The Korean Journal of Applied Statistics (2016) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2016.29.5.823
29(5), 823–833

A binomial CUSUM chart for monitoring type I right-censored Weibull lifetimes

Min-jae Choi[a] · Jaeheon Lee[a,1]

[a]Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received April 25, 2016; Revised June 15, 2016; Accepted June 15, 2016)

Abstract

The lifetime is a key characteristic of product quality. It is best to obtain the lifetime data of all samples, but they are often censored due to time or expense limitations. In this paper, we propose a binomial cumulative sum (CUSUM) chart to monitor the mean of type I right-censored Weibull lifetime data, for a fixed value of the Weibull shape parameter. We compare the performance of the proposed binomial CUSUM chart with CUSUM charts studied previously using the steady-state average run length (ARL). The results show that the performance of the binomial CUSUM chart is better when the censoring rate is high and/or the sample size is small.

Keywords: ARL, binomial CUSUM chart, censored data, Weibull lifetime

1. 서론

산업 생산공정에서 관리도(control chart)는 공정의 상태를 파악하고 제품의 품질을 변화시키는 이상원인을 최대한 빠르게 탐지하여 공정을 효율적으로 관리할 수 있게 하는 통계적 도구이다. 관리도의 종류에는 Shewhart 관리도를 비롯해 누적합(cumulative sum; CUSUM) 관리도, 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 관리도 등이 있다.

생산공정에서 제품의 수명은 품질을 나타내는 중요한 특성치가 될 수 있다. 수명시험은 일반적으로 n개의 제품으로 구성된 표본에서 모든 제품이 고장날 때까지 시험을 진행하는 것인데, 시간적 또는 비용적인 제약 때문에 중도절단하는 경우가 빈번하게 발생한다. 중도절단은 제 1형과 제 2형으로 구분할 수 있는데, 제1형 중도절단(type I censoring)은 특정 시점까지 시험을 진행한 후 중지하는 것이고 제 2형 중도절단(type II censoring)은 특정 개수의 수명 자료를 얻은 후 시험을 중지하는 것이다. 이 두가지 경우 모두 어느 시점 이후부터 관측이 중단되었기 때문에 우측중도절단(right censoring)이라고도 하는데, 본 논문에서는 산업 현장에서 가장 일반적으로 발생하는 제 1형 우측중도절단 자료를 고려하였다.

제품의 수명에 대한 분포로 와이블 분포(Weibull distribution)가 많이 사용되어 진다. 와이블 분포는 스웨덴의 물리학자 Weibull이 재료의 파괴 강도에 대한 분포를 나타내기 위해 제안했는데, 제품의 수

This research was supported by the Chung-Ang University Research Scholarship Grants in 2015.
[1]Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84 Heukseok-ro, Dongjak-gu, Seoul 06974, Korea. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

명을 나타내는데 적합하다고 알려져 있다. 수명을 나타내는 확률변수 T가 형상모수(shape parameter) β와 척도모수(scale parameter) η를 갖는 와이블 분포, 즉 Weibull(β, η)를 따른다고 할 때, 확률밀도함수(pdf)와 누적분포함수(cdf)는 각각 다음과 같다.

$$f(t|\beta,\eta) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$F(t|\beta,\eta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad t > 0. \tag{1.2}$$

이때, 분포의 평균은 $\eta\Gamma(1+1/\beta)$이고, 미리 정해진 중도절단 시점을 C라 할 경우 중도절단율(censoring rate) pc는

$$pc = \Pr(T > C) = \exp\left[-\left(\frac{C}{\eta}\right)^{\beta}\right] \tag{1.3}$$

가 됨이 잘 알려져 있다.

와이블 분포는 두 개의 모수 β와 η를 갖는데, 형상모수 β의 값에 따라 다양한 형태를 나타낼 수 있다. 대표적으로 β가 1일 경우 지수분포(exponential distribution)가 되며, β가 3.44인 경우 정규분포(normal distribution)와 유사한 대칭인 분포의 형태를 나타낸다. 또한 β가 1인 경우 시간에 따라 고장률(failure rate)이 일정하며, β값이 1보다 작은 경우 고장률이 감소하고 1보다 큰 경우 고장률이 증가하는 제품의 수명을 나타낸다. 척도모수인 η는 특성수명(characteristic life)으로 와이블 분포를 따르는 제품의 약 63.2%가 고장나는 시점을 나타낸다.

제1형 우측중도절단이 존재하는 와이블 분포의 척도모수 변화를 탐지하는 관리도 절차에 대한 연구로는 Steiner와 MacKay (2000), Zhang과 Chen (2004), 그리고 Dickinson 등 (2014)이 있다. Steiner와 MacKay (2000)는 중도절단된 자료들을 조건부 기댓값으로 대체한 후 Shewhart 관리도에 적용하는 절차를 제안하였다. Zhang과 Chen (2004)은 이 조건부 기댓값의 개념을 지수가중이동평균 관리도에 적용하는 절차를 제안하고 이에 대한 효율을 Steiner와 MacKay (2000)가 제안한 절차와 비교하였다. Dickinson 등 (2014)은 형상모수 β는 고정되어 있고 척도모수 η가 감소하는지를 탐지하는 한쪽 누적합 관리도 절차를 제안하였다. 그리고 제안한 절차의 효율을 Zhang과 Chen (2004)이 제안한 지수가중이동평균 관리도와 비교하여, 많은 경우에 누적합 관리도 절차의 효율이 더 좋음을 보였다. 그 외, 와이블 분포의 형상모수 변화를 탐지하는 관리도 절차에 대한 연구로는 Pascual (2010)과 Pascual과 Zhang (2011) 등이 있다. 그들은 최소극단치 분포(smallest extreme value distribution)의 표본범위에 기초한 지수가중이동평균 관리도와 Shewhart 형태의 관리도 절차를 각각 제안하였다.

일반적으로 와이블 분포에서 형상모수는 분포의 형태를 결정하기 때문에 장비 등의 교체와 같은 큰 변화가 있는 경우를 제외하고는 형상모수에 대한 변화보다 척도모수에 대한 변화에 관심이 있는 경우가 많다. 또한 형상모수가 고정되어 있을 때 척도모수 η가 감소하는 것은 평균 수명을 감소시키기 때문에, 이 논문에서는 Dickinson 등 (2014)과 마찬가지로 β는 고정되어 있고 η가 감소하는 변화를 탐지하는 상황을 고려하였다. Dickinson 등 (2014)이 제안한 누적합 관리도 절차는 η의 변화에 대한 우도비(likelihood ratio)에 기초하여 누적합 관리도의 통계량을 구성하였지만, 이 논문에서는 η의 변화가 중도절단율을 변화시키는 사실을 이용하여 비율의 변화를 탐지하는 이항 누적합 관리도 절차를 제안한다. 또한 모의실험을 통하여 Dickinson 등 (2014)이 제안한 누적합 관리도 절차와 그 효율을 비교하고자 한다.

2. 우도비에 기초한 누적합 관리도 절차

Dickinson 등 (2014)이 제안한 누적합 관리도는 우도비에 기초하여 통계량을 구성하였다. 먼저 시점 i에서 제품 n개의 수명을 관측하며 이를 $T_{ij}\,(i=1,2,\ldots,\; j=1,2,\ldots,n)$로 나타내자. 이때 관리상태에서는 Weibull(β,η_0)를 따르고 이상상태에서는 Weibull(β,η_1)을 따른다고 가정한다. 앞에서 언급한 바와 같이 Dickinson 등 (2014)은 척도모수 η가 감소하는 경우, 즉 $0<d<1$에 대해 $\eta_1=(1-d)\eta_0$인 경우를 고려하였다.

우측중도절단 자료가 존재하는 경우 i번째 표본에 대한 우도함수(likelihood function)는

$$L(\beta,\eta\,|\,T_{i1},T_{i2},\ldots,T_{in}) = f(T_{ij}\,|\,\beta,\eta)^{\delta_{ij}}\;[1-F(T_{ij}\,|\,\beta,\eta)]^{1-\delta_{ij}}$$

가 된다. 여기서 δ_{ij}는 중도절단 시점 C에 대해서 $T_{ij}\le C$인 경우에는 1이고, $T_{ij}>C$인 경우에는 0으로 정의한다. 즉, 실제 고장시간을 나타내면 1이고 중도절단된 경우에는 0의 값을 갖는다. i번째 표본에 대한 우도비에 자연로그를 취한 통계량 Z_i는

$$\begin{aligned} Z_i &= \log\left[\frac{L(\beta,\eta_1\,|\,T_{i1},T_{i2},\ldots,T_{in})}{L(\beta,\eta_0\,|\,T_{i1},T_{i2},\ldots,T_{in})}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\left[\frac{f(T_{ij}\,|\,\beta,\eta_1)}{f(T_{ij}\,|\,\beta,\eta_0)}\right] + \sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})\left[\frac{1-F(T_{ij}\,|\,\beta,\eta_1)}{1-F(T_{ij}\,|\,\beta,\eta_0)}\right] \end{aligned}$$

이 되며, 식 (1.1)과 (1.2)의 와이블 분포의 확률밀도함수와 누적분포함수를 대입하면

$$Z_i = X_i\beta\log\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right) - \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{T_{ij}}{\eta_1}\right)^{\beta} - \left(\frac{T_{ij}}{\eta_0}\right)^{\beta}\right] \tag{2.1}$$

가 된다. 여기서 X_i는 i번째 표본에서 중도절단 시점 C 이전에 고장난 제품의 수, 즉 $X_i=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}$를 나타낸다. 이때 $\eta_1=(1-d)\eta_0$의 관계를 이용하면 식 (2.1)은

$$\begin{aligned} Z_i &= X_i\beta\log\left(\frac{1}{1-d}\right) + \left(1-\left(\frac{1}{1-d}\right)^{\beta}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{T_{ij}}{\eta_0}\right)^{\beta} \\ &= \left(1-\left(\frac{1}{1-d}\right)^{\beta}\right)\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{T_{ij}}{\eta_0}\right)^{\beta} - k_i\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

로 표현할 수 있고, 여기서 k_i는

$$k_i = -\frac{X_i\beta\log\left(\dfrac{1}{1-d}\right)}{1-\left(\dfrac{1}{1-d}\right)^{\beta}}$$

를 나타낸다.

Dickinson 등 (2014)은 식 (2.2)의 로그 우도비에 기초하여, 시점 i에서 척도모수 η가 감소하는지를 탐지하는 한쪽 누적합 관리도의 관리통계량을 다음과 같이 제안하였다.

$$C_i^- = \min\left(0,\, C_{i-1}^- + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{T_{ij}}{\eta_0}\right)^{\beta} - k_i\right), \quad C_0^- = 0$$

이 관리도 절차는 $C_i^- < h_C$인 경우 이상상태라는 신호를 주며, 관리한계 h_C는 관리상태에서 주어진 특성을 만족하도록 설정한다.

3. 이항 누적합 관리도 절차

Dickinson 등 (2014)이 제안한 누적합 관리도의 절차는 η가 감소하는 경우에 대한 우도비에 기초한 연속형 관리도 절차이다. 우리는 고정된 β에 대해 η가 변화하는 것은 식 (1.3)의 관계에 의해 중도절단율 pc가 변화한다는 사실을 이용하여 비율의 변화를 탐지하는 이항 누적합 관리도 절차를 제안하고자 한다. 이항 누적합 관리도 절차는 특정한 성질을 만족하는 개수를 통계량으로 사용하는 이산형 관리도 절차이다. 일반적으로 연속형 자료에 적용하는 연속형 관리도 절차가 이산형 관리도 절차에 비해 정보의 손실이 적기 때문에 효율적이라고 알려져 있지만, Dickinson 등 (2014)의 누적합 관리도 절차에서 우측중도절단 자료에 대한 우도함수를 계산할 때 정보의 손실이 발생하기 때문에 두 절차의 효율을 비교하는 것은 의미가 있다고 판단된다.

먼저 시점 i의 크기 n인 표본에서 중도절단되지 않은 표본의 개수 $X_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$는 관리상태, 즉 $\eta = \eta_0$인 경우 이항분포 $B(n, qc_0)$를 따르는데, 여기서 비중도절단율인 qc는 $pc_0 = \exp[-(C/\eta_0)^\beta]$에 대해 $qc_0 = 1 - pc_0$가 된다. 만일 η가 η_1으로 변화하는 경우 비중도절단율 qc도 $pc_1 = \exp[-(C/\eta_1)^\beta]$에 대해 $qc_1 = 1 - pc_1$으로 변화하게 된다. 이 논문에서는 $\eta_1 < \eta_0$인 경우, 즉 $0 < d < 1$인 경우만 고려하기 때문에, 이때 $qc_1 > qc_0$가 됨을 유의해야 한다. 따라서 η가 η_0에서 η_1으로 감소하는 것을 탐지하는 것은 비중도절단율 qc가 qc_0에서 qc_1으로 증가하는 것을 탐지하는 것과 동일하게 된다. β가 고정되어 있을 때 η가 감소하는 것은 특성수명과 평균수명이 감소하는 것을 의미하기 때문에, 중도절단시점 이전에 고장나는 제품의 수의 비율이 증가하게 되는 것은 당연한 사실이다.

불량률과 같은 비율이 증가하는 것을 탐지하는 이항 누적합 관리도 절차는 이미 많이 알려져 있기 때문에, 비중도절단율 qc가 qc_0에서 qc_1으로 증가하는 것을 탐지하는 한쪽 이항 누적합 관리도의 관리통계량 S_i^+는

$$S_i^+ = \max\left(0, S_{i-1}^+ + X_i - k\right), \quad S_0^+ = 0$$

가 됨을 어렵지 않게 유도할 수 있다. 여기서 참고값(reference value)인 k는

$$k = \frac{n \log\left(\dfrac{1 - qc_0}{1 - qc_1}\right)}{\log\left(\dfrac{qc_1(1 - qc_0)}{qc_0(1 - qc_1)}\right)}$$

가 된다. 이 관리도 절차는 $S_i^+ > h_S$인 경우 이상상태라는 신호를 주며, 관리한계 h_S는 관리상태에서 주어진 특성을 만족하도록 설정할 수 있다.

4. 모의실험

Dickinson 등 (2014)은 그들이 제안한 누적합 관리도가 Zhang과 Chen (2004)이 제안한 지수가중이동평균 관리도에 비해 많은 경우에 효율이 더 우수함을 보였기 때문에, 이 논문에서 제안한 이항 누적합 관리도 절차는 Dickinson 등 (2014)이 제안한 누적합 관리도 절차와 그 효율을 비교하였다. 관리도 절차의 효율을 비교하기 위해 일반적으로 많이 사용하는 평균런길이(average run length; ARL)를 사용하였으며, Dickinson 등 (2014)에서 가정한 사항과 동일하게 설정하여 그들이 제안한 누적합 관리도의 평균런길이는 논문의 결과를 그대로 사용하였다.

먼저 형상모수 β는 0.5, 1, 3, 5인 경우를 고려하였으며, 각 경우에서 미리 지정해야 하는 η의 변화량 d는 각각 0.35, 0.3, 0.2, 0.15를 사용하였다. 중도절단율 pc는 0.15, 0.5, 0.95를 사용하여 중도절단율이

Table 4.1. Comparison of the ARL_1 values for $\eta_0 = 1$, $\beta = 0.5$, $n = 5$. The Binomial CUSUM and the CUSUM charts are designed to detect a 35% decrease in the scale parameter ($d = 0.35$, $\eta_1 = 0.65$).

η_1	$pc_0 = 0.15$ ($qc_0 = 0.85$)		$pc_0 = 0.5$ ($qc_0 = 0.5$)		$pc_0 = 0.95$ ($qc_0 = 0.05$)	
	$h_S = 5.905$	$h_C = -13.623$	$h_S = 9.304$	$h_C = -12.125$	$h_S = 6.597$	$h_C = -6.113$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	221.27	220.75	*227.48*	234.77	*276.63*	291.78
0.90	146.02	140.58	*154.78*	160.11	*232.44*	246.02
0.85	99.52	91.98	*107.67*	109.88	*196.01*	205.24
0.80	70.32	62.16	*76.81*	78.51	*166.57*	175.13
0.75	51.23	44.23	*55.77*	57.01	*140.22*	146.90
0.70	39.01	32.55	*41.92*	42.48	*117.76*	123.51
0.65	**30.45**	**24.84**	***32.38***	**32.70**	***99.22***	**104.87**
0.60	24.67	19.61	*25.62*	25.75	*83.61*	87.48
0.55	20.49	15.95	*20.70*	20.80	*70.89*	74.75
0.50	17.32	13.27	17.00	16.97	*59.92*	62.40
0.45	14.92	11.18	*14.13*	14.15	*50.09*	52.79
0.40	13.13	9.52	11.96	11.84	*42.36*	44.38

ARL = average run length, CUSUM = cumulative sum, BCUSUM = Binomial CUSUM.

Table 4.2. Comparison of the ARL_1 values for $\eta_0 = 1$, $\beta = 1$, $n = 5$. The Binomial CUSUM and the CUSUM charts are designed to detect a 30% decrease in the scale parameter ($d = 0.3$, $\eta_1 = 0.7$).

η_1	$pc_0 = 0.15$		$pc_0 = 0.5$		$pc_0 = 0.95$	
	$h_S = 4.199$	$h_C = -9.141$	$h_S = 6.795$	$h_C = -4.421$	$h_S = 5.675$	$h_C = -3.891$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	178.63	168.04	*180.61*	186.42	*244.50*	257.92
0.90	93.89	84.35	*97.59*	100.08	*181.36*	189.84
0.85	53.48	45.34	*56.33*	57.21	*133.16*	141.69
0.80	33.59	26.81	*34.79*	35.19	*100.55*	106.43
0.75	23.11	17.49	23.35	23.24	*76.14*	80.70
0.70	**17.25**	**12.60**	**16.69**	**16.53**	***58.83***	**62.17**
0.65	13.79	9.60	12.59	12.40	*45.80*	48.45
0.60	11.56	7.69	9.90	9.66	*36.20*	38.30
0.55	10.06	6.38	8.02	7.81	*28.80*	30.51
0.50	9.06	5.42	6.68	6.44	*23.29*	24.51
0.45	8.35	4.73	5.65	5.44	*18.70*	19.86
0.40	7.86	4.20	4.89	4.62	*15.13*	16.01

ARL = average run length, CUSUM = cumulative sum, BCUSUM = Binomial CUSUM.

낮을 때, 보통일 때, 그리고 높을 때를 나타낼 수 있도록 하였다. 표본크기 n은 기본적으로 5인 경우를 고려했으며, n의 변화에 대한 영향을 보기 위해 3, 5, 10, 20, 50, 100인 경우를 살펴보았다.

관리상태에서의 평균런길이는 근사적으로 $\text{ARL}_0 = 370$이 되도록 관리한계 h_C와 h_S를 설정했으며, 이상상태에서의 평균런길이는 안정상태(steady-state)에서의 평균런길이를 계산하였다. 즉, 모의실험에서 시점 50까지는 관리상태를 가정하고 시점 51번째부터 이상상태가 되도록 하였고, 이 가정은 Dickinson 등 (2014)과 동일하게 설정하여 평균런길이를 공정하게 비교할 수 있도록 하였다. 이항 누적합 관리도의 평균런길이는 각 경우마다 50,000번을 반복하여 계산한 결과이다. β, pc, 그리고 n의 여러 가지 값에 대해 평균런길이를 비교한 결과가 Table 4.1에서 Table 4.7에 나타나 있다. 모의실험 결과에서 이항

Table 4.3. Comparison of the ARL_1 values for $\eta_0 = 1$, $\beta = 3$, $n = 5$. The Binomial CUSUM and the CUSUM charts are designed to detect a 20% decrease in the scale parameter ($d = 0.2$, $\eta_1 = 0.8$).

η_1	$pc_0 = 0.15$		$pc_0 = 0.5$		$pc_0 = 0.95$	
	$h_S = 2.244$	$h_C = -4.474$	$h_S = 4.084$	$h_C = -4.469$	$h_S = 4.309$	$h_C = -3.461$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	78.89	77.15	*85.86*	87.02	*155.20*	169.91
0.90	25.71	21.37	26.81	26.38	*76.40*	80.82
0.85	12.86	8.92	11.60	11.22	*41.49*	43.53
0.80	**8.70**	**5.19**	**6.67**	**6.33**	***24.77***	**26.15**
0.75	7.03	3.70	4.62	4.27	*16.00*	16.82
0.70	6.35	2.96	3.60	3.21	*11.00*	11.52
0.65	6.10	2.52	3.06	2.60	*7.88*	8.25
0.60	6.02	2.21	2.77	2.22	*5.84*	6.08
0.55	6.01	2.00	2.65	1.99	*4.38*	4.55
0.50	6.01	1.92	2.60	1.90	*3.36*	3.46
0.45	6.01	1.89	2.60	1.87	*2.62*	2.67
0.40	6.01	1.88	2.60	1.86	*2.08*	2.09

ARL = average run length, CUSUM = cumulative sum, BCUSUM = Binomial CUSUM.

Table 4.4. Comparison of the ARL_1 values for $\eta_0 = 1$, $\beta = 5$, $n = 5$. The Binomial CUSUM and the CUSUM charts are designed to detect a 15% decrease in the scale parameter ($d = 0.15$, $\eta_1 = 0.85$).

η_1	$pc_0 = 0.15$		$pc_0 = 0.5$		$pc_0 = 0.95$	
	$h_S = 1.763$	$h_C = -2.200$	$h_S = 3.352$	$h_C = -2.158$	$h_S = 3.873$	$h_C = -1.820$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	40.90	40.30	49.34	47.05	*105.49*	110.12
0.90	12.21	8.67	11.54	10.74	*39.23*	40.79
0.85	**7.44**	**3.98**	**5.16**	**4.66**	***18.28***	**19.09**
0.80	6.31	2.67	3.30	2.92	*10.18*	10.57
0.75	6.09	2.14	2.47	2.21	*6.37*	6.62
0.70	6.06	1.92	2.09	1.93	*4.28*	4.40
0.65	6.06	1.87	1.96	1.85	*3.03*	3.10
0.60	6.06	1.85	1.94	1.82	*2.22*	2.27
0.55	6.06	1.83	1.94	1.79	*1.73*	1.75
0.50	6.06	1.81	1.94	1.77	*1.41*	1.42
0.45	6.05	1.80	1.94	1.77	*1.14*	1.14
0.40	6.05	1.80	1.94	1.76	*1.01*	1.01

ARL = average run length, CUSUM = cumulative sum, BCUSUM = Binomial CUSUM.

누적합 관리도(BCUSUM)의 효율이 Dickinson 등 (2014)의 누적합 관리도(CUSUM)보다 같거나 좋은 경우 평균런길이를 이탤릭체로 표시하였고, η가 미리 지정한 변화의 크기와 동일하게 변화한 경우의 결과는 고딕체로 표시하였다.

4.1. β와 pc에 따른 평균런길이 비교

표본크기는 $n = 5$로 고정한 후, η의 변화에 대한 평균런길이를 비교한 결과가 Table 4.1에서 Table 4.4에 나타나 있다. Table 4.1은 형상모수가 $\beta = 0.5$, Table 4.2는 $\beta = 1$, Table 4.3은 $\beta = 3$, 그리고 Table 4.4는 $\beta = 5$인 경우이고, 각각에 대해 $pc_0 = 0.15, 0.5, 0.95$, 즉 $qc_0 = 0.85, 0.5, 0.05$인 경우를 고

Table 4.5. Comparison of the ARL_1 values for $\eta_0 = 1$, $\beta = 0.5$, $pc = 0.15$. The Binomial CUSUM and the CUSUM charts are designed to detect a 35% decrease in the scale parameter ($d = 0.35$, $\eta_1 = 0.65$).

η_1	$n = 3$		$n = 5$		$n = 10$	
	$h_S = 5.245$	$h_C = -12.218$	$h_S = 5.905$	$h_C = -13.623$	$h_S = 6.740$	$h_C = -15.419$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	232.99	235.43	221.27	220.75	203.24	202.29
0.90	165.44	160.89	146.02	140.58	122.26	115.19
0.85	119.36	111.39	99.52	91.98	76.36	68.75
0.80	87.90	79.43	70.32	62.16	50.18	43.53
0.75	66.54	58.48	51.23	44.23	34.83	29.13
0.70	51.98	43.98	39.01	32.55	25.66	20.65
0.65	**41.48**	**34.18**	**30.45**	**24.84**	**19.58**	**15.50**
0.60	33.97	27.28	24.67	19.61	15.63	12.08
0.55	28.33	22.31	20.49	15.95	12.90	9.80
0.50	24.13	18.55	17.32	13.27	10.91	8.14
0.45	20.90	15.71	14.92	11.18	9.41	6.86
0.40	18.43	13.43	13.13	9.52	8.26	5.86
η_1	$n = 20$		$n = 50$		$n = 100$	
	$h_S = 7.751$	$h_C = -16.842$	$h_S = 8.185$	$h_C = -18.10$	$h_S = 8.2974$	$h_C = -18.248$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	183.69	178.23	154.25	150.10	129.47	133.11
0.90	98.72	90.65	69.65	64.23	51.88	50.38
0.85	55.91	48.94	34.89	30.83	23.42	21.25
0.80	34.53	28.85	19.52	16.20	12.25	10.33
0.75	22.81	18.25	12.20	9.80	7.39	5.93
0.70	16.30	12.77	8.50	6.61	5.02	3.91
0.65	**12.23**	**9.38**	**6.36**	**4.78**	**3.75**	**2.84**
0.60	9.70	7.27	5.03	3.69	2.99	2.22
0.55	7.98	5.84	4.15	3.00	2.47	1.82
0.50	6.70	4.84	3.54	2.51	2.13	1.52
0.45	5.79	4.10	3.08	2.18	1.88	1.30
0.40	5.08	3.50	2.72	1.90	1.69	1.13

ARL = average run length, CUSUM = cumulative sum, BCUSUM = Binomial CUSUM.

려하였다.

누적합 관리도는 변화를 탐지하고자 하는 모수의 변화량을 미리 지정해야 하는데, Table 4.1은 변화의 크기가 $d = 0.35$, 즉 $\eta_1 = 0.65$으로 설정한 것이다. 이 경우 이항 누적합 관리도에서는 $qc_0 = 0.85$ ($pc_0 = 0.15$)일 때 $qc_1 = 0.9049$, $qc_0 = 0.5$ ($pc_0 = 0.5$)일 때 $qc_1 = 0.5767$, 그리고 $qc_0 = 0.05$ ($pc_0 = 0.95$)일 때 $qc_1 = 0.0616$으로 설정한 것이 된다. 유사하게 Table 4.2, Table 4.3, Table 4.4에서는 각각 $\eta_1 = 0.7, 0.8, 0.85$로 설정했는데, 이 경우 이항 누적합 관리도에서는 $qc_0 = 0.85, 0.5, 0.05$의 각각에 대해 Table 4.2는 $qc_1 = 0.9335, 0.6285, 0.0707$, Table 4.3은 $qc_1 = 0.9754, 0.7417, 0.0953$, 그리고 Table 4.4는 $qc_1 = 0.9861, 0.7903, 0.1092$로 설정한 것이다.

$\beta = 0.5$인 Table 4.1을 살펴보면, $pc_0 = 0.15$일 때에는 η의 모든 변화에 대해 Dickinson 등 (2014)의 누적합 관리도의 성능이 더 좋지만, 중도절단율 pc_0가 점점 커질 수록 이항 누적합 관리도의 성능이 상대적으로 더 좋아지는 것을 알 수 있다. 특히 중도절단율이 아주 높은 $pc_0 = 0.95$인 경우에는 모든 경우에

Table 4.6. Comparison of the ARL_1 values for $\eta_0 = 1$, $\beta = 0.5$, $pc = 0.5$. The Binomial CUSUM and the CUSUM charts are designed to detect a 35% decrease in the scale parameter ($d = 0.35$, $\eta_1 = 0.65$).

η_1	$n = 3$		$n = 5$		$n = 10$	
	$h_S = 8.227$	$h_C = -10.767$	$h_S = 9.304$	$h_C = -12.125$	$h_S = 10.763$	$h_C = -14.036$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	*241.05*	251.88	*227.48*	234.77	*210.50*	216.75
0.90	*172.93*	181.90	*154.78*	160.11	*129.84*	134.18
0.85	*127.69*	131.48	*107.67*	109.88	*83.60*	84.93
0.80	*94.97*	97.76	*76.81*	78.51	*55.17*	55.73
0.75	*72.00*	73.67	*55.77*	57.01	*38.30*	38.48
0.70	*55.43*	56.83	*41.92*	42.48	28.86	28.05
0.65	***43.61***	**44.64**	***32.38***	**32.70**	**20.96**	**20.95**
0.60	*35.16*	35.59	*25.62*	25.75	*16.31*	16.32
0.55	*28.56*	28.95	*20.70*	20.80	13.08	13.04
0.50	*23.59*	23.86	17.00	16.97	10.76	10.63
0.45	*19.76*	19.97	*14.13*	14.15	8.94	8.81
0.40	*16.64*	16.71	11.96	11.84	7.54	7.43

η_1	$n = 20$		$n = 50$		$n = 100$	
	$h_S = 12.13$	$h_C = -15.638$	$h_S = 13.4$	$h_C = -17.331$	$h_S = 14.147$	$h_C = -18.06$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	183.69	178.23	154.25	150.10	146.05	144.90
0.90	98.72	90.65	69.65	64.23	61.40	60.63
0.85	55.91	48.94	34.89	30.83	28.36	27.68
0.80	34.53	28.85	19.52	16.20	14.68	14.18
0.75	22.81	18.25	12.20	9.80	8.68	8.38
0.70	16.30	12.77	8.50	6.61	5.73	5.54
0.65	**12.23**	**9.38**	**6.36**	**4.78**	**4.14**	**3.99**
0.60	9.70	7.27	5.03	3.69	3.19	3.06
0.55	7.98	5.84	4.15	3.00	2.55	2.46
0.50	6.70	4.84	3.54	2.51	2.11	2.05
0.45	5.79	4.10	3.08	2.18	1.79	1.74
0.40	5.08	3.50	2.72	1.90	1.54	1.48

ARL = average run length, CUSUM = cumulative sum, BCUSUM = Binomial CUSUM.

서 이항 누적합 관리도의 성능이 더 좋게 나타났다. Table 4.2에서 Table 4.4는 β가 1, 3, 5로 점점 커지는 경우인데, $pc_0 = 0.5$일 때 이항 누적합 관리도의 성능이 더 좋은 경우가 점점 줄어드는 것을 알 수 있다. 그러나 $pc_0 = 0.95$인 경우에는 여전히 모든 경우에서 이항 누적합 관리도의 성능이 더 좋게 나타났다.

Table 4.1에서 Table 4.4의 결과를 살펴볼 때, β가 커질수록 Dickinson 등 (2014)의 누적합 관리도의 성능이 더 좋으며, pc_0가 커질수록 두 관리도 모두 성능은 급격하게 나빠지지만 제안한 이항 누적합 관리도의 성능이 상대적으로 더 좋음을 알 수 있다.

4.2. n에 따른 평균런길이 비교

Table 4.5에서 Table 4.7에는 $\eta_0 = 1$과 $\beta = 0.5$로 고정한 후, $pc_0 = 0.15$, 0.5, 0.95인 경우 표본크기 n의 변화에 대한 Dickinson 등 (2014)의 누적합 관리도와 이항 누적합 관리도의 성능을 비교한 것이다.

Table 4.7. Comparison of the ARL_1 values for $\eta_0 = 1$, $\beta = 0.5$, $pc = 0.95$. The Binomial CUSUM and the CUSUM charts are designed to detect a 35% decrease in the scale parameter ($d = 0.35$, $\eta_1 = 0.65$).

	$n=3$		$n=5$		$n=10$	
η_1	$h_S = 5.474$	$h_C = -5.043$	$h_S = 6.597$	$h_C = -6.113$	$h_S = 8.387$	$h_C = -7.766$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	*283.75*	302.18	*276.63*	291.78	*262.31*	277.06
0.90	*247.09*	262.96	*232.44*	246.02	*210.51*	223.86
0.85	*214.84*	229.82	*196.01*	205.24	*168.31*	178.92
0.80	*188.60*	197.87	*166.57*	175.13	*135.34*	143.16
0.75	*162.50*	171.46	*140.22*	146.90	*109.89*	116.05
0.70	*140.26*	148.92	*117.96*	123.51	*88.74*	93.92
0.65	***121.03***	**128.97**	***99.22***	**104.87**	***72.24***	**77.04**
0.60	*104.16*	109.46	*83.61*	87.48	*59.50*	62.76
0.55	*89.75*	94.33	*70.89*	74.75	*48.88*	52.04
0.50	*77.12*	80.89	*59.91*	62.40	*40.58*	43.07
0.45	*65.44*	68.78	*50.08*	52.79	*33.49*	35.63
0.40	*55.45*	58.41	*42.36*	44.38	*28.10*	29.78

	$n=20$		$n=50$		$n=100$	
η_1	$h_S = 10.29$	$h_C = -9.484$	h_S=13.04	$h_C = -12.05$	$h_S = 15.09$	$h_C = -13.927$
	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM	BCUSUM	CUSUM
0.95	*245.07*	249.22	*225.40*	228.68	*207.62*	208.35
0.90	*185.31*	186.23	*151.48*	153.08	127.15	126.77
0.85	141.65	140.69	104.21	103.82	80.44	79.98
0.80	106.26	106.13	*72.91*	74.23	52.73	52.40
0.75	*82.08*	82.32	*52.61*	52.89	*36.08*	36.25
0.70	*63.66*	63.89	*38.86*	39.24	25.96	25.95
0.65	***50.44***	**50.64**	**29.60**	**29.44**	**19.23**	**19.17**
0.60	*40.54*	40.58	*23.18*	23.24	*14.77*	14.84
0.55	32.87	32.63	18.49	18.37	*11.65*	11.68
0.50	*26.81*	26.88	14.88	14.83	*9.39*	9.43
0.45	22.15	21.98	*12.13*	12.25	7.69	7.68
0.40	*18.20*	18.44	*10.03*	10.10	6.34	6.33

ARL = average run length, CUSUM = cumulative sum, BCUSUM = Binomial CUSUM.

$pc_0 = 0.15$인 Table 4.5에서는 대부분의 경우 Dickinson 등(2014)의 누적합 관리도의 성능이 더 좋음을 알 수 있다. $pc_0 = 0.5$인 Table 4.6과 $pc_0 = 0.95$인 Table 4.7의 결과를 살펴보면 n이 커질수록 이항 누적합 관리도의 성능이 상대적으로 나빠지는 것을 알 수 있다. 그러나, 중도절단율 pc_0가 큰 경우, 그리고 표본크기 n이 아주 크지 않은 경우($n \leq 20$)에는 대부분의 경우 이항 누적합 관리도의 성능이 상대적으로 더 좋게 나타났다. 이 논문에 결과를 제시하지 않았지만, $\beta = 1$과 3인 경우에도 유사한 경향이 있음을 알 수 있었다.

5. 결론

본 논문에서는 와이블 분포를 따르는 제1형의 우측중도절단 수명 자료를 관리하는 이항 누적합 관리도 절차를 제안하고 그 효율을 살펴보았다. 특히 와이블 분포에서 형상모수 β는 고정되어 있지만 척도모수 η가 감소하는 경우를 고려하였다.

모의실험을 통하여 제안한 이항 누적합 관리도의 성능을 Dickinson 등 (2014)의 누적합 관리도와 비교하였다. 관리도의 성능은 β, pc_0, 그리고 n에 영향을 받는데 그 중 pc_0가 관리도의 탐지 성능에 미치는 영향이 가장 크다는 것을 알 수 있었다. 모의실험 결과 β와 n이 커질수록 이항 누적합 관리도의 성능은 상대적으로 나빠지지만 pc_0가 커질수록 그 성능은 상대적으로 좋아지는 것으로 나타났다.

종합적으로 살펴볼 때, n이 크고 pc_0가 작은 경우, 즉 사용할 수 있는 정보량이 많은 경우 기존의 Dickinson 등 (2014)의 누적합 관리도의 사용을 추천한다. 반대로 n이 작고 pc_0가 큰 경우, 즉 사용할 수 있는 정보량이 적은 경우 본 논문에서 제안한 이항 누적합 관리도의 사용을 추천하는 바이다.

본 논문에서 제안한 절차는 표본에서 중도절단되지 않은 자료의 개수에 기초하기 때문에 기존의 절차에 비해 상대적으로 간편하게 적용할 수 있으며, 실무자들의 이해 또한 더 쉬울 것으로 생각된다. 또한 기술의 발전에 따라 제품의 수명은 계속 늘어나는 추세이기 때문에, 수명시험에 있어서 시간과 비용의 절감을 위해 중도절단의 비율은 점점 더 늘어날 것이라고 예측할 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안한 이항 누적합 관리도 절차의 활용 및 연구 가치는 앞으로 더 많아지고 더 커질 것으로 판단하고 있다.

향후 사전에 지정하는 η_1 (또는 qc_1)의 영향을 살펴볼 예정이고, 형상모수 β와 척도모수 η가 동시에 변화하는 것을 탐지하는 관리도 절차에 대한 연구를 진행할 예정이다.

References

Dickinson, R. M., Olteanu Roberts, D. A., Driscoll, A. R., Woodall, W. H., and Vining, G. G. (2014). CUSUM charts for monitoring the characteristic life of censored Weibull lifetimes, *Journal of Quality Technology*, **46**, 340–358.

Pascual, F. (2010). EWMA charts for the Weibull shape parameter, *Journal of Quality Technology*, **42**, 400–416.

Pascual, F. and Zhang, H. (2011). Monitoring the Weibull shape parameter by control charts for the sample range, *Quality and Reliability Engineering International*, **27**, 15–25.

Steiner, S. H. and MacKay, R. J. (2000). Monitoring processes with highly censored data, *Journal of Quality Technology*, **32**, 199–208.

Zhang, L. and Chen, G. (2004). EWMA charts for monitoring the mean of censored Weibull lifetimes, *Journal of Quality Technology*, **36**, 321–328.

제1형의 우측중도절단된 와이블 수명자료를 관리하는 이항 누적합 관리도

최민재[a] · 이재헌[a,1]

[a]중앙대학교 응용통계학과

(2016년 4월 25일 접수, 2016년 6월 15일 수정, 2016년 6월 15일 채택)

요 약

제품의 수명은 품질을 나타내는 중요한 특성치이다. 이상적으로는 모든 표본의 수명자료를 측정하는 것이 가장 바람직하나, 이를 측정하는데 많은 시간과 비용이 소요되는 경우 중도절단된 자료로 표본을 구성하는 경우가 많이 발생한다. 이 논문에서는 제1형의 우측중도절단된 수명자료가 와이블 분포를 따를 경우 척도모수의 감소를 탐지하는 이항 누적합 관리도 절차를 제안하였다. 모의실험에서 평균런길이를 이용하여 제안된 관리도 절차의 효율을 이전에 연구된 누적합 관리도 절차와 비교하였는데, 그 결과 중도절단율이 높을 경우와 표본의 크기가 적은 경우 제안된 이항 누적합 관리도가 더 효율적임을 알 수 있었다.

주요용어: 평균런길이, 이항 누적합 관리도, 중도절단된 자료, 와이블 수명자료

이 논문은 2015년도 중앙대학교 연구장학기금 지원에 의한 것임.

[1]교신저자: (06974) 서울특별시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr