

SEED암호에서 S-함수에 대한 고찰

양 정 모^{†*}

중부대학교 공과대학 정보보호학과

A Study on S-Function in SEED Cryptosystem

Jeong-Mo Yang^{†*}

Dep. of information security, College in Engineering, Joongbu University

요 약

국내 블록암호표준(안)으로는 SEED암호가 있다. 이 암호는 한국정보보호진흥원(KISA)이 1998년 10월에 초안을 설계하고 같은 해 12월에 공개검증과정을 거쳐 안전성과 성능이 개선된 최종 수정안을 발표하였다. DES와는 달리 128비트 블록암호로서 여러 과정을 거쳐 2005년에 국제표준으로 확정되었다. DES와 같은 페이스텔 구조를 가진 블록암호로서 다만 입력비트블록이 DES의 두 배인 128비트로 늘어났다는 것이다. 본 논문에서는 첫째, SEED 암호의 일반적인 알고리즘을 소개하고 F-함수에서 적용되는 열쇠 값의 생성원리를 수학적으로 분석해 보았다. 둘째, S-함수의 8비트 입력 값에 대응되는 원시원소 α 의 멱승 값을 계산하는 표를 도출해 보았으며 마지막으로 G-함수 내에 설계되어져 있는 S-함수의 계산 원리를 수학적 방법으로 새로운 정리와 예제를 통해 분석해 보는 것으로 한정하였다. 이러한 과정을 통하여 현재 알려져 있는 SEED암호의 취약점을 보완할 수 있는 새로운 암호체계를 개발하는데 필요한 아이디어와 이론적인 근거를 제공하는 데 어느 정도 도움이 되고자 한다.

ABSTRACT

There is SEED cryptosystem in domestic block cipher standard. This code was drafted by the Korea Information Security Agency (KISA) in October 1998 and underwent a public verification process in December of the same year, which resulted in the final amendment to improve safety and performance.

Unlike DES, it is a 128-bit block cipher that has been passed through various processes and established in 2005 as an international standard. It is a block cipher with a pastel structure like DES, but the input bit block has been increased to 128 bits, double DES.

In this paper, first, we introduce the general algorithm of SEED cryptosystem and analyzed mathematically generating principle of key-value which is used in F-function. Secondly, we developed a table that calculates the exponent of the primitive element α corresponding to the 8-bit input value of the S-function and finally analyzed calculating principle of S-function designed in G-function through the new theorem and example. Through this course, we hope that it is to be suggest the ideas and background theory needed in developing new cryptosystem to cover the weakness of SEED cryptosystem

Keywords: primitive polynomial, F-function, G-function, S-function, Key-value

I. 서 론

1.1 기본 정의 및 정리

SEED암호 알고리즘을 이해하기 위해서 몇 가지 수학적 용어에 대한 이해와 정리가 필요하다. 이를 소개하면 다음과 같다.

정의 1.1. 임의의 소수 p 와 양의 정수 n 에 대하여 갈루아 체(Galois field) F_{p^n} 에서

$$F_{p^n}^* = F_{p^n} - \{0\} = \langle \alpha \rangle = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p^n-2}\}, \alpha^{p^n-1} = 1$$

인 원소 $\alpha \in F_{p^n}$ 을 체 F_{p^n} 의 원시원소(primitive element)라 하고 $\alpha \in F_{p^n}$ 의 체 F_p 에서의 최소다항식

$$p(x) = \min.poly_{F_p} \alpha, p(x) \in F_p[x]$$

을 F_p 위에서의 원시다항식(primitive polynomial)이라 한다[1].

일반적으로 체 K 가 체 F 의 확대체일 때 원소 $\alpha \in K$ 가 체 F 위에서 대수적(원소)이면 즉, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in F[x]$ 에 대하여

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0$$

이면 다음 세 조건을 만족하는 유일한 다항식 $p(x) \in F[x]$ 을 체 F 위에서의 α 의 최소다항식(minimum polynomial) 또는 기약다항식(irreducible polynomial)이라 하고 이를 $p(x) = \min.poly_{F} \alpha$ 또는 $p(x) = irr(\alpha, F)$ 로 나타낸다. 즉,

- i) $\deg(p(x)) \geq 1$ 이고 $p(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.
- ii) $p(\alpha) = 0$
- iii) 다항식 $f(x) \in F[x]$ 에 대하여 $F[x]$ 에서 $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow p(x) \mid f(x)$

위의 다항식 $p(x)$ 의 차수를 α 의 F 위에서의

차수라 하고 이것을 $[\alpha : F] = \deg(p(x))$ 로 나타낸다. 위의 설명에 의하면 최소다항식 또는 기약다항식 중 특별한 경우가 바로 원시다항식이다[1].

정리 1.2. 임의의 소수 p 와 양의 정수 n 에 대하여 갈루아 체 F_{p^n} 에는 $\varphi(p^n - 1)$ 개의 원시원소가 존재하고 또한 체 F_p 위의 n 차의 원시다항식은

$$\frac{\varphi(p^n - 1)}{n} \text{ 개 존재한다}[1].$$

정의 1.3. 체 F_2 위의 $f(0) \neq 0$ 인 n 차 다항식 $f(x)$ 에 대하여

$$f(x) \mid (x^e - 1), \quad 1 \leq e \leq 2^n - 1$$

인 가장 작은 양의 정수 e 을 $f(x)$ 의 위수(order)라고 하고 이것을 $\text{ord}(f(x)) = e$ 로 나타낸다[2].

예 1.1. 체 F_2 위에 주어진 다음 다항식의 위수를 구하여라.

$$(1) f(x) = x^2 + x + 1$$

$$(2) g(x) = x^4 + x^2 + 1$$

풀이.

$$(1) x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1) = (x + 1)f(x)$$

이므로 $f(x) \mid (x^3 + 1)$ 이다. 따라서

$$\text{ord}(f(x)) = 3$$

이다.

$$(2) x^6 + 1 = (x + 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x + 1)g(x)$$

이므로 $g(x) \mid (x^6 + 1)$ 이다. 따라서

$$\text{ord}(g(x)) = 6$$

이다.

다항식 $f(x)$ 가 기약일 때 다항식의 위수 $\text{ord}(f(x))$ 와 대수적 차수 $\deg(f(x))$ 는 다음 정리와 같은 관계가 있다.

정리 1.4. 체 F_2 위의 다항식 $f(x) \in F_2[x]$ 에 대하여

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

가 기약다항식이고 $f(0) \neq 0$ 일 때 α 을 체 F_{2^n} 에서의 $f(x)$ 의 근 이라고 하면 다음이 성립한다.

(1) $\text{ord}(f(x))$ 는 곱셈군 F_2^{*} 에서의 α 의 위수와 같다.

(2) $\text{ord}(f(x)) \mid (2^n - 1)$

(3) 영이 아닌 수열 $\{s_i\} \in \Omega(f(x))$ 는 주기가 모두 $\text{ord}(f(x))$ 인 순환이진 수열이다[1].

특히 위의 정리에 의하면 다항식 $f(x)$ 가 n 차 원시다항식이면 정의 1.1에서 $p=2$ 인 경우 이므로 정리 1.4의 (1)에 의하여 $\text{ord}(f(x)) = 2^n - 1$ 이다.

정의 1.5. 체 F_2 위의 n 차 원시다항식 $f(x)$ 에 의하여 생성되는 영이 아닌 수열 $\{s_i\} \in \Omega(f(x))$ 을 주기가 $2^n - 1$ 인 최대주기수열(maximal length sequence) 또는 PN수열(pseudo-noise sequence)이라 한다[2].

체 F_2 위의 다항식 $f(x) \in F_2[x]$ 에 대하여

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

가 기약다항식이고 $\text{ord}(f(x)) = e$ 일 때 $e = 2^n - 1$ 인 원시다항식은 $n = 6$ 일 때 모두 16개가 있다. 즉, $f(x)$ 가 6차인 원시다항식은

$$\begin{aligned} &x^6 + x + 1, \quad x^6 + x^4 + x^3 + x + 1, \quad x^6 + x^5 + 1 \\ &x^6 + x^5 + x^2 + x + 1, \quad x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1, \\ &x^6 + x^5 + x^4 + x + 1 \end{aligned}$$

이고 주기는 모두가 63이다. 원시다항식은 아니지만 6차 기약다항식은

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$$

과 같은 주기가 21인 다항식이 있다. 실제로 n 차

Table 1. primitive polynomial number $\lambda(n)$ of degree n

n	$\lambda(n)$	n	$\lambda(n)$
1	1	11	176
2	1	12	144
3	2	13	630
4	2	14	756
5	6	15	1800
6	6	16	2048
7	18	17	7710
8	16	18	8064
9	48	19	27594
10	60	20	24000

원시다항식의 개수 $\lambda(n)$ 는

$$\lambda(n) = \frac{\varphi(2^n - 1)}{n}$$

이며 n 차 기약다항식은 이보다 더 많다. 여기서 φ 는 오일러함수이다. n 의 값에 따라 그 개수를 나타내면 다음 Table 1과 같다[3].

예를 들면 $n = 8$ 인 경우 $\lambda(8) = \frac{\varphi(2^8 - 1)}{8}$ 이

되고 여기서

$$\begin{aligned} \varphi(2^8 - 1) &= \varphi(255) = \varphi(3 \times 5 \times 17) \\ &= \varphi(3) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(17) = 2 \times 4 \times 16 = 128 \end{aligned}$$

이 되어 $\lambda(8) = 16$ 이 된다. 8차 기약다항식은 원시다항식 16개를 포함하여 이보다 더 많다.

1.2 SEED암호 알고리즘

알려진 SEED알고리즘의 전체 구조는 변형된 페이스텔 구조로 이루어져 있으며 128비트의 평문입력 블록을 128비트 열쇠로부터 생성된 16개의 64비트의 회전열쇠를 사용하여 128비트의 암호문을 출력한다. 이 알고리즘의 전체 구조는 블록의 크기만 다를 뿐 DES의 구조와 같으며 자세한 구조는 Fig. 1과

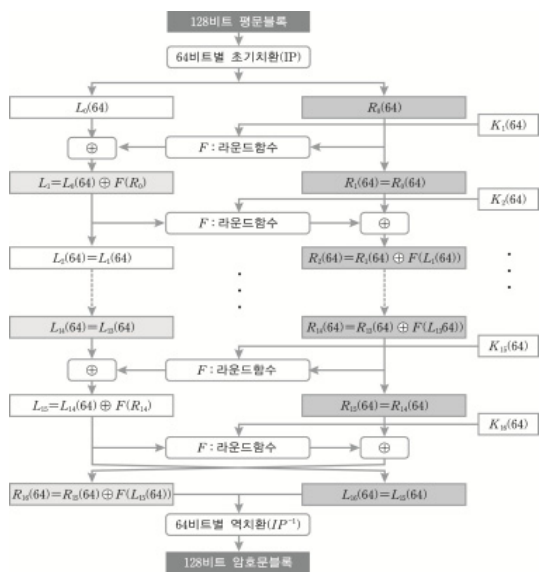


Fig. 1. The structure of SEED cryptosystem

같다.

[암호화과정]

1. 128비트의 평문블록을 반으로 나누어 64비트 블록을 L_0 와 R_0 라 하자.

2. DES와 같은 과정을 거쳐 16회전을 하여 최종 출력 128비트 암호문 (L_{16}, R_{16}) 을 얻는다.

즉, $0 \leq k \leq 7$ 에 대하여

$$L_{2k+1}(64) = L_{2k}(64) \oplus F(R_{2k}), R_{2k+1}(64) = R_{2k}(64),$$

$$L_{2k+2}(64) = L_{2k+1}(64),$$

$$R_{2k+2}(64) = R_{2k+1}(64) \oplus F(L_{2k+1}(64))$$

이다. 단, 2의 공식에 의하여 마지막 블록인 R_{16} 과 L_{16} 을 구하되 마지막 라운드에서만 R_{16} 은 왼쪽블록에 위치하고 L_{16} 은 오른쪽 블록에 위치한다.

1.2.1 F-함수 구조

Fig. 1에서 사용된 F-함수는 64비트의 열쇠를 이용하여 입력된 64비트를 64비트로 출력하는 함수로서 $i (1 \leq i \leq 16)$ 회전에서의 구조는 Fig. 2와 같다. 즉, 64비트를 32비트의 2개의 블록 (C, D) 로 나누어 입력받아서 32비트의 2개의 블록 (C', D') 을 출력하는 함수이다. 여기서, $K_i = (K_{i,0}, K_{i,1})$ 는 64비트 i 회전 열쇠이고 연산 \boxplus 는 $a \boxplus b \equiv a + b \pmod{32}$ 로 정의한다.

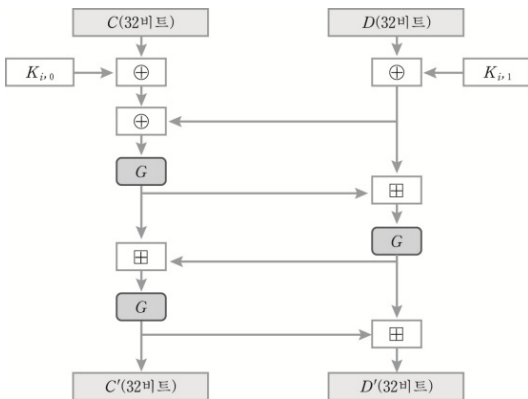


Fig. 2. The structure of F-function

1.2.2 G- 함수 적용순서

Fig.2의 F-함수구조에서 G는 아래 소개될 두개의 S- 함수를 이용하여 32비트를 32비트로 보내는 함수이다. G- 함수를 적용하는 순서는 다음과 같다(Fig. 3).

- (1) 32비트 입력블록 X 을 4개의 8비트 블록 $X = (X_3, X_2, X_1, X_0)$ 으로 비트 순서대로 분할하여 2개의 S- 함수 S_1, S_2 을

$$S = (S_2, S_1, S_2, S_1)$$

순서로 적용시켜

$$Y = S(X) = \{S_2(X_3), S_1(X_2), S_2(X_1), S_1(X_0)\} \\ = (Y_3, Y_2, Y_1, Y_0) \text{ 을 얻는다.}$$

- (2) 4 개의 확장된 32비트 S- 함수

$$SS_0 = Y_0 \otimes m_3 \parallel Y_0 \otimes m_2 \parallel Y_0 \otimes m_1 \parallel Y_0 \otimes m_0$$

$$SS_1 = Y_1 \otimes m_0 \parallel Y_1 \otimes m_3 \parallel Y_1 \otimes m_2 \parallel Y_1 \otimes m_1$$

$$SS_2 = Y_2 \otimes m_1 \parallel Y_2 \otimes m_0 \parallel Y_2 \otimes m_3 \parallel Y_2 \otimes m_2$$

$$SS_3 = Y_3 \otimes m_2 \parallel Y_3 \otimes m_1 \parallel Y_3 \otimes m_0 \parallel Y_3 \otimes m_3$$

들을 XOR하여 $Z = (Z_3, Z_2, Z_1, Z_0)$ 을 구한다. 즉,

$$Z = SS_0(X_0) \oplus SS_1(X_1) \oplus SS_2(X_2) \oplus SS_3(X_3)$$

이고 비트 순서대로 XOR하기 때문에

$$Z_3 = (Y_0 \otimes m_3) \oplus (Y_1 \otimes m_0) \oplus (Y_2 \otimes m_1) \oplus (Y_3 \otimes m_2)$$

$$Z_2 = (Y_0 \otimes m_2) \oplus (Y_1 \otimes m_3) \oplus (Y_2 \otimes m_0) \oplus (Y_3 \otimes m_1)$$

$$Z_1 = (Y_0 \otimes m_1) \oplus (Y_1 \otimes m_2) \oplus (Y_2 \otimes m_3) \oplus (Y_3 \otimes m_0)$$

$$Z_0 = (Y_0 \otimes m_0) \oplus (Y_1 \otimes m_1) \oplus (Y_2 \otimes m_2) \oplus (Y_3 \otimes m_3)$$

가 된다. 단, 여기서

$$m_0 = 0xfc = 11111100 \quad ,$$

$$m_1 = 0xf3 = 11110011 \quad ,$$

$$m_2 = 0xcf = 11001111 \quad ,$$

$$m_3 = 0x3f = 00111111$$

이고 $0x$ 는 그 뒤에 나오는 수가 16진수임을 나타낸다. 또, \otimes 은 비트단위 곱 연산이고 \parallel 는 연결이다.

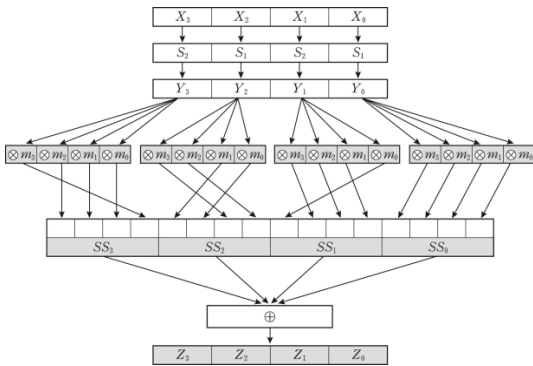


Fig. 3. The structure of G-function

1.2.3 S- 함수

G- 함수에서 사용되는 두 개의 S- 함수는 모두 부울함수(Boolean function)를 사용하고 있다. 즉, S- 함수는 전단사함수 x^n 의 선형변환

$$S(x) = A \cdot x^n \oplus b \quad (S(0) \neq 0, S(1) \neq 1)$$

으로 사용한다. 단,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이고 $x = (x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)^t$

$$= x_7 2^7 + x_6 2^6 + \dots + x_1 2^1 + x_0 2^0$$

값으로 약속한다.

이를 근거로 S- 함수 S_1 과 S_2 을 다음과 같이 정의한다.

정의 1.6[S- 함수 S_1 과 S_2]

위에서 지수 n 은 전단사함수 x^n ($0 \leq n \leq 255$)에서 DC 및 LC의 특성에 가장 우수한 2개의 n 값으로 247과 251을 선택하고

체 $GF(2^8)$ 위에서의 지수 승을 구하기 위해 이 위의 모든 원소를 원시원소 α (원시다항식 $x^8 + x^6 + x^5 + x + 1$ 의 근)의 멱승으로 표현한다. 이 때 두 개의 S- 함수 S_1 과 S_2 을 다음과 같이 정의한다. 즉,

$$\begin{aligned} S_1(x) &= A^{(1)} \cdot x^{247} \oplus b_1 \\ &= (P_7, P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0)^t \\ &= P_7 2^7 + P_6 2^6 + P_5 2^5 + \dots + P_2 2^2 + P_1 2^1 + P_0 \\ S_2(x) &= A^{(2)} \cdot x^{251} \oplus b_2 \\ &= (Q_7, Q_6, Q_5, Q_4, Q_3, Q_2, Q_1, Q_0)^t \\ &= Q_7 2^7 + Q_6 2^6 + Q_5 2^5 + \dots + Q_2 2^2 + Q_1 2^1 + Q_0 \end{aligned}$$

이다. 단, 행렬 $A^{(1)}$ 은 행렬 A 의 2행과 3행, 4행과 6행을 교환한 행렬이고 행렬 $A^{(2)}$ 은 행렬 A 의 1행과 5행, 6행과 7행을 교환한 행렬이다. 또한

$$b_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)^t = 169,$$

$$b_2 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)^t = 56$$

으로 약속한다.

위의 정의에 의하면 행렬 $A^{(1)}$ 과 $A^{(2)}$ 는 다음과 같다. 즉,

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이다.

II. 열쇠생성 알고리즘

SEED암호에 사용되는 회전열쇠 생성과정은 다음과 같다.

[회전열쇠 생성과정]

1단계 : 128비트의 열쇠를 4개의 워드(32비트) (A, B, C, D) 로 나눈다.

2단계:

$$K_{1,0} = G(A + C - KC_0), K_{1,1} = G(B - D + KC_0)$$

을 계산하여 1라운드 열쇠를 생성한다.

여기서 KC_0 은 회전상수이다.

3단계: $B \parallel A = (B \parallel A) \gg 8$ 이동하여 새로운 (A, B, C, D) 을 구성한다. 여기서

$B \parallel A = (B \parallel A) \gg 8$ 은 $B \parallel A$ 을 오른쪽으로 8비트 회전시킨 64비트이다.

4단계 :

$$K_{2,0} = G(A + C - KC_1), K_{2,1} = G(B - D + KC_1)$$

을 계산하여 2라운드 열쇠를 생성한다. 여기서 KC_1 은 회전상수이다.

5단계 : $D \parallel C = (D \parallel C) \ll 8$ 이동하여 새로운 (A, B, C, D) 을 구성한다. 여기서

$D \parallel C = (D \parallel C) \ll 8$ 은 $D \parallel C$ 을 왼쪽으로 8비트 회전시킨 64비트이다.

6단계 : 위의 2단계에서 5단계의 과정을 16회전 열쇠를 생성할 때까지 반복한다.

단, KC_i 는 황금비의 소수부분으로부터 생성된 회전상수이며 다음과 같이 정의한다. 즉,

$$KC_0 = \text{int}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2^{32}\right) = 0x9e3779b9$$

$$KC_i = KC_{i-1} \ll 1 \quad (1 \leq i \leq 16)$$

[수학적 분석]

SEED암호에서 설계한 열쇠는 순환하지 않는 황금비와 관련된 무리수를 선택하여 설계하였다. 즉, 위에서

설계된 $\text{int}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2^{32}\right)$ 은 무리수

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 을 2진수로 나타낸 것 중 32비트 정수부

분만 나타낸다는 의미이다. 즉,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887498948 \dots$$

$$= 0.1001111000110111011111001101111001 \dots \quad (2)$$

이므로

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2^{32}$$

$$= 0.1001111000110111011111001101111001 \dots \quad (2)$$

$\times 2^{32}$

$$= 10011110001101110111110011011110.01 \dots \quad (2)$$

이 되어 정수부분만 나타내면

$$\text{int}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2^{32}\right)$$

$$= 10011110001101110111110011011110 \quad (2)$$

이다. 이를 16진수로 나타내면

$$KC_0 = \text{int}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2^{32}\right) = 0x9e3779b9 \quad \text{이}$$

다.

6단계에서 정의한 회전상수 KC_i 을 구체적으로 나열하면 다음 Table 2와 같다.

Table 2. Round constant KC_i

$KC_0 = 0x9e3779b9$	$KC_8 = 0x3779b99e$
$KC_1 = 0x3c6ef373$	$KC_9 = 0x6ef3733c$
$KC_2 = 0x78dde6e6$	$KC_{10} = 0xdd6e678$
$KC_3 = 0xf1bbcdcc$	$KC_{11} = 0xbbcdccf1$
$KC_4 = 0xe3779b99$	$KC_{12} = 0x779b99e3$
$KC_5 = 0xc6ef3733$	$KC_{13} = 0xef3733c6$
$KC_6 = 0x8dde6e67$	$KC_{14} = 0xde6e678d$
$KC_7 = 0x1bbcdccf$	$KC_{15} = 0xbcdccf1b$

III. 주요 정리와 예제

[수학적 분석]

SEED암호에서 S -함수를 계산하는 과정에서 8비트 입력 벡터 x 에 대하여 이를 10진수로 변환한 값을 i 라 했을 때 이에 대응하는 α^n 의 n 값을 알아야 S -함수의 결과 값을 도출할 수 있다. 먼저, S -함수를 계산하는 전 단계인 8비트 입력벡터를 10진수 i 로 변환하는 방법에 대하여 살펴본다.

8비트 입력벡터의 경우의 수는 모두 $2^8 = 256$ 가지이므로 이 입력벡터는 다음과 같이 구한다. 즉, 8비트 입력 벡터 $x \in GF(2^8)$ 에 대하여 함수 T 을 다음과 같이 정의하여 i 값을 계산한다.

$$T: GF(2^8) \rightarrow i,$$

$$\begin{aligned}
 T(x) &= (a_7, a_6, \dots, a_1, a_0)^t \\
 &= a_7 2^7 + a_6 2^6 + \dots + a_1 2^1 + a_0 = i, \\
 x &= a_7 \alpha^7 + \dots + a_1 \alpha^1 + a_0 \in GF(2^8)
 \end{aligned}$$

단, 체 $GF(2^8) = F_2(\alpha)$

$$\begin{aligned}
 &= \{a_7 \alpha^7 + \dots + a_1 \alpha^1 + a_0 \mid a_7, a_6, \dots, a_1, a_0 \in F_2\} \\
 &= \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{254}\}, \\
 GF^*(2^8) &= GF(2^8) - \{0\} = \langle \alpha \rangle \\
 &= \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{254}\}, \alpha^{255} = 1, \\
 \alpha^8 &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha + 1
 \end{aligned}$$

이다. 결론적으로 체 F_2 위에서 정의된 갈로아체 $GF(2^8)$ 의 모든 원소 $x = \alpha^n$ ($0 \leq n \leq 254$) 에 대하여

$$\alpha^n = a_7 \alpha^7 + a_6 \alpha^6 + \dots + a_1 \alpha^1 + a_0$$

로 나타내었을 때 이에 대응하는 계수들을 순서대로 나열한 8비트 $(a_7 a_6 \dots a_1 a_0)$ 을 10진수로 나타낸 것이 i 값이 된다(표 6). 이 표는 SEED암호에서 S - 함수를 계산하는 데 유용하다.

예 3.1 체 F_2 위에서의 8차 원시다항식

$$f(x) = x^8 + x^6 + x^5 + x + 1$$

에 대하여 이 다항식의 원시원소를 $\alpha \in F_{2^8}$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha + 1 = 0, \\
 \alpha^8 &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha + 1
 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
 F_{2^8} - \{0\} &= \langle \alpha \rangle = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{254}\}, \\
 \alpha^{255} &= 1
 \end{aligned}$$

이다. 원시원소 α 의 멱승 값 n 에 대응되는 이진벡터를 구하기 위해 α 의 멱승 값을 표현해 보면

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 &= 0 \cdot \alpha^7 + 0 \cdot \alpha^6 + 0 \cdot \alpha^5 + 0 \cdot \alpha^4 \\
 &\quad + 0 \cdot \alpha^3 + 0 \cdot \alpha^2 + 1 \cdot \alpha^1 + 0 \\
 \alpha^2 &= 0 \cdot \alpha^7 + 0 \cdot \alpha^6 + 0 \cdot \alpha^5 + 0 \cdot \alpha^4 \\
 &\quad + 0 \cdot \alpha^3 + 1 \cdot \alpha^2 + 0 \cdot \alpha^1 + 0
 \end{aligned}$$

등으로 나타낼 수 있으므로 α^1 의 1에 대응되는 이진벡터는 $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ 이고 α^2 의 2에 대응되는 이진벡터는 $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ 가 된다. 이를 10진법으로 표현하면 α^1 의 1에 대응하는 $i = 2$ 이고 α^2 의 2에 대응하는 $i = 4$ 가 된다. 이렇게 하면 α^7 의 7에 대응되는 이진벡터는 $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 이고 α^8 의 8에 대응되는 이진벡터는 $\alpha^8 = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 &(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
 &+ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
 &= (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)
 \end{aligned}$$

와 같이 계산한다. 같은 방법으로

$$\alpha^9 = \alpha(\alpha^8) = \alpha(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha + 1) = \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha$$

가 되어 이진벡터는 α^8 의 8에 대응되는 이진벡터의 성분을 왼쪽으로 1비트씩 이동하면 된다. 또

$$\begin{aligned}
 \alpha^{10} &= \alpha(\alpha^9) = \alpha(\alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha) = \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^3 + \alpha^2 \\
 &= (\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha + 1) + \alpha^7 + \alpha^3 + \alpha^2 \\
 &= \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1
 \end{aligned}$$

가 되어 α^{10} 의 10에 대응되는 이진벡터는 α^9 의 9에 대응되는 이진벡터를 좌측으로 1비트씩 이동하고 8번째 비트는 버리고 대신 7번째, 6번째, 두 번째, 첫 번째 성분에 모두 1을 더하면 된다.

다음 정리와 예제는 이 논문의 주요 정리와 예로서 S - 함수를 계산하는 방법을 수학적으로 제시한다.

정리 3.1 8비트 입력블록 $X = (x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0)$ 일 때 정의 1.6에서 주어진 조건에 대하여

$$\begin{aligned}
 S_1(x) &= A^{(1)} \cdot x^{247} \oplus b_1 \\
 &= (P_7, P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0)^t \\
 &= P_7 2^7 + P_6 2^6 + P_5 2^5 + \dots + P_2 2^2 + P_1 2^1 + P_0 \\
 S_2(x) &= A^{(2)} \cdot x^{251} \oplus b_2 \\
 &= (Q_7, Q_6, Q_5, Q_4, Q_3, Q_2, Q_1, Q_0)^t \\
 &= Q_7 2^7 + Q_6 2^6 + Q_5 2^5 + \dots + Q_2 2^2 + Q_1 2^1 + Q_0
 \end{aligned}$$

에 의해 계산되어진다.

증명. 주어진 입력블록을 $X=(x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0)$ 라 하자. 이 때 주어진 8비트 이진벡터를 다음과 같이 10진수로 계산한다. 즉, 정의 1.6에 의하여

$$\begin{aligned}
 x &= (x_7, x_6, \dots, x_2, x_1, x_0)^t \\
 &= x_7 \times 2^7 + x_6 \times 2^6 + \dots + x_2 \times 2^2 + x_1 \times 2^1 + x_0
 \end{aligned}$$

이다. 이 10진수로 나타낸 값을 i 라 하면 이에 대응하는 원시원소 α 의 멱승 값을 n 이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}
 S_1(i) &= A^{(1)} \cdot i^{247} \oplus b_1 = A^{(1)} \cdot (\alpha^n)^{247} \oplus b_1 \\
 &= A^{(1)} \cdot \alpha^{247n} \oplus b_1 \\
 &= A^{(1)} \cdot \alpha^{255m+k} \oplus b_1, \\
 (247n &= 255m+k, 0 \leq k \leq 254) \\
 &= A^{(1)} \cdot \alpha^k \oplus b_1, (\because \alpha^{255} = 1)
 \end{aligned}$$

이다. 여기에서 α^k 의 k 에 대응되는 $i=c$ 이라 하고 이를 Table 6에서 찾아 이진벡터로 나타낸 것을 $c=(c_7, c_6, \dots, c_2, c_1, c_0)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 S_1(i) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_7 \\ c_6 \\ c_5 \\ c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (P_7, P_6, \dots, P_2, P_1, P_0)^t \\
 &= P_7 \times 2^7 + P_6 \times 2^6 + \dots + P_2 \times 2^2 + P_1 \times 2^1 + P_0 \\
 &= y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{단, } P_7 &= c_7 + c_3 + c_1 + 1, \\
 P_6 &= c_7 + c_6 + \dots + c_2 + c_1, \\
 P_5 &= c_7 + c_2 + c_0 + 1, \quad P_4 = c_6 + c_1, \\
 P_3 &= c_6 + c_2 + c_0 + 1, \quad P_2 = c_5 + c_0, \quad P_1 = c_7 + c_3, \\
 P_0 &= c_4 + c_2 + 1, \quad P_i \pmod{2} \quad (0 \leq i \leq 7)
 \end{aligned}$$

이다. 같은 방법으로 $S_2(x)$ 도 구할 수 있다. \square

예 3.2 8비트 입력블록 $X=(10010011)$ 일 때 $S_1(X)$ 을 구하여라.

풀이. $x=(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)^t$
 $= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 + 1 = 147$

이므로 입력 값 $x=147$ 에 대응되는 원시원소 α 의 멱승으로 나타내면 $\alpha^{128} = 147 = i$ (Table 6 참조)이므로 147에 대응하는 원시근 α 의 멱승 값 $n=128$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 S_1(147) &= S_1(\alpha^{128}) = A^{(1)}(\alpha^{128})^{247} \oplus b_1 = A^{(1)}\alpha^{31616} \oplus b_1 \\
 &= A^{(1)} \cdot (\alpha^{255})^{123} \cdot \alpha^{251} \oplus b_1 = A^{(1)} \cdot \alpha^{251} \oplus b_1. \\
 (\because \alpha^{255} &= 1)
 \end{aligned}$$

한편 α^{251} 의 251에 대응되는 $i=211$ 이고 이를 이진 벡터로 나타내면 (11010011)이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 S_1(147) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)^t \\
 &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 174
 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$S_1(X) = S_1(147) = 174 = (10101110) = Y$$

이다.

실제로 참고문헌 [2]의 표 3.27(p. 147)에 의하

면 $S_1(147) = 174$ 이다.

IV. 맺음말

본 논문에서는 SEED암호에서 사용되는 열쇠 값의 생성원리와 S-함수의 계산 원리를 수학적으로 분석해 보았다. 또한 S-함수 계산을 원활하게 할 수 있도록 도움을 주는 표를 고안해 보았다(참고문헌 [2]의 표 3.27의 결과). 이 논문의 목적은 지금까지 알려져 있는 SEED암호의 핵심인 열쇠 값 생성과정과 S-함수의 결과 값을 도출해 내는 방법을 수학적인 관점에서 분석하는 것으로 한정하였다. 나머지 효율성과 안전도 그리고 경제적인 측면 등은 보안 구현 전문가의 몫으로 돌리겠다. 향후 이를 통해 이 암호 체계의 취약점을 보완할 수 있는 새로운 암호체계를 개발하거나 새로운 암호시스템을 설계하는 데 필요한 이론적 배경과 아이디어를 제공하는데 도움이 되었으면 하는 것이다.

References

- [1] Seung-an Park, "Algebra and Cryptography," Kyeongmoon Press, pp. 210-218, July, 2000
- [2] Jeong-mo Yang, "Cryptography," Kyeongmoon Press, pp. 140-149, Mar. 2013
- [3] Min-surp Lee, "Morden Cryptography," Kyowoo Press, pp. 143-150, 212-213, Mar. 2007
- [4] Rainer A. Rueppel, "Analysis and Design of Stream Ciphers", Springer-Verlag, pp. 26-30, 1986
- [5] Jennifer Seberry, Josef Pieprzyk, "Cryptography(An Introduction to Computer Security), Prentice Hall, pp. 7-44, 1989

Table 3. value i corresponding power value n of α

n of α^n	binary vector	i	n of α^n	binary vector	i
0	0000001	1	64	1110001	225
1	0000010	2	65	1010001	161
2	0000100	4	66	0010001	33
3	00001000	8	67	0100010	66
4	00010000	16	68	1000100	132
5	00100000	32	69	0110101	107
6	01000000	64	70	1101010	214
7	10000000	128	71	1100111	207
8	01100011	99	72	1111101	253
9	11000110	198	73	10011001	153
10	11101111	239	74	01010001	81
11	10111101	189	75	10100010	162
12	00011001	25	76	00100111	39
13	00110010	50	77	01001110	78
14	01100100	100	78	10011100	156
15	11001000	200	79	01011011	91
16	11110011	243	80	10110110	182
17	1000101	133	81	00001111	15
18	01101001	105	82	00011110	30
19	11010010	210	83	00111100	60
20	11000111	199	84	01111000	120
21	11101101	237	85	11110000	240
22	10111001	185	86	10000111	131
23	00010001	17	87	01100101	101
24	00100010	34	88	11001010	202
25	01000100	68	89	11110111	247
26	10001000	136	90	10001101	141
27	01110011	115	91	01111001	121
28	11100110	230	92	11110010	242
29	10101111	175	93	10000111	135
30	00111101	61	94	01101101	109
31	01111010	122	95	11011010	218
32	11110100	244	96	11010111	215
33	10001011	139	97	11001101	205
34	01110101	117	98	11111001	249
35	11101010	234	99	10010001	145
36	10110111	183	100	01000001	65
37	00001101	13	101	10000010	130
38	00011010	26	102	01100111	103
39	00110100	52	103	11001110	206
40	01101000	104	104	11111111	255
41	11010000	208	105	10011101	157
42	11000011	195	106	01011001	89
43	11100101	229	107	10110010	178
44	10101001	169	108	00000111	7
45	00110001	49	109	00001110	14
46	01100010	98	110	00011100	28
47	11000100	196	111	00111000	56
48	11101011	235	112	01110000	112
49	10110101	181	113	11100000	224
50	00001001	9	114	10100011	163
51	00010010	18	115	00100101	37
52	00100100	36	116	01001010	74
53	01001000	72	117	10010100	148
54	10010000	144	118	01001011	75
55	01000011	67	119	10010110	150
56	10000110	134	120	01001111	79
57	01101111	111	121	10011110	158
58	11011110	222	122	01011111	95
59	11011111	223	123	10111110	190
60	11011101	221	124	00011111	31
61	11011001	217	125	00111110	62
62	11010001	209	126	01111100	124
63	11000001	193	127	11111000	248

n of α^n	binary vector	i	n of α^n	binary vector	i
128	10010011	147	192	00001011	11
129	01000101	69	193	00010110	22
130	10001010	138	194	00101100	44
131	01110111	119	195	01011000	88
132	11101110	238	196	10110000	176
133	10111111	191	197	00000011	3
134	00011101	29	198	00000110	6
135	00111010	58	199	00001100	12
136	01110100	116	200	00011000	24
137	11101000	232	201	00110000	48
138	10110011	179	202	01100000	96
139	00000101	5	203	11000000	192
140	00001010	10	204	11100011	227
141	00010100	20	205	10100101	165
142	00101000	40	206	00101001	41
143	01010000	80	207	01010010	82
144	10100000	160	208	10100100	164
145	00100011	35	209	00101011	43
146	01000110	70	210	01010110	86
147	10001100	140	211	10101100	172
148	01111011	123	212	00111011	59
149	11110110	246	213	01110110	118
150	10001111	143	214	11101100	236
151	01111101	125	215	10111011	187
152	11111010	250	216	00010101	21
153	10010111	151	217	00101010	42
154	01001101	77	218	01010100	84
155	10011010	154	219	10101000	168
156	01010111	87	220	00110011	51
157	10101110	174	221	01100110	102
158	00111111	63	222	11001100	204
159	01111110	126	223	11111011	251
160	11111100	252	224	10010101	149
161	10011011	155	225	01001001	73
162	01010101	85	226	10010010	146
163	10101010	170	227	01000111	71
164	00110111	55	228	10001110	142
165	01101110	110	229	01111111	127
166	11011100	220	230	11111110	254
167	11011011	219	231	10011111	159
168	11010101	213	232	01011101	93
169	11001001	201	233	10111010	186
170	11110001	241	234	00010111	23
171	10000001	129	235	00101110	46
172	01100001	97	236	01011100	92
173	11000010	194	237	10111000	184
174	11100111	231	238	00010011	19
175	10101101	173	239	00100110	38
176	00111001	57	240	01001100	76
177	01110010	114	241	10011000	152
178	11100100	228	242	01010011	83
179	10101011	171	243	10100110	166
180	00110101	53	244	00101111	47
181	01101010	106	245	01011110	94
182	11010100	212	246	10111100	188
183	11001011	203	247	00011011	27
184	11110101	245	248	00110110	54
185	10001001	137	249	01101100	108
186	01110001	113	250	11011000	216
187	11100010	226	251	11010011	211
188	10100111	167	252	11000101	197
189	00101101	45	253	11101001	233
190	01011010	90	254	10110001	177
191	10110100	180	255	00000001	1

..... <저자소개>



양 정 모(Jeong-Mo Yang) 정회원

1984년 2월: 동국대학교 사범대 수학과 졸업 이학사

1989년 2월: 동국대학교 대학원 수학과 졸업 이학석사

1997년 2월: 단국대학교 대학원 수학과 졸업 이학박사

1995년~현재: 중부대학교 공과대학 정보보호학과 정교수, 한국정보보호학회 부회장/이사

<관심분야> 암호수학, 정보보호, 암호학, 암호알고리즘 설계