

강건 절점위치 유한요소법을 이용한 수중 예인 케이블의 비선형 거동해석

이은택¹·고광수¹·안형택^{1,†}·김성일²·천승용²·김정석³·이병희³
울산대학교 조선해양공학부¹
국방과학연구소 소나체계개발단²
(주)한화³

Nonlinear Analysis of Underwater Towed Cable Using Robust Nodal Position Finite Element Method

Euntaek Lee¹·Gwangsoo Go¹·Hyung Taek Ahn^{1,†}·Seongil Kim²·Seung Yong Chun²·Jung Suk Kim³·Byeong Hee Lee³
School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan, Ulsan, Korea¹
Agency for Defense Development, SONAR System²
Hanwha Corporation³

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

A motion analysis of an underwater towed cable is a complex task due to its nonlinear nature of the problem. The major source of the nonlinearity of the underwater cable analysis is that the motion of the cable involves large rigid-body motion. This large rigid-body motion makes difficult to use standard displacement-based finite element method. In this paper, the authors apply recently developed nodal position-based finite element method which can deal with the geometric nonlinearity due to the large rigid-body motion. In order to enhance the stability of the large-scale nonlinear cable motion simulation, an efficient time-integration scheme is proposed, namely predictor/multi-corrector Newmark scheme. Three different predictors are introduced, and the best predictor in terms of stability and robustness for impulsive cable motion analysis is proposed. As a result, the nonlinear motion of underwater cable is predicted in a very efficient manner compared to the classical finite element of finite difference methods. The efficacy of the method is demonstrated with several test cases, involving static and dynamic motion of a single cable element, and also under water towed cable composed of multiple cable elements.

Keywords : Cable dynamics(케이블 동역학), Towed cable(예인 케이블), Geometric nonlinearity(기하학적 비선형성), Nodal Position Finite Element Method(NP-FEM, 절점위치유한요소법), Predictor/Multi-corrector(예측자/다중수정자)

1. 서론

수중 케이블에 의하여 견인되는 물체(예인체)의 거동을 예측하는 문제는 해양 구조물 계류(mooring) 시스템의 설계 및 거동 해석, 수중 탐사용 원격제어 수중로봇(ROV: Remotely Operated underwater-Vehicle)의 거동 예측 등 여러 조선해양 산업 분야에 적용이 가능하기에 그 역할이 굉장히 중요하다 (Kim, et al., 2009; Lee & Ahn, 2015). 그럼에도 불구하고, 수중 케이블 동역학이 가지는 특유의 비선형성과 다양한 유체역학 및 구조역학적 특성을 가지는 수중케이블의 거동의 효과적인 예측을 위하여서

는 현재의 유한차분법 혹은 유한요소법 기반의 방법론으로는 일반적인 적용에는 한계가 있으며 이에 대한 지속적인 연구개발이 필요한 실정이다 (Kim, et al., 2009; Lee & Ahn, 2015; Shin, 1990).

예인체의 거동을 정확하게 예측하려면 우선 예인 케이블의 거동을 정확하게 예측하는 것이 필요하다. 예인 케이블의 거동 특성은 케이블 탄성에 의한 효과와 케이블의 대 변위 및 강체 회전 이 결합되어 있는 강한 비선형 거동인 것으로 알려져 있다. 일반적인 구조 동역학에서 거론하는 비선형성은 크게 세 가지로 대별될 수 있다 (Wriggers, 2008). 첫 번째로, 보통의 경우 구조물 자체가 탄성 영역을 지나 소성영역까지 대 변형(large deformation)

이 진행될 때 발생하는 재료 자체의 비선형성을 들 수 있다. 두 번째로, 보통의 유체-구조 연성해석에서 발생하는 경계조건의 비선형성을 들 수 있다. 세 번째로는, 초기 구조물의 위치로부터 대형 변위(large displacement)가 발생할 경우, 구조물의 초기 자세를 기준으로 정의된 변위-변형률의 관계가 더 이상 선형적이지 않게 됨으로 인한 기하학적 비선형성이 발생한다.

기하학적 비선형성에 대한 이해를 도모하기 위하여 대표적인 예를 Fig.1에 나타내었다. Fig. 1과 같이 회전 자유도에 대한 강성 c 를 가지는 회전 스프링으로 지지되는 길이가 l 인 강체 요소를 상정할 수 있다. 초기에 강성 요소는 수평방향으로 정렬되어 있다가, 강성 빔의 오른쪽 끝에 수직방향으로 작용하는 힘 F 에 의하여 회전각도 θ 만큼 회전된 상황을 도식화 하였다. 이때 회전 중심 위치로부터의 강체요소의 끝단까지의 모멘트 암의 길이를 $l\cos\theta$ 와 같이 표현하면, 회전중심에 대한 모멘트 평형 관계는 식 (1)과 같이 회전각도 θ 에 대한 비선형 관계식으로 표현된다.

$$c\theta = Fl\cos\theta \quad (1)$$

본 문제에서는 일체의 재료 비선형성이나, 경계조건의 비선형성은 고려되지 않았다. 따라서 식 (1)에 나타난 모멘트 평형 관계식에서 표현되는 비선형성은 강체 요소의 회전에 의하여 동반된 대 변위(large displacement)에 기인한 순수 기하학적 비선형성을 나타낸다. 만약 회전각도 θ 가 매우 작을 경우, $\cos\theta \approx 1$ 과 같은 관계가 성립되므로 θ 와 F 의 관계는 식 (2)와 같이 단순화 할 수 있으며, θ 가 매우 작다는 조건하에 선형적 관계로 표현될 수도 있다.

$$c\theta = Fl \quad (2)$$

기하학적 비선형성의 영향에 대하여 정량적인 비교를 위하여, Fig. 2에 강체 요소의 회전 각도별로 기하학적 비선형성을 고려한 식 (1)의 결과와, 그렇지 않고 선형화 한 식 (2)을 이용하여 회전각도에 대응하는 외력의 변화추이를 도식화 하였다. 그림에서 보이는 바와 같이 강체 요소의 회전각도가 초기 수평 정렬로부터 30° 이상 벌어질 경우 기하학적 관계식은 완전히 다른 거동을 보이는 것을 확인할 수 있다. 본 논문에서 해석하고자 하는 케이블 요소는 초기에 수직으로 내려진 정렬 자세로부터, 고속에 인의 경우 거의 수 표면과 평행하게 정렬될 정도로 0°~90°사이의 대회전과 대변위를 경험하게 된다. 따라서 이러한 대변위에 의하여 발생하는 기하학적 비선형성을 효과적으로 표현할 수 있는 수치 방법의 적용은 필수적인 요소임을 확인할 수 있다.

본 논문에서 다루고자 하는 비선형 케이블 해석은 위에서 기술한 기하학적 비선형성을 효과적으로 고려하는 케이블 동역학 해석 기법의 핵심 요소인 공간차분 방법과 시간적분 방법에 대하여 자세히 기술하였다.

현재 주류를 이루는 케이블 동역학 해석의 방법론으로서 유한차분법(FDM, Finite Difference Method)을 기반으로 케이블의 자세를 미지수로 해석하고 있다 (Park & Jung, 2002; Shin,

1990). 하지만 유한차분법을 기반으로 한 예측방법은 구조적으로 다양한 물성치를 가지는 케이블이나, 케이블의 유체역학적 특성을 변화시키기 위하여 케이블 전체 혹은 일부 구간에 페어링(fairing)과 같은 부가물이 적용되어 있는 경우에는 일반적으로 적용가능하기가 어려운 한계를 가지고 있다. 이러한 한계를 극복하기 위하여 유한요소법 기반의 방법론이 적용되고 있다 (Howell, 1992). 하지만, 전통적인 변위기반(displacement-based) 유한요소법의 경우 미지수가 케이블 위치(position)가 아니라 대개 초기 자세로 정의되는 특정 기준점으로 부터의 변위(displacement)를 미지수로 하고 있다. 따라서 케이블이 기준 자세로부터 대형 변위를 가지는 기하학적 비선형성이 중요한 문제의 경우, 다단계 해석이 수반되어야 하며 관련한 해석 방법이 복잡해지는 단점이 있다.

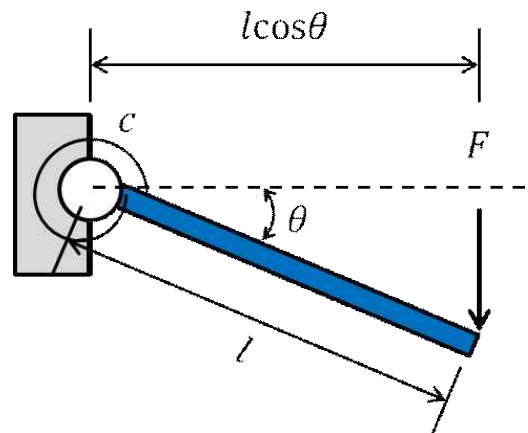


Fig. 1 A bar attached to a elastic rotational spring

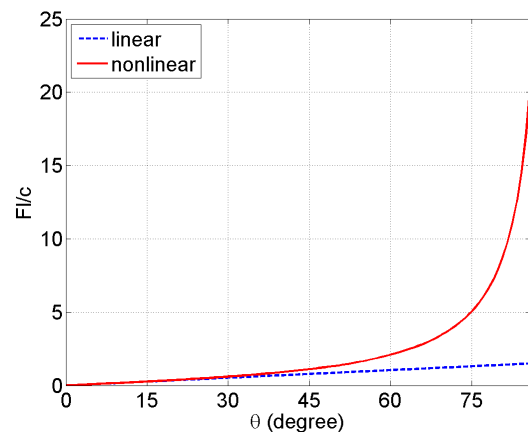


Fig. 2 Force vs. rotation relationship. The difference of linear and nonlinear analysis becomes evident as the rotation angle increases

그러한 이유로 기존의 변위기반 유한요소법을 개선하여 케이블의 거동을 예측하고자하는 여러 연구자들의 노력이 계속되었다. 대표적으로 Shabana의 연구 그룹에서 소개한 절대 절점 좌표기법(ANCF, Absolute Nodal Coordinate Formulation) (Kim, et al., 2009)과 Zhu의 연구그룹에서 소개한 절점위치 유한요소

법(NP-FEM, Nodal Point Finite Element Method) (Sun, 2009; Sun, et al., 2011; Zhu, 2010)이 있다. 우선 절대 절점 좌표 기법은 변형 현상을 변위와 그 점의 기울기로 표현하여 대변형의 효과를 예측하고자 하였다. 그리고 가장 진보된 방법이라고 할 수 있는 절점위치 유한요소법은 기존의 유한요소법으로 정식화된 방정식을 절점위치를 기반으로 하여 다시 정식화하여 절점의 위치를 바로 예측하고자 하였다.

본 논문에서는 대변위(large displacement)을 동반하는 비선형 케이블 동역학을 해석하는 방법을 제시하였다. 이를 위하여 공간차분 방법과 시간적분 방법으로 나누어 볼 수 있는데, 공간차분 방법은 Zhu의 연구그룹에서 소개한 절점위치 유한요소법 (Sun, et al., 2011)을 사용하였고, 시간적분에 있어서는 본 연구에서 새로이 시도한 Predictor/Multi-corrector Newmark 방법을 적용하였다. 특히 시간적분법에서 사용가능한 다양한 예측자(predictor)들을 소개하고, 수치적 안정성 측면에서 가장 우수한 것으로 파악된 예측자를 제시하였다. 사용된 예측자와, 동반되어 사용되는 다중수정자(multi-corrector)에 대하여도 구체적인 정식화(formulation)를 제시하였다. 본 연구에서 제시된 시간적분법의 수치적인 안정성을 강조하고 Zhu의 방법과 구별하기 위하여 본 해석방법을 강건 NPFEM으로 칭하기로 하였다.

제시된 방법론의 타당성을 검증하기 위하여 단일 케이블 요소를 이용한 정적 수치계산을 수행하였다. 수중 케이블의 거동 특성을 파악하기 위하여, 복수 케이블 요소로 구성되어 예인되는 수중 케이블에 대한 해석을 다양한 예인 속도 구간과, 다양한 유체역학적 조건을 가지는 케이블에 대한 수치계산을 수행하였다.

이후 본 논문은 아래와 같은 내용으로 세부 사항을 기술되어 있다. 2절에서는 절점위치 유한요소법의 정식화가 공간 차분과 시간적분법으로 나누어 상세히 기술되었다. 3절에서는 기술된 수치 방법의 유효성을 검증하기 위하여 단일 케이블 요소를 상정하여 이에 대한 정적 및 동적 수치계산을 수행하고 다른 결과와 비교하여 그 유효성을 제시 하였다. 4절에는 실제 예인되는 수중 케이블을 복수의 케이블 요소로 모델링한 다음, 다양한 예인속도 구간과, 상이한 케이블 길이, 그리고 케이블의 저항계수와 같은 유체역학적 특성을 변화시키며 그 특성을 파악하였다. 마지막으로, 5절에서는 제시된 방법론과 해석결과에 대한 총평을 기술하였다.

2. 정식화

2.1 NP-FEM을 이용한 공간차분

절점위치 유한요소법은 가상일의 원리에 의하여 지배방정식이 유도된다. 우선 3차원 공간상에 존재하는 끈은 절점 2개로 이루어진 케이블 요소를 정의한다. 요소의 절점 좌표는 전역좌표계와 국소좌표계에 의하여 정의된다. 그리고 케이블 요소를 따라 존재하는 위치, 속도, 그리고 가속도 값은 다음과 같은 형상함수 N 에 의하여 표현 가능하다고 가정한다. 여기에서 $X_e, \dot{X}_e, \ddot{X}_e$ 는 각각 케이블 요소의 절점 위치, 속도, 가속도 벡터이며 다음과 같이 정의된다.

$$R = NX_e, \quad v = \dot{R} = N\dot{X}_e, \quad a = \ddot{R} = N\ddot{X}_e \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } R &= [X, Y, Z]^T, \quad v = [v_x, v_y, v_z]^T, \\ a &= [a_x, a_y, a_z]^T, \\ X_e &= [X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2]^T, \\ \dot{X}_e &= [(v_x)_1, (v_y)_1, (v_z)_1, (v_x)_2, (v_y)_2, (v_z)_2]^T, \\ \ddot{X}_e &= [(a_x)_1, (a_y)_1, (a_z)_1, (a_x)_2, (a_y)_2, (a_z)_2]^T \end{aligned}$$

요소 내 해의 변화를 표현하는 형상함수는 다음과 같이 표현된다.

$$N = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{(X-X_1)^2 + (Y-Y_1)^2 + (Z-Z_1)^2}}{\sqrt{(X_2-X_1)^2 + (Y_2-Y_1)^2 + (Z_2-Z_1)^2}} \quad (5)$$

요소의 탄성 스트레인은 변형이 일어나지 않은 원래 요소의 길이 L_0 에 대하여 계산된다.

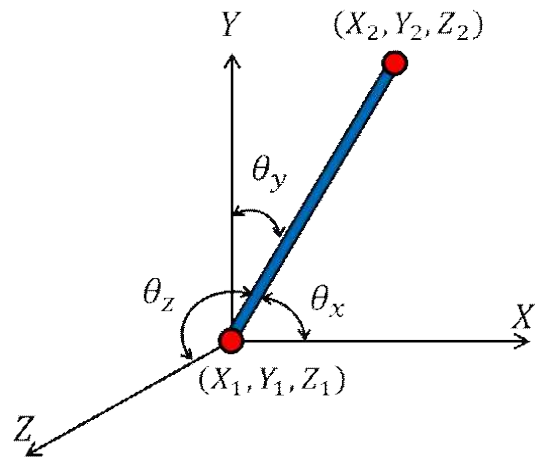


Fig. 3 Definition of the direction cosines based on the nodal coordinates in global coordinate system

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{L}{L_0} - 1 = \frac{L^2}{L_0 L} - 1 \\ &= \frac{X_2 - X_1}{L_0} \cos\theta_x + \frac{Y_2 - Y_1}{L_0} \cos\theta_y \\ &\quad + \frac{Z_2 - Z_1}{L_0} \cos\theta_z - 1 = B_0 QX_e - 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z$ 는 전역좌표계에서 케이블 요소의 자세에 따라 식 (7)과 같이 정의된다.

$$\cos \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

B_0 와 Q 에 대한 정의는 각각 다음과 같다.

$$B_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, $L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$ 이고, L 은 변형이 일어난 요소의 길이이다. 식 (6)으로부터 요소의 스트레인에너지는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \epsilon_x^2 ds = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_e^T \mathbf{K} \mathbf{X}_e + EAL) - \mathbf{X}_e^T \mathbf{F}_k \quad (10)$$

여기서 E 는 영의 계수, A 는 케이블의 단면적이다. 그리고 K 는 전역좌표계에서 정의된 요소의 강성행렬이며 F_k 는 케이블의 탄성으로부터 유래된 등가절점 힘 벡터이다. 강성행렬과 등가절점 힘 벡터는 아래와 같다.

$$\mathbf{K} = EAL(B_0 Q)^T B_0 Q = Q^T K_0 Q \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_k = EAL Q^T B_0^T \quad (12)$$

강성행렬은 축적비인 L/L_0 를 제외하면 기존의 유한요소법에서 존재하던 것과 비슷한 꼴을 가지는 것을 알 수 있다. 이는 작은 변형이 일어날 경우, 즉 $L/L_0 = 1 + \epsilon_x \approx 1$ 일 때, 강성행렬 K_0 는 기존 유한요소법의 2개의 절점을 가지는 케이블 요소의 강성행렬과 같다. 하지만 기존의 유한요소법에서 존재하지 않던 항인 F_k 가 존재하게 되는데 이는 외력항이 아닌 절점의 변위를 절점의 위치로 변환하는 과정에서 유래된 항이다. 케이블 요소의 운동에너지 T 는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$T = \int_0^L \rho z \dot{\mathbf{R}}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_e^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}_e \quad (13)$$

여기서 M 은 전역좌표계에서 정의된 요소의 질량행렬이다. ρ 는 케이블의 밀도이다. 만약 $L \approx L_0$ 일 경우, 질량행렬은 전역좌표계에서 일정한 값을 가지고 이는 기존 유한요소법의 질량행렬과 같다.

질량행렬과 강성행렬이 계산되면 요소에 작용하는 외력에 의한 가상일을 계산하여야 한다. 케이블이 유체 안에서 거동한다면 부가질량에 의하여 다음과 같은 항력과 관성력이 생기게 된다.

$$\mathbf{f}_{dn} = -C_{dn}(\alpha) \frac{\rho_0 D}{2} V^2 \frac{\mathbf{V}_n}{|\mathbf{V}_n|} \quad (14)$$

$$\mathbf{f}_{dt} = -C_{dt}(\alpha) \frac{\rho_0 D}{2} V^2 \frac{\mathbf{V}_t}{|\mathbf{V}_t|} \quad (15)$$

$$\mathbf{f}_a = -C_m \rho_0 A \dot{\mathbf{V}}_n \quad (16)$$

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}_c \quad \mathbf{V}_t = (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{V}) \mathbf{t}_0 \quad \mathbf{V}_n = \mathbf{V} - \mathbf{V}_t \quad (17)$$

여기에서 f_{dn} 과 f_{dt} 는 각각 항력의 접선방향과 법선방향 성분이다. C_{dn} 과 C_{dt} 은 각각 항력계수의 접선방향과 법선방향 성분이다. V_n 와 V_t 는 케이블에 작용하는 상대속도의 접선방향과 법선방향 성분이다. V_c 는 케이블의 작용하는 조류의 속도이다. t_0 는 케이블 축의 단위 방향벡터이다. D 는 케이블의 직경이고 ρ_0 는 케이블을 둘러싼 유체의 밀도이다.

f_a 는 케이블을 감싸고 있는 유체에 의하여 발생하는 관성력이다. 이 때 관성력은 케이블 요소에 수직하게 작용한다. C_m 은 부가질량계수이다.

케이블 요소의 부가질량에 의하여 발생하는 관성력과 그 관성력에 의한 가상일은 아래와 같다.

$$\delta W_a = - \int_0^L \mathbf{f}_a^T \cdot \delta \mathbf{R} dx = \delta \mathbf{X}_e^T \mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{X}}_e - \delta \mathbf{X}_e^T \mathbf{F}_a \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_a = \frac{C_m \rho_0 A L}{6} (\mathbf{M}_{a0} - \mathbf{M}_{a1}) \quad \mathbf{F}_a = \mathbf{M}_a \dot{\mathbf{V}}_c^e \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_{a0} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & 2\mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{a1} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{m}_0 & \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_0 & 2\mathbf{m}_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_z \\ \cos \theta_x \cos \theta_y & \cos^2 \theta_y & \cos \theta_y \cos \theta_z \\ \cos \theta_x \cos \theta_z & \cos \theta_z \cos \theta_y & \cos^2 \theta_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서 M_0 는 케이블을 감싸고 있는 유체에 의한 부가질량행렬이고 F_a 는 부가질량에 의하여 발생하는 관성력이다. 케이블 요소에 작용하는 항력에 의한 가상일은 아래와 같다.

$$\delta W_d = - \int_0^L \mathbf{f}_d^T \cdot \delta \mathbf{r} dx = - \delta \mathbf{x}_e^T \mathbf{f}_d^e \quad (22)$$

여기서 \mathbf{f}_d^e 는 국소좌표계에서 정의된 등가 절점힘벡터이며 아래와 같다.

$$\mathbf{f}_d^e = \begin{Bmatrix} -C_{dt}(\alpha) \frac{\rho_0 D}{2} \text{sign}(v_x) f_1 \\ -C_{dn}(\alpha) \frac{\rho_0 D}{2} \text{sign}(v_y) f_1 \\ 0 \\ -C_{dt}(\alpha) \frac{\rho_0 D}{2} \text{sign}(v_x) f_2 \\ -C_{dn}(\alpha) \frac{\rho_0 D}{2} \text{sign}(v_y) f_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서, $f_i = \mathbf{x}_e^T \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{x}}_e - 2\mathbf{x}_e^T \mathbf{A}_i \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e^T \mathbf{A}_i \mathbf{v}_e$ ($i = 1, 2$)

식 (23)의 항력계수는 Fig. 4에 보이는 것과 같이 케이블 요소의 수평방향 축과 케이블에 작용하는 상대속도가 이루는 각도인 θ 에 대하여 모델링한다.

$$C_{dn} = D_0 \sin^2 \theta \quad (24)$$

$$C_{dt} = D_0 (23.9 \cos \theta + 2 \sin \theta + 0.1 \cos 2\theta - 1.9) / 100$$

식 (24)에 나타난 정식화의 기본 개념은 케이블에 수직으로 유동이 유입 될 때의 케이블의 항력계수를 D_0 라고 두고, 케이블과 유속벡터가 이루는 각도에 따른 법선방향과 접선방향의 저항계수를 미분 가능한 형태로 정식화 한 결과이다.

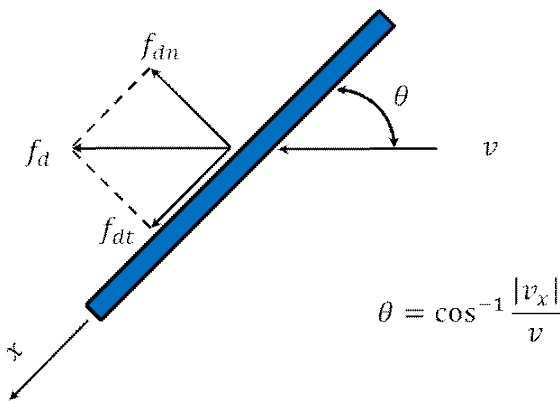


Fig. 4 Cable configuration with respect to the incoming flow v

항력벡터 \mathbf{f}_d^e 는 일반적으로 유한요소법에서 적용되는 좌표변환 행렬로 전역좌표계로 변환한다.

$$\delta W_d = -\delta \mathbf{x}_e^T \mathbf{f}_d^e = -\delta \mathbf{X}_e^T \mathbf{F}_d \quad \mathbf{f}_d^e = \mathbf{T} \mathbf{F}_d \quad (25)$$

마지막으로 요소에 작용하는 부력과 중력에 의한 가상일은 아래와 같다.

$$\delta W_{bg} = -\int_0^L A g \{0 \ 0 \ \rho - \rho_0\} \quad (26)$$

여기에서 \mathbf{F}_{bg} 는 부력과 중력에 대한 등가절점 힘 벡터이며 아래와 같다.

$$\mathbf{F}_{bg} = \frac{LA(\rho - \rho_0)g}{2} \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1\}^T \quad (27)$$

이제 요소에 작용하는 가상일의 원리에 의하여 운동방정식을 아래와 같이 수립할 수 있다.

$$\delta(U - T) + \delta W_d + \delta W_a + \delta W_{bg} = 0 \quad (28)$$

$$\delta \mathbf{X}_e^T ([\mathbf{M} + \mathbf{M}_a] \ddot{\mathbf{X}}_e + \mathbf{K} \mathbf{X}_e - \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_{bg}) = 0 \quad (29)$$

$$[\mathbf{M} + \mathbf{M}_a] \ddot{\mathbf{X}}_e + \mathbf{K} \mathbf{X}_e = \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{bg} \quad (30)$$

식 (32)와 같은 운동방정식에 Rayleigh 감쇠행렬을 도입하면 식 (34)와 같다. Rayleigh 감쇠행렬은 질량행렬과 강성행렬을 선형적으로 조합하여 감쇠행렬을 정의하는데 수식으로 표현하면 식 (35)과 같다.

$$[\mathbf{M} + \mathbf{M}_a] \ddot{\mathbf{X}}_e + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_e + \mathbf{K} \mathbf{X}_e = \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{bg} \quad (31)$$

$$\mathbf{C} = \beta [\mathbf{M} + \mathbf{M}_a] + \gamma \mathbf{K} \quad (32)$$

2.2 Predictor/Multi-corrector를 이용한 시간 적분

식 (31)과 같은 시스템의 해를 얻어내기 위한 수치기법은 여러 가지가 존재하며 각각의 장단점이 존재하기 때문에 적절한 기법을 선택하여 도입하여야 한다. 절점위치 유한요소법을 고안한 Zhu의 연구그룹에서 발표한 연구결과를 보면 시스템의 해를 얻어내기 위하여 고전적인 Newmark 알고리즘을 도입한 것으로 나타나 있다. 하지만 본 연구에서는 해의 수렴성을 높이고 time step의 크기에 대한 민감도를 적게 하기 위하여 Hughes의 연구그룹에 의하여 고안된 Predictor/Multi-corrector Newmark 알고리즘을 도입하였다 (Cottrell, et al., 2009). Predictor/Multi-corrector Newmark 알고리즘에 대하여 설명하자면 아래와 같다.

먼저 time step의 크기인 Δt 를 정의하고 반복계산 counter인 i 의 값을 0으로 초기화한다. 그런 다음 각 time step에서 식 (33)과 같은 관계를 성립하는 해를 찾기 위하여 반복계산을 수행한다.

$$\mathbf{a}_{n+1} \approx \ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}), \quad \mathbf{v}_{n+1} \approx \dot{\mathbf{X}}(t_{n+1}), \quad \mathbf{d}_{n+1} \approx \mathbf{X}(t_{n+1}) \quad (33)$$

각 time step은 predictor 단계를 거친 뒤 corrector 단계를 수행하게 된다. 이때, 식 (34)-(36)과 같이 해를 근사한 값으로 초기화 한다.

$$\mathbf{d}_{n+1}^i = \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} \quad (34)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^i = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \quad (35)$$

$$\mathbf{a}_{n+1}^i = \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} \quad (36)$$

식 (34)-(36)은 다양한 방법으로 근사가 가능하지만 반드시 식 (37)-(31)에 나타난 Newmark 공식을 만족하여야 한다.

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} ((1-2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}) \quad (37)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t ((1-\gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}) \quad (38)$$

여기에서 Δt 는 time step이고, β 와 γ 는 매개변수이다. Hughes의 연구그룹에서 보고한 연구결과에 의하면 대표적인 세 가지 종류의 predictor는 다음과 같다.

① Constant displace predictor

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = -\frac{1}{\beta\Delta t} \mathbf{v}_n - \frac{(1-2\beta)}{2\beta} \mathbf{a}_n \quad (40)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t ((1-\gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}) \quad (41)$$

② Constant velocity predictor

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n \quad (42)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} \mathbf{a}_n \quad (43)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} ((1-2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}) \quad (44)$$

③ Zero acceleration predictor

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = 0 \quad (45)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t (1-\gamma)\mathbf{a}_n \quad (46)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} (1-2\beta)\mathbf{a}_n \quad (47)$$

각각의 predictor는 해석하고자 하는 시스템의 성격에 따라 적절하게 적용하여야 한다. 먼저 constant displacement predictor는 보통 대변형과 접촉이 고려된 비선형 고체역학 해석에 적합한 것으로 알려져 있다. 다음으로 constant velocity predictor는 유체-구조 연성해석과 유체 해석에 적합한 것으로 알려져 있다. 마지막으로 zero acceleration predictor는 선형 해석에 적합한 것으로 알려져 있다. 적절한 predictor를 선정하면 잉여값 ΔF_{n+1} 을 식 (48)과 같이 얻어낸다.

$$\Delta \mathbf{F}_{n+1}^i = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{M}_{n+1} \mathbf{a}_{n+1}^i - \mathbf{C}_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}^i - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{d}_{n+1}^i \quad (48)$$

그런 다음 잉여값을 사용하여 가속도에 대한 보정값을 식 (49)와 같이 얻는다.

$$\mathbf{M}^* \Delta \mathbf{a} = \Delta \mathbf{F}_{n+1}^i \quad (49)$$

$$\text{여기서, } \mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta (\Delta t)^2 \mathbf{K}$$

여기에서 β, γ 값에 따라 방법론의 특성이 결정되는데, 만약 식 (50)-(51)과 같은 관계를 만족한다면 시간에 대한 2차 오더 정확도와 unconditional stable 특성을 얻게 된다. 참고로 본 연구에서는 β, γ 의 값을 모두 0.5로 설정하였다.

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (50)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad (51)$$

식 (49)에 의하여 가속도에 대한 보정값인 $\Delta \mathbf{a}$ 를 얻어내면 corrector 단계를 통하여 해를 갱신한다.

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{a} \quad (52)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{v}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{a} \quad (53)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \beta (\Delta t)^2 \Delta \mathbf{a} \quad (54)$$

corrector 단계를 거친 뒤 식 (55)를 통하여 잉여값의 수렴을 판정한다.

$$\| \Delta \mathbf{F}_{n+1}^i \| \leq \epsilon \| \Delta \mathbf{F}_{n+1}^0 \| \quad (55)$$

만약 식 (55)를 만족하지 않는다면 추가 반복계산을 수행한다.

본 연구에서는 NP-FEM에 대하여 위 세 가지 predictor를 시도하여 본 결과, constant velocity predictor가 절점위치 유한요소법으로 공간 차분된 시스템의 시간 적분에 가장 안정적인 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

Constant velocity predictor를 이용하여 수행한 비선형 케이블의 동적거동 계산결과에 따르면, e 의 값이 0.001 수준으로 수렴하는데 약 4회의 반복계산으로 충분함을 확인하였다.

3. 수치방법의 검증

본 연구에 도입된 강건 절점위치 유한요소법의 타당성을 검증하기 위하여 수치계산을 실시하였다. 우선 시간에 대한 고려가 없는 정적수치계산을 수행한 뒤 시간에 대한 고려가 있는 동적수치계산을 수행하였다.

3.1 정적 수치계산

정적 수치계산에서는 본 논문에서 사용하는 강건 절점위치 유한요소법의 결과가 기존의 변위기반 유한요소 해석의 결과와 동일한 결과를 얻는다는 사실을 확인하기 위한 문제를 해석하였다. Fig. 5에서 보이는 것과 같이 수평으로 정렬된 케이블 요소에 수평 방향으로 힘을 작용하였을 때의 요소의 변위(U)를 해석하여 보았다. 해석에 사용한 물성은 Table 1에 나타내었다. 본 해석의 결과와 해석적 해를 비교를 Table 2를 통하여 나타내어 보았다. 본 해석을 통하여 강성행렬이 정상적으로 구현되어 있는지를 검증하여 볼 수 있다.

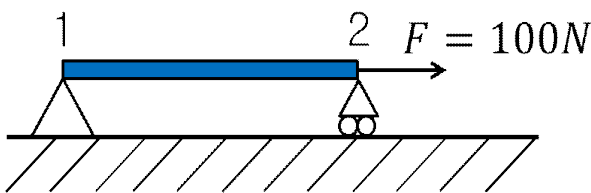


Fig. 5 Static pull of a bar element.

Table 1 Material properties

Area	1.0E-6 m ²
Length	1.0E-2 m
Young's Modulus	1.0E+11 Pa

Table 2 Numerical solution vs. Analytic solution

Node No.	Current	Analytic
1	0.0	0.0
2	1.0E-5	1.0E-5

Fig. 6에서 보이는 것과 같은 트러스에 수직 방향으로 힘이 작용하였을 때의 요소의 변위(U, V)를 해석하여 보았다. 해석에 사용한 물성은 Table 3에 나타내었다. 본 해석의 결과와 Zhu의 연구그룹에서 발표한 바 있는 결과를 Table 4에 나타내었다. 정적 수치계산의 경우, 시간에 따라 해가 변하지 않으므로 시간적분법의 영향을 받지 않는다. 따라서 본 연구에서 도입된 방법론과 Zhu의 연구그룹의 방법론이 같은 결과를 도출하여야 한다. 따라서 이를 통하여 중력과 부력에 대한 항이 정상적으로 구현되어 있는지를 검증하여 볼 수 있다.

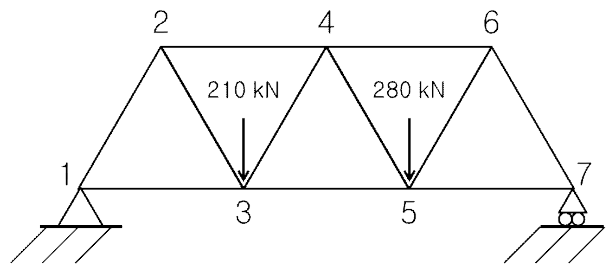


Fig. 6 Static deflection of two dimensional truss structure

Table 3 Material properties

Area	3.250E-3 m ²
Young's Modulus	2.0E+11 Pa

Table 4 Comparison of numerical results

Node No.	U(Current)	U(Zhu)	V(Current)	V(Zhu)
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	3.08E-3	3.08E-3	-3.50E-3	-3.50E-3
3	7.46E-4	7.46E-4	-6.58E-3	-6.58E-3
4	1.59E-3	1.59E-3	-7.24E-3	-7.24E-3
5	2.31E-3	2.31E-3	-6.99E-3	-6.99E-3
6	-4.97E-5	-4.97E-5	-3.73E-3	-3.73E-3
7	3.13E-3	3.13E-3	0.0	-6.2E-35

3.2 동적 수치계산

본 절에서는 시간에 대한 고려가 되어 있는 비정상해석을 진행하였다. 비정상 해석은 유체에 의한 감쇠항의 효과를 확인하기 위하여, 유체력을 고려하지 않은 경우와 고려한 경우 두 가지로 해석을 진행하였다.

Fig. 7과 같이 수평으로 정렬된 케이블 요소에 중력을 작용하였을 때 시간에 따른 케이블 끝단의 위치 변화를 해석하여 보았다. 해석에 사용된 물성은 Table 5를 통하여 나타내었다. 이 때 케이블을 둘러싼 유체에 의한 부가질량과 항력은 무시되었다. 따라서 해석이 진행되는 동안 초기 정렬된 상태에서 케이블 요소의

위치에너지는 보존되어야 한다. 케이블 끝단의 수평, 수직 방향의 위치를 Fig. 8을 통하여 나타내었다. 본 해석을 통하여 질량 행렬과 시간 적분법이 잘 구현되어 있는지 검증하여 볼 수 있다.

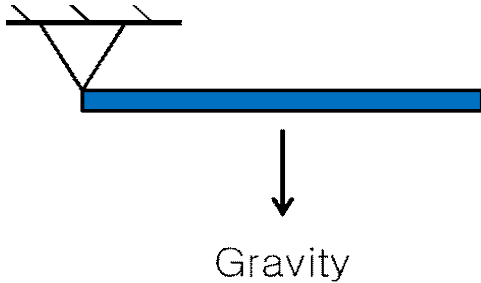


Fig. 7 Free swing of a bar element

Table 5 Material properties of free swing bar

Area	1.0E-4 m ²
Length	1.0 m
Density	1.0E+3 kg/m ³
Young's modulus	3.0E+6 Pa

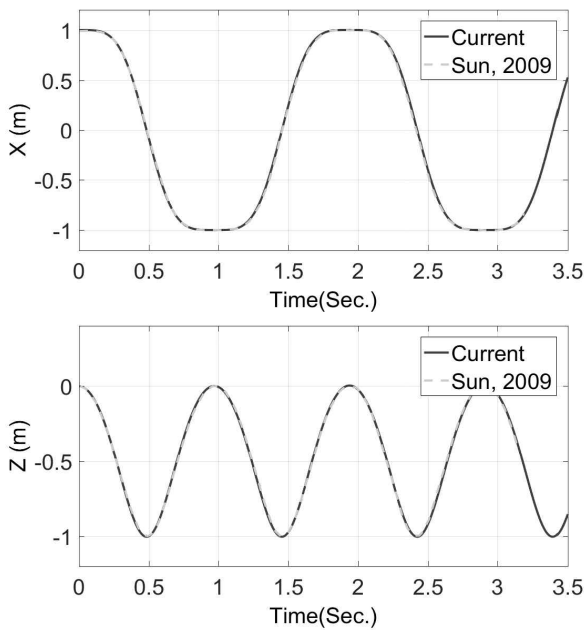


Fig. 8 Time history of the end position of a free swinging bar

위에 해석에서 유체에 의한 부가질량과 항력에 대한 효과를 고려한 해석을 진행하였다. 해석에 사용된 물성은 Table 6을 통하여 나타내었다. 케이블 끝단의 수평, 수직 방향의 위치를 Fig. 9를 통하여 나타내었다. 본 해석을 통하여 부가질량 행렬과 항력에 대한 항이 잘 구현되어 있는지 검증하여 볼 수 있다.

Figs. 8-9에 Zhu의 연구그룹의 일원인 Sun이 발표한 결과를 함께 나타내었다. 수치계산의 결과를 보면 Sun의 결과와 대체로 일치하는 것을 확인할 수 있다.

Table 6 Material properties of free swing bar surrounded by air

Area	1.4E-5 m ²
Length	8.9E-1 m
Density	7.8E+3 kg/m ³
Young's modulus	2.0E+11 Pa

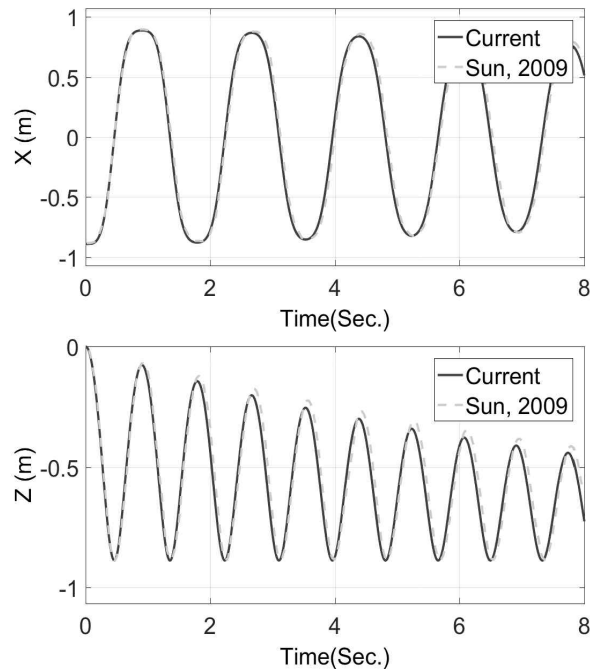


Fig. 9 Time history of the end position of a free swing bar surrounded by air by considering added mass and aerodynamic drag

3.3 수렴성 검증

지금까지 단일 케이블 요소에 대한 해석을 복수 케이블 요소에 적용하기 위하여, 전체 케이블의 길이는 동일하게 고정하고, 케이블 요소의 수를 늘려 가면서 케이블 해석결과의 격자 수렴성을 확인하였다. 초기에 Fig. 10과 같이 수직으로 정렬된 케이블에 일정한 속도로 직선적인 하중을 가했을 때의 케이블 위치 변화를 해석하였다. 요소의 수를 3개, 6개, 9개, 12개, 24개로 증가하였고, 케이블의 예인속도를 5 knots로 설정하였다. 해석에 사용된 물성은 Table 7을 통하여 나타내었다. 케이블 끝단의 요소수와 예인속도에 따른 수평방향의 위치 변화를 Fig. 11을 통하여 나타내었다. 요소의 수를 증가할수록 그래프의 기울기가 감소하면 수치계산을 통하여 얻은 해가 수렴한다는 것을 의미한다. Fig. 11을 보면 케이블의 길이가 260 m일 때, 요소의 수를 24개로 설정하면 해가 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 이를 수치적으로 보면 요소의 개수가 12개일 때와 24일 때의 해의 상대적 변화 값이 0.13%로 나타났다.

Table 7 Material properties of towed cable

Diameter	4.75E-2 m ²
Length	260.0 m
Density	3.0E+3 kg/m ³
Young's modulus	2.7E+9 Pa

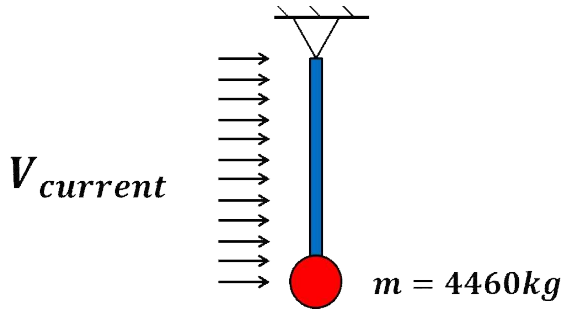


Fig. 10 Towed cable problem definition. Cable top is towed impulsively with constant speed $V_{current}$ with a spherical body with mass m attached at the cable bottom

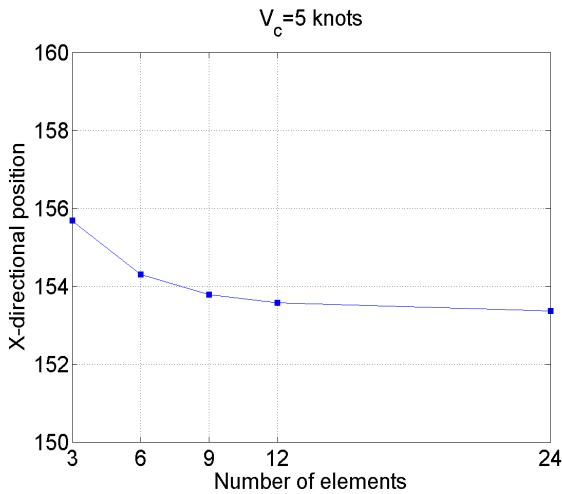


Fig. 11 Solution (position of cable bottom) convergence with respect to element refinement

4. 수중 케이블의 거동 특성

본 장에서는 수중 케이블의 거동 특성을 파악하기 위하여 복수개의 케이블 요소를 이용하여 수치 계산을 수행하였다. 케이블은 상부 끝단에서 특정 속도로 직진 예인되는 상황을 가정하였다. 케이블의 나머지 하단은 자유롭게 운동할 수 있는 경우를 가정하였다. 이때 케이블 하단에는 Fig. 10에 보이는 바와 같은 제원을 가지는 원격제어 수중로봇(ROV)과 같은 수중 예인물체가 예인되는 경우를 상정하였다.

4.1 예인속도에 따른 케이블의 위치 분포

케이블의 예인속도에 따라 케이블의 위치가 수중에 어떻게 분

포하는지에 대한 해석을 진행하여 보았다. 해석은 3.3절의 조건을 기반으로 진행되었다. 예인속도를 1 knots에서 10 knots까지 1knots 간격으로 증가시키며 진행하였다. 수중에 분포하는 케이블의 예인속도에 따른 위치를 Fig. 12에 나타내었다.

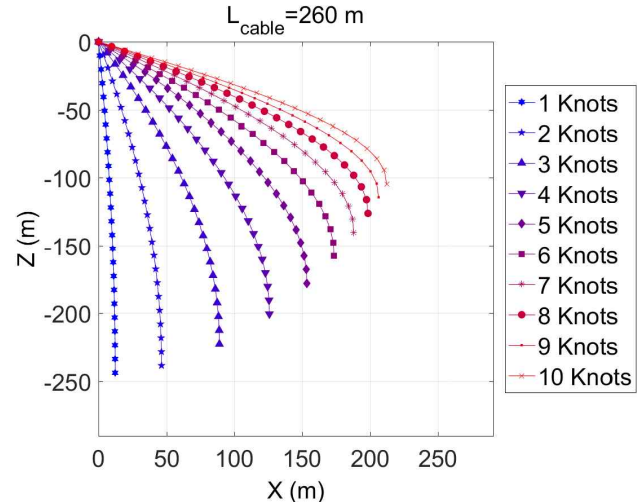


Fig. 12 Cable configuration with respect to the various towing speeds

4.2 항력에 따른 케이블 위치 분포

다음으로 케이블에 작용하는 항력의 크기에 따라 케이블이 수중에 어떻게 분포하는지에 대한 해석을 진행하여 보았다. 식 (24)의 D_0 의 값을 조절하여 항력의 크기를 변화하도록 하였다. D_0 의 값을 0.45, 0.9, 1.8로 변화하였고 예인속도는 10 knots로 설정하였다. 수중에 분포하는 케이블의 항력크기에 따른 위치를 Fig. 13에 나타내었다.

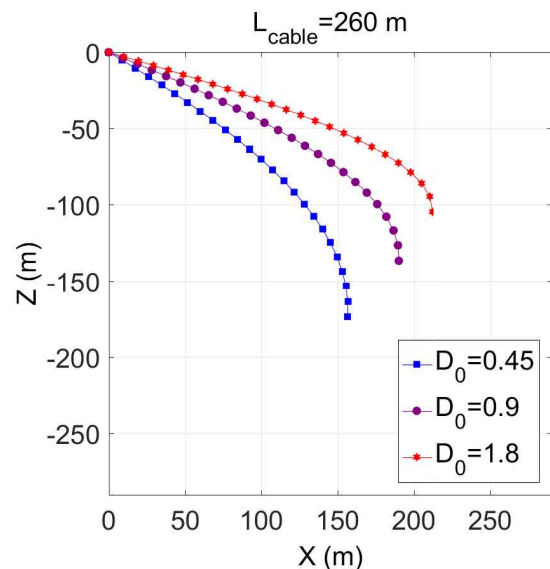


Fig. 13 Cable configuration with different cable hydrodynamic coefficients

4.3 케이블 길이에 따른 케이블 위치 분포

케이블의 길이에 따라 케이블이 수중에 어떻게 분포하는지에 대한 해석을 진행하여 보았다. 케이블의 길이를 260 m와 520 m 두 가지로 변화하였고, 예인속도는 10 knots로 설정하였다. 수중에 분포하는 케이블의 길이에 따른 분포를 Fig. 14에 나타내었다.

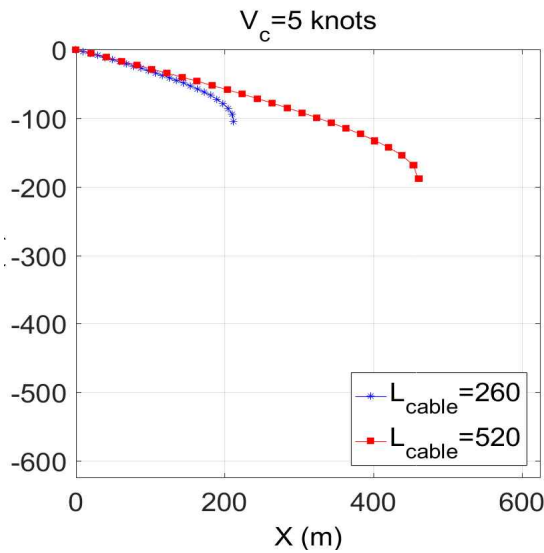


Fig. 14 Cable length effect on the global cable configuration

4.4 L형 선회 예인

가상 예인시나리오를 구성하여 수중 케이블을 예인하여 보았다. 케이블의 길이를 260 m로 설정하였고, 예인속도는 4 knots로 설정하였다. 가상 예인시나리오는 다음과 같이 3단계로 구성하였다: Step-1. 선회 전 500초간의 직진예인, Step-2. 1000 m 선회반경의 90도 변침, 3) 선회 후 500초간의 직진예인.

위에 기술된 3단계의 L형 가상 선회 시나리오로 케이블을 예인한 궤적을 Fig. 15를 통하여 나타내었다. 가상 예인시나리오가 종료된 시점에서 케이블의 최종자세를 Fig. 16을 통하여 나타내었다. 90도 선회를 하였으므로 케이블이 Y-Z평면에 정렬되어 있는 것을 확인할 수 있다.

Figs. 17과 18에서는 L형 선회 시 케이블 최하단의 깊이변화와, 케이블 최상단 예인점에서의 장력 변화를 각각 도시 하였다. 특히, 시간 500초 근방에서 보이는 첫 번째 세로 점선은 L형 선회의 시작 시점을 나타내며, 1300초 근방에서의 두 번째 세로 점선은 L형 선회의 종료 시점을 나타낸다. 선회 시작과 종료 시점 전후로 상대적인 깊이변화와 상대적인 장력 변화를 시각적으로 확인하기 어려운 점을 감안하여, 수직방향의 스케일을 확대하여 각각의 그림에 이중으로 도식화 하였다.

깊이변화를 나타낸 Fig. 17을 보면, 턴의 시작과 동시에 케이블 끝단의 심도가 깊어짐을 관측할 수 있다. 이는 케이블에 유입

되는 유동의 상대속도가 직진 기동에서 선회로 바뀔 때 따라 감소하게 되고, 이로 인하여 케이블에 작용하는 항력이 줄어든 결과로 해석 될 수 있다. 선회 구간동안 깊어졌던 케이블 끝단의 위치는 선회 종료와 함께 직진 구간으로 들어서면서 다시 상승하는 것을 관측할 수 있다.

장력변화를 나타낸 Fig. 18을 보면, 반대의 경향을 확인할 수 있다. 이는 턴의 시작과 동시에 케이블 걸리는 장력이 유체 항력 뿐만 아니라, 케이블의 회전을 유지하기 위한 구심력이 추가되어 나타난 결과로 파악된다. 이러한 추가적인 장력은 선회가 끝나는 시점에서 다시금 감소하는 것을 확인할 수 있다.

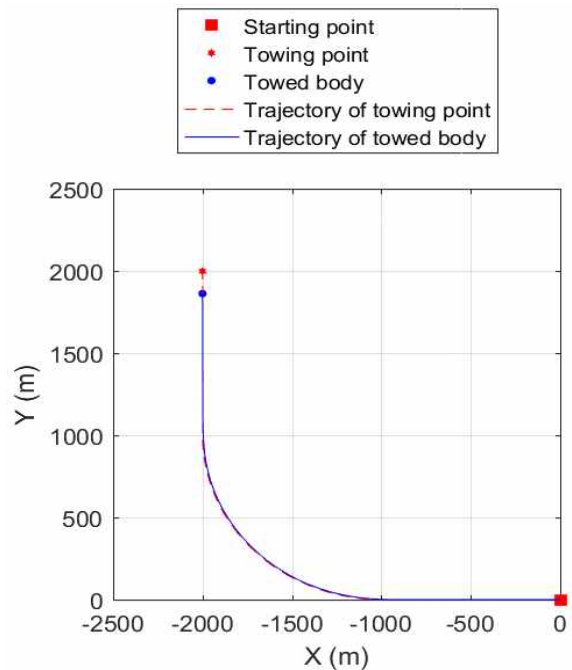


Fig. 15 Trajectory of L-type turning scenario - top view

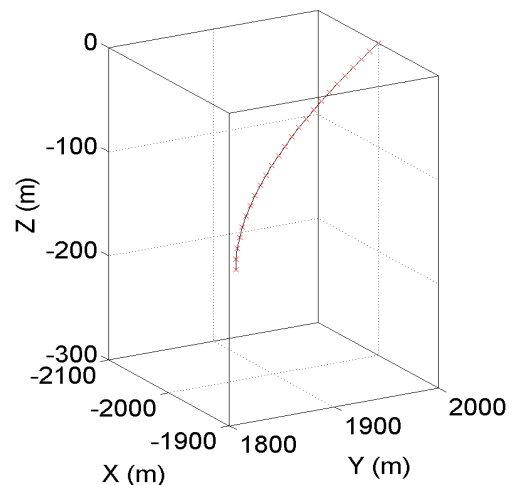


Fig. 16 Perspective view of cable configuration after L-t urn towing test

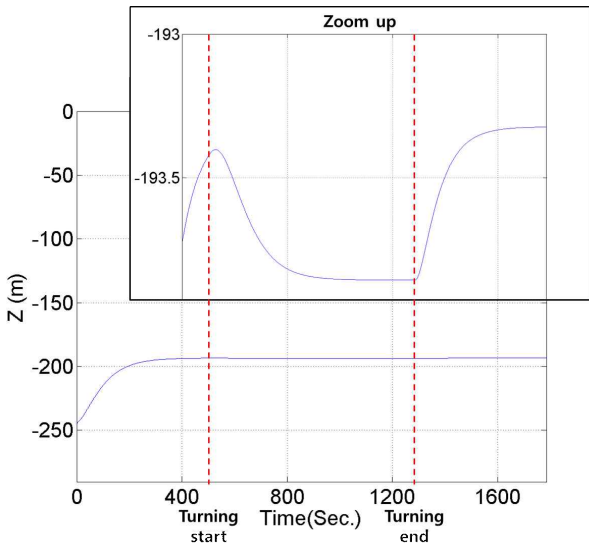


Fig. 17 Time history of depth at the end point during L-type turning test

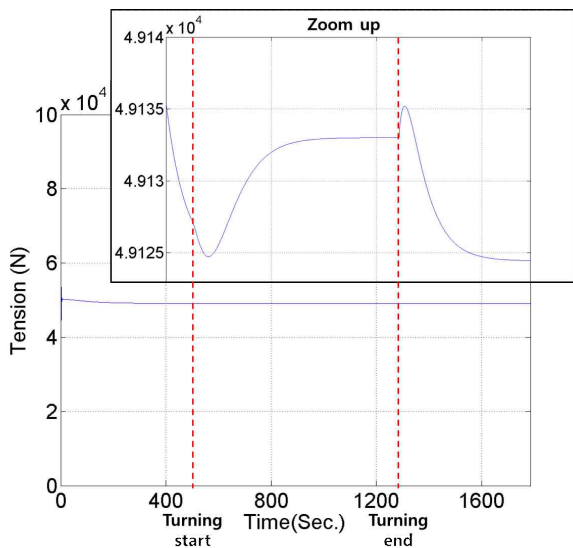


Fig. 18 Time history of the tension at the towing point during L-type turning test

5. 결론

본 연구에서는 대변위를 동반하는 케이블의 비선형 거동 해석을 위한 개선된 수치 방법을 제시하였다. 이는 공간적으로는 절점위치 유한요소법을 적용하였으나, 시간적분에는 있어서 강건한 Predictor/Multi-corrector Newmark 방법을 사용하였다. 방법론의 타당성을 검증하기 위하여 수행한 단일 케이블 요소 및 복수 케이블 요소에 대한 해석의 결과를 바탕으로 대변위를 동반하는 비선형 케이블 해석에 본 논문에서 적용한 강건 절점위치 유한요소법이 성공적으로 적용될 수 있음을 확인하였다.

그리고 수중 케이블의 거동 특성을 파악하기 위한 직진 예인 해석을 통하여 케이블을 예인하는 속도가 빠를수록, 동일 예인속

도의 경우 케이블의 길이가 짧을수록 케이블 끝단이 수면 쪽으로 부상하는 경향을 보임을 확인할 수 있었다. 뿐만 아니라, 동일 예인속도 및 동일 케이블 길이의 경우 케이블의 항력이 커질수록 케이블이 수면 쪽으로 향하는 현상을 예측할 수 있음을 확인하였다. 이는 향후, 케이블에 유체역학적인 항력 제어를 위한 페어링(fairing)의 설계에 활용할 수 있을 것으로 사료된다.

케이블의 3차원 거동예측을 위하여 L-형 선화해석을 수행하였고, 선화 시작과 종료 시점주위에서 케이블 끝단의 위치와 케이블 상단의 장력변화의 상대적인 변화를 관측할 수 있었다. 이를 통하여 본 연구에서 도입한 방법론으로 다양한 3차원 케이블 거동해석에 적용할 수 있음을 확인 하였다. 본 연구에서 제안된 방법론은 추후, 수중 케이블과 케이블에 연결된 물체의 거동해석에 적용할 수 있음을 확인 하였다.

후 기

본 연구는 (주)한화과 국방과학연구소의 지원을 받아 수행되었습니다.

References

Cottrell, J.A. Hughes, T.J.R. & Bazileves, Y., 2009. *Isogeometric Analysis*. John Wiley & Sons, Ltd: New York, NY.

Howell, C.T., 1992. *Investigation of the dynamics of low-tension cables*. Ph.D. Thesis. Woods Hole Oceanographic Institution.

Kim, K. Lee, J. Kim, H. Yoo, W. & An, D., 2009. Dynamic behavior of underwater cable using absolute nodal coordinate formulation. *Korean Society of Mechanical Engineers Fall Conference*, Yongpyong, Republic of Korea, 4-6 November 2009.

Lee, E. & Ahn H.T., 2015. Simulation of underwater cable dynamics using nodal point finite element method. *Annual Autumn Conference of The Society of Naval Architects of Korea*, Geoje, Republic of Korea, 4-6 November 2015.

Park, H.I. & Jung, D.H., 2002. Nonlinear Dynamic Analysis on Low-Tension Towed Cable by Finite Difference Method. *Journal of Society of Naval Architects of Korea*, 39(1), pp.28-37.

Shin, H.K., 1990. Cable Dynamics for Marine Applications-Nonlinearities. *Journal of Ocean Engineering and Technology*, 4(2), pp.35-40.

Sun, F.J., 2009. *Elastodynamic analysis of towed*

cable systems by a novel nodal position finite element method. M.S. Thesis. York University.

Sun, F.J. Zhu, Z.H. & LaRosa, M., 2011. Dynamic Modeling of Cable Towed Body Using Nodal Position Finite Element Method. *Ocean Engineering*, 38, pp.529-540.

Wriggers, P., 2008. *Nonlinear Finite Element Methods.* Springer-Verlag: Berlin.

Zhu, Z.H., 2010. Dynamic Modeling of Cable System Using a New Nodal Position Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26, pp.692-704.



이은택



고광수



안형택



김성일



천승용



김정석



이병희