

# 구조화 마코프체인을 이용한 이종 구성품을 갖는 $k$ -out-of- $n$ 시스템의 수명분포 모형

김홍섭<sup>†</sup>

공군사관학교 시스템공학과

---

## Lifetime Distribution Model for a $k$ -out-of- $n$ System with Heterogeneous Components via a Structured Markov Chain

Heungseob Kim<sup>†</sup>

Department of Systems Engineering, Republic of Korea Air Force Academy

**Purpose:** In this study, the lifetime distribution of a  $k$ -out-of- $n$  system with heterogeneous components is suggested as Markov model, and the time-to-failure (TTF) distribution of each component is considered as phase-type distribution (PHD). Furthermore, based on the model, a redundancy allocation problem with a mix of components (RAPMC) is proposed.

**Methods:** The lifetime distribution model for the system is formulated by the structured Markov chain. From the model, the various information on the system lifetime can be ascertained by the matrix-analytic (or-geometric) method.

**Conclusion:** By the generalization of TTF distribution (PHD) and the consideration of heterogeneous components, the lifetime distribution model can delineate many real systems and be exploited for developing system operation policies such as preventive maintenance, warranty. Moreover, the effectiveness of the proposed RAPMC is verified by numerical experiments. That is, under the equivalent design conditions, it presented a system with higher reliability than RAP without component mixing (RAPCM).

**Keywords:** Phase-Type Distribution, Matrix-Analytic Method,  $k$ -Out-Of- $n$ , Heterogeneous Components, Redundancy Allocation Problem

### 1. 서론

자동차, 항공기 등 일반적인 시스템들은 결함이 발생하면 정비하여 사용한다. 즉, 대부분의 현실 시스템은 수리가능 시스템(Repairable system)으로 고려되고

있다. 하지만, 이는 운용단계에서의 정의이다 오히려, 시스템 설계자는 시스템의 고장주기 추정과 이를 고려한 예방정비(Preventive maintenance) 및 품질보증(Quality assurance) 정책 수립 등을 위해 수리 불가능 시스템(Non-repairable system)으로 고려할 필요가 있다[1].

---

<sup>†</sup> 교신저자 heungseob79@gmail.com

2017년 10월 11일 접수; 2017년 11월 6일 수정본 접수; 2017년 11월 6일 게재 확정.

또한, 현대 과학기술 발전의 가속화는 제품의 혁신속도(Clockspeed)를 증가시키고 있다. 이에 따라 제품의 수명주기(Life-cycle)가 단축되고 있으며, 이는 고객들의 제품 구매성향을 변화시키고 있다. 예를 들어, 혁신속도가 빠른 제품의 대표적 사례로 현대인의 필수품인 스마트폰(Smart phone)의 교체주기를 살펴보면, 우리나라의 12세 이상 이용자의 스마트폰 교체주기는 평균 2년 7개월로 조사되었으며[2], 독일, 스페인 등의 유럽 국가들도 평균 2년 6개월로 유사하게 나타났다[3]. 이러한 조사결과는 많은 고객들이 스마트폰의 고장과 무관하게 주기적으로 신제품으로 교체하고 있고, 제품 설계자는 이러한 교체주기를 고려하여 제품의 수명목표를 설정하고 경제적으로 설계할 필요가 있음을 의미한다. 물론, 대표적으로 인공위성, 미사일, 로켓(Rocket)과 같이 본질적으로 수리가 불가능한 시스템들도 상당수 존재한다[4-6].

시스템의 수명 향상을 위한 내고장성(Fault tolerance) 설계의 가장 일반적인 방법은 요구 성능을 발휘하기 위한 최소의 구성품에 잉여 구성품을 배치함으로써 일부 구성품의 고장이 직접적으로 시스템에 영향을 미치는 것을 방지하기 위한 중복설계(Redundant design)이다. 다양한 중복설계 구조들 중 일반적인 구조는  $k$ -out-of- $n$ 이며, 이는 시스템 기능 발휘를 위한 최소의 구성품  $k$ 개와  $(n-k)$ 개의 잉여 구성품을 설치한 구조이다. 여기서,  $k=1$ 인 경우는 병렬(Parallel),  $k=n$ 인 경우는 직렬(Series) 구조를 의미한다.

또한, 현실 시스템은 다양한 이유로 동일한 기능을 수행하지만 수명특성이 상이한 이종 구성품(Heterogeneous component)으로 설계되기도 한다. 대표적으로, 무게, 공간, 비용 등의 시스템 규격을 충족하기 위한 경우, 동종 구성품(Homogeneous component)이지만 시스템 내에서 다른 위치에 설치되어 운용환경이 상이한 경우, 시스템을 정비하면서 다른 구성품으로 교체되는 경우 등 다양한 이유가 있을 수 있다. 또한, 이종 구성품을 갖는 시스템의 신뢰도 분석·설계(Reliability analysis and design) 등의 수명 성능을 추정하기 위해 개발된 확률모형(Stochastic model)은 동종 구성품을 갖는 시스템에도 적용이 가능하다. 즉, 이종 구성품을 고려하여 개발된 확률모형은 보다 일반화된 모형으로 그 응용범위도 확장된다.

시스템의 규격 내에서 중복설계를 통해 시스템의 신뢰도 최대화하기 위한 신뢰도 최적 설계 문제로는

중복할당문제(RAP: Redundancy Allocation Problem)가 가장 대표적이다. RAP는 각 서브시스템(Subsystem)에서 동일한 기능을 수행할 수 있는 여러 종류의 구성품이 존재할 때, 각 서브시스템에 사용할 구성품과 중복 수량을 동시에 결정하는 문제이다. 또한, 기존 연구문헌들은 RAP를 각 서브시스템 설계에 동종의 구성품을 사용하도록 제한하는 RAPCM(RAP without Component Mixing)과 여러 종류의 구성품을 사용할 수 있도록 허용하는 RAPMC(RAP with a Mix of Components)로 구분하고 있다[7, 8]. 또한, RAP는 기계/전자 시스템의 설계 분야뿐만 아니라 재고관리[9-12], 네트워크[13-15] 분야 등에 널리 응용되고 있다.

$k$ -out-of- $n$  시스템의 신뢰도 분석에 대한 대부분의 연구들은 정적 신뢰도 모형(Static reliability model)을 이용하고 있다. 이종 구성품을 갖는  $k$ -out-of- $n$  시스템의 신뢰도를 측정하기 위해 Boland and Proschan[16]이 최초로 제안한 모형은  $n$ 개의 구성품 중  $k$ 개 이상이 작동하는 모든 조합(Combination)을 분석하고, 모든 조합들에 대한 확률을 합하는 방법으로 구성품 수량이 증가할수록 복잡도와 계산량이 기하급수적으로 증가하게 된다. 이는  $k$ -out-of- $n$  시스템의 신뢰도 측정이 그만큼 복잡하다는 것을 의미하며, 최근까지도 이를 효율적으로 계산하기 위한 다양한 방법들에 대한 연구가 계속되고 있다[17-20]. 또한, 동적 신뢰도 모형(Dynamic reliability model)에 대한 연구들은 대부분 구성품의 고장 시간(TTF: Time-To-Failure) 분포를 지수분포(Exponential distribution)로 고려하고 있으며, 시스템이 동종의 구성품으로 설계되는 것으로 가정하고 있다[21-25]. 이와 같은 신뢰도 모형의 제한으로 RAP와 같은 신뢰도 최적 설계를 위한 연구들도 응용범위의 확장보다는 최적화 문제의 해법(Solution methodology) 개발이 주를 이루어왔다.  $k$ -out-of- $n$  시스템의 신뢰도 최적화 문제에 대한 최근의 연구들은 개체군최적화[22, 23], 유전자알고리즘 계열[24, 27-29], 타부서치[26], 개미군집최적화[30, 31] 등의 메타 휴리스틱(Meta-heuristic) 알고리즘을 이용하고 있다. 기존 문헌들을 고찰한 결과를 바탕으로, 본 연구는 보다 다양한 현실 시스템의 신뢰도 측정과 최적 설계에 응용될 수 있도록 구성품의 TTF 분포를 일반화하고 동적 신뢰도 계산이 용이한 확률모형을 개발하는데 목적을 두었다.

본 연구에서는 구성품의 TTF 분포를 단계형 확률 분포(PHD: Phase-type distribution)로 고려하며, 구성

품의 TTF 분포를 묘사하는 연속시간 마코프체인 (CTMCs: Continuous-Time Markov Chains)들에 대한 전이율행렬(TRMs: Transition Rate Matrices)들의 구조화를 통해 이중 구성품을 갖는  $k$ -out-of- $n$  시스템의 수명분포에 대한 CTMC 모형(TRM)을 도출한다. 이렇게 도출된 시스템의 TRM은 신뢰도, 기대수명(MTTF: Mean TTF) 등의 다양한 수명특성 정보를 담고 있으며 이러한 정보들은 행렬분석법(Matrix-analytic method)을 통해 쉽게 해석될 수 있다 또한, 본 연구에서 제안하는 신뢰도 확률모형에 의해 해석이 가능해진 이중 구성품의 사용을 허용할 때의 효과를 분석하기 위해 수치실험을 수행하였다. 수치실험은 관련 연구에서 널리 사용되는 예제(Benchmark problem)를 사용하였으며, ILOG CPLEX를 통해 탐색된 RAPCM과 RAPMC의 최적해(Optimal solution)를 비교하였다. 결과적으로, 동일한 제약(Constraint)하에서 RAPMC는 RAPCM보다 높은 신뢰도를 갖는 시스템을 제안하였다

본 연구의 제2장에서는 PHD에 대한 소개와 이중 구성품을 갖는  $k$ -out-of- $n$  시스템의 수명분포 모형을 도출하는 과정이 제시되며, 제3장에서는 시스템의 신뢰도 최적 설계를 위한 RAPCM과 RAPMC의 수리모형(Mathematical model)을 제시한다. 제4장에서는 수치실험 예제에 대한 RAPCM과 RAPMC의 최적해들의 비교/분석을 이중 구성품 사용의 허용(RAPMC)에 의한 시스템 신뢰도 향상 효과를 관찰한다. 마지막으로, 제5장에서는 본 연구의 결론과 향후 연구방향을 제시한다.

## 2. $k$ -out-of- $n$ 시스템의 수명분포 모형

본 장에서는 연속시간 마코프체인(CTMC: Continuous-time Markov chain)의 구조화를 통해 이중 구성품을 갖는  $k$ -out-of- $n$  시스템의 수명분포 모형을 도출하고 행렬해석법을 이용해 시스템의 신뢰도와 기대수명 등의 수명과 관련된 성능 지표를 제시한다. 본 장에서 사용하는 표기(Notation)는 다음과 같다.

<표기(Notation)>

- $r_j(t)$ : 구성품  $j$ 의 신뢰도
- $\mathbf{z}$ : 구성품들의 인덱스( $j$ ) 벡터
- $R(t; \mathbf{z})$ : 구성품 벡터  $\mathbf{z}$ 를 갖는 시스템의 신뢰도

- $\boldsymbol{\pi}, \pi_A$ : 마코프체인의 초기확률분포
- $\mathbf{D}, \mathbf{d}$ : 전이영역과 흡수상태에 대한 전이율행렬
- $\mathbf{0}$ : 모든 원소가 0인 영행렬
- $\mathbf{1}_m$ : 모든 원소가 1인 행벡터( $m \times 1$ )
- $\mathbf{I}_m$ : 단위행렬( $m \times m$ )
- $\otimes, \oplus$ : 크로네커 곱, 합(Kronecker Product, Sum)
- $\exp(\mathbf{A})$ : 행렬지수(Matrix exponential);

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$$

- $|\mathbf{V}|$ : 벡터  $\mathbf{V}$ 의 크기

### 2.1 단계형 확률분포(PHD)

PHD는 Neuts[32]에 의해 소개되었으며, 확률변수는 하나의 흡수상태(Absorption)를 갖는 임의의 마코프체인(Markov chain)이 흡수상태에 도달할 때까지의 시간으로 정의된다. PHD는 지수분포(Exponential distribution)의 중합(Convolution) 또는 혼합(Mixture)의 형태로 표현됨에 따라 각 상태 간의 전이(State transition)가 포아송 과정(Poisson process)에 따라 발생하기 때문에 무기억 속성(Memoryless property)이 유지된다. 또한, <Fig. 1>에서와 같이 지수분포 계열의 분포들을 포함하며, 확률분포의 유연성(Flexibility)과 일반적/경험적(General/Empirical) 확률분포로의 우수한 근사성(Approximation)을 바탕으로 광범위한 확률현상을 표현할 수 있다[32-34]. <Fig. 2>[6]는 E-M(Expectation-Maximization) 알고리즘을 통해 와이블(Weibull), 대수정규(Log-normal), 레일리(Rayleigh) 분포에 대한 PHD( $\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}$ )들의 근사를 보여주고 있다. 모수추정 시 각 PHD의 전이상태를 10개로 제한하였음에도 TTF의 확률밀도함수  $f(t)$ 와 신뢰도  $r(t)$ 의 근사도가 상당히 우수함을 확인할 수 있다

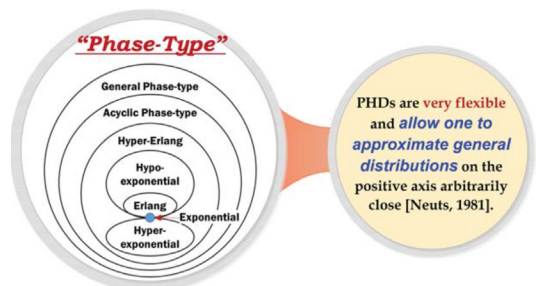


Fig. 1 Introduction to the phase-type distribution

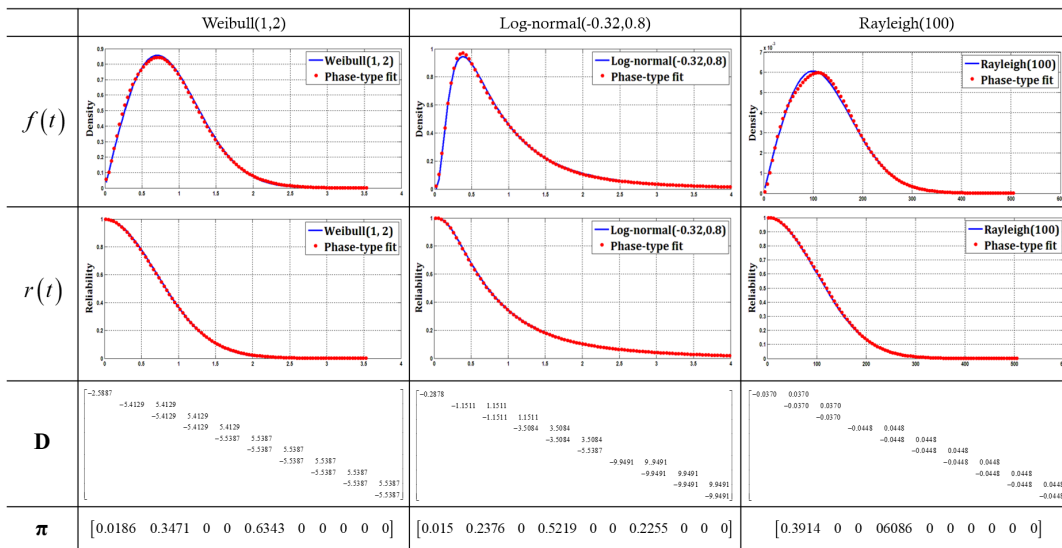


Fig. 2 Example of PHDs approximated to general distributions

임의의 구성품의 TTF 분포가  $m$ 개의 전이상태 (Transient states)와 흡수상태를 갖는 PHD를 따를 때, TTF 분포의 TRM(Infinitesimal generator)은 식 (1)과 같이 표현된다. 즉, 본 연구에서는 식 (1)이 표현하는 마코프체인의 상태가 전이상태 영역에 있다면 구성품은 정상 작동 중이고, 흡수상태에 도달할 때 고장 (Failure)이 발생하는 것으로 고려한다. 또한, 흡수상태로 전진되는 전이상태 간의 전이는 구성품의 노후화 과정의 특성을 표현한다. 식 (1)과 같은 TRM을 갖는 PHD의 누적확률분포  $F(t)$ , 확률밀도함수  $f(t)$ , 적률생성함수(Moment generating function)  $E[T^n]$ 은 각각 식 (2)~식 (4)와 같이 정의된다. 단, 본 연구는 시스템이 최초 가동되는 시점에 모든 구성품이 정상 상태인 것으로 가정됨에 따라 흡수상태에 대한 초기 확률 ( $\pi_A$ )은 0으로 고려된다. 따라서 식 (2)와 식 (4)를 통해 구성품의 신뢰도  $r(t)$ 와 기대수명(MTTF)  $E[T]$ 는 각각 식 (5)와 식 (6)과 같이 표현된다.

$$Q = \begin{matrix} \text{Transient}(m) & \text{Absorbing}(1) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

$$F(t) = P(T \leq t) = \pi_A + 1 - \pi \exp(\mathbf{D}t) \mathbf{1}_m, \quad \text{for } t \geq 0 \quad (2)$$

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} F(t) = \begin{cases} \pi_A, & t = 0 \\ \pi \exp(\mathbf{D}t) \mathbf{d}, & t > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$E[T^n] = (-1)^n \left. \frac{d^n \{ \mathcal{L}^* F \}(s)}{ds^n} \right|_{s=0} = n! \pi (-\mathbf{D}^{-n}) \mathbf{1}_m \quad (4)$$

$$r(t) = 1 - F(t) = \pi \exp(\mathbf{D}t) \mathbf{1}_m = [\pi \ 0] \exp(\mathbf{Q}t) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$E[T] = \pi (-\mathbf{D}^{-1}) \mathbf{1}_m = [\pi \ 0] (-\mathbf{Q}^{-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 2.2 시스템 신뢰도 모형

본 절에서는 각 구성품의 TTF 분포에 대한 CTMC의 구조화하여  $k$ -out-of- $n$  시스템의 동적 신뢰도 모형을 제시한다. 각 구성품의 TTF 분포에 대한 CTMC의 TRM은 식 (1)과 표현된다. 예시적으로, 임의의 구성품의 TTF 분포가 PHD 계열의 Hypo-exponential 분포를 따르는 경우, 구성품에 대한 CTMC의 상태전이도(State transition diagram)와 TRM은 <Fig. 3>과 같다. 시스템의 TTF 분포(TRM)는 각 구성품의 TRM들을 구조화함으로써 도출된다.

$k$ -out-of- $n$  시스템은 설치된  $n$ 개의 구성품이 동시에 작동을 시작하여,  $k \leq n$  개 이상의 구성품이 가동할 때까지 정상 기능을 수행하게 된다. 이때, 구성품들은 동일한 운용환경 하에서 독립적으로 작동한다. 즉, 각 구성품의 노후화 과정을 표현하는 CTMC의 상태전이는 독립적으로 발생한다. 따라서 시스템에 대한 CTMC의 상태는 각 구성품에 대한 CTMC들의 상태 조합으로 표현되고, 이러한 다수의 독립적인 CTMC

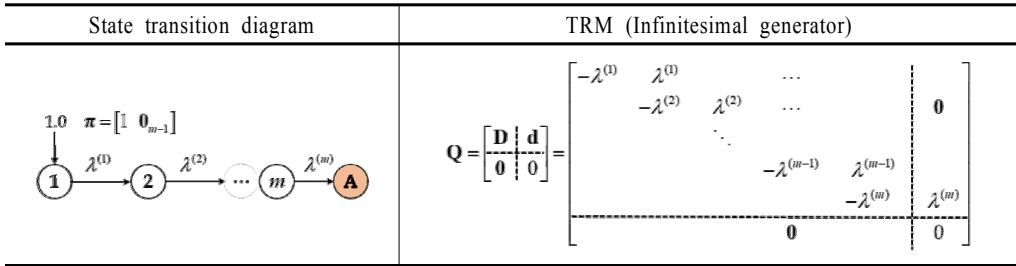


Fig. 3 State transition mechanism of a Hypo-exponential distribution

들의 상태전이를 표현하는 TRM은 식 (7)과 같이 크로네커 합(Kronecker sum) 연산자를, TRM의 초기 확률 분포는 식 (8)과 같이 크로네커 곱(Kronecker product) 연산자를 이용하여 구조화할 수 있다[35]. <Fig. 4>는 TTF 분포가 각각 모수벡터  $\mathbf{A}_1 = [\lambda_1^{(1)} \lambda_1^{(2)}]$ ,  $\mathbf{A}_2 = [\lambda_2^{(1)} \lambda_2^{(2)}]$ ,  $\mathbf{A}_3 = [\lambda_3^{(1)} \lambda_3^{(2)}]$ 인 Hypo-exponential 분포를 따르는 구성품 3개를 갖는 시스템에 대한 TRM(Q)을 보여주고 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{Q}_{\mathbf{z}(j)} = \mathbf{Q}_{\mathbf{z}(n)} \oplus \mathbf{Q}_{\mathbf{z}(n-1)} \oplus \dots \oplus \mathbf{Q}_{\mathbf{z}(1)} \quad (7) \\
 \boldsymbol{\pi} &= \bigoplus_{j=1}^n [\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{z}(j)} \ 0] \\
 &= [\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{z}(n)} \ 0] \otimes [\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{z}(n-1)} \ 0] \otimes \dots \otimes [\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{z}(1)} \ 0] \quad (8)
 \end{aligned}$$

임의의 시점  $t$ 에서의 시스템의 신뢰도는 식(7)을 통해 도출된 시스템에 대한 CTMC의 TRM에서  $k$ 개 이상의 구성품이 작동하고 있는 상태들의 전이확률 (Transient probability)의 합으로 산정될 수 있다. 각 구성품의 TRM에서 전이상태들은 1, 흡수상태는 0으로 표기하면, 시스템 TRM의 각 상태에서 작동 중인 구성품 수량에 대한 벡터  $\mathbf{N}$ 은 식 (9)을 통해 생성할 수 있다. 또한,  $k$ 개 이상의 구성품이 작동하는 상태들의 전이확률을 선별적으로 합하기 위한 벡터  $\mathbf{V}$ 는 식 (10)과 같이 정의되며, 이를 통해 시스템의 신뢰도와 기대수명(MTTF)은 각각 식 (11), 식 (12)와 같이 표현할 수 있다. 이와 더불어 식 (4)를 통해 시스템 수명분포의 분산(Variance), 왜도(Skewness), 첨도(Kurtosis) 등의 특성 정보를 바탕으로 제품의 보증정책(Warranty policies), 위험도 관리(Risk management) 등 다양한 분

$\mathbf{N} \quad (3) \ (3) \ (2) \ (3) \ (3) \ (2) \ (2) \ (2) \ (1) \ (3) \ (3) \ (2) \ (3) \ (3) \ (2) \ (2) \ (2) \ (1) \ (2) \ (2) \ (1) \ (2) \ (2) \ (1) \ (1) \ (1) \ (0)$

		$\mathbf{D}_{31}$									$\mathbf{D}_{32}$									$\mathbf{A}_3$											
		$\mathbf{D}_{21}$			$\mathbf{D}_{22}$			$\mathbf{A}_2$			$\mathbf{D}_{21}$			$\mathbf{D}_{22}$			$\mathbf{A}_2$			$\mathbf{D}_{21}$			$\mathbf{D}_{22}$			$\mathbf{A}_2$					
		$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{D}_{11}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{A}_1$			
$\mathbf{D}_{31}$	$\mathbf{D}_{21}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$	$\mathbf{Q}_1 - (\lambda_2^{(1)} + \lambda_3^{(1)}) \mathbf{I}_{(m+1)}$	$\lambda_2^{(1)} \mathbf{I}_{(m+1)}$																									
	$\mathbf{D}_{22}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$		$\mathbf{Q}_1 - (\lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) \mathbf{I}_{(m+1)}$	$\lambda_2^{(2)} \mathbf{I}_{(m+1)}$				$\lambda_3^{(1)} \mathbf{I}_{(m+1)(m_2+1)}$																				
	$\mathbf{A}_2$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$				$\mathbf{Q}_1 - \lambda_3^{(1)} \mathbf{I}_{(m+1)}$																							
$\mathbf{D}_{32}$	$\mathbf{D}_{21}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$				$\mathbf{Q}_1 - (\lambda_2^{(1)} + \lambda_3^{(2)}) \mathbf{I}_{(m+1)}$	$\lambda_2^{(1)} \mathbf{I}_{(m+1)}$																						
	$\mathbf{D}_{22}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$				$\mathbf{Q}_1 - (\lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) \mathbf{I}_{(m+1)}$	$\lambda_2^{(2)} \mathbf{I}_{(m+1)}$																						
	$\mathbf{A}_2$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$						$\mathbf{Q}_1 - \lambda_3^{(2)} \mathbf{I}_{(m+1)}$																					
$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{D}_{21}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$																$\mathbf{Q}_1 - \lambda_2^{(1)} \mathbf{I}_{(m+1)}$	$\lambda_2^{(1)} \mathbf{I}_{(m+1)}$										
	$\mathbf{D}_{22}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$																$\mathbf{Q}_1 - \lambda_2^{(2)} \mathbf{I}_{(m+1)}$	$\lambda_2^{(2)} \mathbf{I}_{(m+1)}$										
	$\mathbf{A}_2$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}_{11}}{\mathbf{D}_{12}}$	$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1}$																		$\mathbf{Q}_1$									

Fig. 4 Example of the TRM for a system with three components

$$\begin{aligned}
 j=1; N_1 &= \mathbf{1}_9 \otimes \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_1 \right) = [110110110110110110110110110]^\text{T} \\
 j=2; N_2 &= \mathbf{1}_3 \otimes \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_3 \right) = [111111000111111000111111000]^\text{T} \\
 j=3; N_3 &= \mathbf{1}_1 \otimes \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_9 \right) = [111111111111111111100000000]^\text{T} \\
 \therefore \mathbf{N} &= \sum_{j=1}^3 N_j = [332332221332332221221221110]^\text{T} \\
 \mathbf{V}|_{k=2} &= [11111111011111110110110000]^\text{T}
 \end{aligned}$$

Fig. 5 Generating the vector N and V for an example system

야에 활용될 수 있다. <Fig. 5>는 위의 예시 시스템을 2-out-of-3 시스템으로 고려할 때, 식 (9)와 식 (10)을 통해 벡터 **N**과 **V**를 생성하는 과정을 보여주고 있으며, 생성된 벡터 **N**이 <Fig. 4> 상단에 표기된 작동 중인 구성품의 수량과 일치함을 확인할 수 있다

$$\mathbf{N} = \sum_{j=1}^n \left[ \mathbf{1}_{\prod_{p>j} (m_{\mathbf{x}(p)}+1)} \otimes \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m_{\mathbf{x}(j)}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{\prod_{p<j} (m_{\mathbf{x}(p)}+1)} \right) \right] \quad (9)$$

$$\mathbf{V} = [v_1 \cdots v_p \cdots v_{|\mathbf{N}|}], \quad v_p = \begin{cases} 1, & \mathbf{N}(p) \geq k \\ 0, & \mathbf{N}(p) < k \end{cases} \quad (10)$$

$$R(t; \mathbf{z}) = \pi \exp(\mathbf{Q}t) \mathbf{V} \quad (11)$$

$$E[T; \mathbf{z}] = \pi (-\mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{V} \quad (12)$$

### 3. 중복할당문제(RAP) 수리모형

본 장에서는 <Fig. 6>과 같이 다수의 k-out-of-n 서

브시스템들이 직렬(Series)로 연결된 시스템의 신뢰도를 최대화하기 위해 각 서브시스템을 위한 여러 대안 구성품(Alternative components) 중 사용할 대안 구성품과 수량(Number of components)을 동시에 결정하는 RAP를 다룬다. 이때, 각 서브시스템이 동종의 구성품들로 설계할 때의 RAPCM과 이종 구성품의 사용을 허용하는 RAPMC의 수리모형을 제시하며, 시스템 규격에 대한 제약은 비용(Cost)과 무게(Weight)로 고려한다. 본 장에서 사용하는 표기(Notation)는 다음과 같다.

<표기(Notation)>

- $R_{sys}(t; \mathbf{z})$ : 시스템의 신뢰도;
- $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, \dots, \mathbf{z}_s\}$
- $R_i(t; \mathbf{z})$ : 서브시스템  $i$ 의 신뢰도,  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$
- $q_i$ : 서브시스템  $i$ 의 대안 구성품 종류 수
- $k_i$ : 서브시스템  $i$ 의 필수 구성품 수량
- $n_{max,i}$ : 서브시스템  $i$ 의 구성품 수량의 상한

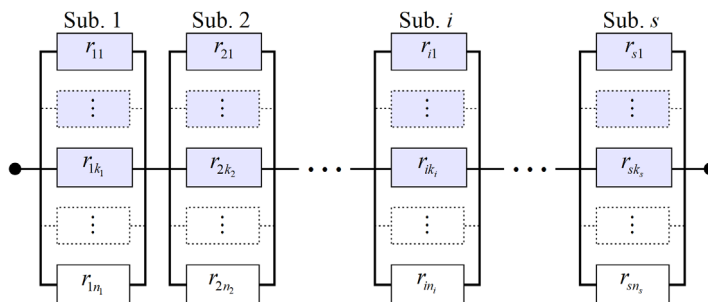


Fig. 6 Structure of an example system

- $c_{ij}, w_{ij}$ : 서브시스템  $i$ 의 대안 구성품  $j$ 의 비용, 무게;  $j \in \{1, 2, \dots, q_i\}$
- $C_{sys}, W_{sys}$ : 시스템의 비용, 무게의 상한

$$z_{ijp} = \begin{cases} 1, & \text{서브시스템 } i \text{에서 구성품 } j \text{가 } p \text{번째} \\ & \text{위치에 설치되면,} \\ 0, & \text{그렇지 않으면} \end{cases} \quad (19)$$

### 3.1 RAPCM 수리모형

각 서브시스템을 동종의 구성품으로 설계하는RAPCM을 위한 수리모형은 식(13)부터 식(18)까지와 같은 이진 정수계획(BIP: Binary Integer Programming) 모형 제시되며, 결정변수(Decision variable)는 식(13)과 같다.

$$z_{ijp} = \begin{cases} 1, & \text{서브시스템 } i \text{에 구성품 } j \text{를 } p \text{개} \\ & \text{설치하면,} \\ 0, & \text{그렇지 않으면} \end{cases} \quad (13)$$

Maximize

$$\ln R_{sys}(t; \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=k_i}^{n_{max,i}} \ln R_i(t; z_{ijp}) z_{ijp} \quad (14)$$

subject to:

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=k_i}^{n_{max,i}} p c_{ij} z_{ijp} \leq C_{sys} \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=k_i}^{n_{max,i}} p w_{ij} z_{ijp} \leq W_{sys} \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=k_i}^{n_{max,i}} z_{ijp} = 1, 1 \leq i \leq s \quad (17)$$

$$z_{ijp} \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq q_i, k_i \leq p \leq n_{max,i} \quad (18)$$

목적함수(Objective function) 식(14)는 원 목적함수, 즉, 직렬 시스템의 신뢰도가 비선형 함수임에 따라 대수변환(Logarithmic transform)을 통해 선형화하였으며, 식(15)와 식(16)은 각각 시스템의 비용과 무게에 대한 제약을 나타내고 있다. 식(17)은 각 서브시스템을 위해 선택되는 구성품의 종류와 수량에 대한 결정변수는 유일하여야 한다는 제약이며 식(18)은 결정변수의 형태와 범위를 제한하고 있다

### 3.2 RAPMC 수리모형

각 서브시스템을 설계함에 있어 이종 구성품의 사용을 허용하는 RAPMC의 수리모형도 식(19)부터(26)까지의 이진정수계획(BIP) 모형으로 제시될 수 있으며, 이때의 결정변수는 식(19)와 같이 정의된다

$$\text{Maximize } \ln R_{sys}(t; \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^s \ln R_i(t; z_i) \quad (20)$$

subject to:

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=k_i}^{n_{max,i}} c_{ij} z_{ijp} \leq C_{sys} \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=1}^{n_{max,i}} w_{ij} z_{ijp} \leq W_{sys} \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{q_i} z_{ijp} \leq 1, 1 \leq i \leq s, 1 \leq p \leq n_{max,i} \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=1}^{n_{max,i}} z_{ijp} \geq k_i, 1 \leq i \leq s \quad (24)$$

$$\mathbf{z}_i = \{z_{ijp}\}, 1 \leq i \leq s \quad (25)$$

$$z_{ijp} \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq q_i, 1 \leq p \leq n_{max,i} \quad (26)$$

목적함수 식(20)은 RAPCM에서와 같이 대수변환을 통해 선형화되었으며 식(21)과 식(22)는 각각 시스템의 비용과 무게에 대한 제약으로 결정변수에 따라 각 서브시스템의  $p$ 번째 위치에 선택되는 대안 구성품( $j$ )의 비용과 무게가 반영되도록 하였다. 또한, 식(23)은 각 서브시스템의  $p$ 번째 위치에 1종류 이하의 구성품이 선택되어야 한다는 것을 의미한다 즉, 해당 위치에 구성품이 설치되지 않을 수 있으며 이는 서브시스템  $i$ 에 설치할 수 있는 구성품 수량의 상한( $n_{max,i}$ )에 대한 제약을 준수하기 위함이다(<Fig. 7> 참조). 식(24)는 서브시스템  $i$ 에 필수 구성품 수량( $k_i$ ) 이상이 선택되어야 한다는 것을 의미하며 식(25)는

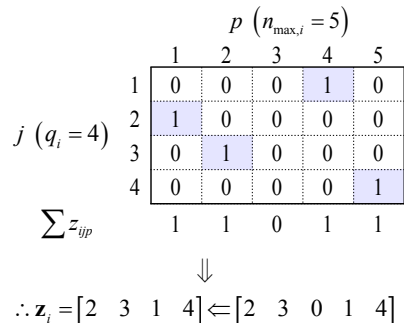


Fig. 7 Example of  $z_{ijp}$  and  $\mathbf{z}_i$

서브시스템  $i$ 에 설치되는 대안 구성품들의 인덱스 벡터( $\mathbf{z}_i$ )를 생성하기 위한 제약식이다. 식 (26)은 결정 변수의 형태와 범위를 지정하고 있다

증가시켜 총 26개의 문제를 구성하였다. 각 문제의 수치실험은 RAPCM과 RAPMC에 대해 수행하였으며, 최적해는 IBM사의 ILOG CPLEX를 통해 탐색하였다.

### 4. 수치실험 결과 및 분석

#### 4.1 실험예제

수치실험은 <Fig. 6>과 같이  $k$ -out-of- $n$  구조의 서브시스템 14개가 직렬로 연결된 예제 시스템을 대상으로 수행하였다. 실험예제에 사용되는 각 서브시스템의 대안 구성품들에 대한 데이터는 <Table 1>과 같으며, 구성품의 TTF 분포는 PHD 계열에 속하는 Erlang( $m, \lambda$ ) 분포로 고려하였다. 여기서, <Table 1>는 관련 연구에서 실험예제로 널리 사용되고 있는 Coit and Liu[21]와 Coit[36]을 참고하여 재구성하였다. 세부적으로, 구성품의 TTF 분포의 모수( $m_{ij}, \lambda_{ij}$ ), 비용( $c_{ij}$ ), 무게( $w_{ij}$ )는 Coit[36], 서브시스템별 필수적인 구성품 수량( $k_i$ )는 Liu[21]을 참고하였다.

또한, 시스템의 임무시간( $t$ )은 100시간으로 가정하였으며, 각 서브시스템에 설치할 수 있는 구성품의 최대 수량은 모두 6개( $n_{max,i} = 6, \forall i$ )로 설정하였다. 시스템의 비용 제약( $C_{sys}, W_{sys}$ )은 180으로 고정하고, 무게 제약( $C_{sys}, W_{sys}$ )을 300부터 350까지 2단위로

#### 4.2 실험결과 분석

RAPCM과 RAPMC에 대한 수치실험 결과는 <Fig. 8>과 같았으며, 각 서브시스템 설계에 이중 구성품 사용에 대한 효과는 식 (27)과 같은 MPI(Maximum Possible Improvement) 지수로써 평가하였다. MPI 지수는 많은 연구에서 시스템의 신뢰도 향상 효과를 평가하는데 사용되고 있다. 실험예제 26개의 문제의 평균 MPI는 2.82%로 나타났으며, 최대 MPI는 무게 제약( $C_{sys}, W_{sys}$ )이 310일 때 6.0%, 무게 제약이 332, 342일 때는 RAPCM과 RAPMC의 최적해가 동일하게 나타났다. 또한, 무게 제약이 증가할수록 비용 제약의 영향이 증대됨에 따라 MPI가 감소하는 경향을 보였다. 즉, 각 서브시스템을 동종의 구성품으로 설계할 때 발생하는 무게제약의 여유(Slack)를 이중 구성품으로 설계하면 그 여유를 더욱 활용할 수 있음에 기인한다. <Table 2>는 RAPCM과 RAPMC의 최적해의 차이를 예시적으로 보여주고 있다.

$$MPI(\%) = \frac{(High R_{sys}) - (Low R_{sys})}{1.0 - (Low R_{sys})} \times 100 \quad (27)$$

Table 1 Component data for numerical experiments

Sub-system	Component choices																
			$j=1$				$j=2$				$j=3$				$j=4$		
$i$	$k_i$	$m_{ij}$	$\lambda_{ij}$	$c_{ij}$	$w_{ij}$	$m_{ij}$	$\lambda_{ij}$	$c_{ij}$	$w_{ij}$	$m_{ij}$	$\lambda_{ij}$	$c_{ij}$	$w_{ij}$	$m_{ij}$	$\lambda_{ij}$	$c_{ij}$	$w_{ij}$
1	1	2	0.005320	1	3	1	0.000726	1	4	2	0.004990	2	2	3	0.008180	2	5
2	2	3	0.008180	2	8	1	0.000619	1	10	2	0.004310	1	9	*	*	*	*
3	1	3	0.013300	2	7	3	0.011000	3	5	3	0.012400	1	6	2	0.004660	4	4
4	2	2	0.007410	3	5	3	0.012400	4	6	2	0.006830	5	4	*	*	*	*
5	1	1	0.000619	2	4	2	0.004310	2	3	3	0.008180	3	5	*	*	*	*
6	2	3	0.004360	3	5	3	0.005670	3	4	2	0.002680	2	5	1	0.000408	2	4
7	1	3	0.010500	4	7	2	0.004660	4	8	2	0.003940	5	9	*	*	*	*
8	2	3	0.015000	3	4	1	0.001050	5	7	3	0.010500	6	6	*	*	*	*
9	3	2	0.002680	2	8	1	0.000101	3	9	1	0.000408	4	7	1	0.000943	3	8
10	3	3	0.014100	4	6	2	0.006830	4	5	1	0.001050	5	6	*	*	*	*
11	3	2	0.003940	3	5	2	0.003550	4	6	2	0.003140	5	6	*	*	*	*
12	1	1	0.002360	2	4	2	0.007690	3	5	3	0.013300	4	6	3	0.011000	5	7
13	2	2	0.002150	2	5	3	0.004360	3	5	3	0.006650	2	6	*	*	*	*
14	3	3	0.011000	4	6	1	0.000834	4	7	2	0.003550	5	6	3	0.004360	6	9



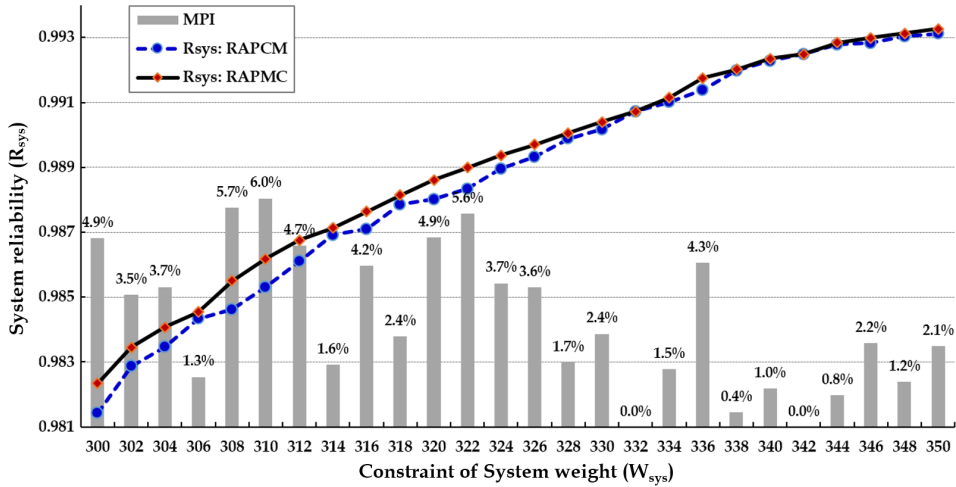


Fig. 8 Comparison of system reliabilities in RAPCM and RAPMC

Table 2 Some examples of the optimal solution ( $\mathbf{z}$ ) in RAPCM and RAPMC

$W_{sys}$	Class.	Subsystem ( $\mathbf{z}_i$ )														$R_{sys}(t; \mathbf{z})$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
300	RAPCM	$3^3$	$1^4$	$4^3$	$1^6$	$2^3$	$2^3$	$1^3$	$1^6$	$2^4$	$2^6$	$1^5$	$1^4$	$1^3$	$3^5$	0.981425
	RAPMC	$3^3$	$1^4$	$3^1 \cdot 4^2$	$1^5$	$2^3$	$1^1 \cdot 2^2$	$1^3$	$1^6$	$2^3 \cdot 3^1$	$3^6$	$1^5$	$1^4$	$1^3$	$3^5$	0.982340
310	RAPCM	$1^3$	$1^4$	$4^3$	$1^5$	$2^3$	$4^4$	$1^3$	$1^6$	$2^4$	$3^6$	$1^5$	$1^5$	$1^3$	$3^5$	0.985304
	RAPMC	$1^2 \cdot 3^1$	$1^4$	$3^1 \cdot 4^2$	$1^6$	$2^3$	$1^1 \cdot 2^1$	$1^3$	$1^6$	$2^4$	$3^6$	$1^5$	$1^4$	$1^3$	$3^5$	0.986180
320	RAPCM	$3^3$	$1^4$	$3^4$	$1^6$	$2^3$	$4^4$	$1^3$	$1^6$	$2^4$	$3^6$	$1^5$	$1^4$	$2^3$	$3^5$	0.988020
	RAPMC	$2^1 \cdot 3^2$	$1^4$	$3^1 \cdot 4^2$	$1^6$	$2^3$	$4^4$	$1^3$	$1^6$	$1^5$	$3^6$	$1^5$	$1^5$	$1^3$	$3^5$	0.988612
330	RAPCM	$1^4$	$1^4$	$3^4$	$1^6$	$2^3$	$4^4$	$1^3$	$1^6$	$2^4$	$3^6$	$1^5$	$1^5$	$2^3$	$3^5$	0.990167
	RAPMC	$2^3$	$1^4$	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1$	$1^6$	$2^3$	$4^4$	$1^3$	$1^6$	$1^5$	$3^6$	$1^6$	$1^5$	$1^3$	$3^5$	0.990405
340	RAPCM	$1^4$	$1^4$	$3^4$	$1^6$	$2^3$	$4^4$	$1^3$	$1^6$	$1^5$	$3^6$	$1^6$	$1^5$	$2^3$	$3^5$	0.992277
	RAPMC	$1^4$	$1^4$	$3^4$	$1^6$	$2^3$	$4^4$	$1^2 \cdot 2^1$	$1^6$	$1^5$	$3^6$	$1^6$	$1^5$	$2^3$	$3^5$	0.992354
350	RAPCM	$1^4$	$1^4$	$3^4$	$1^6$	$1^3$	$1^3$	$1^3$	$1^6$	$1^5$	$3^6$	$1^6$	$1^5$	$2^3$	$4^4$	0.993119
	RAPMC	$1^2 \cdot 3^2$	$1^4$	$3^4$	$1^6$	$2^3$	$4^4$	$1^1 \cdot 2^2$	$1^6$	$1^5$	$3^6$	$1^6$	$1^5$	$1^4$	$4^4$	0.993264

※ Component( $C^n$ ): C(Component index), n(Number of components).

소형 예제 시스템을 대상으로 수행한 실험에서 RAPMC의 효과를 관찰하기 위해 측정된 MPI 수준에 대해 높고 낮음을 평가하는 것은 큰 의미를 갖지는 않는다. 다만, 이러한 결과를 통해 각 서브시스템을 위한 구성품의 대안이 다양하고, 시스템이 대형화될수록 RAPMC의 효과는 향상될 것이라는 것을 알 수 있다. 또한, 이는 동일한 수준의 신뢰도를 달성하기 위해 보다 경제적인 설계가 가능하다는 것을 의미한다.

### 5. 결론 및 향후 연구방향

본 연구는 구성품의 TTF 분포를 PHD로 고려하고,

이에 대한 CTMC 모형의 TRM들을 구조화함으로써 이종 구성품을 갖는  $k$ -out-of- $n$  시스템의 수명분포 모형을 제시하였다. 그 수명분포 모형은 기존 연구들이 제안한 시스템 신뢰도뿐만 아니라 수명분포의 적률 생성함수(MGF)를 통해 기대수명(MTTF) 등의 다양한 시스템의 수명특성 정보를 제공할 수 있으며 이러한 정보들은 예방정비 정책, 품질보증 정책과 같은 여러 분야에 응용될 수 있다. 또한, 구성품의 TTF 분포로 고려된 PHD의 유연성과 일반경험적 확률분포로의 우수한 근사성, 그리고 이종 구성품에 대한 고려를 통해 제시된 수명분포 모형은 광범위한 시스템에 적용할 수 있는 범용성(Versatility)을 갖는다. 현재까지  $k$ -out-of- $n$  서브시스템을 포함하는 시스템을 위한

RAP는 각 서브시스템이 동종 구성품으로 설계되는 것으로 제한한 RAPCM이었으나, 본 연구의 수명분포 모형을 통해 이종 구성품 사용을 허용하는 RAPMC를 해결할 수 있게 되었다. RAPMC는 동일한 제약 하에서 RAPCM보다 높은 신뢰도를 갖는 시스템을 설계할 수 있도록 하며, 이는 예제 시스템에 대한 수치실험을 통해 검증되었다.

향후 연구방향으로는, 첫째, 시스템의 설계는 다양한 관점에서 검토될 필요가 있다. 즉, 인공위성 등과 같이 목표하는 임무시간이 지정되는 시스템에서는 신뢰도가 적합한 지표일 수 있으나 가전제품류 등 대부분의 제품들에서는 기대수명(MTTF), 백분위 수명(Percentile life) 등과 같이 직접적인 수명시간 지표를 중요하게 고려할 수 있다. 이때, 시간의 경과에 따라 고장율이 변화되는 구성품을 갖는 시스템에서는 이러한 관점들에 따라 시스템 설계에 대한 의사결정이 달라질 수 있다. 따라서 시스템의 수명설계를 다양한 관점에서의 최적화 또는 다목적(Multi-objective) 최적화 문제로 고려할 수 있다. 둘째, 본 연구가 제안한 수명분포 모형에 기반하여 시스템의 예방정비 및 품질보증 정책을 위한 모형 개발과 같은 응용연구가 필요하다. 셋째, 현실 시스템은 운용환경에 따라 신뢰도와 수명의 향상을 위해 여러 중복전략(Redundancy strategy)을 고려하여 설계되고 있다. 즉, 본 연구는 활성중복(Active redundancy)  $k$ -out-of- $n$  시스템의 수명분포 모형을 제시하고 있으나, 시스템 설계의 대안을 확대하기 위해 TTF 분포가 PHD를 따르는 구성품을 갖는 대기중복(Standby redundancy) 시스템의 수명분포 모형의 개발이 필요하다.

## References

- [1] Murthy, D. N. P. (2006). "Product warranty and reliability". *Annals of Operations Research*, Vol. 143, No. 1, pp. 133-146.
- [2] Ministry of Science, ICT & Future Planning and Korea Internet & Security Agency (2017). "2016 Survey on the Internet Usage".
- [3] LAS PROVINCIAS (2017). "A los españoles les dura el smartphone 20 meses". <http://www.lasprovincias.es/tecnologia/internet/201703/03/espanoles-duran-smartpho-nes-meses-20170303165348-rc.html>.
- [4] Yoo, K. H. *et al.* (2015). "Reliability Prediction of Satellite by Function Analysis". *Journal of applied reliability*, Vol. 15, No. 1, pp. 44-51.
- [5] Kim, H. S. and Jeon, G. W. (2011). "A Study on Reliability Optimal Design of Satellite system (Based on MSC System's structure of KOMPSAT-2)". *Journal of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences*, Vol. 39, No. 12, pp. 1150-1159.
- [6] Kim, H. and Kim, P. (2017). "Reliability models for a non-repairable system with heterogeneous components having a phase-type time-to-failure distribution". *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 159, pp. 37-46.
- [7] Kuo, W. and Wan, R. (2007). "Recent advances in optimal reliability allocation". *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, Vol. 37, No. 2, pp. 143-156.
- [8] Soltani, R. (2014). "Reliability optimization of binary state non-repairable systems: A state of the art survey". *International Journal of Industrial Engineering Computations*, Vol. 5, No. 3, pp. 339-364.
- [9] Sleptchenko, A. and van der Heijden, M. (2016). "Joint optimization of redundancy level and spare part inventories". *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 153, pp. 64-74.
- [10] Alikar, N., Mousavi, S. M., Ghazilla, R. A. R., Tavana, M., and Olugu, E. U. (2017). "A bi-objective multi-period series-parallel inventory-redundancy allocation problem with time value of money and inflation considerations". *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 104, pp. 51-67.
- [11] Alikar, N., Mousavi, S. M., Ghazilla, R. A. R., Tavana, M., and Olugu, E. U. (2017). "Application of the NSGA-II algorithm to a multi-period inventory-redundancy allocation problem in a series-parallel system". *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 160, pp. 1-10.
- [12] Jin, T., Taboada, H., Espiritu, J., and Liao, H. (2017). "Allocation of reliability-redundancy and spares inventory under Poisson fleet expansion". *IIE Transactions*, Vol. 49, No. 7, pp. 737-751.
- [13] Joshi, G. (2016). "Efficient redundancy techniques to reduce delay in Cloud systems". Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- sets Institute of Technology.
- [14] Gertsbakh, I. B. and Shpungin, Y. (2016). *Models of network reliability: Analysis, combinatorics, and Monte Carlo*. CRC press.
- [15] Feng, H. and Dong, J. (2017). "Reliability analysis for WSN based on a modular  $k$ -out-of- $n$  system". *Journal of Systems Engineering and Electronics*, Vol. 28, No. 2, pp. 407-412.
- [16] Boland, P. J. and Proschan, F. (1983). "The reliability of  $k$ -out-of- $n$  systems". *The Annals of Probability*, Vol. 11, No. 3, pp. 760-764.
- [17] Mo, Y., Xing, L., Amari, S. V., and Dugan, J. B. (2015). "Efficient analysis of multi-state  $k$ -out-of- $n$  systems". *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 133, pp. 95-105.
- [18] Byun, J. E., Noh, H. M., and Song, J. (2017). "Reliability growth analysis of  $k$ -out-of- $N$  systems using matrix-based system reliability method". *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 165, pp. 410-421.
- [19] Kamalja, K. K. (2017). "Reliability computing method for generalized  $k$ -out-of- $n$  system." *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 323, pp. 111-122.
- [20] Mo, Y., Xing, L., Cui, L., and Si, S. (2017). "MDD-based performability analysis of multi-state linear consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems". *Reliability Engineering & System Safety* Vol. 166, pp. 124-131.
- [21] Coit, D. W. and Liu, J. C. (2000). "System reliability optimization with  $k$ -out-of- $n$  subsystems". *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, Vol. 7, No. 2, pp. 129-142.
- [22] Kim, H. S. and Jeon, G. W. (2011). "A Study on Reliability Optimal Design of Satellite system (Based on MSC System's structure of KOMPSAT-2)". *Journal of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences*, Vol. 39, No. 12, pp. 1150-1159.
- [23] Kim, H. S. and Jeon, G. W. (2012). "A reliability optimization problem of system with mixed redundancy strategies". *IE Interfaces*, Vol. 25, No. 2, pp. 153-162.
- [24] Kim, H. (2017). "Optimal reliability design of a system with  $k$ -out-of- $n$  subsystems considering redundancy strategies". *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 167, pp. 572-582.
- [25] Cheng, B. and Wang, J. (2017). "Stochastic comparison of parallel systems with heterogeneous exponential components". *Journal of Applied Probability*, Vol. 54, No. 3, pp. 970-976.
- [26] Kulturel-Konak, S., Smith, A. E., and Coit, D. W. (2003). "Efficiently solving the redundancy allocation problem using tabu search". *IIE Transactions*, Vol. 35, No. 6, pp. 515-526.
- [27] Yun, W. Y. and Kim, J. W. (2001). "Optimal redundancy allocation in hierarchical systems using genetic algorithm". *Journal of Applied Reliability*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-8.
- [28] Aghaei, M., Hamadani, A. Z., and Ardakan, M. A. (2017). "Redundancy allocation problem for  $k$ -out-of- $n$  systems with a choice of redundancy strategies". *Journal of Industrial Engineering International*, Vol. 13, No. 1, pp. 81-92.
- [29] Ghorabae, M. K., Amiri, M., and Azimi, P. (2015). "Genetic algorithm for solving bi-objective redundancy allocation problem with  $k$ -out-of- $n$  subsystems". *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 20, pp. 6396-6409.
- [30] Liang, Y. C. and Smith, A. E. (2004). "An ant colony optimization algorithm for the redundancy allocation problem (RAP)". *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 53, No. 3, pp. 417-423.
- [31] Nahas, N., Nourelfath, M., and Ait-Kadi, D. (2007). "Coupling ant colony and the degraded ceiling algorithm for the redundancy allocation problem of series-parallel systems". *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 92, No. 2, pp. 211-222.
- [32] Neuts, M. F. (1981). *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Courier Corporation.
- [33] Lang, A. (1994). "An empirical evaluation of parameter approximation methods for phase-type distributions". Ph.D. Thesis, Oregon State University.
- [34] Komárková, Z. (2012). "Phase-type approximation techniques". Ph.D. Thesis, Masarykova univerzita.
- [35] Latouche, G. and Ramaswami, V. (1999). "Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling". Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [36] Coit, D. W. (2001). "Cold-standby redundancy optimization for nonrepairable systems". *IIE Transactions*, Vol. 33, No. 6, pp. 471-478.