 작은 비행기의 무게 4.7 t 을 4700 kg 으로 단위 변환한 후, 큰 비행기의 무게가 작은 비행기의 무게의 100 배이므로 $4700 \times 100 = 470000$, 즉 470000 kg 을 구하는 방법이다. Figure 4의 '유형 S21의 예시'에서 이와 같은 풀이과정을 확인할 수 있고, 58명(36.71%)의 답안이 이 유형에 해당하였다. 둘째는 유형 S22로 작은 비행기의 무게 4.7 t 을 100배하여 큰 비행기의 무게 470 t 을 구한 후, 무게 단위를 kg 으로 바꾸어서 470000 kg 을 구하는 방법이다. 이 유형은 50명(31.65%)의 답안에서 확인할 수 있었다.

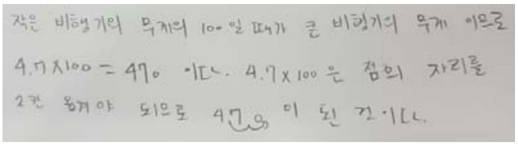
이 문제를 해결하지 못한 학생의 답안을 분석한 결과 4가지 유형을 확인할 수 있었다. 먼저 유형

Table 4. Types of student's answers for item 2

유형	내 용	빈도(%)
S21	작은 비행기 무게 4.7 t 을 4700 kg 으로 단위 변환한 후, 큰 비행기의 무게는 작은 비행기 무게의 100 배이므로 470000 kg 을 구한 경우	58 (36.71)
S22	작은 비행기의 무게 4.7 t 을 100 배하여 큰 비행기의 무게 470 t 을 구한 후, 470 t 의 단위를 변환하여 470000 kg 을 구한 경우	50 (31.65)
E21	작은 비행기 무게 4.7 t 을 4700 kg 으로 단위 변환하여 답으로 제시한 경우	3 (1.90)
E22	큰 비행기의 무게는 작은 비행기 무게의 100 배이므로 4.7×100 을 계산하여 답으로 제시한 경우	29 (18.35)
E23	1 t 을 100 kg으로 계산한 경우(4.7 t = 470 kg 또는 470 t = 47000 kg 이 풀이과정에 포함됨)	5 (3.16)
E24	그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우	7 (4.43)
무응답	모른다고 쓰거나 풀이과정이 백지인 경우	6 (3.80)
합 계		158 (100.00)



유형 S21의 예시



유형 E22의 예시

Figure 4. Examples of student's answers for item 2

E21은 작은 비행기의 무게 4.7 t 을 4700 kg 으로 단위 변환하여 답으로 제시한 경우로 3명(1.90%)의 학생 답안에서 나타났다. 이 문항에서는 큰 비행기의 무게를 물었으나 이 학생들은 작은 비행기의 무게를 답하였다. 이러한 풀이과정을 보인 학생들은 문제에 주어진 정보 '큰 비행기 무게는 작은 비행기 무게의 100배입니다.'를 고려하지 못했으며, '큰 비행기 무게는 몇 kg 입니까?'라는 마지막 물음도 주의 깊게 살피지 못한 것으로 판단된다. 작은 비행기 그림 아래의 '4.7 t '과 큰 비행기 그림 아래의 '☐ kg'에만 주목하여 문제를 해결했을 것으로 판단된다. 두 번째 오답 유형인 유형 E22는 4.7×100 을 계산하여 답으로 제시한 경우로 29명(18.35%)의 답안이 이 유형에 해당하였다. 문항을 해결하지 못한 학생들에게서 가장 많이 나타난 답안 유형이었다. 이 학생들은 큰 비행기의 무게가 작은 비행기 무게의 100 배라는 정보를 활용하여 큰 비행기의 무게를 계산하였으나 자신들이 구한 무게의 단위는 't'이고 문제에서 요구하는 단위는 'kg'임을 고려하지 못했다(Figure 4의 '유형 E22의 예시' 참조). 또한 이 유형에 속한 29명 중 10명은 $4.7\times100=4700$ 으로 계산하였다. 이 학생들은 소수의 곱셈[5]에도 어려움을 겪고 있음을 알 수 있다.

세 번째 오답 유형인 유형 E23은 1 t 을 100 kg 으로 계산한 경우로 5명(3.16%)의 학생 답안에서 나타났다. 이 학생들은 두 무게 단위의 관계를 부정확하게 알고 있었다. 그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우(유형 E24)가 7명(4.43%)의 학생 답안에서 확인되었다. 6명(3.80%)의 답안만 무응답에 해당하여 많은 학생들이 이 문제를 해결하려고 시도한 것을 알 수 있다.

3. 원 넓이 문제(문항 3번)

이 문제는 원의 넓이를 구하는 방법을 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 학생들은 6학년 1학기 '원의 넓이' 단원에서 원주율, 원주, 원의 넓이를 학습한다(MOE, 2015c). 원과 관련하여 3학년 과정에서는 원의 구성 요소, 반지름과 지름의 관계를 학습하고, 6학년 과정에서는 측정과 관련된 원주, 원의 넓이 등을 학습한다. 원주와 원의 넓이를 구하는 방법은 중학교 과정에서 다루는 부채꼴의 넓이와 호의 길이, 원기둥 및 원뿔의 겉넓이와 부피를 계산하는 데 기초가 되는 내용이다.[6] 이 문항은 원이 직접적으로 주어진 것이 아니라 컴퍼스를 이용하여 원을 그리는 상황으로 제시되어 있기 때문에 문제해결을 위해서는 원의 반지름이 12 cm 임을 알아야 한다. 그리고 이 반지름을 이용하여 원의 넓이를 구할 수 있어야 한다.

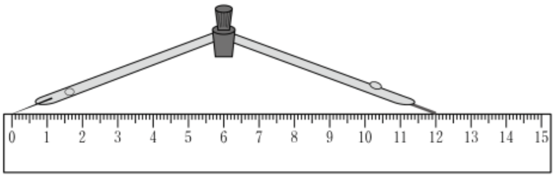
Table 5는 원 넓이 문제(문항 3번)에 대한 학생

---

5) Jin *et al.*(2016)의 연구에서 소수의 곱셈과 관련된 문항으로 '0.4×0.7'의 값을 구하는 선다형 문항에서 정답률이 62.32%에 그쳤다.

6) 2009 개정 수학과 교육과정에서 관련 학습내용 성취기준은 '부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있다.'와 '입체도형의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.'이다(MEST, 2011, p. 33).

3. 컴퍼스를 그림과 같이 12 cm 벌려 원을 그렸을 때, 원의 넓이는 몇 cm^2 입니까?(단, 원주율은 3으로 계산합니다.)



① 36 cm^2 ② 72 cm^2 ③ 108 cm^2 ④ 432 cm^2

Figure 5. Item 3 : Problem for circle's area

답안의 유형을 분류한 결과이다. 정답에 해당하는 유형은 1개(S31)이고 95명(60.13%)의 답안이 해당하였고, 오답에 해당하는 유형은 4개(E31, E32, E33, E34)로 55명(34.81%)의 답안이 해당하였으며, 무응답으로 분류된 경우가 8명(5.06%)이었다. 약 40%의 학생들이 주어진 상황에 적합한 원의 넓이를 구하는 데 어려움을 겪고 있었다.

정답인 유형 S31은 원의 넓이를 옳게 구한 경우로 95명(60.13%)의 답안이 이 유형에 해당하였다. 이 유형에 속한 학생들은 컴퍼스를 그림과 같이 벌려 원을 그리면 그 원의 반지름이 12 cm 임을 알고 $12\times12\times3$을 계산하여 원의 넓이 432 cm^2를 구하였다. Figure 6의 '유형 S31의 예시'에서 이와 같은 풀이과정을 확인할 수 있다.

문제해결에 성공하지 못한 답안은 4가지 유형으로 분류되었다. 첫 번째 오답 유형인 유형 E31은 원의 반지름을 6 cm 로 판단하고 $6\times6\times3$을 계산하여 원의 넓이를 구한 경우로 36명(22.78%)의 답안에서 확인되었다. 이 유형은 문제를 해결하지 못한 학생들에게서 가장 많이 나타난 답안 유형이었다. 이 유형에 속한 학생들은 원의 넓이를 구하는 방법 '(반지름)×(반지름)×(원주율)'은 알고 있었지만 주어진 문제 상황에서 반지름이 얼마인지 정확하게 찾지 못하였다(Figure 6에서 '유형 E31의 예시' 참조).

Table 5. Types of student's answers for item 3

유형	내 용	빈도(%)
S31	컴퍼스를 그림과 같이 12 cm 벌려 원을 그리면 반지름이 12 cm 인 원이 되므로 $12\times12\times3$을 계산하여 원의 넓이 432 cm^2를 구한 경우	95 (60.13)
E31	$6\times6\times3$을 계산하여 원의 넓이를 구한 경우	36 (22.78)
E32	문제에서 주어진 두 개의 숫자 12와 3을 곱한 경우(12×3, $3\times3\times12$)	11 (6.96)
E33	원주를 구한 경우($12\times2\times3=72$)	5 (3.16)
E34	그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우	3 (1.90)
무응답	모른다고 쓰거나 풀이과정이 백지인 경우	8 (5.06)
합 계		158 (100.00)

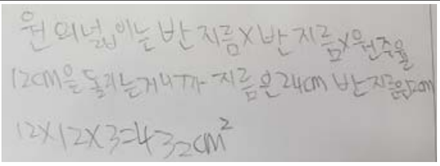
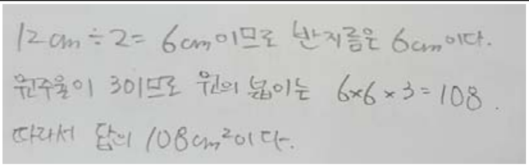
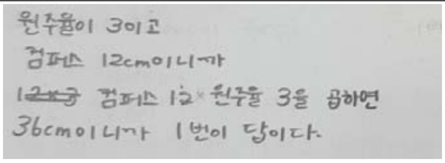
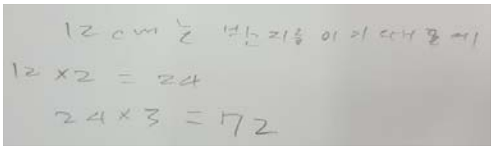
	
유형 S31의 예시	유형 E31의 예시
	
유형 E32의 예시	유형 E33의 예시

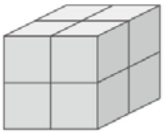
Figure 6. Examples of student's answers for item 3

두 번째 오답 유형인 유형 E32는 문항에 주어진 두 개의 숫자를 임의로 곱하여 답을 도출한 경우로 11명(6.96%)의 답안이 해당하였다. Figure 6에서 '유형 E32의 예시'와 같이 12×3을 제시한 학생이 10명이었고 $3\times3\times12$[7)]를 제시한 학생도 1명 있었다. 세 번째 오답 유형인 유형 E33은 원의 넓이가 아닌 원주를 구한 경우로 5명(3.16%)의 답안에서 나타났고, Figure 6의 '유형 E33의 예시'에서 이러한 풀이과정을 확인할 수 있다. 유형 E34는 그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우로 3명(1.90%)의 답안이 해당하였다. 유형 E32, E33, E34에 속하는 학생들은 원의 넓이를 구하는 방법을 정확하게 알지 못하였다. 무응답에 속하는 학생까지 포함하면 15% 남짓의 학생들은 원의 넓이를 구하는 방법을 이해하지 못하고 있었다.

4. 정육면체 겉넓이 문제(문항 4번)

이 문제는 정육면체의 겉넓이를 구하는 방법을 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 6학년 1학기 '직육면체의 겉넓이와 부피' 단원에서 여러 가지 방법으로 직육면체와 정육면체의 겉넓이와 부피를 구하는 방법, 부피의 단위를 다룬다(MOE, 2015c). 학생들은 5학년 과정에서 직육면체의 구성 요소, 전개도 등을 학습하고, 6학년 과정에서 직육면체를 구하는 방법으로 여섯 면의 넓이의 합으로 구하는 방법, 전개도를 이용하는 방법 등을 학습한다. 또한 정육면체는 여섯 면의 넓이가 모두 같으므로 한 면의 넓이를 6배하면 겉넓이를 구할 수 있음도 배운다. 이 문항은 '한 모서리가 $3\,\mathrm{cm}$인 쌓기나무 8개로 만든 정육면체'의 한 면의 넓이가 $36\,\mathrm{cm}^2$임을 이용하여 한 면의 넓이를 6배하면 정육면체의

4\. 한 모서리가 $3\,\mathrm{cm}$인 쌓기나무 8개로 만든 정육면체의 겉넓이는 몇 cm^2입니까?



답 : _______________ cm^2

Figure 7. Item 4 : Problem for cube's surface area

7) $3\times3\times12$를 계산하면 108이므로 유형 E31에 속한 답안의 계산 결과($6\times6\times3=108$)와 같지만, 이 답안은 (반지름)×(반지름)×(원주율)을 계산한 것이 아니므로 유형 E32로 분류하였다.

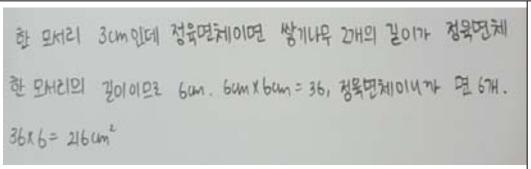
Table 6. Types of student's answers for item 4

유형	내 용	빈도(%)
S41	큰 정육면체의 한 면의 넓이는 36 cm^2 이므로 36×6을 계산하여 정육면체의 겉넓이 216 cm^2를 구한 경우	84 (53.16)
E41	큰 정육면체의 한 면의 넓이 36 cm^2 를 구하였으나, 면의 개수를 잘못 곱한 경우(36×3, 36×8, 36×24)	6 (3.80)
E42	한 모서리의 길이가 3 cm 인 작은 정육면체의 겉넓이를 이용한 경우 (3×3×6, 3×3×6×8)	9 (5.70)
E43	(가로)×(세로)×(높이)를 계산하여 부피를 구한 경우	6 (3.80)
E44	문제에서 주어진 두 개의 숫자 3과 8을 임의대로 곱한 경우 (3×8, 3×3×8, 3×8×8)	23 (14.56)
E45	그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우	19 (12.03)
무응답	모른다고 쓰거나 풀이과정이 백지인 경우	11 (6.96)
	합 계	158 (100.00)

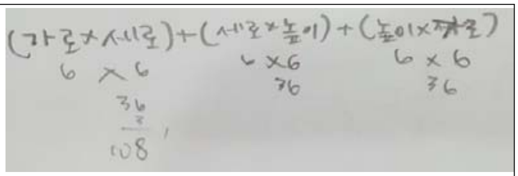
겉넓이 216 cm^2를 구할 수 있다.

Table 6은 정육면체 겉넓이 문제(문항 4번)에 대한 학생 답안의 유형을 분류한 결과이다. 정답에 해당하는 유형은 1개(S41)이고 84명(53.16%)의 답안이 이 유형에 해당하였고, 오답에 해당하는 유형은 5개(E41, E42, E43, E44, E45)로 63명(39.87%)의 답안이 해당하였으며, 무응답으로 분류된 경우가 11명(6.96%)이었다. 약 50%의 학생들이 주어진 상황에 적합한 정육면체의 겉넓이를 구하는 데 성공하지 못하였다.

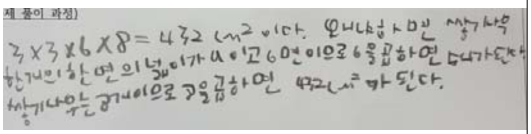
정답인 유형 S41에 해당하는 학생들은 큰 정육면체의 한 면의 넓이 36 cm^2를 구한 후, 한 면의 넓이를 6배하여 정육면체의 겉넓이 216 cm^2를 구하였다. 한 면의 넓이를 구하는 과정에서 학생들은 대체로 2가지의 문제해결 전략을 보였다. 하나는 큰 정육면체의 한 모서리의 길이가 6 cm 이므로 6×6을 계산하여 한 면의 넓이를 구하는 방법으로 Figure 8의 '유형 S41의 예시'가 이 경우에 해당



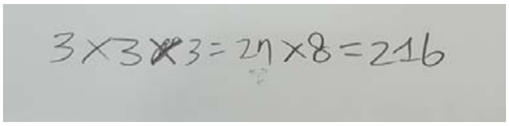
유형 S41의 예시



유형 E41의 예시



유형 E42의 예시



유형 E43의 예시

Figure 8. Examples of student's answers for item 4

한다. 다른 하나는 큰 정육면체의 한 면은 한 변의 길이가 3 cm인 작은 정사각형 4개로 이루어져 있으므로 작은 정사각형의 넓이 9 cm^2를 4배하여 36 cm^2를 구하는 전략이다.

문제해결에 실패한 답안은 5가지 유형으로 분류되었다. 먼저 유형 E41은 큰 정육면체의 한 면의 넓이 36 cm^2를 구했으나, 면의 개수를 잘못 곱한 경우로 6명(3.80%)의 답안에서 확인되었다. Figure 8의 '유형 E41의 예시'처럼 세 면의 넓이의 합을 구한 학생(3명)은 전개도를 이용하여 직육면체의 겉넓이를 구할 때 배운 방법대로 합동인 세 면의 넓이의 합을 구하였으나 이 값에 2배를 하지 않았을 가능성이 있다. 또한 한 면의 넓이를 구한 후 8배하여 겉넓이를 구하거나(2명) 24배하여 겉넓이를 구한 경우(1명)도 있었다. 두 번째 오답 유형인 유형 E42는 한 모서리의 길이가 3 cm인 작은 정육면체의 겉넓이를 이용한 경우로 9명(5.70%)의 답안에서 확인되었다. 이 중에서 6명의 학생들은 작은 정육면체의 겉넓이 $3\times3\times6$를 구하였다. 겉넓이를 구해야 하는 큰 정육면체는 한 모서리의 길이는 6 cm이지만, 이 학생들은 '한 모서리가 3 cm인 쌓기나무'에 주목하여 한 변의 길이가 3 cm인 정육면체의 겉넓이를 답으로 도출하였을 가능성이 크다. 일부 학생들은 작은 정육면체의 겉넓이를 구한 후 8배($3\times3\times6\times8$)를 하였다. Figure 8의 '유형 E42의 예시'를 보면 이 경우는 쌓기나무가 8개이므로 작은 정육면체의 겉넓이를 8배한 것이다.

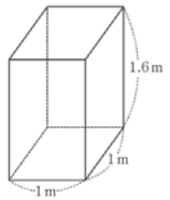
세 번째 오답 유형인 유형 E43은 (가로)×(세로)×(높이)를 계산하여 부피를 구한 경우로 6명(3.80%)의 답안에서 확인되었다. '작은 정육면체의 부피를 구한 경우($3\times3\times3$)', '작은 정육면체의 부피를 구하여 8배한 경우($3\times3\times3\times8$)', '(가로)×(세로)×(높이)를 직접 제시한 경우'를 이 유형으로 분류하였다. 이 유형에 속하는 학생들은 겉넓이를 구하는 방법과 부피를 구하는 방법을 혼동하고 있거나 문제를 주의 깊게 읽지 않고 답을 도출한 것으로 볼 수 있다. Figure 8의 '유형 E43의 예시'를 보면 이 학생은 작은 정육면체의 부피($3\times3\times3$)를 구한 후 8배하여 정육면체의 부피를 구하였다. 네 번째 오답 유형인 유형 E44는 문제에서 주어진 두 개의 숫자를 임의대로 곱하여 겉넓이를 구하는 경우로 23명(14.56%)의 답안에서 확인되었다. 이 문제에서 학생들이 가장 많이 보인 오류이고 다른 문제(문항 1번, 3번)에서도 확인된 바 있는 유형이다. 유형 E45는 그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우로 19명(12.03%)의 답안이 해당하였다. 유형 E44, E45, 무응답에 해당하는 답안이 약 30%에 이르렀다.

5. 직육면체 부피 문제(문항 5번)

이 문제는 부피를 이해하고, 부피 단위를 변환할 수 있는지 평가하는 문항이다. 이 문제와 관련된 직육면체의 부피, 부피 단위 등은 6학년 1학기 '직육면체의 겉넓이와 부피' 단원에서 다루어진다. 이 문제를 해결하기 위해서는 직육면체의 부피를 구하는 방법 (가로)×(세로)×(높이)를 알아야 하고, 부피 단위인 1 cm^3와 1 m^3의 관계를 이해하고 있어야 한다.

Table 7은 직육면체 부피 문제(문항 5번)에 대한 학생 답안의 유형을 분류한 결과이다. 정답에 해당

5. 다음 직육면체의 부피는 몇 cm^3입니까?



① 16000 cm^3 ② 160000 cm^3 ③ 1600000 cm^3 ④ 16000000 cm^3

Figure 9. Item 5 : Problem for cuboid's volume

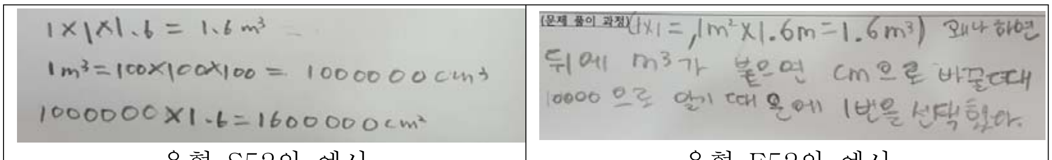
Table 7. Types of student's answers for item 5

유형	내 용	빈도(%)	
S51	길이 단위 'm'를 'cm'로 바꾼 후 $100\times100\times160$을 계산하여 부피 $1600000\ cm^3$를 구한 경우	76	(48.10)
S52	$1\times1\times1.6$을 계산하여 부피 $1.6\ m^3$를 구한 후 부피의 단위를 바꾼 경우	22	(13.92)
E51	$1\ m = 1000\ cm$로 계산한 경우	6	(3.80)
E52	부피 $1.6\ m^3$는 구했으나 부피 단위의 관계를 잘못 적용한 경우	15	(9.49)
E53	$1.6\times100\times100$을 계산한 경우	6	(3.80)
E54	그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우	15	(9.49)
무응답	모른다고 쓰거나 풀이과정이 백지인 경우	18	(11.39)
	합 계	158	(100.00)

하는 유형은 2개(S51, S52)이고 98명(62.03%)의 답안이 이 유형에 해당하였고, 오답에 해당하는 유형은 4개(E51, E52, E53, E54)로 42명(26.58%)의 답안이 해당하였으며, 무응답으로 분류된 경우가 18명(11.39%)이었다.

문제해결에 성공한 답안은 2가지 유형으로 분류되었다. 첫째, 유형 S51은 직육면체의 가로, 세로, 높이의 길이 단위 'm'를 'cm'로 바꾼 후 $100\times100\times160$을 계산하여 부피 $1600000\ cm^3$를 구한 경우로 76명(48.10%)의 답안이 해당하였다. 일부 학생들은 $1\times1\times1.6$을 계산하여 부피 $1.6m^3$를 구하였으나 부피 단위를 'cm^3'로 바꾸지 못하고 길이 단위를 바꾸어 부피를 다시 계산하는 학생들도 있었다. 둘째, 유형 S52는 $1\times1\times1.6$을 계산하여 부피 $1.6\ m^3$를 구한 후 부피의 단위를 바꾼 경우로 22명(13.92%)의 답안이 해당하였다. Figure 10의 '유형 S52의 답안 예시'에서와 같이 이 유형에 속한 학생들은 '$1\ m^3 = 1000000\ cm^3$'라는 부피 단위의 관계를 잘 이해하고 있었다.

문제해결을 시도했으나 성공하지 못한 답안은 4가지 유형으로 분류되었다. 먼저 유형 E51은 유형 S51과 같이 길이 단위를 바꾸는 방법을 시도하였으나 길이 단위의 관계를 '$1\ m = 1000\ cm$'로 잘못 적용한 경우이며 6명(3.80%)의 답안에서 확인되었다. 이 유형에 속한 학생들에게는 3학년 과정에서 학습한 길이 단위(mm, cm, km)의 관계를 다시 지도할 필요가 있다. 두 번째 오답 유형인 유형 E52는 $1\times1\times1.6$을 계산하여 직육면체의 부피 $1.6\ m^3$를 구하였으나 부피 단위의 관계를 잘못 적용한 경우로 15명(9.49%)의 답안이 해당하였다. 이 학생들은 부피 단위인 $1\ cm^3$와 $1\ m^3$의 관계를 정확하게 이해하지 못하고 있었다. 특히 Figure 10의 '유형 E52의 예시'처럼 '$1\ m^3 = 10000\ cm^3$'로 이해하고 있는 학생들이 많았다. 이 학생들은 부피 단위의 관계를 넓이 단위의 관계인 '$1\ m^2 = 10000\ cm^2$'와 혼동하고 있는 것으로 보인다. 세 번째 오답 유형인 유형



유형 S52의 예시 | 유형 E52의 예시

Figure 10. Examples of student's answers for item 5

E53은 부피를 구하기 위해 $1.6\times100\times100$을 계산한 경우로 6명(3.80%)의 답안에서 확인되었다. 이 답안을 작성한 학생들은 1 m는 100 cm로 바꾸었으나 1.6 m는 단위를 바꾸지 않고 부피를 계산하였다. 이 학생들은 넓이 또는 부피를 구할 때 길이 단위를 통일한 후 계산하여야 하나 이를 정확하게 이해하지 못하고 있었다. 유형 E51, E52, E53에 속한 학생들은 길이 단위 또는 부피 단위에 대한 이해가 낮다고 볼 수 있다. 유형 E54는 그 외의 타당하지 않은 논거를 제시한 경우로 15명(9.49%)이 해당하였고 무응답도 18명(11.39%)의 답안이 해당하였다.

V. 결론

본 연구에서는 2009 개정 교육과정의 핵심 성취기준을 근거로 Jin *et al.* (2016)의 연구에서 개발한 초등학교 5~6학년군 수학 검사지에서 5개의 문항을 선택하여 학생들이 풀이과정을 쓰도록 검사 도구를 구성하고, 초등학교 6학년 학생 158명의 문제해결 과정을 유형화하여 분석하였다. 이를 바탕으로 측정 영역에서 학생들의 성취기준 도달을 도울 수 있는 교수·학습에서의 시사점을 제안하고자 한다.

첫째, 학생들에게 문제를 해결할 수 있는 충분한 검사 시간을 제공하였으나 문항 2번을 제외한 문항에서의 정답률이 대체로 낮았다. 정답률은 1번(39.24%), 4번(53.16%), 3번(60.13%), 5번(62.03%), 2번(68.35%)의 순으로 낮게 나타났다. 한 개의 문항으로 해당하는 성취기준에 대한 학생들의 성취 정도를 충분히 가늠할 수는 없으나, 문제를 해결할 수 있는 충분한 시간을 학생들에게 제공했음에도 불구하고 풀이과정을 바르게 쓰지 못한 학생이 문항에 따라 약 30~60%에 이르렀다는 점은 학생들이 측정 영역의 일부에서 어려움을 겪고 있음을 시사한다.

Park *et al.* (2010)의 연구에서는 5학년 학생들을 대상으로 한 성취도 검사 결과에서 측정 영역(평면도형의 둘레와 넓이)에서 학생들의 성취가 낮음을 보고하였다. Song & Park(2005)의 연구에서도 측정 영역에서의 성취도가 교사들의 기대보다 낮았고, 특히 5학년 과정의 도형의 넓이와 둘레, 6학년 과정의 겉넓이와 부피에서 학생들의 성취가 낮은 것으로 나타났다. 본 연구의 결과도 이와 같은 선행 연구의 결과와 맥을 같이 한다. 측정 영역에 대한 이해가 낮은 원인 중 하나는 측정의 토대가 되는 개념에 대한 이해보다 측정의 절차에 초점을 맞추어 학습하기 때문이다(Oh, 2010). 학생들은 둘레, 넓이, 부피 등을 구하는 과정에서 관련된 여러 가지 공식을 사용한다. 그러나 공식이 도출된 원리, 의미 등에 대한 이해 없이 절차만 수행하는 경우 교육과정의 성취기준에 도달하는 데 어려움을 겪게 된다. 5~6학년군의 측정 영역에서 다루고 있는 삼각형의 넓이, 원의 넓이, 정육면체의 겉넓이, 직육면체의 부피 등과 관련된 개념에 대한 이해를 높이고 넓이 및 부피를 구하는 절차가 지닌 의미를 이해할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

둘째, 단위 변환과 관련된 문제에서 자신이 구한 단위를 점검하지 않는 경우, 단위 사이의 관계를 부정확하게 알고 있는 경우, 부피를 구할 때 길이 단위를 통일하지 않는 경우 등 측정 단위와 관련된 학생들의 오류가 나타났다. 직육면체 부피 문제(문항 5번)는 약 40%의 학생들이 문제를 바르게 해결하지 못하였고, 학생들의 답안에서는 유형 E51, E52, E53의 단위와 관련된 오류가 확인되었다. 유형 E51에서는 길이 단위 사이의 관계에 대한 오류($1\,\mathrm{m}=1000\,\mathrm{cm}$), 유형 E52에서는 부피 단위 사이의 관계에 대한 오류($1\,\mathrm{m}^3=10000\,\mathrm{cm}^3$)가 확인되었고, 유형 E53에서는 부피를 구할 때 길이 단위를 통일하지 않는 오류가 확인되었다. 비행기 무게 문제(문항 2번)는 정답률이 높았으나, 이 문제를 해결하지 못한 학생들 중 단위와 관련된 오류(유형 E22, 유형 E23)를 범하는 경우가 많았다. 유형 E22를 보면 학생들은 자신이 구한 무게의 단위는 ‘t’이고 문제에서 요구하는 무게 단위는 ‘kg’임에도 불구하고 자신이 구한 단위를 점검하지 않고 답으로 제시하였다. 유형 E23에서는 무게 단위 사이의 잘못된 이해($1\,\mathrm{t}=100\,\mathrm{kg}$)를 확인할 수 있었다.

Kang, Jeong & Roh(2014)의 연구에서 단위가 포함된 문제해결에서 학생들은 연산 결과가 의미하

는 바를 이해하는 데 어려움이 있음을 보고하였고, Song & Park(2005)에서도 부피와 넓이 단위의 혼동, 단위 사이의 관계에 대한 불충분한 이해 등이 측정 영역에서 학생들이 범하는 오류로 나타났다. 측정 영역에서 오류는 측정 단위에 대한 불충분한 이해에서 비롯되는 경향이 있음을 알 수 있다(Oh, 2010). 복잡한 단위의 환산은 지양해야 하지만, 실생활에서 많이 접하게 되는 무게, 길이, 넓이, 부피 등의 측정 단위에 대한 이해를 높이기 위한 노력이 필요하다.

셋째, 학생들은 삼각형에서 밑변이 정해지면 그에 따라 높이가 결정되고 이로부터 삼각형의 넓이를 구하는 여러 개의 식을 도출할 수 있다는 것에 대한 이해가 낮았다. 삼각형 넓이 문제(문항 1번)는 정답률이 39.24%로 가장 낮았고 무응답의 비율은 22.78%로 가장 높았다. 또한 주어진 숫자를 임의대로 연산한 유형 E13(13.92%)이 오답 유형 중 가장 큰 비율을 차지하였다. 이는 많은 학생들이 이 문제를 해결하기 위한 실마리를 찾지 못해 풀이과정을 전혀 쓰지 못하거나 문제에서 주어진 숫자를 마음대로 연산하여 답으로 제시하였음을 보여준다.

Jeong & Yim(2011)은 직사각형, 평행사변형에 비해 삼각형의 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 학생들의 이해가 부족함을 지적한 바 있고, Song & Park(2005)의 연구에서도 학생들이 삼각형의 높이가 내부에 있는 경우와 외부에 있는 경우 넓이를 구하는 방법이 동일하다는 것을 제대로 이해하지 못함을 보고하였다. 삼각형에서 세 변 각각을 밑변으로 선택하고 그 때의 높이를 측정하는 활동으로 삼각형의 넓이에 대한 학생들의 이해를 높일 수 있을 것이다(Paek, 2016). 삼각형의 밑변은 정해져 있는 것이 아니라 세 변이 모두 밑변이 될 수 있고 밑변이 정해짐에 따라 높이가 결정된다는 밑변과 높이의 관계에 대한 학생들의 이해를 제고할 필요가 있다. 또한 어느 변을 밑변으로 하더라도 삼각형의 넓이가 일정함을 확인할 수 있는 활동도 넓이에 대한 학생들의 이해를 높이는 데 도움이 될 것이다. 특히 둔각삼각형의 경우 교수·학습 상황에서 이러한 활동이 더욱 필요할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Choe, S. (2007) *The research on pedagogical content knowledge mathematics teaching* (RRI 2007-3-2). Seoul: Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

Fiori, C., & Zuccheri, L. (2005). An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 323-331.

Hong, M., Park, S., Baek, K., Byun, H., Yang, Y., Yang, J., Lee, K., Lee, M., & Han, H. (2012). *Research and development of achievement standards and achievement levels based on the national curriculum revised in 2009 - Ananalysis of the national curriculum and development of achievement standards* (CRC 2012-1). Seoul: Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

Jeong, G., & Yim, J. (2011). Children's understanding of relations in the formulas for the area of rectangle, parallelogram, and triangle. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 21*(2), 181-199.

Jin, K., Kim, S., Choi, Y., Kang, T., & Kim, D. (2015). *Monitering elementary school students' completion of Korean language, mathematics and English curriculum and enhancing students' learning for normalization of public education(Ⅰ)* (RRI 2015-7). Seoul: Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

Jin, K., Kim, S., Choi, Y., & Kang, T. (2016).

M*onitering elementary school students' completion of Korean language, mathematics and English curriculum and enhancing students' learning for normalization of public education(Ⅱ)* (RRI 2016-8). Seoul: Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

Ju, Y., & Kim, S. (2009). A Study of underachieving students' error factors and teaching methods in measurement domain. *Journal of Research in Curriculum & Instruction, 13*(4), 717-736.

Kang, H., & Choi, E. (2015). Elementary mathematically gifted students' understanding of Pi. *Communications of Mathematical Education, 29*(1), 91-110.

Kang, J., Jeong, S., & Roh, E. (2014). Didactic transposition about unit usage to help recognize meaning of calculation results. *Education of Primary School Mathematics, 17*(3), 231-251.

Kim, B. (2004). Cognitive psychological approaches on analysing students' mathematical errors. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 14*(3), 239-266.

Kim, B. (2005). Cognitive psychological approaches for classification of students' mathematical errors on the basis of experiential structuralism. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 15*(4), 461-488.

Kim, J., & Kim, A. (2011). Analysis and comparison on measurement characteristics for elementary students with and without mathematics difficulties. *The Journal of Special Education : Theory and Practice, 12*(4), 235-268.

Kim, M., & Kang, W. (2008). An analysis on the repeated error patterns in division of fraction by elementary students. *Education of Primary School Mathematics, 11*(1), 1-19.

Kim, S. (2003). A Study on developing the teachers' guide book for diagnosis and prescription of students' mathematical errors. *School Mathematics, 5*(2), 209-221.

Kim, S. (2012). The transition of error patterns and error rates in elementary students' arithmetic performance by going up grades and its instructional implication. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 16*(1), 125-143.

Kim, Y., & Pang, J. (2017). Research trends in elementary mathematics education: focused on the papers published in domestic journals during the resent seven years. *Education of Primary School Mathematics, 20*(1), 19-36.

Ko, J. (2012). Review of the unit on the mixed calculations in the 4th grade. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 22*(4), 477-494.

Kwon, J., & Choi, J. (2008). An analysis of trends in elementary mathematics education research -Focussing on mathematics education journals in Korea-. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 12*(2), 149-163.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education, 41*(3), 3-11.

Ministry of Education [MOE]. (2015a). *Mathematics 5-1.* Seoul: Chunjaeeduation.

Ministry of Education [MOE]. (2015b). *Mathematics 5-2.* Seoul: Chunjaeeduation.

Ministry of Education [MOE]. (2015c). *Mathematics 6-1.* Seoul: Chunjaeeduation.

Ministry of Education [MOE]. (2015d). *Mathematics Work Book 5-1.* Seoul: Chunjaeeduation.

Ministry of Education, Science, and Technology [MEST]. (2011). *Curriculum of Mathematics.* Ministry of Education Notice No. 2011-361 [Separate Book 8]. Seoul, Korea: Author.

Moon, B., & Lee, D. (2014). An analysis on the students' understanding in concept and operations of decimal fraction. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 18*(2), 237-255.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Mun, H., & Kim. Y. (2011). An analysis of errors in problem solving of the function unit in the first grade highschool. *Journal of the Korean School Mathematics, 14*(3), 277-293.

Na, G. (2012). Examining students' conceptions about the area of geometric figures. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 16*(3), 451-469.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Oh, Y. (2010). Rethinking about teaching area measurement in the elementary grades-focused on the 2007 revised curriculum of mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 21*(1), 233-245.

Paek, D. (2016). An analysis on the concept and measuring activities of the height of figures in elementary school mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics, 19*(2), 113-125.

Park, S., Jeon, Y., Eum, N., & Chae, S. (2010). The relationship between of 5th grade elementary school students' preferences and mathematics achievement. *The Journal of Elementary Special Education, 12*(1), 97-120.

Schleppenbach, M., Flevares, L. M., Sims, L. M., & Perry, M. (2007). Teachers' responses to student mistakes in Chinese and U.S. mathematics classrooms. *The Elementary School Journal, 108*(2), 131-147.

Seok, K., & Paik, S. (2004). An analysis of errors on the process of word problem solving in the elementary mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 8*(2), 147-168.

Song, M., & Park, j. (2005). An analysis of mathematics learning achievements of elementary students in measurement. *The Research of Science Education, 28,* 39-58.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 49-70.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172.

Reihl, S. M. & Steinthorsdottir, O. B. (2014). While students are solving a proportion problem, their work in a measure space will enable teachers to take the measure of their thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(4), 221-228.

국 문 요 약

본 연구는 측정 영역의 문제해결 과정에서 나타나는 초등학교 6학년 학생의 오류를 분석하였다. 초등 5~6학년군의 내용에서 학생들이 어려워하는 부분에 대한 오류를 분석함으로써 학생들의 성취기준 도달을 도울 수 있는 교수·학습에서의 시사점을 도출하고자 하였다. 첫째, 문제를 해결할 수 있는 충분한 시간을 학생들에게 제공했음에도 불구하고 풀이과정을 바르게 쓰지 못한 학생이 문항에 따라 약 30~60%에 이르렀다는 점은 학생들이 측정 영역의 일부에서 어려움을 겪고 있음을 시사한다. 둘째, 단위 사이의 관계에 대한 불충분한 이해 등 측정 단위에 대한 학생들의 이해가 낮은 것을 확인하였다. 셋째, 학생들은 삼각형에서 밑변이 정해지면 그에 따라 높이가 결정되고 이로부터 삼각형의 넓이를 구하는 여러 개의 식을 도출할 수 있다는 것에 대한 이해가 낮은 것으로 나타났다.

주제어: 측정 영역, 오류, 초등 수학, 문제해결