

## 시변 지연시간을 갖는 이산 구간 시변 시스템의 안정조건

# Stability Condition for Discrete Interval Time-varying System with Time-varying Delay Time

한 형 석

가천대학교 전자공학과

**Hyung-seok Han**

Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do 13120, Korea

### [요 약]

본 논문에서는 상태변수에 시변 지연시간이 있는 선형 이산 구간 시변 시스템의 안정조건을 새롭게 제안한다. 고려한 시스템은 지연 없는 상태변수에 대한 시스템 행렬과 지연 상태변수에 대한 시스템 행렬이 시변 구간 행렬로 표현되며, 지연시간도 구간에 대하여 시변인 특성을 갖는다. 제안된 안정조건은 리아프노프 안정 이론을 이용하여 유도되며, 매우 간단한 부등식의 형태로 표현된다. 본 논문에서는 기존의 시불변 구간 행렬의 안정성 문제를 시변 구간 행렬의 안정성 문제로 확장하고, 기존에 발표된 결과를 포함하는 강력한 안정조건이 유도된다. 이 안정조건의 유도과정에서는 복잡한 선형행렬부등식 혹은 리아프노프 방정식의 상한 해 한계를 구하지 않아도 된다. 또한, 기존의 결과들과의 비교를 통하여 제안된 안정조건이 많은 기존 안정 조건들을 포함할 수 있음을 보인다. 기존 수치예제를 일반적인 형태로 확장하였고 이에 대하여 새로운 안정조건의 확장성과 효용성을 확인한다.

### [Abstract]

In this paper, the new stability condition of linear discrete interval time-varying systems with time-varying delay time is proposed. The considered system has interval time-varying system matrices for both non-delayed and delayed states with time-varying delay time within given interval values. The proposed condition is derived by using Lyapunov stability theory and expressed by very simple inequality. The restricted stability issue on the interval time-invariant system is expanded to interval time-varying system and a powerful stability condition which is more comprehensive than the previous is proposed. As a results, it is possible to avoid the introduction of complex linear matrix inequality (LMI) or upper solution bound of Lyapunov equation in the derivation of sufficient condition. Also, it is shown that the proposed result can include the many existing stability conditions in the previous literatures. A numerical example in the previous works is modified to more general interval system and shows the expandability and effectiveness of the new stability condition.

**Key word** : Discrete interval time-varying system, Time-varying delay time, Sufficient condition, Stability.

<http://dx.doi.org/10.12673/jant.2016.20.5.475>



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Received 30 September 2016 Revised 10 October 2016  
Accepted (Publication) 12 October 2016 (30 October 2016)

\*Corresponding Author; Hyung-seok Han

Tel: +82-31-750-5561

E-mail: hshan@gachon.ac.kr

## I. 서론

지연된 상태변수를 갖는 이산시스템에 대한 안정조건은 지난 수 십 년간 많은 결과가 발표되었다 [1],[2]. 최근의 연구결과에서는 시불변 시스템과 시불변 지연시간에 대한 결과[3]도 있으나, 대부분의 경우 상태변수와 지연 상태변수에 대한 상태행렬들을 시불변으로, 지연 시간은 구간 내에서 시변인 형태의 시스템에 대하여 안정성 조건이 다루어졌다[4]-[10]. 기존 결과들은 주로 리아프노프 함수를 이용한 선형부등식 형태의 안정조건[4]-[9]으로 제시되었다. 이 조건들은 복잡한 선형행렬부등식들을 만족하는 안정조건으로 제시되어, 직관적으로 안정성을 판단하기에는 부적합하다. 이러한 결과와는 다르게 구간 행렬로 확장된 시불변 시스템[11]-[13]을 고려한 경우에는 시불변 지연시간[11],[12]과 시변 지연시간을 고려한 경우[13]가 있으며, 시변 상태행렬에 시변 지연시간을 갖는 경우에 대하여 특별한 시스템으로 양의 시스템에만 적용가능한 안정 조건을 제시한 결과[14]가 있다. 구간 상태행렬에 대하여 시변 지연시간을 고려한 [13]과[14]에서는 효과적인 리아프노프 함수를 이용하여 [3]에서와 같이 리아프노프 방정식의 상한 해 한계(upper solution bound)를 이용한 방법으로 안정조건을 구하였으나 결과에 대한 유도과정이 복잡하게 전개된다.

본 논문에서는 기존에 주로 다루어진 시불변 지연시간을 갖는 시스템 [1],[2]와 구간시스템[13], 일정한 구간에서 지연시간이 시변인 시스템[13], 양의 시변시스템[14] 등 여러 시변 변수에 대하여 제한이 있는 기존 결과들을 모두 포함하는 보다 일반적인 안정조건을 유도한다. 유도된 조건은 기존과 같은 리아프노프 함수를 이용하여 지연시간 독립 (delay-independent)인 조건으로 표현되며, 기존의 안정조건[13]과[14]에서와 같은 매우 간단한 수식이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 기존 결과를 요약하고 3장에서는 새로운 안정조건을 리아프노프 이론을 이용하여 제시하고, 4장에서는 기존 수치 예제 [11],[12]와[14]에 대하여 새로운 조건을 적용하고 그 결과를 제시한다.

## II. 기초 이론

본 장에서는 논문의 주요 결과에 사용된 행렬에 관한 중요한 기존 이론을 정리한다. 본 논문에서 사용하는 기호로는  $Z_+$ 는 음이 아닌 정수 집합,  $R^{n \times m}$ 는 실수 행렬 요소를 갖는  $n \times m$  행렬,  $R_+^{n \times m}$ 는 음이 아닌 값으로 행렬 요소를 갖는  $n \times m$  행렬이며,  $R_+^n = R_+^{n \times 1}$ ,  $\|X\|$ 는 행렬  $X$ 의 스펙트랄 노름 (spectral norm), ( $\|X\|$ :  $X^T X$ 행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며,  $X > 0$ 는 대칭행렬  $X$ 가 양의 정칙(positive definite),  $A = [a_{ij}]$ 는 행렬 요소 값  $a_{ij}$ 로 구성된 행렬.  $|A| = [|a_{ij}|]$ ,  $A \leq_e B$ 는 행렬 요소별 부등식을 나타내며,  $\lambda_{\max}(X)$ 는 행렬  $X$ 의 최대 고유치,  $\rho(X)$ 는  $\max_i |\lambda_i(X)|$ , 즉, 스펙트랄 반경 (spectral radius),  $I_n$ 는

$n \times n$  차원의 단위행렬 (identity matrix)을 의미한다. 벡터  $x \in R_+^n$  중 모든 행렬요소가 양의 값을 갖는 경우에는, 완전 양 (strictly positive) 벡터라 정의하며  $x > 0$ 으로 표시한다.

다음과 같은 시불변 지연시간을 갖는 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-d) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} A &\in [A^-, A^+] \subset R^{n \times n} \\ A^- &\leq_e A \leq_e A^+ (a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+) \forall i, j \\ B &\in [B^-, B^+] \subset R^{n \times n} \\ B^- &\leq_e B \leq_e B^+ (b_{ij}^- \leq b_{ij} \leq b_{ij}^+) \forall i, j \end{aligned} \tag{2}$$

여기서,  $A$ 는  $n \times n$  차원의 상태행렬 (state matrix),  $B$ 는  $n \times n$  차원의 지연 상태변수에 대한 상태행렬을 의미하며, 식 (1)은 일반적인 지연 이산시스템으로, (2)를 포함하면 지연 구간 이산 시스템으로 고려된다. 구간 시스템의 경우는 행렬의 요소값은 정확히 알 수 없고 단지 동작조건에 따라 각 요소값의 하한값과 상한값에 따른 변동 범위만을 알 수 있는 경우를 표현한 것이다.  $A^-, B^-$ 는 상태행렬의 하한값 행렬,  $A^+, B^+$ 는 상한값 행렬을 의미한다. 이러한 시스템에 대한 안정 조건은 다음과 같다.

기존결과 1 ([1],[2],[12]) : 수식 (1)의 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정(asymptotically stable) 하다.

$$\|A\| + \|B\| < 1 \tag{3}$$

식 (2)의 조건을 갖는 구간 시스템에 대한 안정 조건은 [11]-[13]에서 다루어졌고 특히 [13]에서는 식(4)와 같이 정의된 행렬을 이용하여 효과적인 안정 조건을 제시하였다.

$$\begin{aligned} F &= [f_{ij}], f_{ij} = \max(|a_{ij}^-|, |a_{ij}^+|) \forall i, j \\ G &= [g_{ij}], g_{ij} = \max(|b_{ij}^-|, |b_{ij}^+|) \forall i, j \end{aligned} \tag{4}$$

기존결과 2 [13] : 식 (1)과 (2)을 만족하는 구간 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$\|F\| + \|G\| < 1 \tag{5}$$

위의 두 기존 결과는 지연시간이 시불변인 경우에 대한 것으로 지연 시간이 시변인 경우는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bx(k-d(k)) \\ 0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M \forall k \end{aligned} \tag{6}$$

[4]-[10]은  $A, B$  행렬이 구간 행렬이 아닌 경우에 대한 결과들이다. 이와 달리 [13]에서는 두 상태 행렬  $A, B$ 가 구간 행렬 인과 동시에 지연시간도 일정한 구간에서 시간에 따라 변동이 있는 것으로 고려되었다. 이 시스템은 기존의 시스템 식(1)과

(2)를  $d_m = d_M$  인 경우로 포함할 수 있는 보다 포괄적인 시스템이다.

기준결과 3 [13] : 식 (2)와 식 (6)을 만족하는 구간 시스템은 다음의 부등식을 만족하면 안정하다.

$$\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|G\| < 1 \quad (7)$$

[14]에서는 다음과 같은 지연시간을 갖는 양의 구간 시변 이산시스템을 고려하였다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)x(k-d(k)) \quad (8)$$

여기서,  $A(k), B(k) \in R_+^{n \times n}, x(k) \in R_+^n, \forall k \in Z_+$  이고, 모든  $x(-k) \in R_+^n, k = 0, 1, \dots, d_M$  이다. 또한, 다음을 만족한다

$$\begin{aligned} A(k) &\in [A^-, A^+] \subset R_+^{n \times n} \\ 0 \leq {}_e A^- \leq {}_e A(k) \leq {}_e A^+ (0 \leq a_{ij}^- \leq a_{ij}(k) \leq a_{ij}^+) \forall k, i, j \quad (9) \\ B(k) &\in [B^-, B^+] \subset R_+^{n \times n} \\ 0 \leq {}_e B^- \leq {}_e B(k) \leq {}_e B^+ (0 \leq b_{ij}^- \leq b_{ij}(k) \leq b_{ij}^+) \forall k, i, j \\ d(k) &\in [d_m, d_M] \subset Z_+, (0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M) \forall k \end{aligned}$$

기준결과 4 [14] : 식(8)과 (9)를 만족하는 양의 구간 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$\|A^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\| < 1 \quad (10)$$

식(8)과 (9)에서 지연시간  $d(k)$ 가 시변이며, 구간 사이에서 변하는 것에 주목할 필요가 있으며, 시스템 행렬인  $A(k), B(k)$  도 시변으로 고려하여 기존 결과와는 차별화된 것이다. 그러나, 식 (9)에서와 같이 양의 시스템으로 제한된 경우에 적용되는 결과로 양의 시스템이 아닌 일반적인 구간 시변 시스템에는 적용될 수 없다.

본 논문에서는 다음과 같은 잘 알려진 정리를 사용한다.

보조정리 1 ([13][14]) : 임의의 벡터  $x, y$ 와 양의 상수  $\epsilon$  에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^T y \leq \epsilon^{-1} x^T x + \epsilon y^T y \quad (11)$$

보조정리 2 ([15, 491쪽]) :  $|X| \leq {}_e Y$  를 만족하는 정방행렬  $X, Y$  에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

- a)  $\rho(X) \leq \|X\|$
- b)  $\rho(X) \leq \rho(|X|) \leq \rho(Y)$
- c)  $\|X\| \leq \| |X| \| \leq \| Y \|$

### III. 주요 결과

본 논문에서는 위의 기존결과들과 같이 매우 간단한 형태의 안정조건을 구간을 갖는 시변 상태행렬에, 시불변 지연시간이 아닌 구간을 갖는 시변 지연시간을 갖는 시변 구간 시스템에 대하여 유도한다. 이를 위하여 다음과 같은 가장 포괄적인 구간 시변 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)x(k-d(k)) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A(k) &\in [A^-, A^+] \subset R^{n \times n} \\ A^- \leq {}_e A \leq {}_e A^+ (a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+) \forall i, j \quad (13) \\ B(k) &\in [B^-, B^+] \subset R^{n \times n} \\ B^- \leq {}_e B \leq {}_e B^+ (b_{ij}^- \leq b_{ij} \leq b_{ij}^+) \forall i, j \\ 0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M \forall k \end{aligned}$$

여기서, 두 상태행렬  $A(k), B(k)$ 가 시변 구간 행렬임과 동시에 지연시간  $d(k)$  도 일정한 구간에서 시간에 따라 변동이 있는 것으로 고려한다. 이는 기존의 시스템 식(1), (2), (6), (8)과 (9)의 시스템을 모두 포함하는 것이다.

본 논문에서는 리아프노프 이론을 적용하여 식 (12)와 (13)의 시스템에 대하여 새로운 안정조건을 유도한다. 이를 위하여 리아프노프 함수를 다음과 같이 선택한다. 이는 [13], [14], [16], [17]에서의 리아프노프 함수 정의와 유사하나 대칭행렬  $P$  행렬 대신에 단위행렬을 이용하여 간략하게 정의한 것이다.

$$\begin{aligned} V(x(k)) &= x^T(k)x(k) + \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)R x(i) \quad (14) \\ &+ \sum_{j=-d_M+2i}^{-d_m+1} \sum_{k+j-1}^{k-1} x^T(i)R x(i) = V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned}$$

여기서, 대칭행렬  $R$ 은 양의 정칙행렬로  $R > 0$ .

보조정리 3: 식(12)의 시스템은 식(14)에 정의된 리아프노프 함수와  $\epsilon > 0, d_M - d_m \geq 0$ , 식(4)에 정의된 행렬에 대하여 다음의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \quad (15) \\ &\leq x^T(k) (\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R) x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k)) (\|G\|^2 I_n - R) x(k-d(k)) \\ &\quad + 2x^T(k-d(k)) B^T(k) A(k) x(k) \\ &\leq x^T(k) (\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1} \|F\|^2 I_n) x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k)) ((1+\epsilon) \|G\|^2 I_n - R) x(k-d(k)) \end{aligned}$$

$$\text{증명: } V(x(k+1)) - V(x(k)) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

$$x_d(k) \equiv x(k-d(k))$$

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= x^T(k+1)x(k+1) - x^T(k)x(k) \\ &= x^T(k)(A^T(k)A(k) - I_n)x(k) \\ &\quad + 2x_d^T(k)B^T(k)A(k)x(k) \\ &\quad + x_d^T(k)B^T(k)B(k)x_d(k) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^k x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &= x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &\quad - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \quad (17)$$

[16]과 [17]에서와 같이 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &\leq \left( \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) + \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \right) \\ &\quad - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3 &= \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} (x^T(k)Rx(k) - x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) \\ &= (-d_m+1 - (-d_M+2) + 1)x^T(k)Rx(k) \\ &\quad - (x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1) - \dots \\ &\quad - x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1)) \\ &= (d_M-d_m)x^T(k)Rx(k) - \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \quad (19)$$

그러므로, 보조정리 1,2와 잘 알려진 대칭행렬의 성질을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\ &= x^T(k)(A^T(k)A(k) - I_n)x(k) \\ &\quad + 2x_d^T(k)B^T(k)A(k)x(k) \\ &\quad + x_d^T(k)B^T(k)B(k)x_d(k) \\ &\quad + x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + (d_M-d_m)x^T(k)Rx(k) \\ &= x^T(k)(A^T(k)A(k) - I_n + (1+d_M-d_m)R)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))(B^T(k)B(k) - R)x(k-d(k)) \\ &\quad + 2x^T(k-d(k))B^T(k)A(k)x(k) \\ &\leq x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))(\|G\|^2 I_n - R)x(k-d(k)) \\ &\quad + 2x^T(k-d(k))B^T(k)A(k)x(k) \\ &\leq x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}\|F\|^2 I_n)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))((1+\epsilon)\|G\|^2 I_n - R)x(k-d(k)) \end{aligned} \quad (20)$$

위의 보조정리3을 이용하면 다음과 같은 안정조건을 얻을 수 있다.

정리 1: 주어진  $\epsilon > 0, d_M - d_m \geq 0$ 에 대하여 다음을 만족하고

$$-R = \frac{(1+\epsilon^{-1})\|F\|^2 - 1}{1+d_M-d_m} I_n < 0 \quad (21)$$

다음의 부등식을 만족하면 식 (12),(13)의 시스템은 안정하다.

$$\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|G\| < 1 \quad (22)$$

증명: 식 (21)과 같이 행렬  $R$ 을 선택하여 대입하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\ &\leq x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}\|F\|^2 I_n)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))((1+\epsilon)\|G\|^2 I_n - R)x(k-d(k)) \\ &= x^T(k-d(k))((1+\epsilon)\|G\|^2 I_n - R)x(k-d(k)) \end{aligned} \quad (23)$$

따라서  $(1+\epsilon)\|G\|^2 + (1+d_M-d_m)^{-1}((1+\epsilon^{-1})\|F\|^2 - 1) < 0$ 이 되면  $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$  이 됨을 알 수 있다. 이를 보이기 위하여,

$$\epsilon = \frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m} \|G\|} > 0$$

로 하면, 다음의 부등식이 성립함을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m} \|G\|}\right)(1+d_M-d_m)\|G\|^2 \\ &\quad + \left(1 + \frac{\sqrt{1+d_M-d_m} \|G\|}{\|F\|}\right)\|F\|^2 - 1 < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

이를 위하여 함수  $f(\cdot)$ 를 다음과 같이 정의하여 위의 부등식을 만족하는 조건을 구한다.

$$f(\mu = \|G\|) = (1+d_M-d_m)\mu^2 + 2\sqrt{1+d_M-d_m} \|F\|\mu + \|F\|^2 - 1 < 0 \quad (25)$$

$\mu$ 에 대한 2차 방정식  $f(\mu) = 0$ 의 해를 이용하면  $f(\mu) < 0$ 는 다음의 조건을 만족하면 성립한다.

$$\begin{aligned} \mu_1, \mu_2 &= \frac{-\sqrt{1+d_M-d_m} \|F\| \pm \sqrt{1+d_M-d_m}}{1+d_M-d_m} \\ 0 < \mu = \|G\| &< \frac{1-\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|G\| < 1$$

정리 1은 두 개의 부등식 조건으로 안정 조건이 표현되므로 이를 하나의 조건으로 표현하면 다음과 같다.

정리 2 : 다음의 부등식을 만족하면 시스템 (12),(13)은 안정하다.

$$\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|G\| < 1 \quad (27)$$

증명 : 위의 조건을 만족하면  $0 \leq \|G\|$  이므로  $\|F\| - 1 < 0$  은 당연하다.

$$\begin{aligned} & \|F\| - 1 < 0 \quad (28) \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{\|F\|}\right) \|F\|^2 - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|G\|}{\|F\|}\right) \|F\|^2 - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow & (1+\epsilon^{-1}) \|F\|^2 - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(1+\epsilon^{-1}) \|F\|^2 - 1}{1+d_M-d_m} I_n = -R < 0 \end{aligned}$$

따라서 식(27)의 조건을 만족하면 식(21)의 조건도 만족하게 된다.

위의 정리2의 조건은 시변 지연시간에 대한 값까지도 포함한 안정조건으로 매우 중요한 의미를 갖는다. 이와 더불어, 위의 식(27)의 조건은 그 간결함에 있어서도 시불변 지연시간 시스템에 대한 안정조건에 관한 기존 결과 3,4의 조건과 같은 부등식이다. 위의 결과는  $d_m = d_M$ 로 고려하면 시불변 지연시간에 대한 기존결과 1,2 를 포함하며, 구간 시불변 상태행렬에 대한 기존 결과 3와 양의 시스템의 안정조건인 기존 결과 4 을 포함한다. 즉, 정리2는 양의 시스템에만 적용되는 것이 아니라 일반적인 시변 시스템 전체에 적용가능한 것으로 가장 포괄적인 안정조건이다.

다음 장에서는 제안된 안정조건들이 기존의 예제에서 다루어졌던 구간시스템에 적용한 결과를 설명한다.

#### IV. 예제

[11], [12], [14]에서 예제로 사용된 수치예제를 이용한다. [11]과[12]에서는 시불변 시스템과 일정한 지연시간에 대하여 안정성 해석을 행하였다. [14]에서는 시변지연시간을 고려하였으나 양의 시스템으로 모든 시스템 행렬의 값이 양수여야 하였다. 그러나 본 예제에서는 이에 대한 제한 조건이 필요 없으므로 다음과 같이 일반적인 시변 시스템으로 고려한다.

$$\begin{aligned} A^- &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & -a \\ 0 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.20 \\ 0.2 & 0 & a \\ 0 & 0.10 & 0 \end{bmatrix} \quad (29) \\ B^- &= \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.20 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

위의 시스템은 [14]와 다르게 양의 시스템의 조건을 벗어난 일 반적인 것이다. 식 (12),(13)의 상태행렬  $A(k), B(k)$  값이 구간 하한, 상한 행렬  $A^-, B^-, A^+, B^+$  가 식(29) 범위에서 시변으로 임의로 변하는 시변시스템으로 고려한 경우로  $a=0.21, b=0.33$ 에 대한 것이다. 정리2의 안정조건을 적용하기 위하여 식(4)에 정의된 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.21 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

$d_M - d_m = 2$ , 즉, 간격이 2인 시변지연시간을 갖는 경우에 대하여 안정조건  $\|F\| + \sqrt{1+2}\|G\| = 0.9872 < 1$  이 만족되어 안정함을 알 수 있으며 이에 대한 결과가 그림 1-4에 도시된다. 그림 1과 2는 지연 없는 상태변수와 지연이 있는 상태변수에 대한 상태행렬들 중에 시변인 요소값들을 도시한 것이고, 그림 3는 시간  $k$ 에 따른 시변 지연시간  $d(k)$ 의 궤적이며, 그림 4는 상태변수 초기치  $x(k) = [3 \ -2 \ -1]^T$  에 대하여 상태변수  $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$  궤적을 도시한 것이다. 그림 1-3에서와 같은 시변 요소들의 변화가 있는 시스템의 응답이 그림 4에서 시간  $k$ 에 따라 초기값에서 0 으로 접근하여 감을 볼 수 있으며, 이를 통하여 안정함을 확인할 수 있다.

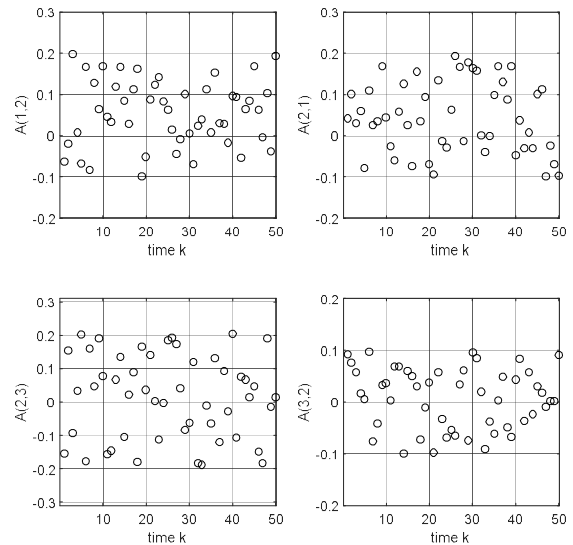


그림 1. 지연 없는 상태변수 상태행렬의 시변 요소값 궤적  
Fig. 1. Trajectory of time-varying parameters of state matrix of non delayed state vector.

#### V. 결론

본 논문에서는 지연 이산시스템에서 두 개의 상태행렬들이 구간 시변행렬로 표현되고, 지연시간도 시변으로 구간범위 내

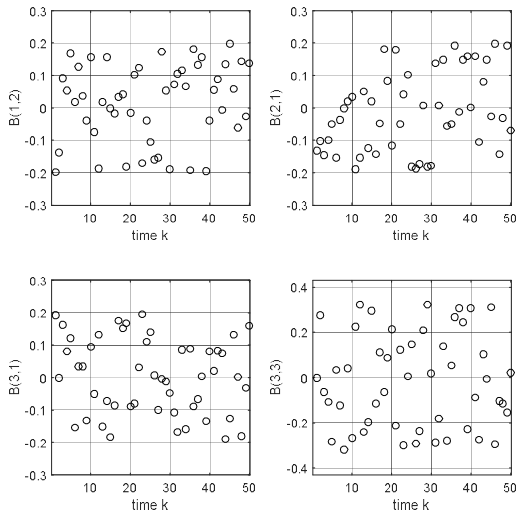


그림 2. 지연 상태변수 상태행렬의 시변 요소값 궤적  
**Fig. 2.** Trajectory of time-varying parameters of state matrix of delayed state vector.

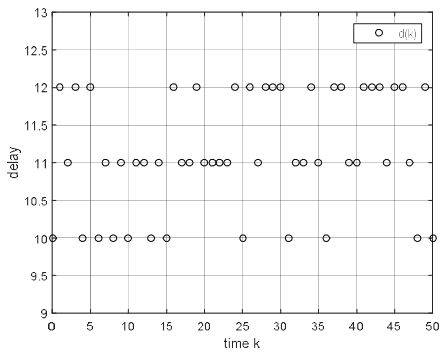


그림 3. 시변 지연 시간  $d(k)$ 의 궤적  
**Fig. 3.** Trajectory of time-varying delay time  $d(k)$ .

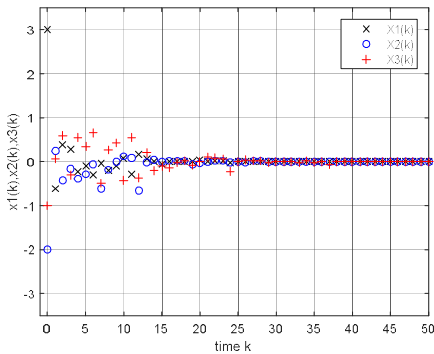


그림 4. 상태변수들의 시간 응답  
**Fig. 4.** Time response of state variables.

에서 변하는 시스템의 안정조건을 다루었다. 본 논문에서 제안된 안정조건은 기존 결과에서의 제약점을 제거한 완전한 시변 시스템에 적용될 수 있는 것으로, 매우 간단한 부등식으로 표현된다. 이 조건은 시스템과 지연 시간과의 연관성을 직관적으로 파악할 수 있는 장점이 있으며, 기존의 많은 결과들을 포함하는

것이다. 기존의 수치예제를 통하여 제안된 조건의 수월성과 효율성을 확인하였다. 본 논문의 결과는 시변 시스템 해석 연구에 적용되어 새로운 결과들을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

## 참고 문헌

- [1] D. L. Debeljković, and S. Stojanović, “The stability of linear discrete time delay systems in the sense of Lyapunov: an overview,” *Scientific Technical Review*, Vol. 60, No. 3, pp. 67-81, Mar. 2010.
- [2] T. Mori, N. Fukuma and M. Kuwahara, “Delay-independent stability criteria for discrete-delay systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 27, No. 4, pp. 964-966, Aug. 1982.
- [3] C. H. Lee, T. L. Hsien, and C. Y. Chen, “Robust stability of discrete uncertain time-delay systems by using a solution bound of the Lyapunov equation,” *Innovative Computing, Information and Control (ICIC Express Letters)*, Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, May 2011.
- [4] L. V. Hien, and H. Trinh, “New finite-sum inequalities with applications to stability of discrete time-delay systems,” *Automatica*, Vol. 71, pp.197-201, Sep. 2016.
- [5] M. N. A. Parlakci, “Robust stability of linear uncertain discrete-time systems with interval time-varying delay,” *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, Vol. 22, No. 3, pp. 650- 662, Apr. 2014.
- [6] O. M. Kwon, M. J. Park, J. H. Park, S.M. Lee, and E. J. Cha, “Stability and stabilization for discrete-time systems with time-varying delays via augmented Lyapunov–Krasovskii functional,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 350, No. 3, pp. 521–540, Apr. 2013.
- [7] Z. Zuon, and H. L. Y. Wang, “New criterion for finite-time stability of linear discrete-time systems with time-varying delay,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 350, No. 9, pp. 2745–2756, Nov. 2013.
- [8] K. Ramakrishnan, and G. Ray, “Robust stability criteria for a class of uncertain discrete-time systems with time-varying delay,” *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 3, pp. 1468–1479, Feb. 2013.
- [9] S. B. Stojanovic, D. L. J. Debeljkovic and N. Dimitrijevic,



- “Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach,” *International Journal of Computers Communications & Control*, Vol. 7, No. 4, pp. 776-784, Nov. 2012.
- [10] C. Y. Kao, “On stability of discrete-time LTI systems with varying time delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 57, No. 5, pp. 1243-1248, May 2012.
- [11] M. Busłowicz and T. Kaczorek, “Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays,” *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 52, No. 2, pp. 99-102, Feb. 2004.
- [12] M. Busłowicz, “Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays,” *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 56, No. 4, pp. 325-328, Apr. 2008.
- [13] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval system with time-varying delay time,” *Journal of Korea Navigation Institute*, Vol. 19, No. 6, pp. 574-580, Dec. 2015.
- [14] H. S. Han, “New stability conditions for positive time-varying discrete interval system with interval time-varying delay time,” *Journal of Korea Navigation Institute*, Vol. 18, No. 5, pp. 501-507, Oct. 2014.
- [15] R. A. Hornand, and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 491, 1985.
- [16] H. S. Han and D. L. Lee, “New stability conditions for networked control system with time-varying delay time,” *Journal of Korea Navigation Institute*, Vol. 17, No. 6, pp. 679-686, Dec. 2013.
- [17] S. B. Stojanovic and D. Debeljkovic, “Delay-dependent stability analysis for discrete-time systems with time varying state delay,” *Chemical Industry & Chemical Engineering Quarterly*, Vol. 17, No. 4, pp. 497-503, Apr. 2011.



**한 형 석 (Hyung-Seok Han)**

1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)  
 1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수  
 ※ 관심분야 : 유도제어, 견실제어, 센서 응용 시스템