韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.3.335
2016. 8. 제 55권, 제 3호, 335-355.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August, 2016, Vol. 55, No. 3, 335-355.

역함수와의 교점을 구하는 과제에 대한 분석

허남구(대전송촌고등학교)

Ⅰ. 서론

국가 수준의 교육 과정은 학교 교육을 위한 기본적인 지침이며, 교과서는 이를 바탕으로 내용을 선정하고 조직한 공식적인 교수 학습 자료로서(Schmidt, McKnight, & Raizen, 2002) 학교 현장에서 필수적인 교수 학습 자료로 사용된다. 우리나라의 교사들은 교과서를 매우 중요한 교수 학습 자료로 인식하고 있으며, 학교 수업의 대부분은 교과서를 중심으로 이루어지고 있다(이주연, 2000; 허강 외, 2004, 88p; 진재관 외, 2007, 10p). 특히 수학 교과의 경우, 다수의 수학 교사들이 교과서와 교사용 지도서의 학습 내용을 바탕으로 수업 목표, 수업 내용, 평가 내용을 선정하고 있는 경향을 보인다(김민혁, 2013). 이러한 교실 환경에 비추어 볼 때, 수학교과서에 제시된 학습 과제는 교실에서 일어나는 교수 학습에 영향을 미치게 되며 결과적으로 학생의 수학적 지식에 영향을 미친다.

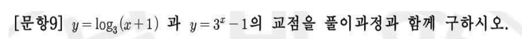
수학교과서에 제시된 학습 과제의 중요성이 부각됨에 따라 이를 분석하는 연구가 지속적으로 이루어지고 있다. 이와 관련된 선행 연구들을 살펴보면 수학 과제의 인지적 수준을 기준으로 학습 과제를 분석한 연구(권지현, 김구연, 2013; 김동중 외, 2015; 김미희, 김구연, 2013; 김성희, 방정숙, 2005; 방정숙, 2007; 홍창준, 김구연, 2012; 황혜정, 박현파, 2013), 답안 유형을 기준으로 학습 과제를 분석한 연구(김동중 외, 2015), 스토리텔링 유형을 기준으로 학습 과제를 분석한 연구(김동중 외, 2015), 융복합교육의 맥락과 방식을 중심으로 학습 과제를 분석한 연구(문종은 외, 2015; 박모라, 주미경, 문종은, 2014) 등이 있다. 이러한 연구들은 수학교과서의 전체 과제 또는 대수, 함수, 기하 등 특정 영역의 전체 과제에 대한 분석이 이루어지고 있어 수학교과서에서 제공하는 수학 과제의 전반적인 경향을 제공해주지만 피타고라스 정리와 같이 특정한 수학적 지식에 관한 학습 과제들의 세밀한 정보는 제공해주지 못하고 있다.

수학교과서에서 특정한 수학적 개념을 포함한 수학 과제가 제공될 경우, 특수한 상황에서의 해결 전략보다는 일반적인 해결 전략이 제시될 필요가 있다. 만약 수학교과서에 특수한 상황에서만 성공적인 해결 전략이 문제 해결 전략으로 제시될 경우, 학생들은 교과서에 제시된 해결 전략을 통해 성공적으로 과제를 해결한다면 그 전략을 하나의 일반적인 수학적 지식으로 인식할 수 있다. 이러한 경우 학생들이 기존의 학습 과제와 유사하다고 생각한다면 기존의 해결 전략으로는 해결할 수 없는 새로운 과제라 하더라도 기존의 전략을 사용하여 문제를 해결하려고 노력할 것이다. 이와 같이 학생들은 과도한 일반화의 오류로부터 인지적 갈등을 유발될 수 있으며 그 결과 학생들이 다른 수학적 개념을 학습하는데 걸림돌이 될 수 있다(우정호, 2000). 따라서 다수의 학생이나 교사가 특수한 조건에서만 성공적인 해결 전략을 다른 문제 상황에서도 지속적으로 사용한다면 그 원인을 찾기 위해 수학교과서에 제시된 수학 과제와 그 해결 전략을 분석해 볼 필요가 있다.

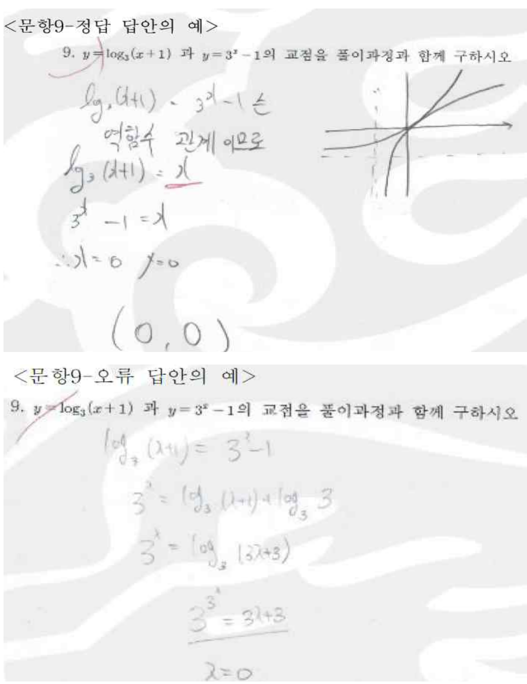
홍선미(2011)의 연구와 한국교육방송공사(이하 EBS)(2016a, 2016b)에는 주어진 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구하는 과제가 제시되어 있다. 홍선미는 학생들이 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점과 같다는 내용을 이용하여 문제를 해결할 경우에만 정답으로 처리하고 있으며([그림 1], [그림 2] 참조), EBS(2016a, 2016b) 강의에서는 학생들에게 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점이 된다고 지도하고 있다([그림 3] 참

* 접수일(2016년 4월 8일), 수정일(1차: 2016년 5월 19일, 2차: 2016년 7월 6일, 2016년 7월 20일), 게재확정일(2016년 7월 25일)
* ZDM분류 : U24
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 역함수, 교점, 과제분석

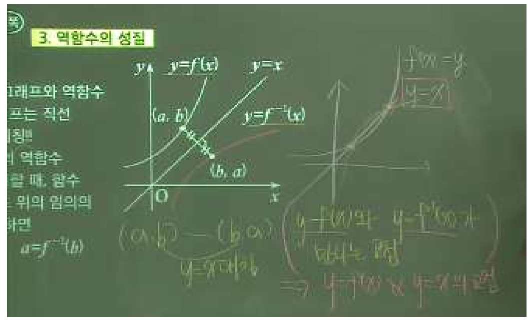
조). 하지만 일반적으로 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 구함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구하는 해결 전략은 성공을 보장하지 않는다. 예를 들어 $f(x)=-x$에 대한 역함수는 $f^{-1}(x)=-x$가 되어 $(1,-1)$은 두 함수의 교점이 되지만 $f(x)=-x$와 $y=x$의 교점은 아니다. 이처럼 일반적으로 성립하지 않는 문제 해결 전략을 다수의 교사가 학생들에게 하나의 수학적 지식으로서 가르치고 있거나, 다수의 학생들이 성공 경험을 통해 이 전략을 하나의 수학적 지식으로 인식하고 있다면 그러한 원인과 해결 방안을 찾을 필요가 있으며 학교수학에 있어 중요한 교수 학습 자료인 수학교과서를 우선적으로 분석할 필요가 있다.


[문항9] $y=\log_3(x+1)$ 과 $y=3^x-1$의 교점을 풀이과정과 함께 구하시오.

[그림 1] 홍선미(2011)의 연구에서 사용된 과제
[Fig. 1] Task used in the Hong's study



[그림 2] 홍선미(2011) 연구의 정답과 오답의 예시
[Fig. 2] Examples of correct and incorrect answers of the Hong's study



[그림 3] 정유빈의 강의 화면 (12강 37분 31초)
[Fig. 3] Capture of the Chung's lecture (Ch. 12)

이런 의미에서 학생과 현직교사, 예비교사는 '$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 구함으로써 구할 수 있다.'는 전략이 성공적이지 않는 과제를 해결하기 위해 어떠한 전략을 사용하는지를 알아보고, 2009 개정교육과정이 반영된 수학Ⅱ 교과서와 교사용 지도서에 주어진 함수와 그 역함수와의 교점을 구하는 과제의 해결 전략에 대해 어떻게 서술하였는지를 분석하는 것은 향후 학생들에게 역함수를 지도하는데 도움을 줄 것이다. 본 연구의 목적은 교사와 학생의 풀이 전략, 그리고 수학교과서의 서술 방법을 파악하여 교사들의 교수학습지도 방법과 교과서의 서술에 대한 시사점을 도출하려는 것이다. 이를 위해 아래와 같은 연구문제를 도출하였다.

1. 학생, 현직교사, 예비교사는 '$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 구함으로써 구할 수 있다.'는 전략이 성공적이지 않는 과제의 해결 과정에서 어떠한 특징을 보이는가?

2. 2009 개정교육과정이 반영된 수학Ⅱ 교과서와 교사용 지도는 주어진 함수와 그 역함수와의 교점을 구하는 과제의 해결 전략에 대한 서술 방법에서 어떠한 특징을 보이는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 역함수와 관련된 선행연구

함수는 실생활에서 일어나는 변화 현상을 설명하고 기술하는 도구로서 도입되었다(우정호, 1998). 우리는 함

수를 통해 변화하는 둘 이상의 대상 사이의 종속성을 기술하고 해석하고 예측할 수 있어 함수는 실세계에서 변화하는 현상을 모델링하는데 가장 일반적으로 사용되고 있다(우정호, 1998; 김남희 외, 2006). 수학적 대상으로서 함수는 기존의 기본적인 연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)과 새로운 연산으로서 합성이 정의되며, 합성함수와 역함수는 함수의 개념을 신장시키는 데 밑거름이 되었다(김남희 외, 2006; 김부윤, 정영우, 2010; Freudenthal, 1983).

역함수는 학교 수학에서 중요하게 다루어지고 있다. 학생들은 무리함수를 제한된 범위에서 정의된 이차함수의 역함수임을 이용하여 지도하고 있으며, 로그함수는 지수함수의 역함수임을 이용하여 그래프를 그리고, 로그함수의 성질과 점근선을 학습한다(김남희 외, 2006). 또한 학생들은 주어진 함수에서의 미분과 역함수에서의 미분 사이의 관계를 학습하고, 주어진 함수에서의 정적분 값과 역함수에서의 정적분 값 사이의 관계를 학습하기도 한다(황선욱 외, 2014a). 이와 같이 학생들은 역함수를 통해 새로운 함수를 학습하고, 본래의 함수와 역함수와의 관계를 통해 미분과 적분을 학습하고 있다.

학교 수학에서 역함수가 중요한 역할을 하고 있지만 그에 대한 연구는 미비한 편이다(김효정, 2008; 신옥숙, 2009; Lucas, 2005). 지금까지 역함수와 관련된 국내 연구를 살펴보면, 교육과정과 교과서를 분석하여 역함수 지도의 문제점과 대안을 제시한 연구(박순철, 1996), 테크놀로지를 활용하여 역함수의 지도 방법을 제시한 연구(김효정, 2008; 심태연, 2002; 최규원, 2002), 학생들의 역함수 개념의 이해와 오류에 관한 연구(박정선, 2005; 신옥숙, 2009; 홍선미, 2011) 등이 있다. 역함수와 관련된 해외 연구를 살펴보면, 기존과 달리 새로운 방법으로 역함수의 지도 방법을 제시한 연구(Boas, 1985; Snapper, 1990; Van Dyke, 1996), 되돌림(undoing)의 의미를 강조하여 역함수의 지도 방법을 제시한 연구(Even 1990, 1992), 다양한 표현을 통한 역함수의 지도 방법에 관한 연구(Bayazit & Gray, 2004), 학생들의 역함수 개념의 이해에 관한 연구(Kimani & Masingila, 2006)가 있다.

2. 주어진 함수와 그 역함수의 교점을 구하는 다양한 풀이 방법

역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$에 대하여 그 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라 할 때, 고등학교 수준에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구하는 방법은 아래와 같이 4가지가 있다.

첫째, $y=f(x)$의 역함수인 $y=f^{-1}(x)$를 직접 구한 후 두 식을 연립하여 교점을 구할 수 있다(이하 '전략 1'로 표현하기로 한다). 이는 주어진 함수와 그 역함수와의 교점을 구할 수 있는 가장 기본적인 방법으로 학생들이 쉽게 접근할 수 있다. 예를 들어 $f(x)=2x+1$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$와의 교점을 구하고자 할 때, 학생들은 $f(x)=2x+1$로부터 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{2}$를 구한 후 연립방정식 $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=\dfrac{x-1}{2} \end{cases}$의 해를 구함으로써 두 함수의 교점 $(-1,-1)$을 구할 수 있다. 이와 같이 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 전략이라는 장점에도 불구하고 $y=x^3+x+1$과 같이 역함수가 존재하지만 역함수의 함수식을 쉽게 구할 수 없는 경우에는 문제를 해결할 수 없다는 단점이 있다.

둘째, $y=(f\circ f)(x)$와 $y=x$를 연립하여 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구할 수 있다(이하 '전략 2'로 표현하기로 한다). 주어진 함수와 그 역함수와의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근과 같다. α를 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해라 하면 $f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)$이고 $f(f(\alpha))=f(f^{-1}(\alpha))=\alpha$가 성립한다. 즉, α는 $(f\circ f)(x)=x$의 해이다. 마찬가지로 β를 방정식 $f(f(x))=x$의 해라 하면 $f(f(\beta))=\beta$이고 $f^{-1}(f(f(\beta))=f^{-1}(\beta)$가 성립한다. 즉, β는 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해이다. 따라서 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해집합은 $(f\circ f)(x)=x$의 해집합과 같고, 그 결과 $(f\circ f)(x)=x$의 해를 구함으로써 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해를 구할 수 있다. 예를 들어 $f(x)=2x+1$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$와의 교점을 구하고자 할 때, $f(f(x))=4x+3$이 되어 $f(f(x))=x$의 실근은 $x=-1$이다. 즉, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 x좌표가 -1이고 두 함수의 그래프의 교점은 $(-1,-1)$이다. 이 전략은 주어진 함수가

역함수의 함수식을 구하기 힘든 함수이더라도 합성을 통해 교점을 찾을 수 있다는 장점이 있다. 하지만 이와 같은 풀이 전략은 $f(x)$가 n차식일 경우 $f(f(x))$는 n^2차식이 되어 방정식 $f(f(x))=x$를 풀이하는 데 있어 복잡한 계산 과정을 수반할 수 있다는 단점이 있다.

셋째, 좌표평면에 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 이를 $y=x$에 대칭시켰을 때 나타나는 그래프와의 교점을 구함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구할 수 있다(이하 '전략 3'으로 표현하기로 한다). 이는 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 $y=x$ 대칭관계임을 이용하여 풀이하는 방법으로 학생들은 역함수 그래프의 성질로서 대칭변환이라는 기하학적 사고와 연립방정식의 풀이로서 대수적 사고를 연결할 수 있다. 하지만 학생들은 두 함수의 그래프의 교점이 격자점이 아닐 경우 정확한 교점의 좌표를 구하기기 힘들고, $y=f(x)$가 일차함수가 아닐 경우에는 좌표평면에 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 정확히 나타낼 수 없어 교점의 좌표를 구할 수 없다.

넷째, $y=f(x)$와 $y=x$를 연립함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구할 수 있다(이하 '전략 4'로 표현하기로 한다). 이는 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 $y=x$ 대칭관계에 있으므로 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점은 $y=f^{-1}(x)$ 위에 있다는 아이디어로부터 출발한다. 이와 같은 방법은 역함수를 구할 필요가 없으며, 방정식 $f(x)=x$의 차수가 $f(x)$의 차수와 같아 복잡한 풀이를 요구하지 않는다. 하지만 이와 같은 문제 해결 방법은 일반적으로 성립하지 않는다. 집합 A를 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 집합이라 하고, 집합 B를 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 집합이라고 한다면 $B\subset A$가 성립한다. 즉, $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 구함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 모든 교점을 구할 수 있는 것이 아니다.[1] 예를 들어 $f(x)=-x$에 대한 역함수는 $f^{-1}(x)=-x$가 되어 $(1,-1)$은 두 함수의 교점이 되지만 $f(x)=-x$와 $y=x$의 교점은 아니다. 따라서 교사는 학생들에게 전략 4와 같이 특수한 상황에서만 성공적인 문제 해결 방법을 지도할 경우에는 일반적으로 성립하지 않는다는 내용과 함께 다른 문제 해결 방법을 함께 제시해주어야 할 필요가 있다.

1) $y=f(x)$가 증가함수일 경우에는 $A=B$가 되어 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 구함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 모든 교점을 구할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

교육부(2015)는 2015 개정 교육과정에서 "역함수의 의미를 이해하고 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다."를 성취기준으로 제시하고 있으며, 교수학습 방법으로 "역함수의 의미는 구체적인 예를 통해 이해하도록 한다."고 제시하고 있다. 하지만 2015 개정 교육과정에서는 역함수를 구하기 위해 제공되는 함수의 범위를 제시하고 있지 않으며 이는 2009 개정 교육과정에서도 제시하고 있지 않다(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015). 2007 개정 교육과정에서 "합성함수와 역함수는 이차 이하의 다항함수, 유리함수, 무리함수를 통해 이해한다."를 교수학습상의 유의점으로 제시하고 있다(교육인적자원부, 2007). 2009 개정 교육과정 시기의 수학교과서에서 무리함수를 이차함수의 역함수로서 도입하고 있다. 따라서 이차함수의 범위에서 개발된 역함수와 관련된 과제는 고등학교 교육과정의 수준을 벗어나지 않는다.

연구문제 1을 해결하기 위해 교사, 학생, 예비교사의 문제 해결 전략을 알아보기 위한 과제를 아래와 같이 개발하였다.

$x\geq 2$에서 정의된 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+2$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 좌표를 구하시오.

개발한 과제에 대해 전략 1, 전략 2, 전략 3, 전략 4를 적용한 풀이 방법은 다음과 같다. 전략 1을 사용할 경우 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+2$로부터 $-2y+8=(x-2)^2$이 되어 $f^{-1}(x)=\sqrt{8-2x}+2$가 된다. 두 그래프의 교점의 x좌표를 구하기 위해 $f(x)=f^{-1}(x)$를 풀이하면 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1+\sqrt{5}$ 또는 $x=1-\sqrt{5}$가 된다. 주어진 범위를 만족하는 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1+\sqrt{5}$가 되어 교점의 좌표는 $(2,4)$, $(4,2)$, $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$가 된다. 전략 2를 사용할 경

우 두 그래프의 교점의 x좌표를 구하기 위해 방정식 $f(f(x))=x$의 실근을 구해야 한다. $f(f(x))=-\frac{1}{8}x^4+x^3-2x^2+4$이므로 $f(f(x))=x$를 풀이하면 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1+\sqrt{5}$ 또는 $x=1-\sqrt{5}$가 된다. 주어진 범위를 만족하는 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1+\sqrt{5}$가 되어 교점의 좌표는 $(2,4)$, $(4,2)$, $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$가 된다. 이 문제의 경우 그래프를 정확히 그리기 힘들어 지필환경에서는 전략 3을 사용할 수 없다. 전략 4의 방법을 사용할 경우 두 그래프의 교점의 x좌표를 구하기 위해 $f(x)=x$를 풀이하여야 한다. $f(x)=x$의 근은 $x=1\pm\sqrt{5}$가 되어 주어진 범위를 만족하는 x의 값은 $x=1+\sqrt{5}$가 된다. 따라서 교점의 좌표는 $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$가 된다. 즉, 전략 4를 이용할 경우에는 $y=x$ 위에 있지 않는 교점인 $(2,4)$와 $(4,2)$를 구할 수 없어 올바른 해결 전략이라고 할 수 없다.

개발한 과제의 해결 전략을 알아보기 위하여 고등학생, 예비교사, 현직교사로부터 과제의 풀이 과정을 받았다. 주어진 과제의 풀이 과정을 보낸 64명의 직업은 [표 1]과 같다.

[표 1] 연구 대상의 직업 (단위 : 명)
[Table 1] The occupation of the subjects

직업	인원
고등학생	34
예비교사	25
현직교사	5
총	64

34명의 고등학생은 D광역시에 소재한 S고등학교 2학년 자연계열 학생 6명과 S특별자치시에 소재한 G고등학교의 인문계열 학생 28명을 대상으로 실시하였다. S특별자치시의 28명의 학생은 일반 학급의 학생으로 선정하였으며, D광역시의 6명의 학생은 주어진 과제에 대한 최상위권 학생들의 과제 해결 방법을 확인하기 위해 자연계열 학생 중 전교 1등에서 6등까지의 수학성적을 보이는 학생을 선정하였다. 예비교사는 수도권의 K대 수학교육과 학생 1명과 충청북도 소재의 K대 수학교육과 학생 24명으로 선정하였다. 또한 학생들에게 수학을 가르치고 있는 선생님들의 과제 해결 전략을 살펴보기 위해 5명의 현직교사를 선정하여 조사하였다. 현직교사는 C도의 중소도시에서 근무하고 있는 10년 이상의 교육 경력을 지닌 4명의 수학교사와 D광역시에서 근무하고 있는 20년 이상의 교육경력을 지닌 부장교사 1명으로 선정하였다. 고등학생, 예비교사, 현직교사로부터 받은 풀이 과정을 정답의 여부와 풀이에 사용한 전략에 따라 분류하였다. 풀이 과정 중 오류가 발견되거나 논리적으로 이유가 서술되지 않을 채 풀이 과정을 작성한 연구 대상자는 인터뷰를 실시하였으며, 전략 4를 사용한 대상자 중 평소 자신의 의견에 대한 적극적으로 표현하는 예비교사를 인터뷰하였다. C도에 거주하고 있는 1명의 현직교사는 전화로 인터뷰를 하였으며, 그 외의 경우 일대일로 면대면 인터뷰를 진행하였다. 연구자는 인터뷰를 통해 연구대상자가 작성한 풀이와 그러한 풀이를 사용한 이유, 문제를 해결할 수 있는 또 다른 풀이 방법 등을 알아보았다. 인터뷰 내용은 전사하였으며 전사한 내용을 분석한 결과에 대해 수학교육학 박사 1인과 수학교육전공 박사과정 1인의 검토를 받았다.

연구문제 2를 해결하기 위하여 2009 개정교육과정에 맞추어 개발된 수학Ⅱ 교과서와 교사용지도서를 분석하였다. 2009 개정교육과정에 맞추어 개발된 수학Ⅱ 교과서는 총 10종이 있으며, 본 연구에서는 10종의 수학Ⅱ 교과서와 교사용지도서에 제시된 과제를 모두 분석하였다. 본 연구에서 분석한 10종의 교과서와 교사용 지도서에 제시된 주어진 함수와 그 역함수와의 교점을 구하는 과제[2]는 총 25개였으며, 교과서별 과제의 수는 [표 2]와 같다.[3]

2) 함수와 그 역함수의 교점의 좌표가 주어진 과제의 경우에는 두 함수의 교점을 구하는 방법보다는 역함수의 성질을 이용하여 문제를 해결하므로 본 연구의 대상으로 포함시키지 않았다. 예를 들면 류희찬 외(2014)의 수학Ⅱ 교과서에 제시된 과제 '일차함수 $f(x)=ax+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 $(1,-5)$를 지날 때, 두 상수 a,b의 값을 구하는 풀이 과정과 그 답을 써라.' 는 일반적으로 $f(1)=-5$, $f(-5)=1$를 연립하여 문제를 해결하므로 본 연구의 대상으로 포함시키지 않았다(88p).

3) 교과서와 교사용 지도서에 동일한 과제가 제시되었을 경우에는 교사용 지도서의 과제로는 포함시키지 않고, 교과서의 과제에만 포함시켰다.

[표 2] 교과서별 과제의 수[4] (단위 : 개)
[Table 2] The number of tasks on the textbooks

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	계
교	2	0	1	2	5	1	2	1	1	1	16
지	3	1	0	0	2	3	0	0	0	0	9
계	5	1	1	2	7	4	2	1	1	1	25

교과서와 교사용지도서에 제시된 과제는 사용된 함수의 종류와 해설지에 제공된 풀이 방법의 두 가지 기준에 대해 빈도분석을 하였다.

첫째, 과제에서 사용된 함수의 종류에 따라 일차함수, 이차함수, 삼차함수, 기타로 나누어 분석하였다. 학생들은 역함수를 학습하기 이전에 이미 일차함수와 이차함수에 대한 학습이 이루어졌으며, 이차함수의 역함수로서 무리함수를 학습한다. 따라서 수학Ⅱ의 교과서는 무리함수를 지도하기 이전 일차함수를 사용하여 과제를 제시할 수 있으며, 무리함수를 지도한 이후 이차함수, 무리함수, 유리함수를 사용하여 과제를 제시할 수 있다.

둘째, 해설지에 제공된 풀이 방법에 따라 전략 1, 전략 2, 전략 3, 전략 4로 나누어 분석하였다. 특히, 전략 4를 이용한 풀이 방법을 제시하고 있는 경우, 교과서는 전략 4의 풀이가 일반적으로 사용할 수 있는 전략이 아님을 학생들에게 안내하고 있으며, 일반적으로 문제를 풀이할 수 있는 또 다른 전략을 제시하고 있는지를 살펴보았다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 과제에 대한 응답 분석

1) 빈도분석의 결과

주어진 함수와 그 역함수와의 교점을 구하는 과제 '$x \geq 2$에서 정의된 함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 교점의 좌표를 구하시오.'에 대한 응답 결과는 [표 3]과 같다.

4) 2행 1열의 '교'와 3행 1열의 '지'는 각각 교과서와 교사용지도서를 의미한다.

[표 3] 과제에 대한 응답 결과 (단위 : 명)
[Table 3] Response of the tasks

	고등학생	예비교사	현직교사	계
정답	0	4	1	5
오답	34	22	4	60
전략1	5	2	0	7
전략2	0	0	0	0
전략3	2	0	0	2
전략4	26	21	4	51
기타	1	2	1	4
계	34	25	5	64

64명의 대상 중 5명(7.81%)만이 정답을 제시하였으며 60명(92.19%)는 오답을 제시하였다. 특히 고등학생은 정답자가 0명이었으며, 예비교사는 25명 중 4명(16%)이 정답을 제시하였으며 21명(84%)이 오답을 제시하였다. 또한 현직교사는 5명 중 1명(20%)가 정답을 제시하였으며 4명(80%)이 오답을 제시하였다.

과제 해결에 사용한 전략을 기준으로 살펴보면, 64명 중 7명(10.94%)이 전략 1을, 2명(3.13%)이 전략 3을, 51명(79.69%)이 전략 4를, 4명(6.25%)이 기타의 방법을 사용하였다.

문제 해결에 사용한 전략에 따른 정답자와 오답자의 빈도는 [표 4]와 같다.

[표 4] 문제 해결에 사용한 전략에 따른 정오 결과 (단위 : 명)
[Table 4] Result of correct and incorrect answers with the strategy

	정답자	오답자	계
전략1	2	5	7
전략2	0	0	0
전략3	0	2	2
전략4	0	52	52
기타	2	1	3
계	4	60	64

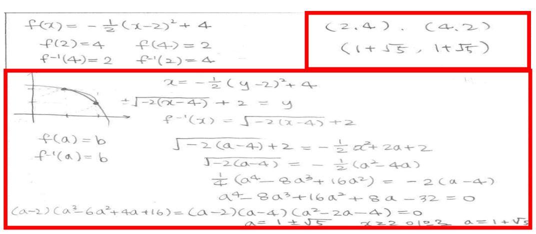
전략 1을 사용한 7명 중 2명은 정답을 제시하였으며, 5명은 오답을 제시하였다. 전략 2를 사용한 사람은 없었으며, 전략 3을 사용한 2명과 전략 4를 사용한 51명은 모두 오답을 제시하였다. 전략 1, 전략 2, 전략 3, 전략 4의 풀이가 아닌 기타 전략을 사용한 4명 중 3명은 정답

을 제시하였으며, 1명은 오답을 제시하였다.

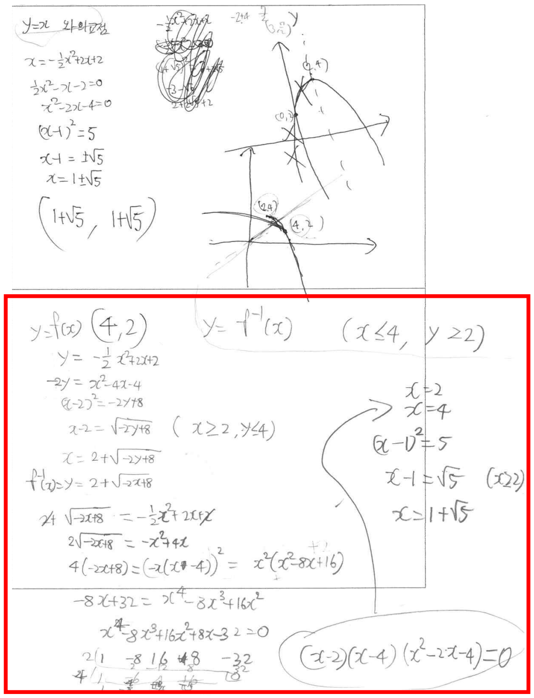
2) 정답자의 풀이 과정 분석

정답을 제시한 예비교사 P3와 P5는 전략 1을 사용하여 문제를 해결하였으며, 교사 I3와 예비교사 P4, P6의 경우에는 전략 1, 전략 2, 전략 3, 전략 4의 풀이가 아닌 다른 방법을 사용하여 문제를 해결하였다.

[그림 4]와 [그림 5]는 예비교사 P3와 P5의 풀이과정을 나타낸 것이다. P3와 P5는 $y=f(x)$의 역함수를 직접 구한 후, 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해를 구하는 전략 1을 사용하여 주어진 과제를 해결하였다. [그림 4]와 같이 예비교사 P3는 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+4$로 나타내었으며 꼭짓점의 좌표를 이용하여 $f(2)=4$, $f(4)=2$임을 나타내었다. 그 후 $y=f(x)$의 역함수인 $y=f^{-1}(x)$를 구하는 전략 1을 사용하여 주어진 과제를 해결하였다. [그림 5]에서 예비교사 P5는 전략 4를 이용하여 주어진 과제의 근 중 $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$를 구하였다. 하지만 그래프를 그리던 중 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(4,2)$가 $y=f(x)$ 위의 점이라는 것을 알게 되어 전략 1을 사용하여 다시 과제를 해결하게 된다. 전략 1을 사용한 과제의 해결 과정에서 두 이차방정식 $x^2-2x-4=0$와 $(x-1)^2=5$가 서로 같다는 오류를 범하였으며 교점의 좌표가 아닌 $x=2$, $x=1+\sqrt{5}$, $x=4$로 나타내었지만 면담 결과 풀이과정 중 발생한 사소한 실수라 판단이 되어 P5를 정답자로 간주하였다. P3와 P5를 면담한 결과, 두 예비교사 모두 $f(2)=4$와 $f(4)=2$임을 알게 되어 전략 1을 사용하였으며, 전략 1의 사용에서 나타나는 무리방정식의 무연근에 대해 크게 고려하고 있지 않았다.



[그림 4] 예비교사 P3의 풀이 방법
[Fig. 4] Answer of the preservice teacher P3



[그림 5] 예비교사 P5의 풀이 방법
[Fig. 5] Answer of the preservice teacher P5

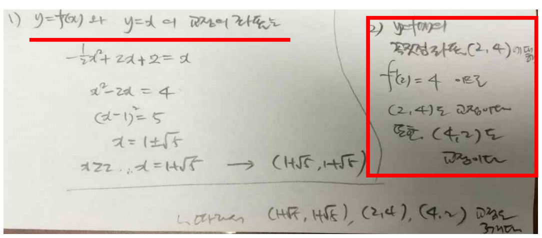
[그림 6]은 교사 I3의 풀이과정을 나타낸 것이다. 교사 I3은 전략 4를 사용하여 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점인 $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$를 구하였으며, $f(2)=4$이고 $f(4)=2$라는 사실을 이용하여 $(2,4)$와 $(4,2)$도 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 된다고 제시하였다. 풀이 과정에서 $(2,4)$와 $(4,2)$가 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 되는 이유가 서술되지 않아 I3교사와 면담을 실시하였다.

[발췌문 1] 문제 해결 과정에 대한 I3교사의 설명

1	T	이 문제를 풀이한 방법에 대해서 설명해주시겠어요?
2	I3	$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=x$ 위에 있으니깐 $f(x)=x$를 풀었습니다.
3	T	오른쪽에 보면 '꼭짓점 $(2,4)$에 대하여 $f^{-1}(2)=4$이므로 $(2,4)$도 근이다.'라고 표현하셨는데 이 부분은 어떻게 하신 건가요?

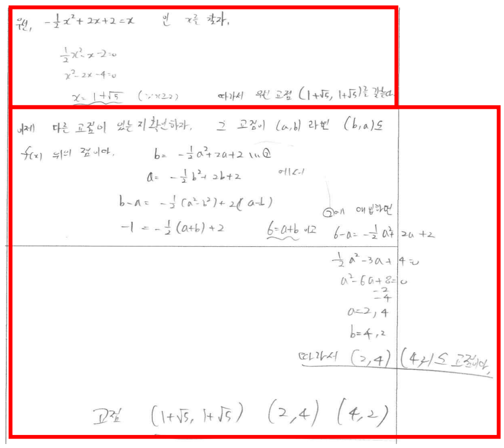
4	I3	우선 주어진 이차함수의 꼭짓점의 좌표가 $(2,4)$이고, 역함수인 무리함수는 $(4,2)$가 꼭짓점이므로 $(4,2)$를 $y=f(x)$에 대입해보았어요.
5	T	그래서 '꼭짓점 $(2,4)$에 대하여 $f^{-1}(2)=4$이므로 $(2,4)$도 근이다.'라고 생각한 거군요.
6	I3	네. $(2,4)$가 교점이니깐 $(4,2)$도 교점이 되구요.
7	T	혹시 $(2,4)$, $(4,2)$와 같이 $y=x$ 위에 있지 않는 또 다른 교점이 있을까요?
8	I3	(침묵한 채 시간이 흐름)
9	T	아니면 $(2,4)$와 $(4,2)$만이 $y=x$ 위에 있지 않는 교점이라는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?
10	I3	(침묵한 채 시간이 흐름)

교사 I3은 $f(2)=4$이고 $f(4)=2$임을 생각하게 된 것은 우연히 꼭짓점의 좌표인 $(2,4)$의 x좌표와 y좌표를 바꾸어 $(4,2)$를 $y=f(x)$에 대입해 본 결과였다고 말하였다(1.4). 하지만 세 점 $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$, $(2,4)$, $(4,2)$을 제외한 다른 점들은 교점이 되지 않는 이유는 설명하지 못하였다(1.8, 1.10). 이와 같은 I3의 풀이 과정은 $(2,4)$와 $(4,2)$가 교점이 된다는 점을 인식한 이후 예비교사 P3와 P5의 풀이 과정과 차이를 보였다. P3는 $(2,4)$와 $(4,2)$가 교점이 된다는 것을 인식한 이후 전략 1을 선택하였으며, P5는 전략 4에서 전략 1로 수정하여 문제를 해결하였다. 하지만 I3는 전략 4를 바탕으로 $y=x$ 위의 교점을 구하였으며, $y=x$ 위에 있지 않는 두 교점에 대해서는 논리적 사고 없이 우연하게 구하였다.



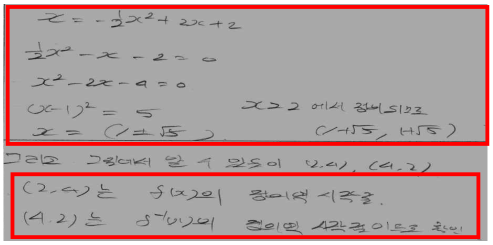
[그림 6] 교사 I3의 풀이 방법
[Fig. 6] Answer of the inservice teacher I3

[그림 7]은 예비교사 P4의 풀이를 나타낸 것이다. 예비교사 P4는 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 $y=x$ 위에 있지 않을 수 있음을 인식하고 있었다. P4는 주어진 과제를 해결하기 위해 교점이 $y=x$ 위에 있는 경우와 $y=x$ 위에 있지 않는 경우로 나누어 풀이하였다. $y=x$ 위에 있는 교점은 전략 4를 이용하였으며, $y=x$ 위에 있지 않는 교점은 역함수의 성질 '$f(a)=b$이면 $f^{-1}(b)=a$'을 이용하여 두 연립이차방정식 $f(a)=b$, $f(b)=a$의 해를 구함으로써 과제를 해결하였다.



[그림 7] 예비교사 P4의 풀이 방법
[Fig. 7] Answer of the preservice teacher P4

[그림 8]은 예비교사 P6의 풀이를 나타낸 것이다. P6은 전략 4를 사용하여 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점인 $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$를 구하였으며, $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역의 끝점이 각각 $(2,4)$와 $(4,2)$를 확인한 결과 3개의 교점이 나온다고 하였다. 하지만 면담 결과, P6는 교사 I3과 마찬가지로 $(2,4)$, $(1+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$, $(4,2)$를 제외한 다른 점들은 교점이 되지 않는 이유는 설명하지 못하였다.

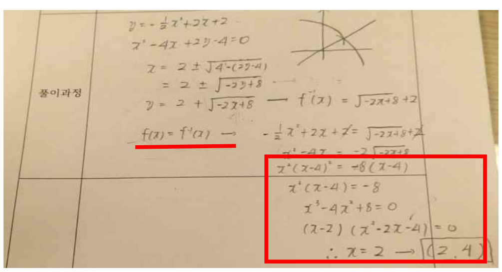


[그림 8] 예비교사 P6의 풀이 방법
[Fig. 8] Answer of the preservice P6

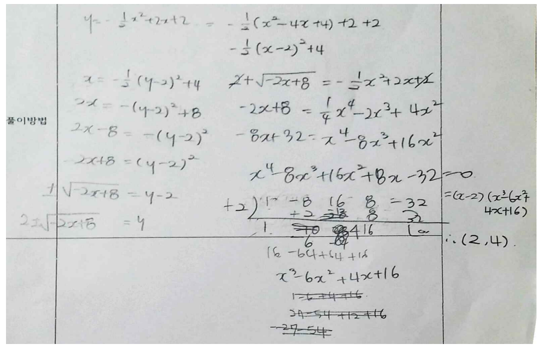
3) 오답자의 풀이 과정 분석

주어진 과제를 해결하기 위해 고등학생 5명(S4, S9, S10, S11, S12)은 전략 1을 사용하였다.

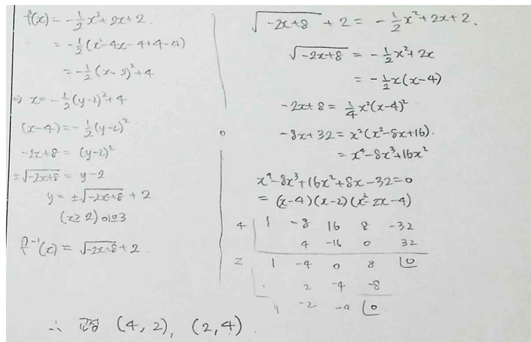
[그림 9], [그림 10], [그림 11]은 학생 S4, S10, S11의 풀이 과정을 나타낸 것이다. S4, S10, S11은 주어진 함수의 역함수를 직접 구한 후, 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해를 구함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 x좌표를 구하려고 시도하였다. 하지만 S4는 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해를 구하는 과정에서 양 변의 공통인수를 약분해버리는 실수와 이차방정식의 근을 구하지 않은 실수로 인해 두 그래프의 교점 중 $(2,4)$만 구하였으며, S10은 조립제법의 과정에서 실수를 범하여 두 그래프의 교점 중 (2,4)만 구하였다. 또한 S11은 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 근을 구하지 않은 채 두 그래프의 교점 중 $(2,4)$와 $(4,2)$만 구하였다. 반면 S9와 S12는 주어진 함수의 역함수를 직접 구한 후, 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해를 구하는 전략을 사용해야 한다고 서술하였으나 S9는 $y=f^{-1}(x)$를 틀리게 구하였으며 S12는 사차방정식의 근을 구하지 못하였다.



[그림 9] 학생 S4의 풀이 방법
[Fig. 9] Answer of the student S4



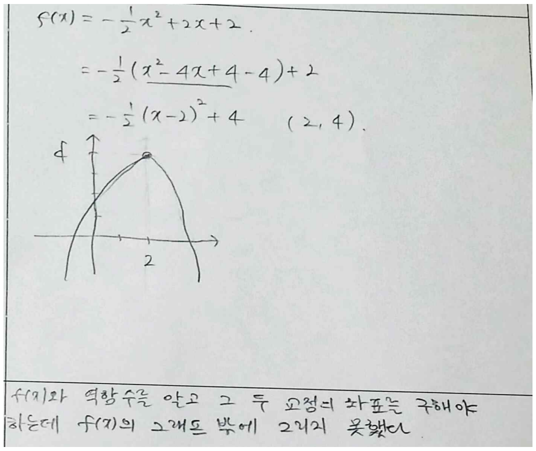
[그림 10] 학생 S10의 풀이 방법
[Fig. 10] Answer of the student S10



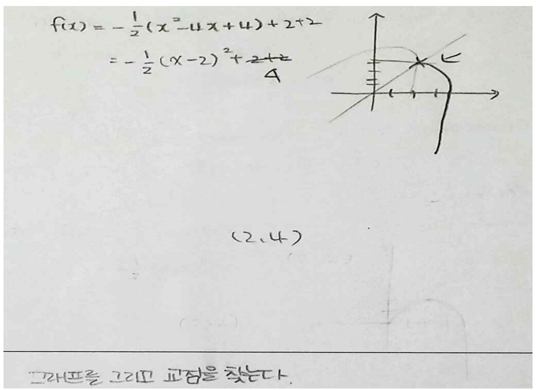
[그림 11] 학생 S11의 풀이 방법
[Fig. 11] Answer of the student S11

2명의 고등학생(S7, S13)은 주어진 과제를 해결하기 위한 방법으로 전략 3을 선택하였다.

[그림 12]과 [그림 13]은 S7과 S13의 풀이과정을 나타낸 것이다. S7은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그린 후 교점의 좌표를 찾으려 했으나 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리지 못해 문제를 해결하지 못하였다. S13은 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $y=x$에 대칭시켜 $y=f^{-1}(x)$를 구하려고 하였으나 $y=f(x)$를 $y=x+2$에 대칭시켜 생각하여 교점 중 $(2,4)$만 구하였다.

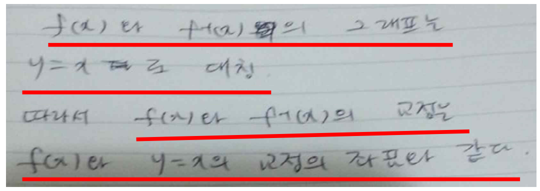


[그림 12] 학생 S7의 풀이 방법
[Fig. 12] Answer of the student S7

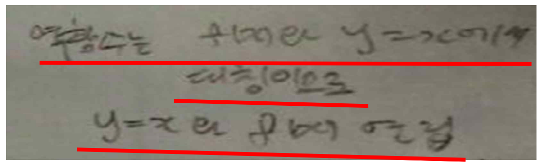


[그림 13] 학생 S13의 풀이 방법
[Fig. 13] Answer of the student S13

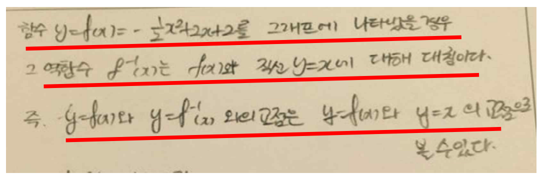
전략 4를 사용한 51명의 응답을 분석한 결과, 다수의 응답자들은 '$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=x$에 대해 대칭관계에 있으므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 집합은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 집합과 같다.'는 오개념을 보였다. [그림 14], [그림 15]과 [그림 16]는 각각 교사 I1, 예비교사 P2, 학생 S2의 풀이 과정 중 일부를 나타낸 것이다. 응답자들은 직업과 무관하게 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 대칭관계로부터 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점과 같다고 생각하여 세 개의 교점 중 $(1+\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$만 구하였으며, $(2,4)$와 $(4,2)$에 대한 언급은 풀이 과정에 나타나지 않았다.



[그림 14] 교사 I1의 풀이 방법
[Fig. 14] Answer of the inservice teacher I1



[그림 15] 예비교사 P2의 풀이 방법
[Fig. 15] Answer of the preservice teacher P2



[그림 16] S2의 풀이 방법
[Fig. 16] Answer of the student S2

전략 4를 이용한 풀이 방법은 $y=f(x)$가 증가함수인 경우처럼 특정한 조건을 만족하는 경우에는 문제 해결 과정에서 성공을 보장해주지만 일반적인 경우에는 성공을 보장하지 않는다. 하지만 다수의 현직교사, 예비교사, 고등학생은 전략 4를 이용한 풀이 방법이 항상 성공을 보장해 줄 것이라 생각하고 있었다. 다음은 주어진 과제를 해결하기 위한 방법으로 전략 4를 사용한 예비교사 P23과의 면담 내용의 일부이다.

[발췌문 2] 문제 해결 과정에 대한 P23교사의 설명

1	T	혹시 만약 이 문제를 다른 풀이 방법으로 해결할 수 있을까?
2	P23	이게 항상 통하는 방법이 아닌데. 역함수

를 직접 구해서 $f(x)=f^{-1}(x)$ 이렇게 해도 나오긴 나오겠죠.

3 T 그럼 여기에서 ‘항상 통하는 방법이 아니다’라는 말의 의미는 어떤 의미였어?

4 P23 함수가 복잡해서 역함수를 구하기가 불가능하거나 구하기 어려운 문제가 있더라구요. 그럴 때는 바로 그냥 $=x$로 해서 풀죠.

5 T 여기서는 역함수를 구할 때 $y=x$와의 교점을 구했잖아. 그 이유가 있을까?

6 P23 (손으로 공중에 $y=\sqrt{x}$와 같이 증가하면서 위로 볼록인 함수를 그리면서 설명함.) 역함수라는 것 자체가 기하학적으로 봤을 때 어떤 그래프를 $y=x$에 대칭시킨 것이기 때문에 $y=x$와의 교점이 없으면 그 선으로 이렇게 접었을 때 똑같이 떨어진 만큼 이렇게 그려지기 때문에 역함수와의 교점도 없을테고, $y=x$와의 교점이 생긴다면 그 부분이 딱 접히는 부분에 들어가잖아요. 그 선에 들어가니깐 역함수도 반드시 그 부분을 지나게 될 거라는 확신을 가지고 이렇게 푼 거죠.

7 T 예를 들어 방금 ‘접는다’와 같은 표현을 할 때 손으로 그래프를 대충 그렸단 말이야. 손으로 공중에다 그래프를 그리면서 이야기를 했잖아.

8 P23 네. 그렇죠.

9 T 그 그래프가 어떤 그래프의 형태였는지 말을 해 줄 수 있을까? 예를 들어 증감의 상태라든가 아니면 변곡점이나 오목 볼록성이라든가. 아니면 어떤 특정한 함수 $y=x^2$ 또는 $y=x$의 형태였다든가.

10 P23 (위로 볼록한 증가함수를 손으로 그리면서) 제가 쉽게 그린 것은 지수함수나 로그함수의 형식이었는데..

11 T 그러면 역함수와의 교점을 이렇게 $y=x$와의 교점을 구하는 방법이 항상 성립하는 걸까? 아니면 성립하지 않을 수 있을까?

12 P23 음...

13 T 다시 말하면 역함수와의 교점의 해집합과 $y=x$와의 교점의 해집합은 두 개가 같을까?

14 P23 그러게요. 아..
그냥 지금까지 습관대로 풀었어요. 다른 친구들도 거의 다 이렇게 풀던데..

15 T 친구들도 비슷하게 풀었어?

16 P23 그러니깐 어떻게 보면 친구들도 같은 맥락인거죠. 지금까지 이렇게 풀어왔으니깐 비슷한 방법으로 접근하면 될거야라고요. 그렇지 않을까요?

P23은 역함수와의 교점을 구하는 풀이 방법으로 전략 1을 사용한 방법을 알고 있었으나(2.2) $y=f^{-1}(x)$를 구하기 어려운 경우가 있어 방정식 $f(x)=x$의 근을 구함으로써 교점을 구하고자 하였다(2.4). 이는 전략 4를 이용하여 문제를 해결하고자 노력한 다수의 현직교사, 예비교사, 학생들이 언급한 것과 같이 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 $y=x$에 대해 대칭관계에 있어 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점이 아닐 경우 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 아니라고 하였다(2.6). P23은 위로 볼록이면서 증가하는 함수의 형태를 손으로 나타내면서 설명하였으며(2.6, 2.10), 기존의 유사한 문제에서도 전략 4를 이용한 풀이 방법을 지속적으로 사용해왔으며 친구들도 같은 방법을 이용하여 풀이한다고 설명하였다(2.14, 2.16).

4) 응답자의 풀이 과정에서 나타난 특징

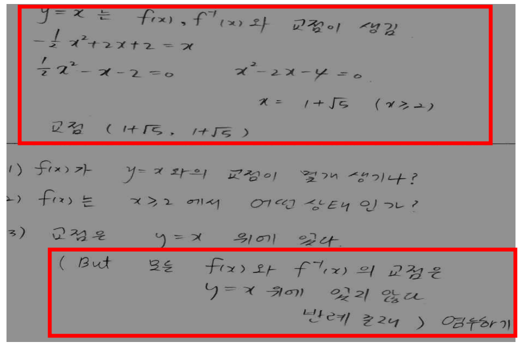
본 연구에서는 64명의 현직교사, 예비교사, 학생을 대상으로 역함수와의 교점을 구하는 과제를 해결하는 과정을 분석하였다. 응답자의 풀이 과정에서 나타난 특징은 다음과 같다.

첫째, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 $y=x$ 위의 점이 아닐 경우, $y=f(x)$ 또는 $y=f^{-1}(x)$의 정의역의 끝점에 위치한다는 오개념을 보였다. 예비교사 P3, P5, P6, 현직교사 I3의 풀이 과정과 면담 내용으로부터 주어진 이차함수의 그래프와 그 역함수인 무리함수의 그래프를 그리는 과정에서 정의역의 끝점이 $(2,4)$와

$(4,2)$가 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$를 만족함을 알게 되었으며, 이를 바탕으로 정답을 구할 수 있었다고 말하였다. 특히 예비교사 P4는 $y=f(x)$의 정의역의 시작점인 $(2,4)$와 $y=f^{-1}(x)$의 정의역의 시작점인 $(4,2)$를 확인함으로써 $y=x$ 위에 있지 않은 점을 구하였다고 하였다([그림 8] 참고). 하지만 $y=x$ 위에 있지 않는 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 항상 $y=f(x)$ 또는 $y=f^{-1}(x)$의 정의역의 끝점에 위치하는 것은 아니다. 예를 들면, $f(x)=\dfrac{7-x^2}{3}(x \geq 0)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)=\sqrt{7-3x}$의 교점은 $(1,2)$, $(2,1)$, $(\dfrac{-3+\sqrt{37}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{37}}{2})$이 된다. $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 두 교점 $(1,2)$와 $(2,1)$은 $y=x$에 있지 않지만 두 함수의 정의역의 끝점에 위치하지도 않는다.

둘째, 전략 1을 사용한 응답자는 모두 무리방정식의 무연근을 고려하지 않았다. 전략 1을 사용한 7명의 응답자(고등학생 5명, 예비교사 2명)는 무리방정식의 해를 구하기 위해 노력하였다. 하지만 무리방정식의 양 변을 제곱하여 구한 사차방정식의 해가 무연근이 되는지를 확인해보지 않은 채 주어진 무리방정식의 근으로 간주하는 모습을 보였다.

셋째, $y=f(x)$과 그 역함수의 교점의 해집합이 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 해집합과 같지 않다는 사실을 알고 있지만 문제 해결 과정에서는 활용을 하지 못하는 경우가 있었다. [그림 17]과 같이 예비교사 P18은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 항상 $y=x$ 위에 있지 않음을 알고 있었다. 하지만 주어진 과제를 해결하는 과정에서는 전략 4를 이용하여 $f(x)=x$의 해를 구함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구하는 모습을 보였다. P18이 지닌 지식과 모순된 풀이 과정을 보인 이유를 살펴보고자 면담을 실시한 결과, P18은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 $y=x$ 위에 있지 않는 반례가 존재한다는 것을 알고는 있었지만 교점을 구하는 방법에 대해서는 알고 있지 않았으며, 지금까지 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구하는 문제는 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 구함으로써 해결할 수 있었다고 말하였다.



[그림 17] 예비교사 P18의 풀이 방법

[Fig. 17] Answer of the preservice teacher P18

넷째, '$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$가 $y=x$에 대하여 대칭관계에 있다.'는 성질이 '$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 $y=x$ 위에 있다.'는 잘못된 지식을 유발하였다. 주어진 과제를 해결하기 위하여 전략 4를 사용한 대부분의 응답자는 '$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$가 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 $y=x$ 위에 있다.'라고 주장하였다([그림 14], [그림 15], [그림 16], [발췌문 2] 참조). 이는 신옥숙(2009)과 홍선미(2011)의 연구에서 학생들이 전략 4를 이용하지 않고 역함수와의 교점을 구하는 풀이 과정을 역함수의 이해 과정에서 나타나는 오류로 간주하는 것과는 상반된다.

2. 교과서의 과제 분석

다수의 현직교사, 예비교사, 고등학생은 역함수와의 교점을 구하는 과제를 풀이하는 과정에서 인지적 갈등을 보여주었다. 특히 전략 4를 이용한 풀이 방법을 제시한 응답자의 경우, 증가함수와 같이 특수한 상황에서 성공적인 풀이 방법이 일반적인 상황에서도 성공을 보장할 것이라는 과도한 일반화의 양상을 보였다. 다수의 현직교사, 예비교사, 고등학생에게서 동일한 오류가 나타나는 현상은 원인이 개인이 아닌 교육과정 또는 교과서에 있을 수 있는 가능성을 시사해준다. 이에 본 연구에서는 2009 개정교육과정을 반영한 10종의 수학Ⅱ 교과서와 교사용 지도서에 제시된 역함수와의 교점을 구하는 과제에 대해 분석하였다.

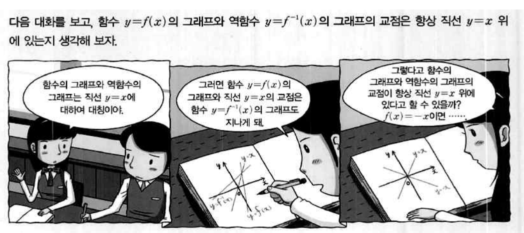
1) 과제의 학습 내용에 따른 분류

주어진 함수와 그 역함수의 교점을 구하는 문제에 대해 10종의 수학Ⅱ 교과서와 교사용 지도서를 분석하였다. 10종의 교과서와 교사용 지도서에 제시된 과제를 다항함수[5]와 관련시켜 분류하면 [표 5]와 같다.

[표 5] 다항함수에 따른 과제의 분류 (단위 : 개)
[Table 5] Classified the tasks according to the polynomial

	일차함수	이차함수	삼차함수	기타	계
A	2	3	0	0	5
B	1	0	0	0	1
C	0	0	1	0	1
D	1	1	0	0	2
E	1	0	0	0	1
F	1	5	0	1	7
G	1	3	0	0	4
H	1	1	0	0	2
I	0	1	0	0	1
J	0	1	0	0	1
계	8	15	1	1	25

교과서에 제시된 25개의 과제 중 24개의 과제는 다항함수와 관련되어 있었으며, 1개의 과제는 [그림 18]와 같이 역함수와의 교점을 구하는 과제를 해결하는 과정에서 일반적으로 전략 4를 이용할 수 있는지를 묻는 과제였다.



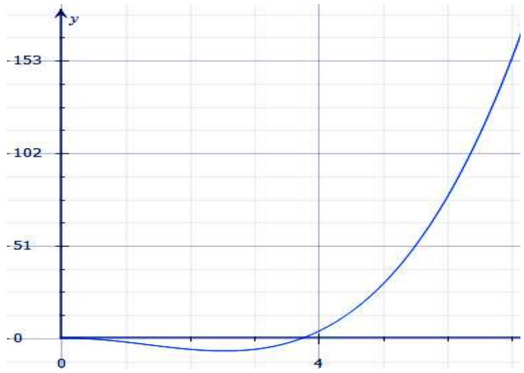
[그림 18] 우정호 외(2014a, 92p)에 제시된 과제
[Fig. 18] Task on the Woo's textbook

다항함수와 관련된 24개의 과제 중 8개의 과제는 일차함수와 관련되어 있었으며 15개의 과제는 이차함수와 관련이 있었으며 1개의 과제는 삼차함수와 관련되어 있었다. 일차함수와 관련된 과제를 제공할 경우, 주어진 함수의 역함수를 직접 구하기 쉬우며 복잡한 계산 과정이 나타나지 않는다. 또한 일차함수의 역함수는 일차함수가 되어 유리함수와 무리함수를 어려워하는 학생들에게도 역함수와의 교점을 구하는 과제로 제시할 수 있다. 제한된 구간에서 정의된 이차함수와 관련된 제공할 경우, 이차함수의 역함수는 무리함수가 되어 학생들에게 이차함수와 무리함수의 연결성을 강조하여 지도할 수 있다. 하지만 학생들에게 삼차 이상의 고차함수와 관련된 역함수의 과제를 제공하는 것은 주의할 필요가 있다. 고차함수의 경우, 학생들이 주어진 함수의 그래프를 그릴 수 없어 역함수를 갖는 함수인지를 판단할 수 없으며, 역함수를 갖더라도 거듭제곱근을 학습하지 않아 역함수의 대수식을 직접 표현할 수 없다. 예를 들어, [그림 19]의 과제에서 제시된 삼차함수 $f(x)=x^3-4x^2+x \ (x \geq 0)$을 살펴보면 학생들은 $f(x)=x^3-4x^2+x \ (x \geq 0)$의 그래프를 그리는 방법을 학습하지 않아 $y=f(x)$가 역함수를 갖는지를 확인할 수 없고, $y=f(x)$의 역함수가 존재한다고 가정하더라도 x^3-4x^2+x가 세제곱식으로 표현되지 않아 $y=f^{-1}(x)$의 함수식을 구하기 힘들다. 따라서 학생들은 주어진 함수에 대한 고려 없이 역함수와의 교점을 구하는 과제를 해결하기 위한 전략의 학습에만 초점이 이루어질 수 있다. 실제 [그림 19]의 과제에서 제시된 삼차함수의 그래프를 Microsoft Mathematics를 이용하여 그려보면 [그림 20]과 같이 나타난다. [그림 20]의 그래프에서 알 수 있듯이, 주어진 함수는 $x \geq 0$의 범위에서 일대일함수가 되지 않는다. 즉, 주어진 함수 $y=f(x)$는 역함수가 존재하지 않아 역함수와의 교점을 구하는 문제 자체가 오류를 포함하고 있지만, 학생들은 삼차함수의 역함수가 존재를 판별할 수 없어 주어진 문제의 오류 가능성을 고려하기 힘들다. 이는 교사용 지도서에 제시된 풀이과정에서도 드러난다. [그림 21]에서 알 수 있듯이 과제의 풀이와 채점 기준은 전략 4를 하나의 지식으로서 알고 있는지를 중요시하고 있을 뿐, $y=f(x)$의 역함수가 존재하는지에 대해서는 언급하지 않고 있다.

함수 $f(x)=x^3-4x^2+x \ (x \geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 구하고 그 과정을 서술하여라.

[그림 19] 김창동 외(2014b, 123p)에 제시된 과제
[Fig. 19] Task on the Kim's textbook

5) 제한된 구간에서 정의된 이차함수의 역함수는 무리함수이므로 무리함수와 관련된 과제는 이차함수 문제에 포함시켰다.



[그림 20] $y=x^3-4x^2+x \ (x \geq 0)$의 그래프
[Fig. 20] Graph of the $y=x^3-4x^2+x \ (x \geq 0)$

평가 기준 함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알고 있는가?

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점을 직선 $y=x$가 지난다. …… ❶

즉, $x^3-4x^2+x=x$에서

$x^3-4x^2=0$, $x^2(x-4)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=4$ …… ❷

따라서 두 그래프의 교점은 $(0, 0)$과 $(4, 4)$이다. …… ❸

단계	채점 기준	배점
❶	함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 직선 $y=x$가 지남을 안다.	5점
❷	함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 구한다.	5점
❸	두 그래프의 교점을 구한다.	3점

[그림 21] [그림 19]의 풀이와 채점기준표 (김창동 외, 2015b, 125p)
[Fig. 21] Solution and rubric of the Fig. 19

이와 같이 학생의 수학적 수준과 연결성의 측면을 고려하였을 때, 역함수와 관련된 과제는 일차함수와 이차함수를 이용하여 제시되어야 한다. 이는 2007 개정교육과정에 제시된 “합성함수와 역함수는 이차 이하의 다항함수, 유리함수, 무리함수를 통해 이해한다.”는 교수 학습상의 유의점과 유사하다(교육인적자원부, 2007).

2) 풀이 방법에 따른 과제의 분류

주어진 함수와 그 역함수의 교점을 구하는 과제에 대해 10종의 수학Ⅱ 교과서와 교사용 지도서를 분석하였다. 10종의 교과서와 교사용 지도서에 제시된 과제를 해설지에 제시된 풀이 방법과 관련시켜 분류하면 [표 6]과 같다.

[표 6] 풀이 방법에 따른 과제의 분류 (단위 : 개)
[Table 6] Classified the tasks according to the strategy

		전략 1	전략 2	전략 3	전략 4	기타	계	
A	교	0	0	0	2	0	2	5
	지	0	0	0	3	0	3	
B	교	0	0	0	0	0	0	1
	지	0	0	0	1	0	1	
C	교	0	0	0	0	1	1	1
	지	0	0	0	0	0	0	
D	교	0	0	0	2	0	2	2
	지	0	0	0	0	0	0	
E	교	1	0	0	4	1	6	8
	지	0	0	0	2	0	2	
F	교	0	0	0	0	1	1	4
	지	0	0	0	3	0	3	
G	교	0	0	1	1	0	2	2
	지	0	0	0	0	0	0	
H	교	0	0	0	1	0	1	1
	지	0	0	0	0	0	0	
I	교	0	0	0	1	0	1	1
	지	0	0	0	0	0	0	
J	교	0	0	0	1	0	1	1
	지	0	0	0	0	0	0	
계		1	0	1	21	3	26	

교과서에 제시된 25개의 과제 중 E교과서에 제시된 과제 중 1개는 2가지의 풀이 방법을 제시하고 있었다. 연구자는 이 과제를 서로 다른 2개의 과제로 간주하여 총 26개의 과제를 분석하였다.

26개의 과제 중 21개의 과제는 전략 4를 이용한 풀이 방법을 제시하고 있으며 9종 교과서에 제시되어 있다.

전략 1을 이용한 풀이 방법을 제시한 과제는 1개이다. [그림 22]과 같이 E교과서에서는 전략 4에 대한 다른 풀이로서 전략 1을 이용한 방법을 제시하였다. 또한 [그림 23]와 같이 1개의 과제는 $y=f(x)$를 $y=x$에 대칭시켜 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그린 후 교점의 좌표를 구

했다는 점에서 전략 3에 대한 풀이 과정을 제시한 것으로 분류하였다. 하지만 이 과제의 풀이 과정에서도 '함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.'로 전략 4의 방법과 유사하게 서술되어 있다(이준열 외, 2012b, 134p).

함수 $f(x)=2x+1$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라고 할 때, 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

평가 목표 | 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 직선 $y=x$를 이용하여 구할 수 있다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치한다.

$f(x)=x$, 즉 $2x+1=x$에서 $x=-1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-1, -1)$이다.

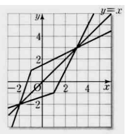
다른 풀이 함수 $f(x)=2x+1$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이므로 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x 좌표는

$2x+1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}x=-\frac{3}{2}$, $x=-1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-1, -1)$이다.

[그림 22] 전략 1을 제시한 과제(우정호 외, 2012b, 82p)
[Fig. 22] Task used strategy 1

(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-2, -2)$, $(3, 3)$이다.



[그림 23] 전략 3을 제시한 과제(이준열 외, 2012b, 134p)
[Fig. 23] Task used strategy 3

기타로 분류된 3개의 과제는 일반적으로 전략 4를 이용하여 주어진 함수와 역함수와의 교점을 구할 수 있는지에 대하여 [그림 18], [그림 24]와 같이 토론을 하거나 [그림 25]과 같이 공학 도구를 이용하여 탐구하도록 제시되어 있다.

다음은 영호가 함수 $f(x)=-x+4$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 구하는 과정을 나타낸 것이다. 이 풀이가 옳은지 판단하고, 그 이유를 말하여라.

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 모든 교점이 직선 $y=x$ 위에 존재해. 즉 구하는 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 $-x+4=x$를 풀면 $x=2$임을 알 수 있지.
따라서 구하는 교점의 좌표는 (2, 2)야.

[그림 24] 류희찬 외(2012a, 84p)에 제시된 과제
[Fig. 24] Task on the Lew's textbook

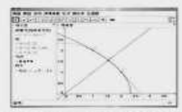
수학 확대경

무리함수와 그 역함수의 그래프의 교점

무리함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 일반적으로 직선 $y=x$ 위에 있다. 그러나 직선 $y=x$ 위의 교점 이외에도 두 함수의 그래프의 교점이 있는 경우가 있다.

컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음과 같이 무리함수 $y=\sqrt{7-3x}$와 그 역함수의 그래프를 그려서 두 함수의 그래프의 교점을 살펴보자.

❶ 입력 란에 y=sqrt(7−3x)를 입력하고 실행하면 대수창에 함수 $f(x)=\sqrt{7-3x}$가 입력되며 기하창에 무리함수 $f(x)=\sqrt{7-3x}$의 그래프가 나타난다.
❷ 입력 란에 y=x를 입력하고 실행하면 기하창에 직선 $y=x$가 나타난다.
❸ 입력 란에 x^2=−3y+7, 무리함수 $y=\sqrt{7-3x}$의 역함수의 식을 입력하고 실행하면 대수창에 원뿔곡선(이차곡선) $c: x^2=-3y+7$이 입력되며 기하창에 함수 $x^2=-3y+7$의 그래프가 나타난다.
❹ 입력 란에 교점 (c, f)를 입력하면 두 곡선 $y=\sqrt{7-3x}$와 $x^2=-3y+7$의 세 교점 A(1, 2), B(1.54, 1.54), C(2, 1)이 대수창과 기하창에 오른쪽 그림과 같이 나타난다.



무리함수 $y=\sqrt{7-3x}$와 그 역함수의 그래프의 세 교점 A, B, C 중에서 두 점 A, C는 직선 $y=x$ 위가 아닌 부분에 있다.

따라서 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 항상 직선 $y=x$ 위에만 있는 것은 아님을 알 수 있다.

참고 위의 그림에서 나타나는 점 B의 좌표 (1.54, 1.54)에서 1.54는 $\frac{-3+\sqrt{37}}{2}$을 어림한 값이다.

확인하기 1 위의 컴퓨터 프로그램을 이용하여 무리함수 $y=\sqrt{1-x}$와 그 역함수의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 위의 점 이외에도 더 있는지 확인하여라.

[그림 25] 이준열 외(2012a, 99p)에 제시된 과제
[Fig. 25] Task on the Lee's textbook

위와 같이 3종의 교과서에서는 수학적 의사소통 또는 공학 도구를 활용한 탐구의 결과 학생들이 전략 4가 일반적인 풀이 방법이 아님을 알 수 있도록 과제를 제시하고 있다. 3종의 교과서에서는 공통적으로 반례를 통하여 전략 4가 일반적인 전략이 될 수 없음을 제시하고 있다. 하지만 E교과서만이 일반적인 풀이 방법 중 하나인 전략 1을 사용한 풀이 방법을 제시하고 있으며, 나머지 2종의 교과서에서는 일반적인 풀이 방법을 제시하고 있지 않다. 특히 F교과서에서는 학생들이 전략 4가 일반적인 풀이 방법이 아님을 알 수 있도록 하는 과제를 제시하였음에도 불구하고 역함수와의 교점을 구하는 3개의 과제

에서 모두 전략 4를 이용한 풀이만을 제시하고 있었다. 또한 [그림 25]의 F교과서는 "무리함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 일반적으로 직선 $y=x$ 위에 있다."라고 서술하여 학생들이 전략 4가 일반적인 풀이 방법지만 예외적으로 전략 4를 사용할 수 없는 경우가 있는 것처럼 받아들일 여지가 있었다.

10종 교과서는 전략 2를 풀이 방법으로 제시하고 있는 과제가 하나도 없었다. 전략 2는 합성함수와 역함수의 성질에 의해 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 집합과 $y=(f\circ f)(x)$와 $y=x$의 교점의 집합이 같다는 사실을 이용하는 방법이다. 전략 2를 사용함에 있어 $(f\circ f)(x)$의 차수가 높아진다는 단점이 있지만, 이는 이차함수와 관련된 역함수 문제의 해결에 도움을 줄 수 있다. 실제로 10종 교과서에 제시된 이차함수와 관련 과제들은 모두 전략 4를 풀이 방법으로 제시하고 있다. 이차함수의 경우 지필환경에서는 그래프를 정확히 나타낼 수 없기 때문에 전략 3을 사용하기가 힘들고, 이차함수의 역함수는 무리함수가 되어 전략 1을 사용하면 무리방정식 문제가 되어 교육과정에서 벗어나게 된다. 하지만 전략 2를 사용한다면 $(f\circ f)(x)$는 4차식이 되어 방정식 $(f\circ f)(x)=x$는 사차방정식이 된다. 즉, 전략 2는 이차함수와 그 역함수의 교점을 구하는 과제의 일반적인 문제 해결 전략으로서의 가치를 지니고 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 주어진 함수와 그 역함수의 교점을 구하는 과제에 대한 현직교사, 예비교사, 고등학생의 풀이 방법을 알아보고, 주어진 과제의 해결 전략에서 나타난 문제점의 원인을 알아보기 위하여 2009 개정교육과정을 반영한 전체 10종의 교과서와 교사용지도서에 제시된 과제를 분석하였다.

교과서의 분석에 앞서 2007 개정 교육과정에서 제시한 교수 학습상의 유의점을 반영하여 자체 개발한 이차함수와 그 역함수와의 교점을 구하는 과제를 64명의 연구 참여자에게 제공하여 그 풀이 방법을 살펴보았다. 그 결과, 연구 참여자들은 역함수와의 교점을 구하는 과정에서 다음과 같은 오류를 보였다.

첫째, 다수의 현직교사, 예비교사, 고등학생은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$가 $y=x$에 대해 대칭이라는 사실로부터 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 해집합과 $y=f(x)$와 $y=x$의 해집합이 같다는 오류를 보였다.

둘째, $y=x$ 위에 있지 않는 $y=f(x)$와 그 역함수의 교점은 정의역의 끝점에 위치한다는 오류를 보였다.

셋째, 약 80%의 연구 참여자들은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 구함으로써 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구하는 풀이 방법을 사용하였으며, 대부분 특수한 상황에서의 성공적인 경험으로부터 일반적인 상황에서도 성공을 보장해 줄 것이라는 과도한 일반화로부터 유발되었다.

연구 대상들의 역함수와의 교점을 구하는 과제의 풀이 과정에서 드러난 문제의 원인을 교과서에서 찾아보고자 10종의 수학Ⅱ 교과서와 교사용 지도서를 분석하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

첫째, 역함수와의 교점을 구하는 과제는 대부분 일차함수, 이차함수(또는 무리함수)와 관련되어 있다. 25개의 과제 중 23개가 일차함수, 이차함수와 관련되어 있었으며 1개는 삼차함수와 관련되어 있었다. 학생들은 일차함수와 이차함수의 그래프를 그릴 수 있어 주어진 함수가 일대일대응이 되는지를 판단할 수 있으며 일차함수와 이차함수의 역함수는 각각 일차함수와 무리함수가 되어 학생들이 역함수의 함수식을 구할 수 있다. 하지만 학생들은 삼차 이상의 고차함수의 그래프를 그릴 수 없어 일대일대응이 되는지를 판별할 수 없으며 역함수의 함수식도 구할 수 없다. 이와 같은 이유로 대부분의 과제는 학생의 수학적 수준과 연결성의 측면을 고려하여 일차함수 또는 이차함수와 관련시켜 제시되었다. 이는 2007 개정 교육과정에서 역함수는 이차 이하의 다항함수, 유리함수, 무리함수를 통해 다루어야 한다는 교수 학습상의 유의점과도 일맥상통하다고 볼 수 있다(교육인적자원부, 2007).

둘째, 대부분의 과제는 과도한 일반화를 유발할 가능성이 있는 전략 4를 풀이 방법으로 제시하고 있다. 25개의 과제 중 1개의 과제는 전략 1과 전략 4의 두 가지 풀이 방법을 제시하고 있어 학생들이 일반적인 풀이 방법과 특수한 풀이 방법을 모두 학습할 수 있도록 하였지만 20개의 과제는 풀이 과정에 전략 4만을 제시하여 학생들이 전략 4를 하나의 수학적 지식으로 인식할 가능성을

제공하고 있었다. 하지만 전략 4는 일반적인 상황에서 유사한 과제의 성공 가능성을 보장해주지 못해 전략 4만을 풀이 과정으로 제시할 경우, 학생들에게 과도한 일반화를 유발할 수 있다는 문제가 있다.

셋째, 10종의 교과서 중 3종의 교과서만이 전략 4가 일반적인 상황에서 과제의 해결에 성공을 보장해주지 못한다는 것을 지적하고 있었다. 학생들에게 전략 4를 풀이 전략으로 제시하였을 때 나타날 수 있는 문제점은 전략 4를 수학적 지식으로 받아들일 수 있다는 점이다. 하지만 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=\dfrac{1}{x}$와 같이 학생들이 평소에 자주 다루는 함수에서도 전략 4는 문제 해결 방법에 있어 성공을 보장해주지 못한다. 따라서 학생들에게 전략 4가 일반적인 풀이 방법으로 사용될 수 없음을 제시해 줄 필요가 있지만, 3종의 교과서만 수학적 의사소통과 관련된 과제 또는 수학공학도구를 활용하는 과제를 통해 제시하고 있다.

넷째, 전략 2를 풀이 방법으로 제시된 과제는 10종 교과서에 제시되지 않았다. 지필환경에서 대수적인 계산을 통해 문제를 해결할 수 있는 일반적인 풀이 방법은 전략 1과 전략 2이다. 전략 1은 $y=f^{-1}(x)$를 직접 구하여 계산하므로 $y=f^{-1}(x)$의 함수식을 구하기 힘들 경우에는 사용하기 힘들다. 이러한 경우 대안적인 방법으로 전략 2를 사용할 수 있다. 특히 $f(x)$가 이차식일 경우, 전략 1은 무리방정식의 문제로 환원되어 교육과정에 위배되지만 전략 2는 사차방정식의 문제로 환원되어 교육과정에 위배되지 않는다.

본 연구에서는 역함수와의 교점을 구하는 과제에 대해 현직교사, 예비교사, 고등학생의 풀이 과정을 분석하였으며, 이와 관련된 수학Ⅱ 교과서와 교사용 지도서의 과제를 분석하였다. 64명의 풀이 과정을 분석한 결과, 다수의 학생, 예비교사, 현직교사는 과도한 일반화를 보이고 있었다. 또한 10종의 교과서는 일반적인 문제 상황에서 오류를 일으킬 수 있는 전략을 역함수와의 교점을 구하는 과제의 풀이 방법으로서 제공하고 있었다.

본 연구를 통해 수학교과서 집필자들은 역함수와의 교점을 구하는 과제에서 학생들이 오개념을 갖지 않도록 문제 해결 과정과 교과서의 내용을 서술하는데 도움을 줄 수 있을 것이며, 예비교사와 현직교사는 학생들에게 역함수와의 교점을 구하는 문제를 지도하는 데 있어 새로운 교수 학습상의 유의점을 제공해 줄 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정.
M.O.E. (2011). *Mathematics curriculum.*
교육부 (2015). 수학과 교육과정.
M.O.E. (2015). *Mathematics curriculum.*
교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정.
M.O.E.(2007). *Mathematics curriculum.*
권지현, 김구연 (2013). 중학교 수학교과서에 제시된 기하영역의 수학 과제 분석. 수학교육 52(1), 111-128.
Kwon, J.H. & Kim, G. (2013) An analysis of mathematical tasks in the middle school geometry. *The Mathematical Education 52*(1), 111-128.
김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤(2006). 수학교육과정과 교재연구. 경문사.
Kim, N.H., Na, G.S., Park, K., Lee, K.H., Chong, Y.O., & Hong, J.K. (2011). *Mathematics curriculum and textbook research*, Seoul: Kyungmoonsa.
김동중, 배성철, 김원, 이다희, 최상호 (2015). 중학교 2학년 수학 교과서의 수학 과제 분석 -스토리텔링 유형을 고려하여 -. 수학교육논문집 29(3), 281-300.
Kim, D.J., Bae, S.C., Kim, W., Lee, D.H., & Choi, S.H. (2015). Analysis of mathematical tasks provibed by storytelling mathematics textbooks. *Communications of mathematical education 29*(3), 281-300.
김미희, 김구연 (2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석. 학교수학 15(1), 37-59.
Kim, M. & Kim, G. (2013). The Analysis of mathematical tasks in the high school mathematics. *School Mathematics 15*(1), 37-59.
김민혁 (2013). 수학교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사. 학교수학 15(3), 503-531.
Kim, M. (2013). Secondary mathematics teachers' use of mathematics textbooks and teachers' guide. *School Mathematics 15*(3), 503-531.
김부윤, 정영우 (2010). 함수의 합성 ∘이 가지는 의미에 대한 고찰. 수학교육 49(2), 149-160.
Kim, B.Y. & Chung. Y.W. (2010). A study on meaning of

composition ◦ of functions. *The Mathematical Education 49*(2), 149-160.

김성희, 방정숙 (2005). 수학 교수・학습 과정에서 과제의 인지적 수준 분석 : 초등학교 '비와 비율' 단원을 중심으로. 수학교육학연구 15(3), 251-272.

Kim, S.H. & Pang, J.S. (2005). An analysis of cognitive demands of tasks in elementary mathematical instruction : Focusing on 'Ratio and Proportion'. *The journal of educational research in mathematics 15*(3), 251-272.

김원경 외 (2014a). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 비상교육.

Kim, W.K. et al. (2014a). *Mathematics II*. Seoul: Visang education.

김원경 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 비상교육.

Kim, W.K. et al. (2014b). *Mathematics II teacher's guide*. Seoul: Visang education.

김창동 외 (2014a). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 교학사.

Kim, C.D. et al. (2014a). *Mathematics II*. Seoul: Kyohaksa.

김창동 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 교학사.

Kim, C.D. et al. (2014b). *Mathematics II teacher's guide*. Seoul: Kyohaksa.

김효정 (2008). 엑셀을 이용한 합성함수와 역함수 개념 이해에 관한 사례연구 -APOS 이론을 중심으로-. 석사학위논문, 한국교원대학교.

Kim, H.J. (2008). *A case study on the understaning of the composition function and inverse function using Excel - A focus on APOS theory -*. Master's thesis, Korea National University of Education.

류희찬 외 (2014). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 천재교과서.

Lew H.-C. et al. (2014a). *Mathematics II*. Seoul: Cheonjae.

류희찬 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 천재교과서.

Lew H.-C.. et al. (2014b). *Mathematics II teacher's guide*. Seoul: Cheonjae.

문종은, 박미영, 주미경, 정수용 (2015). 중학교 1학년 수학교과서의 실세계 기반 과제 분석. 학교수학 17(3), 493-513.

Moon, J.-E., Park, M.-Y., Ju M.-K., & Jeong, S.(2015) Korean mathematics textbook analysis - Focusing on context of Youngbokhap and on ways of integration -. *School Mathematics 17*(3), 493-513.

박순철 (1996). 제6차 교육과정에 의한 역함수 지도의 문제점과 대안. 교육연구 18, 61-82.

Park, S.-C. (1996). Problems and alternatives in teaching inverse functions in the six curriculum. *Educational research 18*, 61-82.

박정선 (2005). 함수와 역함수 개념 이해의 수학교육적 고찰. 석사학위논문, 서울대학교 .

Park, J.-S. (2005). *Pedagogical examination of the understanding of the concepts of functions and inverse functions*. Master's Thesis, Seoul National University.

방정숙 (2007). 수학 과제 분석을 통한 예비 초등 교사의 전문성 신장. 수학교육 46(4), 465-482.

Pang, J. (2007). Professional development of prospective elementary school teachers by the analysis of mathematical tasks. *The Mathematical Education 46*(4), 465-482.

신옥숙 (2009). 고등학교 1학년에 대한 역함수 이해와 오류에 관한 실태조사. 석사학위논문, 한국교원대학교.

Shin, O.S. (2009). *A study on the current situations of first-year high school students' understanding and errors of inverse function*. Master's thesis, Korea National University of Education.

신항균 외 (2014a). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 지학사.

Shin H.G. et al. (2014a). *Mathematics II*. Seoul: Jihaksa.

신항균 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 지학사.

Shin H.G. et al. (2014b). *Mathematics II teacher's guide*. Seoul: Jihaksa.

심태연 (2002). 수학 10-나 함수 지도에서의 mathematica 활용 방안 연구. 석사학위논문, 연세대학교.

Sim, T.-Y. (2002). *The study of mathematica in teaching function in the textbook of "Mathematics 10-Na"*. Master's thesis, Yonsei University.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

Woo, J.H. (1998). *The educational base of school mathematics*. Seoul: SNU Publishing.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

Woo, J.H. (2000). *Mathematics instructional principles and methods*. Seoul: SNU Publishing.

우정호 외 (2014a). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 두산동아.

Woo, J.H. et al. (2014a). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Doosandonga.

우정호 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 두산동아.

Woo, J.H. et al. (2014b). *Mathematics Ⅱ teacher's guide*. Seoul: Doosandonga.

이강섭 외 (2014a). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 미래엔.

Lee, G.S. et al. (2014a). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Mirae-N.

이강섭 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 미래엔.

Lee, G.s. et al. (2014b). *Mathematics Ⅱ teacher's guide*. Seoul: Mirae-N.

이주연 (2000). 교과서에 대한 교사의 인식과 활용 실태 분석. 석사학위논문, 이화여자대학교.

Lee, J.Y. (2000). *An analysis of teacher's cognition on textbook and its practical use*. Master's thesis. Ewha Womans University.

이준열 외 (2014). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 천재교육.

Lee J.Y. et al. (2014a). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Cheonjae.

이준열 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 천재교육.

Lee J.Y.. et al. (2014b). *Mathematics Ⅱ teacher's guide*. Seoul: Cheonjae.

정상권 외 (2014). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 금성출판사.

Jeong, S.G. et al. (2014a). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Kumseong.

정상권 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 금성출판사.

Jeong, S.G.. et al. (2014b). *Mathematics Ⅱ teacher's guide*. Seoul: Kumseong.

조도연 외 (2014). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 천재교육.

Jo, D.Y. et al. (2014a). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Cheonjae.

조도연 외 (2014b). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 천재교육.

Jo, D.Y.. et al. (2014b). *Mathematics Ⅱ teacher's guide*. Seoul: Cheonjae.

진재관, 서지영, 김국현, 이난영 (2007). 교과용 도서 평가 연구(Ⅰ) - 질 관리 체제 구축을 중심으로 -. 한국교육과정평가원. 연구보고서 RRC 2007-5.

Chin, J.-G., Seo, J., Kim, K. H., & Lee, N. (2007). *The research on textbook evaluation(1) -Establishing a system for textbook quality management-*. Korea Institute of Curriculum and Evaluation. RRC 2007-5.

최규원 (2002). Computer Algebra System을 활용한 함수 단원 학습의 수학화 과정. 이화여자대학교 석사학위논문.

Choi, K.-W. (2002). *Students' mathematising in the learning function using a CAS*. Master's thesis, Ewha Womans University.

한국교육방송공사 (2016a). [2017수능개념] 정유빈의 쏙딱쏙딱 수학Ⅱ - 12강 역함수.

EBS(2016a). *[2017sununggaenyeom] Jeong Yubin's ssokddakssokddak mathematics Ⅱ - Ch. 12. Inverse function*.

한국교육방송공사 (2016b). [2017수능개념] 김창재의 지피지기 미적분Ⅱ - 06강 지수함수와 로그함수 ⑥.

EBS(2016b). *[2017sununggaenyeom] Kim Changjae's jipijigi calculus Ⅱ - Ch. 6. Exponential function and logarithmic function*.

허강, 곽상만, 이종국, 조성준 (2004). 한국교과서의 현상 분석 및 개선 방안 연구. 한국교과서연구재단. 연구보고서 '04-05.

Heo, K., Kwak, S.M., Lee, J.G. & Jo, S.J. (2004). *A study on the current status of the Korean textbooks and its improvement strategies*. Korea Textbook Research Foundation.' 04-05.

홍선미(2011). 고등학생의 역함수에 대한 이해도 분석. 영남대학교 석사학위논문.

Hong, S.-M. (2011). *An analysis of level of understanding of high school students on inverse function*. Master's thesis. Yeungnam University.

홍창준, 김구연 (2012). 중학교 함수 단원의 수학 과제 분석. 학교수학 14(2), 213-232.

Hong, C.-J. & Kim, G. (2012). Functions in the middle school mathematics : The cognitive demand of the mathematical tasks. *School Mathematics 14*(2), 213-232.

황선욱 외 (2014a). 미적분 2. 서울: ㈜ 좋은책신사고.

Hwang, S.W. et al. (2014a). *Calculus 2*. Seoul: Sinsago.

황선욱 외 (2014b). 수학 Ⅱ. 서울: ㈜ 좋은책신사고.

Hwang, S.W. et al. (2014b). *Mathematics Ⅱ*. Seoul: Sinsago.

황선욱 외 (2014c). 수학 Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜ 좋은책신사고.

Hwang, S.W. et al. (2014c). *Mathematics Ⅱ teacher's guide*. Seoul: Sinsago.

황혜정, 박현파 (2013). MiC 교과서의 수학적 과제의 인지적 요구 정도 분석 - 함수 내용을 중심으로-. 수학교육논문집 27(4), 449-472.

Hwang, H.J. & Park, H.P. (2013). Exploration on mathematical tasks on function context in MiC 3 level textbook. *Communications of mathematical education 27*(4), 449-472.

Boas, R. P. (1985). Inverse Functions. *The College Mathematics Journal 16*(1), 42-47.

Bayazit, I. & Gray, E. (2004). Understanding inverse functions : The relationship between teaching practice and student learning. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, 103-110.

Even, R. (1990). The two faces of the inverse function : Prospective teachers' use of "Undoing". *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, 37-44.

Even, R. (1992). The inverse function : Prospective teachers' use of "undoing". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 23*(4), 557-562.

Kimani, P. M. & Masingila, J. O. (2006). Calculus students' perceptions of the relationship among the concepts of function transformation, function composition and function inverse. *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, 68-70.

Lucas, C. A. (2005). *Composition of functions and inverse function of a function : Main ideas, as perceived by teachers and preservice teachers.* Doctoral dissertation, Simon Fraser University.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen. S. A. (2002). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education.* New York: Kluwer.

Snapper, E. (1990). Inverse functions and their derivatives. *The American Mathematical Monthly 97*(2), 144-147.

Van Dyke, F. (1996). The inverse of a function. *The Mathematics Teacher 89*(2), 121-126, 132-133.

Analysis of the Tasks to Find Intersection Points of a Function and Its Inverse Function

Nam Gu Heo
Daejeon Songchon Highschool
E-mail : mimirul@nate.com

The purpose of this study is to analyze tasks to find intersection points of a function and its inverse function. To do this, we produced a task and 64 people solved the task. As a result, most people had a cognitive conflict related to inverse function. Because of over-generalization, most people regarded intersection points of a function and $y=x$ as intersection points of a function and its inverse.

To find why they used the method to find intersection points, we investigated 10 mathematics textbooks. As a result, 23 tasks were related a linear function, quadratic function, or irrational function. 21 tasks were solved by using an equation $f(x)=x$. 3 textbooks presented that a set of intersection points of a function and its inverse was not equal to a set of intersection points of a function and $y=x$. And there was no textbook to present that a set of intersection points of a function and its inverse was equal to a set of intersection points of $y=(f\circ f)(x)$ and $y=x$.

* ZDM classification : U24
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : Inverse function, Intersection point, Task analysis