Journal for History of Mathematics
Vol. 30 No. 6 (Dec. 2017), 353–365
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.6.353

On the Summability of Infinite Series and Hüseyin Bor

무한급수의 총합 가능성과 후세인 보르에 관하여

Lee Jung Oh 이정오

In general, there is summability among the mathematical tools that are the criterion for the convergence of infinite series. Many authors have studied on the summability of infinite series, the summability of Fourier series and the summability factors. Especially, Hüseyin Bor had published his important results on these topics from the beginning of 1980 to the end of 1990. In this paper, we investigate the minor academic genealogy of teachers and pupils from Fourier to Hüseyin Bor in section 2. We introduce the Hüseyin Bor's major results of the summability for infinite series from 1983 to 1997 in section 3. In conclusion, we summarize his research characteristics and significance on the summability of infinite series. Also, we present the diagrams of Hüseyin Bor's minor academic genealogy from Fourier to Hüseyin Bor and minor research lineage on the summability of infinite series.

Keywords: Summability of infinite series, summability of Fourier series, summability factor, absolute summability; 무한급수의 총합 가능성 , 푸리에 급수의 총합 가능성, 총합 가능성 인자, 절대 총합 가능성.

MSC: 42A20, 42A32

1 서론

터키 중부에 위치한 카이세리(Kayseri) 공항에서 맞은 편을 바라보면 대규모 기암 지대인 카파도키아(Kapadokia) 지역 중앙에 솟아있는 만년 설산 에르시예스(Erciyes) 산을 보게 된다. 이 산 이름을 붙인 예르지에스 대학(Erciyes University)에 2011년 퇴직 후에도 현재 활발한 연구와 권위있는 여러 저널의 편집위원으로 활동 중인 후세인 보르가 있다. 그는 무한급수와 푸리에 급수의 총합 가능성 인자와 총합 가능성 방법에 관한 방대한 연구를 주도해 오고 있다. 총합 가능성의 수학적 이론은 공학의 정보통신 분야와 물리학 분야 등에서 주로 활용되고 있다. 즉 입력신호를 영상신호 혹은 음성신호로 복원하는 데

Lee Jung Oh: Dept. of Liberal Arts, Chosun College of Science and Technology
E-mail: jolee@cst.ac.kr
Received on Aug. 23, 2017, revised on Dec. 18, 2017, accepted on Dec. 28, 2017.

체사로 총합 가능성(Cesàro summability)의 변환이 이론적으로 사용된다. 그리고 물리학의 조절이론에서 무한 값의 무한 정도를 유한 값으로 정의하는 양자장론 특정 조절기(regulator)를 표현하는 데 총합 가능성의 수학적 이론이 필요하다. 먼저 무한급수의 총합 가능성을 논하는 데 필요한 몇 가지 정의를 소개한다.

주어진 수열 $\{a_n\}$의 무한급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

의 부분합

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

에 대한 부분합 수열 $\{s_n\}$으로 생각하자. 이때 부분합 s_n에 대한 산술평균의 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = A$$

이 존재하면 급수 (1)을 체사로 총합 가능 혹은 $(C, 1)$ 총합 가능이라 한다. 급수 (1)의 n번째 체사로 평균 σ_n을 부분합 수열 $\{s_n\}$의 산술평균

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n+1}$$

으로 정의하자. $k \geq 1$ 일 때 만약

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\Delta\sigma_{n-1}|^k < \infty \tag{2}$$

이면 (1)을 $|C, 1|_k$ 총합 가능이라 한다. 또한 $u_n = na_n$인 수열 $\{u_n\}$의 n-번째 체사로 평균을 t_n으로 표현하면

$$t_n = n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = n(\Delta\sigma_{n-1}) \tag{3}$$

이므로 결국 (2)는

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n|^k}{n} < \infty$$

로 표현할 수 있다. 그리고 $k \geq 1, \gamma \geq 0$ 일 때 무한 급수를 주로 연구한 에르번 코그비츠앙스(Ervand G. Kogbetliantz)[1)] 에 의하여 정의된 조건

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma k + k - 1} |\Delta\sigma_{n-1}|^k < \infty \tag{4}$$

은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n|^{k\gamma + k}}{n} < \infty \tag{5}$$

1) Sur les séeries absolument sommables par la méethode des moyennes arithméetiques, *Bull. Sei. Math.* 9 (1925), 234–256.

로 표현된다. 따라서 급수 (1) 이 (4) 와 (5) 중 하나를 만족하면 급수 (1) 을 $|C, 1, \gamma|_k$ 총합 가능이라 한다. 반면 수열 $\{s_n\}$ 의 α 차 n-번째 체사로 평균을 σ_n^α 로 나타내고 $\alpha > -1, k \geq 1$ 일 때 만약

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| < \infty$$

이면 급수 (1) 이 $|C, \alpha|_k$ 총합 가능이라고 한다.

한편 양의 실수 상수 수열 $\{p_n\}$[2)] 이

$$P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \to \infty, \quad n \to \infty \tag{6}$$

을 만족시킨다고 하자. 그러면 수렴 속도를 향상 시키기 위해 사용되는 수열-수열 변환을 통해, 계수 수열 $\{p_n\}$ 에 의해 생성된 수열

$$T_n = P_n{}^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \tag{7}$$

을 수열 $\{s_n\}$ 의 $(\bar{N}, p_n)$ 평균 또는 리즈 평균 (Riesz means) 이라 한다. 그리고 급수 (1) 이

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k < \infty \tag{8}$$

을 만족하면 급수 (1) 을 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능이라 한다. 또한

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Delta T_{n-1}|^k < \infty \tag{9}$$

을 만족하면 급수 (1) 을 $|\bar{N}, p_n; \gamma|_k$ 총합 가능이라 한다. 여기서 $k \geq 1, \gamma \geq 0$ 이다. 수열 $\{s_n\}$ 의 리즈 평균 (7) 에서 수열 $\{T_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k < \infty \tag{10}$$

을 만족하면 급수 (1) 을 $|R, p_n|_k$ 총합 가능이라 한다. 단 $k \geq 1$ 이고

$$\Delta T_{n-1} = T_n - T_{n-1}$$

이다. 그리고 급수 (1) 의 합을 S 라고 할 때 만약 (7) 의 T_n 이

$$\lim_{n \to \infty} T_n = S$$

을 만족하면 급수 (1) 을 (N, p_n) 총합 가능이라 한다. 또한 만약

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_n |s_\nu|^k = O(P_n), \quad n \to \infty \tag{11}$$

을 만족하면 급수 (1) 을 유계된 $[\bar{N}, p_n]_k$ 이라 한다.

한편 임의의 수열 $\{b_n\}$ 이 모든 양의 정수 n 에 대하여

$$\varDelta^2 b_n \geq 0, \quad (\varDelta^2 b_n = \varDelta b_n - \varDelta b_{n-1}) \tag{12}$$

2) G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford University Press, Oxford, 1949.

을 만족할 때 이 수열 $\{b_n\}$ 을 볼록(convex)이라고 한다. 주어진 양의 수열 $\{b_n\}$ 이 만약 $\alpha \geq 0$ 이고 수열

$$\left\{ \frac{b_n}{n^\alpha} \right\}$$

이 증가하지 않으면 수열 $\{b_n\}$ 을 준단조(quasi monotone)라 한다. 또한 임의의 양의 수열 $\{\delta_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이

$$b_n \to 0, \quad 0 < b_n, \quad -\delta_n \leq \Delta b_n \tag{13}$$

을 만족하면 수열 $\{b_n\}$ 을 δ-준단조라 한다.

2 푸리에부터 후세인 보르까지의 학문 소 계보

이 절에서는 1807년 푸리에부터 1982년 후세인 보르까지 약 170년 동안 학문적으로 이어진 스승과 제자 관계의 소 계보를 살펴본다. 먼저 푸리에(Jean-Baptiste Joseph Fourier)는 프랑스 에콜 노르말 쉬페리외르(École Normale Supérieure)라는 고등사범학교에서 스승 라그랑주, 라플라스 그리고 몽주의 지도를 받아 1807년 '고체에서 열의 전도에 관한 소고' 라는 연구 논문을 완성한다. 푸리에는 스승 라그랑주로부터 가장 많은 영향을 받는다. 푸리에 후학은 약 56,978명[3)]이고 2명의 제자가 있었는데 그 중 한 명이 디리클레(Gustav Peter Lejeune Dirichlet)이다. 디리클레는 프랑스에서 푸리에와 포아송(Siméon Denis Poisson)으로부터 가르침을 받아 '페르마(Pierre Fermat)의 마지막 정리에 관한 지수 5의 부분적 결과'[4)] 를 연구하여 독일로 돌아와 본(Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn) 대학에서 1827년 학위를 받는다. 디리클레의 제자 중 리프시츠(Rudolf Otto Sigismund Lipschitz)는 1853년 독일 베를린 대학(Universität Berlin)에서 '타원체로 이동하는 자기력 상태 결정'[5)] 연구로 학위를 받는다. 한편 클라인(Christian Felix Klein)은 리프시츠의 유일한 제자였다. 그는 1868년 본 대학에서 '선 좌표와 표준 형식 간의 2차 일반 방정식 변환에 대하여'[6)]를 연구하여 학위를 받는다. 그는 63명의 제자를 두었고 그중 칼 린데만(Carl Louis Ferdinand von Lindemann)은 1873년 독일 뉘른베르크 대학(Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)에서 '일반적인 투영 측정을 이용한 무한히 작은 운동 및 힘 시스템에 대하여'[7)] 연구로 학위를 받는다. 린데만의 제자 중 페론(Oskar Perron)은 1902년 독일 뮌헨 대학(Ludwig-Maximilians-Universität München)에서 '외

3) Mathematics Genealogy Project, Department of Mathematics North Dakota State University.
4) Partial Results on Fermat's Last Theorem, Exponent 5.
5) Determinatio status magnetici viribus inducentibus commoti in ellipsoide.
6) Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien Koordinaten auf eine kanonische Form.
7) Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung.

력 작용에 의한 중력 중심에 어떤 강체의 회전에 관하여'[8] 라는 연구로 학위를 받는다. 그의 제자 버키 유엇서버 (Berki Yurtsever) 는 1941 년 뮌헨 대학에서 '무한급수에 의한 편미분 방정식의 해법'[9] 으로 학위를 받고 터키 앙카라 대학 (Ankara University) 으로 돌아와 그의 유일한 제자 후세인 보르 (Hüseyin Bor) 를 지도한다. 후세인 보르는 1982 년 '절대 총합 가능성 방법과 및 총합 가능성 인자들'[10] 연구로 앙카라 대학에서 학위를 받는다. 이후 후세인 보르는 에르지예스 대학 (Erciyes Uiversity) 재직 후 주로 '무한급수의 총합 가능성', '푸리에 급수의 총합가능성' 그리고 '총합가능한 인자들' 에 관한 연구로 세계적 주목을 받는다.

3 1983 년부터 1997 년까지 후세인 보르의 연구 내용

본 절에서는 1983 년부터 약 15 년 동안에 이뤄진 그의 연구를 중심으로 살펴본다. 후세인 보르는 1982 년 학위를 받고 영국 버밍엄 대학 (University of Birminghman) 에서 1985 년까지 포스닥 (Post Doct) 연구를 진행하는 동안 '무한급수의 총합 가능성' 등에 관한 총 15 편의 연구논문을 발표하여 주위 사람들을 놀라게 한다. 먼저 1983 년 '무한급수의 절대 총합 가능성 인자들' [17] 과 '무한 급수에 관한 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성 인자들에 대한 주석' [1] 을 소개한다. 이후 그는 1985 년 '$|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성 인자들에 관하여' [12] 를 발표한다. 이 연구는 씽 (T. Singh) 이 1978 년 소개한 $|\bar{N}, p_n|$ 총합 가능성 인자들[11] 에 대한 연구를 더 일반화한 것이다. 물론 만약 $k = 1$ 이면 씽의 주 정리와 후세인 보르의 [12] 의 주 정리는 같게 된다. 또한 이 정리에서 후세인 보르는 $\mu \to \infty$ 일 때 $P_\mu |b_\mu| = O(1)$ 임을 이용하여 $k \geq 1$ 조건과 급수 (1) 이 조건 (11) 를 만족하는 유계된 $[\bar{N}, p_n]_k$ 일 때 수열 $\{b_n\}$ 과 (6) 의 $\{p_n\}$ 이 두 식

$$\sum_{n=1}^{\mu} p_n |b_n| = O(1),$$

$$P_\mu |\Delta b_\mu| = O(p_\mu |b_\mu|)$$

을 만족하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n b_n$ 이 (8) 을 만족하는 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능함을 보인다. 한편 일반적으로 $p_n \neq 1$ 일 때 적어도 $n \in N$ 이면 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성과 $|C, 1|_k$ 총합 가능성이 서로 독립적이라고 알려져 있으나 그는 1986 년 '두 가지 총합 가능성 방법에 대한 주석' [2] 에서 무한급수 (1) 이 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능이면 또한 $|C, 1|_k$ 총합 가능임을 보인다. 결과적으로 1986 년 논문의 정리는 1985 년 '두 가지 총합 가능성 방법에 관하여' [16]) 의 역정리가 된다. 즉 1985 년 논문의 정리에서 수열 $\{p_n\}$ 이 두 식

$$np_n = O(P_n), \tag{14}$$

$$P_n = O(np_n) \tag{15}$$

---

8) Über die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt bei Wirkung äußerer Kräfte.
9) Lösung einer partiellen Differentialgleichung durch unendliche Reihen.
10) Absolute Summability Methods and Summability Factors.
11) A note on $|\bar{N}, p_n|$ summability factors for infinite series, 3. *Math. Soc.* (12–13) (1977–78), 25–28.

을 만족할 때 무한급수 (1) 이 '$|C,1|_k$ 총합 가능이면 또한 $|\bar{N},p_n|_k$ 총합 가능함' 을 보인다. 이어서 1988년 그는 '무한급수의 $|\bar{N},p_n|$ 총합 가능성 인자들에 관하여' [15] 라는 연구에서 첸 (Ming-Po Chen) 이 1967년 제시한 정리[12] 를 보다 더 일반화된 정리로 확장하여 소개한다. 첸은 $\{p_n\}$ 이 증가하지 않는 양의 수열이고 $P_n \to \infty$ 일 때 만약 $\{b_n\}$ 이 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$ 을 만족하는 (12) 의 볼록(convex) 수열이고, 또한 두 식

$$\frac{1}{n} = O(p_n),$$

$$\Delta\left(\frac{1}{p_n}\right) = O(1), \quad n \to \infty$$

을 만족하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \tag{16}$$

이 $|\bar{N},p_n|$ 총합 가능임을 보인다. 반면 후세인 보르는 1988년 논문에서 $\{p_n\}$ 이 양의 수열이고 $n \to \infty$ 일 때 $|\Delta b_n| \le c_n$ 과 $c_n \to 0$ 그리고

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n |\Delta c_n| < \infty$$

이고 $P_n|b_n| = O(1)$ 을 만족하는 수열 $\{b_n\}$ 과 $\{c_n\}$ 을 전제한 뒤, 두 조건

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P_n |\Delta c_n| < \infty, \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P_n |\Delta^2 b_n| < \infty \tag{18}$$

에 대하여 조건 (17) 이 조건 (18) 보다 더 약한 조건임을 이용하여 급수 (16) 이 $|\bar{N},p_n|$ 총합 가능임을 다시 보인다. 한편 1980년 말부터 후세인 보르는 무한급수의 총합 가능성에서 푸리에 급수의 총합 가능성으로 연구 방향을 더 확대하는데 1989년에 그는 '인자로 된 푸리에 급수의 $|\bar{N},p_n|_k$ 총합 가능인 국부적 성질' [5] 과 '푸리에 급수의 $|\bar{N},p_n|_k$ 총합 가능성에 관한 승수들' [6] 에 관한 결과를 거듭 발표한다. 또한 그는 1991년 한 해에 무려 11편의 연구결과를 소개하면서 주로 기존 연구들을 더 일반화한 결과를 발표한다. 1991년 그는 '무한급수의 $|\bar{N},p_n|_k$ 총합 가능성에 대한 인자들' [4] 에서 술레이만 (W. T. Sulaiman) 의 정리[13] 를 일반화하여 소개한다. 즉 $n \ge 0$ 이고 복소 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 의 부분합 수열이 $\{s_n\}$ 일 때

$$s_n = O(d_n), \quad n \to \infty$$

을 만족하는 양의 수열 $\{d_n\}$ 에 대해 만약 복소 수열 $\{\alpha_n\}$ 이

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p_n}{P_n}\right) (|\alpha_n| d_n)^k < \infty$$

12) On $|\bar{N},p_n|$ summability factors of infinite series, *Math. Res. Center, National Taiwan Univ. Hung-Ching Chow*, 65 (1967), 114–120.

13) Multipliers for $|C,1|$ summability of Jacobi series, *Indian J. Pure Äppl. Math.*, 18 (1987), 1121–1130.

와

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n|\Delta\alpha_n| < \infty$$

를 만족하면 $k \geq 1$ 일 때 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\alpha_n$$

이 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능함을 보인다. 특히 여기서 모든 n 에 대하여 $p_n = 1$ 이고 $k = 1$ 이면 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성은 $|C, 1|_k$ 총합 가능성이 된다. 계속해서 같은 해 그는 '두 절대 총합 가능성 방법의 상대적 강점에 관하여' [14] 에서 기존 보잰킷 (L. S. Bosanquet)[14] 의 결과를 다시 일반화하여 소개한다. 먼저 보잰킷은 $p_n > 0, q_n > 0$ 일 때 (6) 의 P_n 과 Q_n 이

$$Q_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n = \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu \to \infty, \quad n \to \infty \tag{19}$$

을 만족하고 $k = 1$ 일 때 (10) 을 만족하는 $|R, p_n|_k$ 에 대해 $|R, p_n|_k$ 이면 $|R, q_n|_k$ 이 되는 필요충분조건이

$$\frac{q_n P_n}{p_n Q_n} = O(1)$$

임을 보였다. 이 결과를 다시 후세인 보르는 $k > 1$ 일 때 무한급수 (1) 의 (R, p_n) 변환을 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 로 표현하고 (1) 의 (R, q_n) 변환을 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ 로 각각 표현하여 증명한다. 여기서 임의의 무한 급수에 대한 총합 가능성 방법 A가 다른 총합 가능성 방법 B 보다 더 강하다는 의미는 방법 A에 의한 총합 가능성이 곧 방법 B의 총합 가능성임을 함축하고 있다. 이어서 1993년 그는 '절대 총합 가능성 인자들에 관하여' [9] 에서 인도 알리거 무슬림 대학 (Aligarh Muslim University) 마자르 (S.M. Mazhar) 의 1972년 연구[15] 를 일반화한 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성 인자들에 대한 결과를 내놓는다. 또한 1994년 그의 '무한급수의 절대 총합 가능성 인자들에 관하여' [8] 에서 (13) 의 δ-준단조에 대한 연구[16] 결과를 (9) 의 $|\bar{N}, p_n; \gamma|_k$ 총합 가능성을 이용하여 일반화한다. 즉 1994년 논문에서 기존 연구보다 더 일반화된 두 식

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\gamma k-1} \frac{1}{P_{n-1}} = O\left(\left(\frac{P_\nu}{p_\nu}\right)^{\gamma k} \frac{1}{P_\nu}\right), \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{\mu} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\gamma k-1} |t_n|^k = O(V_\mu) \quad \mu \to \infty \tag{21}$$

을 이용하여 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_n \tag{22}$$

이 $|\bar{N}, p_n; \gamma|_k$ 총합 가능성함을 보인다. 여기서 $\lambda_n \to 0$ 이고 $V_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{p_\nu}{P_\nu}$ 이다. 한편 이듬해인 1995년 그는 터키 파묵칼레 (Pamukkale) 대학 세리골 (M.A. Sarigol) 과 공동연구를

14) MathSciNet Google Scholar *MR 11* (1950), 654.

15) On $|C, 1|_k$ summability factors ofinfinite series, *Indian J. Math.* 14 (1972), 45-48.

16) On quasi-monotone sequences and their applications, *Bull. Aust. Math. Soc.* 43 (1991) 187–192.

통해 '절대 총합 가능성 인자들의 특성화' [3]를 발표하였다. 그들은 먼저 A와 B가 총합 가능성 방법일 때 (1)이 A 총합 가능일 때는 언제든지 (22)가 B 총합 가능한 모든 수열 $\lambda = \{\lambda_n\}$의 집합 (A, B)로 표현되고 λ가 (A, B)의 총합 가능성 인자임을 $\lambda \in (A, B)$로 정의한다. 일반적으로 $|\bar{N}, p_n|$ 총합 가능성과 $|\bar{N}, q_n|_k$ 총합 가능성은 서로 독립적인데 특별한 경우인 $k = 1$일 때 $|\bar{N}, p_n|$ 총합 가능성과 $|\bar{N}, q_n|_k$ 총합 가능성이 같다. 한편 [3]에서 그들은 $1 \le k < \infty$일 때

$$(|\bar{N}, p_n|, |\bar{N}, q_n|_k) \tag{23}$$

과

$$(|\bar{N}, p_n|_k, |\bar{N}, q_n|)$$

인 형태의 총합 가능성 인자들에 대한 연구결과를 동치조건으로 각각 제시한다. (23)에 관한 정리는 $n \to \infty$일 때

$$\lambda \in (|\bar{N}, p_n|, |\bar{N}, q_n|_k)$$

일 필요충분조건이

$$(i) \quad \lambda_n = O(1)$$

$$(ii) \quad \Delta\lambda_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$$

$$(iii) \quad \lambda_n = O\left(\left(\frac{p_n}{P_n}\right)\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

임을 보인다. 단, 여기서 Q_n는 식 (19)를 만족한다. 그리고 후세인 보르는 1997년 '무한급수의 $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ 총합 가능성 인자들에 관하여' [11]에서 (9)를 만족하는 $|\bar{N}, p_n; \gamma|_k$에 대한 그의 1996년 연구 '$|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성 인자들에 관하여' [10]를 더 일반화하였다. 그는 1996년 논문의

$$\sum_{n=1}^{\mu} \frac{p_n}{P_n}|t_n|^k = O(V_\mu) \quad \mu \to \infty$$

을 (20)에서 $n = \nu + 1$로 하고

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\gamma k - 1} \frac{1}{P_{n-1}} = O\left(\left(\frac{P_\nu}{p_\nu}\right)^{\gamma k} \frac{1}{P_\nu}\right)$$

과 (21)을 이용하여 급수 (22)가 $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ 총합 가능함을 보인다. 여기서 $0 \le \delta < \frac{1}{k}$이고

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu$$

이며 $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ 총합 가능성과 $|\bar{N}, p_n; \gamma|_k$ 총합 가능성은 같다. 한편 그는 1997년 '인자로 된 푸리에 급수의 국부적 성질에 관하여' [13]와 1998년 '무한급수와 푸리에 급수의 절대 체사로 총합 가능성에 관하여' [7]에서 푸리에 급수의 총합 가능성에 관한 연구결과를 발표하였다.

4 결론 : 무한급수의 총합 가능성에 관한 후세인 보르의 연구 의의와 특징

총합 가능성에 대한 연구는 오일러 (Leonhard Euler), 아벨 (Niels Henrik Abel), 리만 (Georg Friedrich Bernhard Riemann) 과 노르눈트 (Niels Erik Nörlund) 등에 의해 다양하게 소개되어 왔다. 이어서 체사로 (Ernesto Cesàro) 가 1890년 무한급수의 부분합들을 산술평균의 극한으로 정의한 체사로 총합 가능성 (Cesàro summability) 을 발표한 이후 페예르 (Lipót Fejér)[17] 와 르베그 (Henri Léon Lebesgue)[18] 그리고 보렐 (Émile Borel)[19] 등의 연구를 포함하여 총합 가능성 연구는 200년 이상의 역사를 가지고 있다. 후세인 보르는 1983년부터 1997년 사이에 '총합 가능성 방법' 과 '총합 가능성 인자들' 등에 관한 연구를 통해 무려 약 90편의 논문을 발표했다. 이 시기에 후세인 보르의 연구의 특징 중 단연 돋보인 두 정리 [2, 16] 는 $n \to \infty$ 일 때 (6) 의 $\{p_n\}$ 이 두 식 (14) 와 (15) 를 만족하고 급수 (1) 이 $|C, 1|_k$ 총합 가능이면 또한 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능함을 보이고 이 정리의 역정리인 급수 (1) 이 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능이면 역시 $|C, 1|_k$ 총합 가능함을 보였다. 이때 $k \geq 1$ 이다. 그리고 이 두 정리들은 결국 다음과 같이 확장된다. 수열 $\{p_n\}$ 이 두 식 (14) 와 (15) 그리고 식 (20) 을 만족하고 만약 급수 (1) 이 $|C, 1; \gamma|_k$ 총합 가능하면 또한 $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ 총합 가능이다. 단 $\delta \geq 0$ 이고 $k \geq 1$ 이다. 그리고 수열 $\{p_n\}$ 이 식 (14) 를 만족하고 (17) 보다 더 약한 식인

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{P_\nu}{p_\nu} \right) = O(P_{n-1}) \tag{24}$$

을 만족할 때 급수 (1) 이 $|C, 1|_k$ 총합 가능하면 또한 급수 (1) 은 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능이다. 이때 $k \geq 1$ 이다. 따라서 수열 $\{p_n\}$ 이 식 (14) 와 (24) 그리고 (20) 을 만족하고 만약 급수 (1) 이 $|C, 1; \gamma|_k$ 총합 가능하면 $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ 총합 가능이다. 여기서 식 (15) 를 만족하면 식 (24) 를 만족하게 되지만 그 역은 성립하지 않는다.

결국 수열 $\{p_n\}$ 이 식 (14) 를 만족하고 급수 (1) 이 $|C, 1|_k$ 총합 가능하면 또한 급수 (1) 은 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능하다. 하지만 수열 $\{p_n\}$ 이 식 (15) 를 만족하고 급수 (1) 이 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능하면 또한 급수 (1) 은 $|C, 1|_k$ 총합 가능하다. 이러한 정리들을 증명하는데 필요한 공통된 관계식의 유도과정을 소개한다. 먼저 수열 $\{s_n\}$ 의 $(\bar{N}, p_n)$ 평균에 대한 식 (7) 로부터 유도된 식은

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu \end{aligned}$$

17) Sur les functions bornée set intêgrables, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 131 (1900), 984–987.
18) Researches sur la convergence des series de Fourier, *Math. Annalen*, 6 (1905), 251–280.
19) Lecons suries series divergentes, 2nd Edition, Paris, 1928.

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} (P_n - P_{\nu-1}) a_\nu, \quad n \geq 0, P_{-1} = 0$$

이고 $n \geq 1$에 대하여 ΔT_{n-1}는

$$\begin{aligned}
\Delta T_{n-1} &= T_n - T_{n-1} \\
&= \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu s_\nu - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu s_\nu \\
&= \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} (P_n - P_{\nu-1}) a_\nu - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} (P_{n-1} - P_{\nu-1}) a_\nu \\
&= \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_n a_\nu - \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} P_{n-1} a_\nu + \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} P_{\nu-1} a_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu + \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} P_{\nu-1} a_\nu \\
&= \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} P_{\nu-1} a_\nu - \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu + \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \right) \\
&= \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} P_{\nu-1} a_\nu - \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu + a_n \\
&= \left(\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} P_{\nu-1} a_\nu + a_n \right) - \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu \\
&= \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu - \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu \\
&= \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} \right) \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu \\
&= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} a_\nu, \quad 1 \leq n
\end{aligned}$$

와 같이 유도된다. 마찬가지로 수열 $\{s_n\}$의 $(\bar{N}, q_n)$ 평균 K_n은

$$K_n = {Q_n}^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu s_\nu = \frac{1}{Q_n} \sum_{\nu=1}^{n} (Q_n - Q_{\nu-1}) a_\nu$$

이고

$$\Delta K_{n-1} = K_n - K_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\nu-1} a_\nu$$

로 유도된다.

결론으로 후세인 보르의 연구 의의를 큰 관점에서 살펴보면 무한급수의 총합 가능성 연구에서 후세인 보르의 업적은 크게 3가지 점을 들 수 있다.

첫째, 차수가 k이고 $k \geq 1$일 때 절대 $(\bar{N}, p_n)$ 총합 가능성의 개념을 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성으로 표현하고 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합 가능성을 그가 최초로 소개했다.

둘째, 그는 $|C,1|_k$ 과 $|\bar{N},p_n|_k$ 의 총합 가능성 관계를 규명하면서 차수 $k=1$ 일 때 $|C,1|_k$ 절대 체사로 총합 가능성과 $|R,p_n|_k$ 총합 가능성보다 더 일반화한 정리를 소개했다. 특별한 경우, 모든 n에 대해 $p_n=1$일 때 $|\bar{N},p_n|_k$ 총합 가능성은 결국 $|C,1|_k$ 총합 가능성이 된다. 그리고 $k=1$ 일 때 $|\bar{N},p_n|_k$ 총합 가능성은 $|R,p_n|$ 총합 가능성으로 유도된다.

셋째, 그는 $\gamma \geq 0$을 소개하고 $|\bar{N},p_n|_k$ 의 총합 가능성을 $|\bar{N},p_n,\gamma|_k$ 총합 가능성으로 확장했다. 특히 $\gamma=0$일 때 $|\bar{N},p_n,\gamma|_k$ 총합 가능성은 $|\bar{N},p_n|_k$ 의 총합 가능성이 된다.

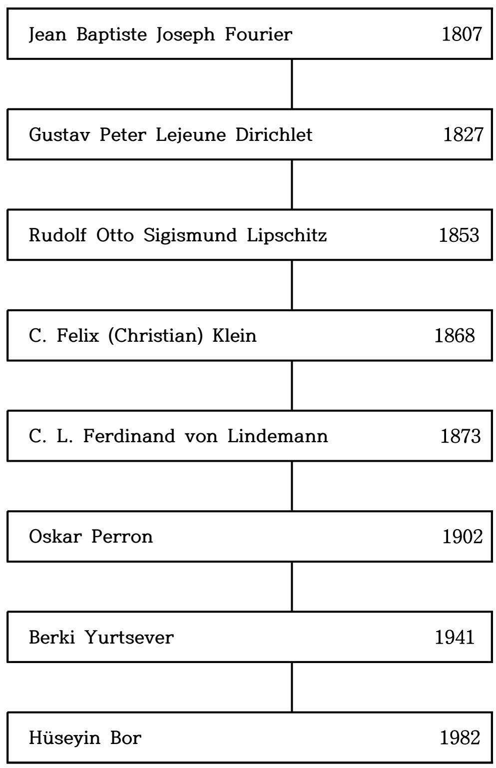

Figure 1. The minor academic genealogy from Fourier to Hüseyin Bor; 푸리에부터 후세인 보르까지의 학문 소 계보(1807–1982)

무한급수에 관한 $\lvert\overline{N},p_n\rvert_k$ 총합가능성 인자들에 대한 주석 [1]	1983
무한급수의 절대 총합가능성 인자들 [17]	1983
$\lvert\overline{N}, p_n\rvert_k$ 총합가능성 인자들에 관하여 [12]	1985
두 가지 총합 가능성 방법에 관하여 [16]	1985
두 가지 총합가능성 방법에 대한 주석 [2]	1986
무한급수의 $\lvert\overline{N},p_n\rvert_k$ 총합가능성 인자들에 관하여 [15]	1988
무한급수의 $\lvert\overline{N},p_n\rvert_k$ 총합가능성에 대한 인자들 [4]	1991
두 절대 총합 가능성 방법의 상대적 강점에 관하여 [14]	1991
절대 총합가능성 인자들에 관하여 [9]	1993
절대 총합가능성 인자들의 특성 [3]	1995
무한급수의 $\lvert\overline{N},p_n;\delta\rvert_k$ 총합가능성 인자들에 관하여 [11]	1997

Figure 2. The minor research lineage of Hüseyin Bor on the summability of infinite series ; 무한급수의 총합 가능성에 관한 후세인 보르의 연구 소 계보(1983–1997)

References

1. Hüseyin Bor, A note on $|\bar{N}, p_n|_k$ summability factors for infinite series, *Jour. Math. Sci.* 16 (1983), 70–73.
2. Hüseyin Bor, A note on two summability methods, *Proc. Amer. Math. Soc.* 98(1) (1986), 81–84.
3. Hüseyin Bor and M. A. Sarigol, Characterization of absolute summability factors, *J. Math. Anal.Appl.* 195 (1995), 537–545.
4. Hüseyin Bor, Factors for $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of infinite series, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A. I. Mathematica Volumen* 16 (1991), 151–154.
5. Hüseyin Bor, Local property of $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of factored Fourier series, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* 17 (1989), 165–170.
6. Hüseyin Bor, Multipliers for $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of Fourier series, *Bull. Inst. Math. Acad.Sinica* 17 (1989), 285–290.
7. Hüseyin Bor, On absolute Cesàro summability factors of infinite series and Fourier series, *Bull.Inst.Math. Acad. Sinica* 26 (1998), 195–203.
8. Hüseyin Bor, On absolute summability factors of infinite series, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 104(2) (1994), 367–372.
9. Hüseyin Bor, On absolute summability factors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 118(1) (1993), 71–75.
10. Hüseyin Bor, On $|\bar{N}, p_n|_k$ summability factors, *Kuwait J. Sci. Engng.* 23 (1996), 1–5.

11. Hüseyin Bor, On $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ summability factors of infinite series, *Taiwanese J. Math.* 1(3) (1997), 327–332.
12. Hüseyin Bor, On $|\bar{N}, p_n|_k$ summability factors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 94(3) (1985), 419–422.
13. Hüseyin Bor, On the local property of factored Fourier series, *Z. Anal. Anwendungen* 16 (1997), 769–773.
14. Hüseyin Bor, On the relative strength of two absolute summability methods, *Proc. Amer. Math. Soc.* 113(4) (1991), 1009–1012.
15. Hüseyin Bor, On the $|\bar{N}, p_n|$ summability factors of infinite series, *Proc. Indian Acad. Sci.(Math.Sci.)* 98(1) (1988), 53–57.
16. Hüseyin Bor, On two summability methods, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 97 (1985), 147–149.
17. Hüseyin Bor, The absolute summability factors of infinite series, *Pure Appl. Math. Sci.* 18 (1983), 75-79.