한국학교수학회논문집 제 19 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 19, Number 3, 291-308, September 2016

수학영재의 심화학습을 위한 이항계수 연구

윤마병[1] · 전영주[2]

본 연구는 수학영재의 심화학습을 위한 주제로 사용해 볼 수 있는 이항계수의 정의와 성질을 탐구하고, 이로부터 수학적 귀납법, 이항정리, 조합의 정의, 도로망 상황 모델 등을 이용한 이항계수가 포함된 등식의 문제해결방법을 연구하였다. 그리고 이러한 내용들이 수학영재 학생들에게는 충분히 탐구의 대상이 될 수 있어 수학영재 교육의 심화학습 주제로 적절하게 다루어질 수 있다는 것과, 수학의 깊은 의미를 경험할 수 있는 학습주제로 사용될 수 있다는 것을 학생들에게 지도한 예시로 소개한다.

주요용어 : 수학영재, 이항계수

Ⅰ. 서론

인재는 곧 국가 경쟁력이다. 이를 뒷받침하기 위해 시작된 우리나라 영재교육은 1995년 5월 31일 교육개혁위원회가 영재교육의 청사진을 제시하고, 4년 뒤인 1999년 12월 28일 영재교육진흥법이 국회본회의를 통과하면서 본격적으로 첫 발을 내딛었다. 그리고 2003년 개교한 한국과학영재학교를 비롯하여 많은 영재학교와 과학고 등을 신설하면서 국가경쟁력 향상을 위한 고급두뇌 양성이라는 국가적 시스템을 구축하며 영재교육의 발판을 마련하였다. 또한 2000년 1월에 공포된 영재교육진흥법에 따라 영재학급, 영재원이 개설되어 영재교육 대상이 고등학생에서 초등학생까지 확대 개편되는 가시적 성과를 이루었다(김창일 & 전영주, 2005).

하지만 그 내면을 들여다보면 영재교육은 여전히 해결해야 할 문제들이 산적해있다. 무엇보다 영재교육이 입시의 한 방편으로 전락되었고, 초·중·고등으로 이어지는 영재교육의 연계성 결핍, 그리고 영재교육 프로그램의 부족 등은 현재 처해있는 영재교육의 질 관리 문제점을 적나라하게 드러내고 있는 반증이라 할 수 있다. 그나마 다행인 것은 대학의 영재교육원이나 한국교육개발원을 중심으로 영재교육 프로그램을 개발하고 있다는 것이다. 그렇지만 이 또한 각 기관에 소속된 영재들의 개인별 수준과 특성을 온전히 반영하지 못한 프로그램이라는 한계가 있다. 그러므로 영재교육을 담당하고 있는 실제 참여자들에 의한 실질적이고 구체적인 영재교육 프로그램 개발과 교수 전략 연구가 필요한 실정이다(김창일 & 전영주, 2005).

---

* MSC2010분류 : 97D40, 97K20
1) 전주대학교 (mbrabo@jj.ac.kr)
2) 전북대학교 (jyj@jbnu.ac.kr), 교신저자

일반적으로 영재교육은 속진 학습과 심화 학습 두 가지 유형으로 구분한다. 두 가지 유형 모두 장·단점을 지니고 있어 어느 학습 방법이 특별히 좋다고 할 수 없다. 이 때문에 영재교육에서는 속진과 심화학습을 병행할 것을 권장하고 있다. 다만 구체적인 학습 모형 제시가 많지 않다는 아쉬움이 있다. 김선희·김기연(2005)의 연구에서도 이 문제를 '학교교육과정을 중심으로 교육과정의 내용을 어느 정도 심화시키고, 학생들의 창의력을 자극하기 위해 교사의 역할은 무엇인지 안내가 없어 영재교육 담당자들이 결정해야 할 부분들이 많고 이것은 그들에게 큰 부담으로 작용하고 있다'고 지적하고 있다. 그럼에도 불구하고 영재교육은 진행되어야 한다. 그래서 정규교육과정에서 다루지 않는 내용을 학생 수준에 맞추어 그 깊이를 정하고, 학생들의 독창적인 탐구 활동을 유도하여 학생 스스로 중요한 원리를 파악, 새로운 문제해결의 방법을 찾도록 선도하는 주제탐구형 학습 과정을 구성하는 일이 무엇보다 필요하다(김선희 & 김기연, 2005). 그 구체적인 예로, 이항계수 탐구를 제안하고자 한다. 우리가 수학과 실생활 등에서 자연수를 이용하여 세려고 할 때, 가장 좋은 방법이 그 대상에 차례로 번호를 매기고 일렬로 나열하여 나열된 것을 처음부터 차례로 세어 나가는 것이다. 그러나 나열된 대상이 너무 많거나 주어진 조건이 까다로워 일일이 나열하기 쉽지 않을 때가 많다(박종안 외, 2011). 이때 이항계수를 이용하면 쉽게 해결할 수 있다. 이항계수는 주어진 조건에 맞는 대상을 효과적으로 나열할 수 있는 방법과 일일이 나열하지 않고 셀 수 있는 여러 가지 방법을 찾아내는데 유용하게 사용될 수 있기 때문이다.

본 연구는 크게 두 가지 목적이 있다. 하나는 이항계수의 정의와 성질을 탐구하고, 이로부터 이항계수가 포함된 등식을 수학적 귀납법, 이항정리, 조합의 정의, 도로망 상황 모델 등을 이용한 문제해결방법을 심도 있게 연구하는 것이며, 다른 하나는 이와 같은 내용이 수학영재 학생들에게 충분히 탐구의 대상이 될 수 있어 수학영재 교육의 심화학습 주제로 적절하게 다루어질 수 있다는 것과 수학의 깊은 의미를 경험할 수 있는 학습주제로 사용될 수 있다는 것을 학생들에게 지도한 예시를 통해 소개하는데 있다.

Ⅱ. 이항계수에 관한 탐구

이 장에서는 이항계수와 관련된 내용을 살펴보고자 한다. 우선 이항계수의 수학적 의미를 사규(伺窺)해본 뒤 일반화한 이항정리와 이항계수를 설명하고자 한다. 그리고 2009 개정 교육과정에서 제시한 이항계수에 대해 교과서를 중심으로 알아보고자 한다.

1. 이항계수의 수학적 의미

수 개념(number concept)은 아이들이 처음으로 경험하는 수학적 인식 기능의 하나로, 손가락, 발가락 등 신체 일부와 주변 사물 등 구체적 대상을 통해 발달적으로 형성해 나아간다. 이러한 수 개념은 세기와 밀접한 관계가 있는데 세기는 수의 관념이 발생된 다음 벌어지는 수 개념의 원초적 행위로 세기의 사전적 의미는 '수를 세는 일(국립국어원 표준국어대사전)', '대상 모임의 전체 수를 정하는 것(옥스퍼드 사전, OED)'으로 그 의미를 표현하고 있다.

어떤 것을 센다는 것, 그것은 세려고 하는 대상에 자연수 1부터 차례로 번호를 매기는 것이다. 세기에서 가장 좋은 방법은 세려고 하는 대상을 일렬로 나열하고 나열된 것을 처음부

터 차례로 세어나가는 것이다. 그러나 나열할 것이 너무 많거나 주어진 조건이 까다로워 일일이 나열하기 쉽지 않을 때가 예상외로 많다. 이럴 때 주어진 조건에 맞는 대상을 효과적으로 나열할 수 있는 방법과 일일이 나열하지 않고 셀 수 있는 여러 가지 방법이 있다(박종안, 2011). 이 가운데 하나가 조합이다. 조합은 서로 다른 n개 중에서 서로 다른 r개를 뽑는 것으로, 기호로는 $\binom{n}{r}$ 또는 ${}_n\mathrm{C}_r$, $\mathrm{C}_{n,r}$, $\mathrm{C}(n, r)$ 등으로 나타내며, 여기서 조합의 수 $\binom{n}{r}$가 이항계수(binomial coefficient)이다. 즉, 이항계수는 이항정리(binominal theorem)에서 나타나는 계수이기도 하지만 주어진 집합에서 일정한 개수의 집합을 고르는 경우의 수인 조합이다. 이러한 이항계수는 이미 10세기 인도, 아랍 등의 수학자들에 의하여 알려졌는데 이항계수를 나타내는 기호 $\binom{n}{r}$가 문헌에 나타난 것은 1826년이다(Cajori, 1993).

이항정리의 정의와 그와 관련된 기본 정리는 다음과 같다.

(이항정리) x, y가 실수이고 n이 자연수이면,

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

이다.

이때, n, r을 $n \geq r$인 자연수라고 할 때, 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$는

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

이다. 특히, ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$이다.

뉴턴(Newton, 1643~1727)도 이항정리를 다음과 같이 유도하였다(고영미 & 이상욱, 2014).

정수 m과 $n(\neq 0)$에 대하여

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ^2 + \frac{m-2n}{3n}CQ^3 + \cdots$$

이고, 이때, $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n}A$, $C = \frac{m-n}{2n}B$ 등으로 정의된다.

이러한 17세기 뉴턴이 발견한 이항정리를 파스칼은 지수를 유리수까지 확장시켰으며, 이항정리의 계수(係數)와 조합의 수를 관련지어 다음과 같이 표현하였다.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

특히, $y=1$이면

$$(x+1)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$=\binom{n}{n}x^n+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\cdots+\binom{n}{1}x+\binom{n}{0}$$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}x^3+\cdots+x^n$$

이 된다. 이제, 일반화된 이항정리와 이항계수를 살펴보자.
우선 일반화된 이항정리는 아래와 같다.

(일반화된 이항정리) a가 임의의 실수일 때

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

이다. (단, $|x|<1$이다.)

이를 다음과 같이 증명할 수 있다.

증명) $f_a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$이라 하자.

$$f'_a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{a}{n}x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{a}{n+1}x^n$$

$$=a\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a-1}{n}x^n$$

$$=af_{a-1}(x)\cdots \text{①}$$

이고,

$$(1+x)f_{a-1}(x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a-1}{n}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{a-1}{n}+\binom{a-1}{n-1}\right]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

$$=f_a(x)\cdots \text{②}$$

이다. 식 ①에서

$$f'_a(x)=af_{a-1}(x)$$

$$f_{a-1}(x)=\frac{1}{a}f'_a(x)\cdots \text{③}$$

이고, 식 ③을 ②에 대입하면

$$(1+x)f'_a(x)-af_a(x)=0 \cdots \text{ ④}$$

한편,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_a(x)}{(1+x)^a}\right]=\frac{f'_a(x)(1+x)^a-f_a(x)\cdot a(1+x)^{a-1}}{(1+x)^{2a}}=0$$

그러므로 $\dfrac{f_a(x)}{(1+x)^a}$는 상수이고, $x=0$일 때 $(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n=1$이므로

$$f_a(x)=(1+x)^a$$

이다.

그리고, 일반화된 이항계수는 다음과 같이 정의된다.

(일반화된 이항계수) 임의의 실수 a와 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$\binom{a}{k}=\begin{cases}\dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} & (k\geq 1)\\ 1 & (k=0)\end{cases}$$

예를 들면, 자연수 n, k에 대하여

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k}&=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}\\&=(-1)^k\frac{\{n+(k-1)\}\cdots(n+1)n}{k!}\\&=(-1)^k{}_{n+k-1}\mathrm{C}_k=(-1)^k{}_n\mathrm{H}_k\end{aligned}$$

이 성립한다. 여기서 얻은 식을 이용하여 우리가 잘 알고 있는 무한급수 식(*)의 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k{}_nH_k(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}{}_nH_kx^k$$

여기에서 $n=1$을 대입하면

$$(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}{}_1H_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\cdots \text{ (*)}$$

이 된다.

다음은 이항정리를 확장한 다항정리와 다항계수를 알아보고자 한다.

(다항정리) n이 음이 아닌 정수일 때

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

이다. 단, $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$은 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$의 음이 아닌 정수해이다.

이 정리를 다음과 같이 증명할 수 있다.

$x_1+x_2+\cdots+x_k$의 n개의 곱에서 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$의 계수는 n번 중에 x_1을 n_1번, x_2를 n_2번, $\cdots$, x_k를 n_k번 뽑는 방법의 수와 같으므로

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

이다. 따라서

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

이다. 또 다항계수는 다음과 같이 정의된다.

(다항계수) $n, n_1, n_2, \cdots n_k$를 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$인 음이 아닌 정수라 할 때

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2\cdots-n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

를 간단히

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}$$

로 나타내고 다항계수라고 한다.

2. 교육과정에서의 이항계수

2009 개정교육과정에서 이항정리와 이항계수는 고등학교 확률과 통계 교과에 소개되어 있다. 내용 영역은 순열과 조합에서 다루게 되며, '이항정리를 이해한다.', '이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.'는 내용으로 구성되어 있다. 관련 용어와 기호로는 '조합, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\mathrm{C}_r$, ${}_n\Pi_r$, ${}_n\mathrm{H}_r$'이 있다. 여기서 고등학교 교육과정 학습 내용을 중학교 학생들에게 과연 적용 가능할까라는 의문점을 갖게 된다. 이에 대해 첫째, 중학교 1~3학년군 교육과정의 문자와 식 내용영역에서의 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을, 확률과 통계 내용영역에서 경우의 수를 다루어 이항정리와 이항계수 관련 기초 학습과정이 이루어진 것으로 여길 수 있다는 것, 둘째, 학교수학에서 다루는 영역을 크게 '연속수학'과 '이산수학'으로 구분한다면 이항정리와 이항계수는 이산수학 영역에 포함된다. 이러한 이산수학은 제 7차교육과정에서 고등학교 1학년 수학 도달 여부에 관계없이 학생들이 선택할 수 있는 과목으로서 한 번 도입되었다.

그리고 2009 개정교육과정에서는 “확률과 통계는 미적분 I이나 미적분 II의 내용을 이해한 학생이 선택하는 것이 바람직하지만, 미적분 I이나 미적분 II를 이수하지 않은 학생도 선택할 수 있는 과목이다.”로 기술하고 있다. 이와 같은 두 가지 내용을 근거로, 수학영재들에게 이해가능한 적정한 수준에서 이항정리와 이항계수 내용을 제시한다면 그들의 심화학습 주제로 충분히 가능하다고 볼 수 있다.

확률과 통계 교과의 모든 교과서는 ‘Ⅰ. 순열과 조합’, ‘Ⅱ. 확률’, ‘Ⅲ. 통계’ 3단원으로 동일하게 구성되어 있다. 그렇지만 단원 내용으로 들어가 살펴보면 교과서에 따라 구성 차이[3]를 보인다. 황선욱 외(2014)와 우정호 외(2014)의 순열과 조합 내용 체계를 예로 제시하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> ‘Ⅰ. 순열과 조합’ 내용 체계

황선욱 외(2014)		우정호 외(2014)	
1. 순열	1. 경우의 수 2. 순열 3. 여러 가지 순열	1. 경우의 수 2. 순열	1. 경우의 수 1. 순열 2. 원순열 3. 중복순열 4. 같은 것이 있는 순열
2. 조합	1. 조합 2. 중복조합 **3. 이항정리**	3. 조합	1. 조합 2. 중복조합
3. 분할	1. 자연수의 분할 2. 집합의 분할	4. 분할과 이항정리	1. 분할 **2. 이항정리**

2009 개정교육과정 교과서(황선욱 외, 2014; 우정호 외, 2014; 신항균 외, 2014; 정상권 외, 2014)의 이항정리 관련 내용 구성을 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 이항정리 $(a+b)^n$의 전개식에서 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$를 설명한다.

n개의 인수 $(a+b)$ 중의 r개에서 b를 택하고 남은 $(n-r)$개에서 a를 택하고 이를 곱하면 $a^{n-r}b$이 된다. 여기서 그 계수는 n개의 인수 중 r개의 인수 중에서 b를 택하는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같다.

그리고 위의 내용을 정리하여 이항정리와 이항계수를 다음과 같이 정의한다.

n이 자연수일 때,

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$$

3) 필자의 얕은 소견으로는 순열과 조합 뒤에 이항정리가 배치되는 것이 학습 위계에 적합하다는 생각이 든다.

$(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$$ {}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n $$

을 이항계수라고 하며, ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$을 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라고 한다.

다음으로 이항정리를 이용하여 주어진 식을 전개하라거나 또는 식을 제시하고 식의 전개식에서 특정 항의 계수를 구하라는 내용을 소개한다. 그런 다음 파스칼의 삼각형과 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$의 관계를 소개하고, 마지막으로 이항정리의 활용으로 내용 구성을 마친다. 이항정리의 활용은 식의 값을 구하거나 여러 등식(예, 아래 식 (1), (2), (3), (4) 등)을 소개하고 이 등식이 성립함을 증명하라고 되어 있다. 교과서에 공통적으로 실려 있는 이항계수가 포함된 등식을 나열하면 다음과 같다.

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

(3) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots=2^{n-1}$

(4) $(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$

한편, 이항정리와 이항계수 관련 국내 연구를 찾아보면, 최미희(2011)의 '이항계수 $\mathrm{C}(n, k)$의 양수의 멱', 안재현(2010)의 '역 이항계수의 합에 관한 연구', 이동훈(2000)의 '소수의 이차 표현과 이항계수와의 관계' 등이 있지만 교육과정을 중심으로 한 학교수학 수준과는 다소 거리가 있어 보인다. 그렇지만 Gilbertson(2016)의 'Integer Solutions of Binomial Coefficients'에서처럼 이항계수의 등식에서 r을 n에 관한 이차방정식으로 만들어 정수해를 찾거나 Bhindi & McMenamin(2010)의 'Pascal′s Triangle: 100% of the Numbers Are Even!', Buonpastore & Osler(2007)의 'Developing Formulas by Skipping Rows in Pascal′s Triangle', 그리고 Ollerton(2007)의 'Partial Row-Sums of Pascal′s Triangle'의 연구에서 볼 수 있듯이 파스칼의 삼각형에서 수의 배열 또는 여러 특징들을 발견하여 여러 정리들로 제시한 외국의 연구 사례는 영재의 심화학습 프로그램 내용에 포함시킬 수 있을 것으로 여겨진다.

이상 내용을 정리하여 본고에서는 이항정리로부터 다항정리로 일반화를 시도할 것이며, 교과서의 이항계수가 포함된 등식을 중심으로 교과서 이외의 이항계수가 포함된 등식으로 논의를 확대해 나아갈 것이다. 이 때, 이항계수가 포함된 등식의 문제해결 방법을 수학적 귀납법, 이항정리를 이용한 방법, 조합의 정의를 이용한 방법, 그리고 상황 모델로서의 도로망 모델을 이용한 방법 등 네 가지 방법으로 찾아볼 것이다.

Ⅲ. 영재수업에서의 이항계수 탐구 활동 실제

이 장에서는 전북 소재 C대학교 과학영재교육원의 수학영재 학생들이 실제로 사사과정에서 심화학습 주제로 다룬 이항계수의 탐구 활동을 소개하고자 한다. 이것은 영재교육에서

빈번히 이루어지고 있는 심화학습, 탐구학습, 프로젝트 학습 등과 관련한 하나의 구체적 사례로 영재담당 교사들에게 작은 도움을 주고자 함이다.

일반적으로 수학영재교육에서 창의성과 창의적 문제해결력 신장이 중요한 가치를 갖는다는 것에는 큰 이견이 없을 것이다. 이러한 영재의 창의성과 창의적 문제해결력 신장은 교수자의 단순한 개념이나 내용 전달이 아닌 영재 자신의 지식과 심상 작용을 통해 주어진 과제를 독창적으로 해결하는 전략 과정에서 생성되어 진다. 따라서 영재수업에서 영재들이 탐구과제를 스스로 결정・선택하고 풀어나갈 수 있도록 적절한 안내가 필요하다(전영주, 2006).

이러한 요구에 맞추어 진행된 영재수업에서 영재들이 이항계수라는 주제를 어떻게 접근하여 탐구해 나아가는지, 또 어느 심화 수준까지 도달할 수 있을 것인지를 본 연구에서 살펴볼 수 있을 것이다.

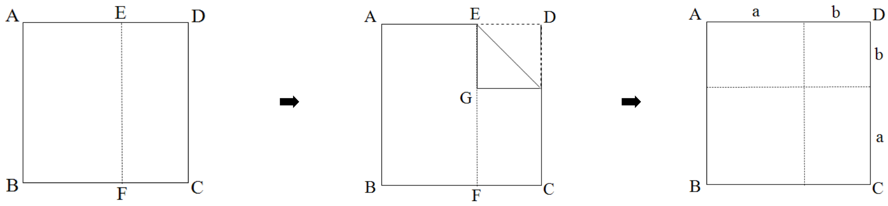
여기 연구에 참여한 학생들은 모두 6명으로 2014년 심화과정(1년)을 이수한 중학교 3학년 학생 3명(남 2명, 여 1명), 2학년 학생 3명(남 3명)이다. 참여기간은 2015년 4월~10월(7개월)에 걸쳐 토요일 주말교육과 여름방학 집중교육을 포함하여 전체 60시간(15차시, 4시간/1차시) 동안 이루어졌다. 이 학생들이 이항계수를 접하기 전에는 기초적 세기 방법, 순열, 그리고 조합 내용에 대해 각 4시간씩 총 12시간을 사전 탐구하였다. 그런 다음 이항계수와 관련하여서 이항계수 4시간(4차시/15차시), 이항계수의 응용 4시간(5차시/15차시)을 할애하여 탐구하였다. 이후 나머지 차시에는 수의 분할, 집합의 분할, 포함배제의 원리, 비둘기 집의 원리를 탐구하였다. 물론 전체적으로 학생들이 이해할 수 있는 수준에서 프로그램은 진행되었고, 이항계수 역시 이 학생들이 접근할 수 있는 수준 정도의 프로그램으로 제공되었다.

1. 학생들의 이항계수 탐구 내용

학생들이 이항계수를 접한 뒤의 초기 반응은 쉬운 예를 찾아 자신의 지식을 기반으로 이항계수 내용을 이해하려는 것이었다. 그러나 시간이 지날수록 현재의 문제해결 수준 단계를 뛰어넘으려는 영재 특유의 자발적이고 높은 지적 욕구 특징을 보이며 서툴고 투박하지만 새로운 문제해결 방법을 찾으려는 시도를 보였다. 이러한 그들의 이항계수 학습 과정을 살펴보기로 한다. 전술한 바와 같이 학생들은 이미 순열과 조합의 성질에 대해 사전조사와 학습을 마친 상태로 다음의 장면들은 이항계수 학습 과정 중에 나타난 특징적인 몇 장면을 소개하고자 한다.

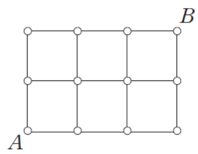
학생들은 예상대로 이차식 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$을 가장 먼저 토의하였으며, 이 등식이 사각형 모양의 종이접기로 표현이 가능하다는 것을 쉽게 발견해 내었다. 학생들이 발견한 결과는 다음과 같다.

> 사각형 모양의 종이 ABCD가 있습니다. 여기서 변 AB와 평행하도록 변 AD와 변 BC 위에 각각 점 E와 점 F를 잡고 이 두 점을 이은 선분 EF를 그립니다. 그런 다음 꼭짓점 D에서 선분 EF 위로 접어 선분 EF와 꼭짓점 D가 만나는 점을 G라 하면, 점 G를 중심으로 4개의 사각형이 만들어집니다. 이 때, 나누어진 긴 길이와 짧은 길이를 각각 a와 b라 하면, 이 4개의 사각형 면적은 각각 a^2, ab, ba, b^2으로 표현됩니다. 또, 나누어진 사각형의 면적을 모두 합하면 $a^2+2ab+b^2$이 됩니다. 이것은 처음 정사각형의 면적은 $(a+b)^2$입니다. 따라서 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$임을 알 수 있습니다. 또, 이차식 이항정리의 이항계수는 종이접기로 표현이 가능합니다.



이처럼 학생들은 종이접기로 등식 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$의 표현이 가능하다는 것을 잘 찾아내었다. 그래서 지도교사는 학생들에게 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r = \binom{n}{r}$를 단순한 식으로서가 아니라 등식 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$이 종이접기로 표현되어지는 것처럼 상황 모델을 찾아보는 것이 어떤지 요구하였다. 학생들은 '${}_n\mathrm{C}_r$는 공식이 아닌가요?'라는 반문으로 상황 모델을 찾을 수 있는지 의문을 가졌다. 그것은 그동안 식이나 그래프는 학생들에게 문제를 풀기 위한 도구로 인식되어 왔기 때문에 그들의 반응은 당연한 일이었다. 학생들이 문제해결의 단서를 찾지 못하자 지도교사는 '$\binom{5}{3}$이 $\frac{5!}{2!3!}$로 표현이 되지 않는가!'라는 하나의 실마리를 제공하였다. 그러자 학생들은 $\frac{5!}{2!3!}$이 같은 것이 들어 있는 순열이라는 것을 곧바로 인지하고 도로망 상황으로 설명하였다.

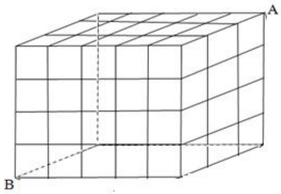
그림과 같은 도로망에서 지점 A에서 B로 도달하는 최단 경로의 수로 $\frac{5!}{2!3!}$을 표현할 수 있습니다.



그것은 오른쪽으로 가는 것을 a, 위쪽으로 가는 것을 b로 나타낼 때 A에서 B로 가는 최단 경로는 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 것과 일대일 대응입니다. 따라서 5개의 자리 중 3곳을 택하여 a를 배열하고 남은 곳에 b를 배열하면 그 방법의 수는 $\binom{5}{3}$이므로 A에서 B로 가는 최단 경로의 수와 같게 됩니다. 결과적으로 도로망은 $\binom{5}{3}$의 상황 모델이라 할 수 있습니다. 결과적으로 가로와 세로가 각각 a, b 칸인 직사각형 도로망에서 왼쪽 아래 끝 지점에서 오른쪽 위 끝 지점에 이르는 최단 경로의 수 구하기는 $\binom{a+b}{a}$의 상황 모델이라 할 수 있습니다.

지도교사는 학생들의 추론능력을 파악하고 그들에게 고도의 인지적 자극을 끌어내기 위해 아래 [그림 Ⅲ-1]과 같은 3차원 도로망을 제시하였다. 그리고는 조용히 기다려 주었다. 그것은 학생들이 분명 통찰력을 발휘하여 $\binom{n}{r}$의 도로망 상황 모델에서 문제해결의 정보를 찾을

것이라는 지도교사의 숨겨진 의도와 기대가 있었다. 학생들은 지도교사의 기대에 부응하여 $\binom{n}{n_1, n_2, n_3}$의 상황 모델을 조직적 사고로 잘 찾아내었다.



[그림 Ⅲ-1] 3차원 도로망 상황 모델

네, 그것은 앞선 도로망 그림에서 지점 A에서 B로 도달하는 최단 경로의 수가 $\frac{5!}{2!3!}$이므로 이것은 $\frac{12!}{5!3!4!}$입니다.

학생들은 도로망 문제로 ${}_nC_r$를 해결하자, 같은 형태의 격자 그림에 호기심을 보였다. 그리고 ${}_nC_r$를 통해 받아들인 새로운 수학적 지식을 이용하여 격자 그림의 의미를 수학적 모델로 찾아보려 하였다. 그것은 사고의 변환을 통해 다양한 해결책을 찾으려는 영재 특유의 사고 융통성을 보여주는 행동이었다. 학생들이 발견한 결과는 다음과 같다.

5개의 가로선과 6개의 세로선으로 이루어진 격자 모양에서 직사각형의 개수와 정사각형의 개수를 순열과 조합을 이용하여 구할 수 있습니다. 직사각형의 개수는 5개의 가로선 중 2개, 세로선 6개 중 2개를 각각 뽑아 곱의 법칙을 이용하면 됩니다. 즉 ${}_5C_2 \times {}_6C_2$입니다. 또 정사각형의 개수는 사각형 하나의 변의 길이를 1이라 하면, 길이가 1인 것의 개수는 ${}_5P_2$, 길이가 2인 것의 개수는 ${}_4P_2$, 길이가 3인 것의 개수는 ${}_3P_2$, 길이가 4인 것의 개수는 ${}_2P_2$입니다. 따라서 전체 정사각형의 개수는 ${}_5P_2+{}_4P_2+{}_3P_2+{}_2P_2$입니다. 결과적으로 격자 모형은 순열 ${}_nP_r+{}_{n-1}P_r+\cdots+{}_3P_2+{}_2P_2$ (단, $n \geq 2$)과 가로선 m개, 세로선 n개의 모양에서 직사각형의 개수로 조합 ${}_mC_2 \times {}_nC_2$의 상황 모델입니다.

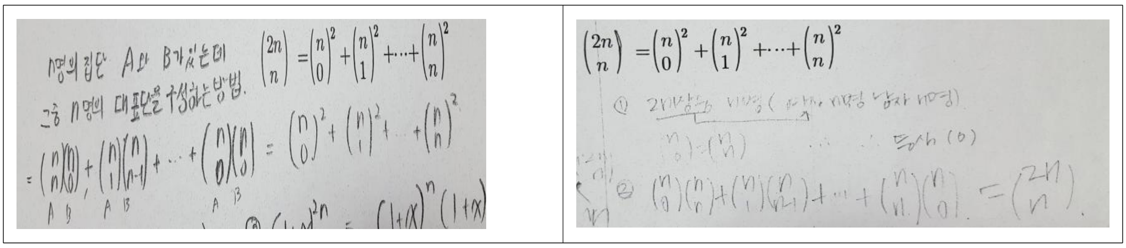
그 다음 학생들은 이항계수의 기본 성질 등식 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$를 탐색 내용으로 선정하였다. 그리고 주어진 등식을 이해하고 문제를 해결하는데 걸린 시간은 그렇게 오래 걸리지 않았다. 학생들은 조합의 수 ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$를 이용하여 계산하거나 파스칼의 삼각형에서 각 단계의 배열이 대칭이고 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 아래쪽 중앙에 있는 수와 같다는 것으로 확인하려 하였다. 그리고 일부 학생은 조합의 정의로 등식을 이해하려 하였다.

대표선발 상황으로 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$을 설명하자면 다음과 같습니다. n명 가운데 r명을 대표

로 선발할 때, 특정한 인물 A를 포함시키거나 배제시킬 수 있습니다. 그러므로 특정 인물 A를 포함시키는 방법의 수는 A를 제외한 $(n-1)$명 가운데 $(r-1)$명을 대표로 선발하는 방법의 수인 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$이 됩니다. 또, 이번에는 특정 인물 A를 배제시키는 방법의 수는 A를 제외한 $(n-1)$명 가운데 r명을 대표로 선발하는 경우의 수 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$이 됩니다. 따라서 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$의 등식이 성립함을 이해할 수 있었습니다.

학생들은 대표선발 상황이 이항계수의 복잡한 식을 간단하게 재해석하는데 유용하다는 것을 깨닫고 이와 관련된 좀 더 확장된 내용을 찾아보기 시작하였다. 이것은 이항계수의 문제해결에 대한 자신감의 발로이며 심화내용에 대한 학생들의 도전이었다. 학생들은 등식 $\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$을 심화 탐구 문제로 선정하고 자신들의 추측이 옳다는 확신을 갖고 주어진 문제를 해결하기 위한 방안을 찾으려 노력하였다. 그리고 다음과 같이 나름대로의 정당화를 시도하였다.

$\binom{2n}{n}$은 남자 n명, 여자 n명으로 구성된 $2n$명 중에서 n명의 대표를 뽑는 방법의 수입니다. 각 $k=0,1,2,\cdots,n$에 대하여 남자 대표의 수가 k, 여자 대표의 수가 $n-k$가 되도록 대표를 뽑는 방법의 수는 $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$이므로 합의 법칙에 의하여 $\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$이 성립함을 알 수 있습니다.



[그림 Ⅲ-2] 대표선발로 학생들이 해결한 예

2. 학생들의 이항계수 응용 탐구 내용

학생들은 이항계수 탐구를 통해 수학뿐만 아니라 실생활에서 어떤 것을 세어야 할 때 효과적으로 세는 방법으로 이항계수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$가 유용하게 이용된다는 것을 알게 되었다. 또, 학생들은 이 과정에서 시행착오를 겪으며 오류를 발견하고 그 문제점을 개선해 나가는 사고 과정을 거쳤다. 그리고 마침내 문제해결을 위한 상황 모델을 찾아내었다. 학생들은 이러한 이항계수 학습에 이어 이항계수의 응용이라는 주제로 이항계수보다 심화된 내용을 탐구하였다. 이를 위해 학생들에게는 이항계수가 포함된 등식의 문제해결의 다양한 방안을 찾아보라는 사전 과제를 2주 전에 제시하였다. 다음은 이항계수의 응용 학습 과정 중에 나타난 문제

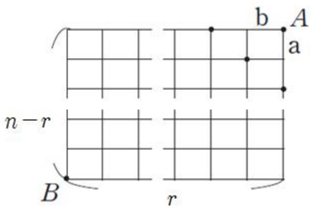
해결방법의 몇 장면을 소개하고자 한다.

학생들은 이항계수가 포함된 복잡한 등식이 주어지자 먼저 자신들이 기본적으로 알고 있는 수학적 귀납법으로 다음과 같이 문제해결을 시도하였다.

주어진 식 $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$은 r에 관한 수학적 귀납법으로 성립함을 보이면 됩니다. 우선 $r=0$이면 $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$로 등식이 성립합니다. 그리고 모든 자연수 r에 대하여 $r-1$일 때 등식이 성립한다고 가정하면, $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r}{r-1}+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$가 됩니다.

지도 교사는 학생들이 주어진 등식이 참임을 밝혀내자 또 다른 해결 방안을 찾을 것을 학생들에게 요구하였다. 그러자 학생 A는 식을 하나씩 풀어 계산하려고 하였다. 그러자 학생 B는 계산으로 식이 성립함을 보이기에는 너무 복잡하다는 것을 인지하고 등식이 지니고 있는 숨은 의미를 찾아보자고 다른 학생들에게 제안하였다. 일정 시간이 경과하자 학생 B가 이항계수 등식 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$에 관한 도로망 상황 모델을 응용하면 주어진 등식을 재해석할 수 있음을 찾아내었다. 그리고 학생들에게 자신이 이해한 내용을 다음과 같이 설명하며 주어진 문제를 도로망 상황 모델로 해결해 보자고 독려하는 모습을 보였다.

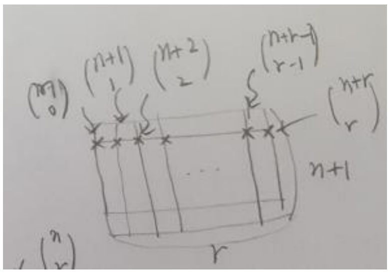
우선 그림과 같은 가로가 r칸, 세로가 $n-r$칸인 도로망이 있다고 하자. 이때 A에서 B로 가는 최단 경로의 방법의 수는 $\binom{n}{r}$이다. 그런데 A에서 B로 가려면 반드시 도로 a를 지나거나 또는 b를 지나야만 하지.



따라서 A에서 출발하여 B에 도착하는 방법 가운데 a를 지나는 방법의 수는 $\binom{n-1}{r}$이고, b를 지나는 방법의 수는 $\binom{n-1}{r-1}$이고, 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 두 방법의 수를 더한 $\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$의 값은 $\binom{n}{r}$와 같아. 주어진 등식도 이러한 방법으로 함께 해결해 보자. 그러면 해결 될 것 같아.

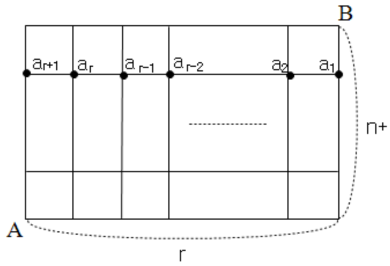
학생들은 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$에 관한 도로망 상황 모델을 예리한 관찰력으로 분석하기 시작하였다. 그러면서 주어진 식이 담고 있는 중요한 개념과 원리가 무엇인지 파악하고 이를 이용하여 일반화 할 수 있는가를 고민하기에 이르렀다. 그리고 두 식 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$와

$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$ 사이의 유사성과 관련성을 찾아내었고 마침내 주어진 문제를 해결하였다. 아래 그림은 학생들이 찾아낸 도로망 상황 모델이다([그림 Ⅲ-3]).



[그림 Ⅲ-3] 도로망 상황 모델

위 [그림 Ⅲ-3]을 정리하여 설명하면 다음과 같다. 그림과 같은 도로망 상황 모델에서, A에서 출발하여 B에 도착하는 방법의 수는 $\binom{n+r+1}{r}$이고 이런 최단 경로는 그림에 표시된 $a_1, a_2, \cdots, a_{r+1}$ 중 반드시 한 길만을 지나게 된다. $1 \le k \le r+1$인 k에 대하여 A에서 B로 가는 최단 경로 중 a_k를 지나는 방법의 수는 가로가 $r-k+1$, 세로가 n인 직사각형 모양의 도로망에서 최단 경로의 수이므로 $\binom{n+r-k+1}{r}$이다. 따라서 합의 법칙에 의하여 $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$이다.



지도교사는 이번에는 식 $\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$을 제시하고, 지금까지 해결하지 않은 방법으로 등식이 성립됨을 증명해 볼 것을 주문하였다. 앞서와 마찬가지로 처음에는 문제해결과정에서 머뭇거림을 보이고 시행착오도 겪었다. 그러나 뛰어난 이해력과 사고 능력으로 새로운 문제해결 방법에 곧 적응하였고, 해결방법도 찾아내었다.

$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$에서 x^r의 계수를 비교하면 됩니다. 이항정리에 의하여 $(1+x)^{m+n}$에서 x^r의 계수는 $\binom{m+n}{r}$입니다. 그리고 $(1+x)^m(1+x)^n$에서의 x^r의 계수는 $\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$입니다. 따라서 $(1+x)^m(1+x)^n$과 $(1+x)^{m+n}$에서 x^r의 계수는 같게 됩니다.

학생들은 분명 주어진 새로운 상황을 즐기며 문제해결과정에서의 의사결정에 자신감을 보였다. 그러면서 Polya(1957)의 발견술에서 언급된 문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성의 과정을 효율적으로 수행하였다. 이처럼 연구에 참여한 학생들은 최선의 노력으로 문제 해결을 완수하는 태도를 보였다. 다음은 학생들이 탐구 활동 과정을 통해 얻은 소감을 다음과 같이 피력하였다.

이항정리와 이항계수를 처음 접했을 때 용어가 생소하여 문제를 푸는데 어려움이 있었습니다. 그리고 우리가 생각한대로 문제가 풀리지 않았기도 하구요. 그렇지만 주어진 문제를 꼭 해결해보고 싶은 마음이 있었습니다. 또 혼자서 해결하기 어려울 때 서로의 생각을 조금씩 나누면 어려운 문제도 쉽게 풀 수 있다는 것을 배웠습니다. 예전에 알면서도 기억하지 못했던 것인데 문제해결 방법이 한 가지가 아니라 여러 가지가 있다는 것입니다. 그리고 이항계수가 포함된 식이 단순한 식이 아니라 우리 주변에서 살펴볼 수 있는 것이 신기하기도 하였습니다. 앞으로 기회가 주어진다면 좀 더 수준 높은 이항계수 문제들에 도전해 보고 싶습니다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 수학영재 학생을 대상으로 하여 이산수학 내용 가운데 이항계수의 정의와 성질을 탐구하고 이로부터 다항정리와 다항계수로 확장할 수 있는지 알아보았다. 그리고 이항계수가 포함된 다양한 등식의 문제해결 방법으로 수학적 귀납법, 이항정리를 이용한 방법, 조합의 정의를 이용한 방법, 상황 모델로서의 도로망모델을 이용한 방법 등 네 가지 방법도 알아보았다. 그러면서 이와 같은 내용이 수학영재 교육의 심화학습 주제로 적절하게 다루어질 수 있다는 것과 전반적인 내용이 학교교육과정을 뛰어넘지만 수학영재 학생들에게는 충분히 탐구의 대상이 될 수 있으며, 수학의 깊은 의미를 경험할 수 있는 학습주제로 사용될 수 있다고 제안한 것이다.

학생들은 이항정리가 중학교 교육과정의 곱셈공식, 인수분해와 관련성이 있다는 것을 알게 되었고, 이항계수가 포함된 여러 등식의 증명과정에서 다양한 접근 방법을 선택하며 그 가운데 가장 경제적인 해를 찾는 방법을 알아보았다. 다소 교과서 이외의 이항계수가 포함된 등식 논의가 포함되어 있었지만 이항계수가 무엇이고 그 속에 담겨있는 진정한 의미가 무엇인지 찾아보는 수학탐구 여정이었다.

이러한 탐구과정에서 학생들이 처음 얻은 내용을 종합하면, 이차식 이항정리의 이항계수는 종이접기 상황 모델로 표현이 가능하다. 이항계수 $\binom{a+b}{a}$는 가로와 세로가 각각 a, b칸인 직사각형 도로망에서 왼쪽 아래 끝 지점에서 오른쪽 위 끝 지점에 이르는 최단 경로의 수 구하기를 수학적으로 모델링 한 것이다. 전체 n명 가운데 대표 r명을 선발하는 것은 $\binom{n}{r}$의 상황 모델이다. 격자 모형은 순열 ${}_n\mathrm{P}_r + {}_{n-1}\mathrm{P}_r + \cdots + {}_3\mathrm{P}_2 + {}_2\mathrm{P}_2$과 가로선 m개, 세로선 n개의 모양에서 직사각형의 개수로 조합 ${}_m\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_2$의 상황 모델이다. 기호나 부호를 이용하면 중복조합 ${}_n\mathrm{H}_r$를 표현할 수 있다는 것이었다. 그리고 이항계수의 응용 탐구에서는 이항계수가 포함된 등식의 문제해결 방법으로 수학적 귀납법, 이항정리를 이용한 방법, 조합의 정리로 접근하는 방법, 도로망 모델 등을 이용하여 해결할 수 있다는 것을 확인할 수 있었다. 특히,

이항계수를 시각적으로 간단하고 명료하게 표현하여 합리적이고 경제적인 해를 찾는데 도로망의 상황 모델이 유용하다는 것을 알 수 있었다.

이러한 수학영재의 심화학습을 위한 주제탐구형 학습을 통해 얻은 시사점을 교수적 관점에서 정리하면 다음과 같다.

첫째, 교사는 심화학습 주제에 관하여 깊이 있는 사전 연구를 통해 전반적인 내용을 통찰하고 있어야 한다. 이래야만 전형적인 과업에 싫증을 내는 학생들에게 보다 심화된 내용으로 안내할 수 있다. 둘째, 학생은 교사가 제공하는 자료와 안내에 따라 주어진 학습 주제를 탐구하면서 해당 분야의 구조를 점진적으로 파악하게 된다. 따라서 교사는 학생의 인지를 최대한 자극하기 위한 적정한 자료 제공과 인지 능력을 향상시킬 수 있는 수업 방법의 개발이 요청된다. 셋째, 수학영재 학생들은 일반학생들과 달리 계산과 같은 판에 박힌 상황을 싫어하므로 교사는 학생들이 사고를 재조직할 수 있는 문제 장면을 지속적으로 제공하여야 한다. 그러면 학생들은 복잡한 과제에 도전의식을 갖고 대안적인 방법으로 접근하여 탐구 주제에 정통하게 된다. 넷째, 학생들은 식이나 그래프는 문제를 풀기 위한 도구로 인식하는 고정된 반응 양식이 있어 이와 같은 습관이 새로운 지식 구성에 장애로 작용한다. 그래서 교사는 이를 우선 인정하고 학생들이 좁은 시야를 벗어내고 전체적인 조망으로 사고 수준이 도약되도록 이끌어주어야 한다. 다섯째, 학생들은 자발적인 계획으로 과제를 수행하기에 교사는 학생들이 올바르고 정확한 판단을 할 수 있도록 안내하는 최소한의 수업 참여자가 되어야 한다. 그러면 학생들은 교사가 제공한 자료를 토대로 서로 충분한 논의를 통해 탐구 분야에 친숙하기 위한 활동을 하면서 학습 주제를 파악하게 된다.

수학영재 주제 학습은 가능한 우리 주변의 소재를 사용하는 것이 좋다. 그것은 학생들이 탐구과정 속에서 타 교과 내용을 자연스럽게 흡수할 수 있기 때문이다. 그리고 사회나 자연 현상을 식으로 나타내기까지의 과정, 그리고 그 문제를 해결하는 과정에서 본래의 현상을 재해석하는 과정, 그 다음 적용하고 응용의 폭을 넓혀 확대 생산할 수 있는 과정이 포함되는 것이 바람직하다. 이에 더하여 수식이나 그래프, 표 등의 현상에서 그 속에 함의되어 있는 본질을 사회적, 물리적 현상 속에서 찾아 밝힐 수 있는 능력을 키우도록 도와주어야 한다. 그래서 수학이 추상적이고 명확한 실체가 없는 것으로만 알고 있었던 오상(誤想)에서 탈각(脫却)하여 수학은 우리 주변 가까이에 늘 있으며, 수학은 언제나 유용하고 실용적이라는 것을 학생들이 깨닫는 시간이 되어야 한다.

참고 문헌

고영미, 이상욱 (2014). 뉴턴의 일반화된 이항정리의 기원. **한국수학사학회지**, **27**(2), 127-138.

김선희, 김기연 (2005). 수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구. **수학교육연구**, **15**(3), 335-352.

김창일, 전영주 (2005). 수학영재교육 프로그램의 설계 및 교수전략 : 기하학을 중심으로. **수학교육논문집**, **19**(2), 453-469.

박종안, 이재진, 이준열, 서승현 (2011). **이산수학**. 서울 : 경문사.

신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문환, 윤정호, 박상의, 서원호, 전제동, 이동흔 (2014). **확률과 통계**. 서울 : ㈜ 지학사.

안재현 (2010). **역 이항계수의 합에 관한 연구**. 석사학위논문. 인하대학교 대학원, 인천.

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, 권석일, 남진영, 김진환, 강현영, 이형주, 박재희, 전철, 오혜미, 김상철, 설은선, 황수영, 김민경, 최인선, 고현주, 이정연, 최은자, 김기연, 윤혜미, 천화정 (2014). **확률과 통계**. 서울 : 동아출판.

이동훈 (2000). **소수의 이차표현과 이항계수와의 관계**. 박사학위논문. KAIST, 대전.

전영주 (2006). 사사프로젝트 학습을 통한 수학영재 지도. **한국학교수학회논문집**, **9**(2), 163-177.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원, 민진원, 김호경 (2014). **확률과 통계**. 서울 : ㈜금성출판사.

최미희 (2011). **이항계수 C(n,k)의 양수의 멱**. 석사학위논문. 연세대학교 대학원, 서울.

황선욱 외 (2014). **확률과 통계**. 서울 : 좋은책 신사고.

Bhindi, N., & McMenamin, J. (2010). Pascal's Triangle: 100% of the Numbers Are Even!. *Australian Mathematics Teacher*, *66*(1), 25-28.

Buonpastore, R. J., & Osler, T. J. (2007). Developing Formulas by Skipping Rows in Pascal's Triangle. *Mathematics and Computer Education*, *41*(1), 25-29.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. The Open Court Publishing Company, Chicago.

Gilbertson, N. J. (2016). Integer Solutions of Binomial Coefficients. *Mathematics Teacher*, *109*(6), 472-475.

Ollerton, R. L. (2007). Partial Row-Sums of Pascal's Triangle. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *38*(1). 124-127.

Polya, G. (1957). *How to Solve it*: A New Aspects of Mathematical Methods. Prentice University Press.

A Study on Binomial Coefficient as an Enriched Learning Topic for the Mathematically Gifted Students

Yoon, Mabyong[4) · Jeon, Youngju[5)

Abstract

In this paper, we did a study on the definition and properties of binomial coefficients which can be seen with the topic for the enrichment of mathematically gifted students. Using this result, studied the problem of how to solve equations containing the binomial coefficients by using the mathematical induction, binomial theorem, the definition of the combination, and road network model situations. And such contents can be adequately dealt with the subject of mathematics enrichment gifted and talented Education because mathematically gifted students may well be the subject of inquiry. In addition, it can be used to study the subject to experience a deep sense of mathematics. As this research, it will be introduced as an example to guide students.

Key Words : Mathematically Gifted Students, Binomial Coefficients

Received August 22, 2016
Revised September 9, 2016
Accepted September 13, 2016

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97D40, 97K20

4) Jeonju University (mbrabo@jj.ac.kr)
5) Chonbuk National University (jyj@jbnu.ac.kr), Corresponding Author