韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.3.251
2016. 5. 제 55권, 제 3호, 251-279.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2016, Vol. 55, No. 3, 251-279.

연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론의 차이가 문제 해결에 미치는 영향

김채연(한국교원대학교 대학원)
신재홍(한국교원대학교)†

Ⅰ. 서론

수학적 문제 해결은 오랜 역사를 갖고 있는 만큼 다양한 연구가 진행되어 온 연구영역이다(김진호, 김인경, 2011). Schroeder와 Lester(1989)는 수학적 문제 해결 지도를 문제 해결에 '대한' 지도, 문제 해결을 '위한' 지도, 문제 해결을 '통한' 지도라는 세 가지 유형으로 분류하였다. 첫 번째로 문제 해결에 '대한' 지도는 Polya의 연구에 따라 문제 해결을 네 단계(문제의 이해, 계획, 실행, 평가)로 구분하고 단계별로 문제 해결 전략(패턴 찾기, 그림그리기, 거꾸로 풀기 등)을 지도하는 교수 형태를 의미한다. 그러나 이러한 시도는 대체로 실패한 것이라 평가되었는데, 그 이유 중 하나는 이것이 이미 사용된 전략에 대한 사후설명일 뿐 사전에 전략의 발견에 대한 처방적인 역할이 불가능하다는 것에 있다(Schoenfeld, 1992). 두 번째로 문제 해결을 '위한' 지도는 중요한 수학적 아이디어를 가르친 후 이러한 지식을 문제 해결에 사용하고 더 나아가 다른 문제 상황으로 전이하는 것에 초점을 둔다. 이는 예제와 유제로 구성된 대부분의 교과서에서 많이 적용되어 왔다. 그러나 이러한 관점은 문제 해결을 계산 및 알고리즘을 배운 후에야 할 수 있는 응용의 영역으로 제한시킨다는 단점이 있다. 이 두 관점에 대한 보완책으로 2000년 대 이후 문제 해결을 '통한' 지도가 주목을 받고 있다. 이는 문제 해결 자체보다 수학적 이해에 초점을 맞추어 수학학습의 수단으로서 문제 해결 과정을 다루는 것이다. 이러한 관점은 학생들이 직접 실생활에서 문제를 정의하고 이것을 해결하는 과정에서 수학적 개념이나 원리를 학습하는 지도 유형을 지칭하며, 수학적 모델링 활동을 통한 수학학습을 강조하는 Lesh와 Zawojewski(2007)의 관점과 유사하다.

문제 해결을 지도하는 수학 교육자들의 공통된 목표 중 하나는 학생들이 문제를 잘 해결하도록 돕는 것일 것이다. 즉 학생들이 문제를 해결하며 겪는 현재의 어려움을 넘어설 수 있도록 돕고 문제를 해결하는 과정에서 수학적 사고 및 추론 능력을 신장할 수 있도록 지원하는 것이다. 이를 위해서는 무엇보다 문제 해결 행위의 주체인 '학생'에 대한 이해가 우선되어야 한다. 이는 매우 당연한 이야기지만, 현재 문제 해결에 관한 연구에서 가장 주목하지 않고 있는 측면이 바로 문제 해결자 내부의 사고 메커니즘이다. 문제 해결에 '대한' 지도, 즉 문제 해결의 단계 및 전략에 관한 연구들은 문제 해결 과정을 기술할 수 있는 편리한 언어를 제공한다는 차원에서 유용하지만 학생들이 왜 그러한 단계와 전략을 사용하는지에 대한 가설을 제공하지 못한다. Schoenfeld(1992)가 제시한 자원, 발견술, 신념, 메타인지 또한 문제 해결에 대한 성공 여부의 판단 도구로 유용하지만 성공 혹은 실패의 발생 원인에 대한 설명은 제공하지 못한다. 한편 문제 해결을 '위한' 지도 연구들은 주로 학생들이 하나의 문제 상황에서 학습한 것을 다른 문제 상황으로 전이할 수 있는 능력을 중요시하여 다룬다(Schroeder & Lester, 1989). 이와 관련하여 학생들이 근원 문제에서의 지식을 목표 문제에 어떻게 적용하는가, 혹은 어떻게 유사성이나 유추 전이를 구성하는가에 대한 연구들이 수행되었지만(예: 김지은, 신재홍, 2013; 박현정, 이종희, 2006; 박현정, 2007; 반은섭, 신재홍, 2012; 전영배, 노은환, 강정기,

* 접수일(2016년 7월 7일), 수정일(1차: 2016년 8월 3일, 2차: 2016년 8월 18일), 게재확정일(2016년 8월 21일)
* ZDM분류 : C30
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 문제해결, 공변추론, 양적추론, 변화에 대한 매끄러운 이미지
† 교신저자

2011) 학생들이 왜 그러한 유사성을 구성할 수밖에 없는지에 대한 설명은 여전히 부족하다. 다시 말해, 문제 해결에 '대한', 그리고 문제 해결을 '위한' 지도 연구들은 학생들의 문제 해결 현상을 관찰하여 설명하고 있으나 왜 그러한 현상이 일어나는지에 대한 가설을 제공하지 못하고 있다. 과학적인 설명은 현상을 생성할 수 있는 개념 체계, 즉 설명 가설을 내놓을 수 있어야 한다(Maturana & Varela, 1987). 즉 학생이 문제에서 다루는 특정 개념에 대해 왜 그렇게 사고할 수밖에 없는가에 대한 설명 가설을 내놓아야 한다. 이것이 바탕이 될 때 문제 해결 교육자는 비로소 문제 해결의 주체인 학생의 입장에서 그들이 왜 그러한 문제 해결 과정을 도출할 수밖에 없는지를 이해하고 실질적이고 처방적인 도움을 제공할 수 있을 것이다.

학생들의 사고방식의 이해를 목적으로 하는 연구들 중에는 양(quantity)과 양 사이의 관계에 대한 학생들의 수학적 추론에 초점을 맞춘 연구들이 늘고 있다. 특히 많은 연구자들이 양에 대한 추론이 대수적 추론의 근본적인 바탕을 이룬다고 주장하고 있다(Ellis, 2011; Smith & Thompson, 2008; Steffe & Izsak, 2002; Thompson, 1994; Thompson, 2011). Schroeder와 Lester(1989)은 문제 해결을 '통한' 지도를 택할 때, 학생이 실세계 상황에 대한 이해를 수학적인 표상으로 나타내고 이것으로 다시 상황을 추론하는 과정의 반복을 통해 문제를 해결하고 학습이 일어난다고 보았다. 이를 양적인 관점에서 바라보면 '실세계 상황을 수학적 표상으로 나타내는' 학생의 행동은 '실세계 상황에서 자신이 인식한 양과 양들의 관계를 수학적으로 조직하는' 행동이라 할 수 있다. 이때 '문제'는 양과 양들의 성질, 그것들의 관계에 대한 것이 되고, 문제를 해결한다는 것은 양들의 관계에 대해 추론하여 결국 그것을 산술 및 대수적 조작과 연결시키는 것이 된다(Smith & Thompson, 2008). 즉 문제를 해결하고 있는 학생은 우리가 관찰할 수 있는 행동의 기저에서 문제 상황의 양에 대한 추론을 하고 있고, 이것을 통해 문제를 이해하고 해결해 나가는 것이라 볼 수 있다. 학생들이 문제 상황의 양에 대해 정확한 심상을 구성하지 않으면 의미 있는 대수식 혹은 그림과 같은 표상을 만들어낼 것이라 기대할 수 없다(Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009).

따라서 양적 추론의 관점에서 바라봤을 때 학생들의 문제 해결 과정은 근본적으로 그들이 문제 상황에 포함된 양에 대해 추론하는 방식에 따라 좌우될 것이라 예상할 수 있다. 이때 '양'은 단순히 문제에서 주어지는 것이 아니라 학생 스스로 문제 상황에서 구성하여 산출해내는 개념이다. 학생들은 자신만의 경험을 바탕으로 문제 상황에 대한 양을 인식하고 그 관계를 조직한다. 따라서 학생들이 양에 대해 추론하는 방식에는 차이가 있을 수밖에 없고, 이것은 학생들의 풀이가 서로 다를 수밖에 없는 이유와 그들이 겪는 어려움에 대한 설명 가설을 제공할 수 있다. 그러나 개인이 문제를 해결하는 과정을 이러한 양적 추론의 관점에서 설명하고자 수행된 연구가 부족하다. 반대로 양적 추론에 관한 연구들은 주로 대수 및 함수 학습에 초점을 두었기 때문에 실제 문제 해결에서 양적 추론이 어떤 방식으로 영향을 미치는지에 대해서는 연구가 미비하다. 따라서 본 연구는 학생들이 문제 상황의 양에 대해 어떻게 추론하는가, 그들이 각자 조직한 양적 구조를 바탕으로 어떻게 문제를 해결해 나가는가를 학생들의 입장에서 분석함으로써 문제 해결 행동에 대한 하나의 설명적 가설을 제시하고자 한다. 학생들이 문제 상황에서 주목하는 양과 그 양에 대해 추론하는 방식을 이해하면 그들의 문제 해결 방식의 필연성을 이해하고 문제 해결 학습에 더욱 실질적인 도움을 줄 수 있을 것이다.

우리가 경험하는 변화는 대부분 암묵적으로 흐르는 시간에 따라 연속적으로 일어나고 있기 때문에(Castillo-Garsow, 2012) 문제 해결을 '통한' 지도에서 제시하는 실세계 문맥의 역동적인 상황들은 모두 연속성을 내포하고 있다. 또한 변화하는 양은 늘 시간의 변화를 내포하기 때문에 변화의 상황에는 적어도 두 양 이상이 맞물려있을 수밖에 없다. 따라서 문제 해결을 '통한' 지도를 위해서는 학생들이 연속적으로 변화하는 두 양에 대해 어떤 방식으로 추론하는지에 대한 이해가 필수적이다. 본 연구에서는 두 중학생을 대상으로 이들이 문제 상황의 연속적으로 공변하는 두 양에 대해 추론하는 방식과 양적 구조를 분석하고, 이것이 그들의 문제 해결 과정에 어떠한 영향을 미치는가를 알아보고자 두 가지 연구문제를 설정하였다.

(1) 변화하는 두 양 사이의 관계를 고려해야하는 문제 상황에서 두 중학생의 공변 추론의 특징은 어떻게 드러나는가?
(2) 연구문제 (1)에서 드러난 두 중학생의 공변 추론의 차이는 그들의 문제 해결 과정에 어떠한 영향을 미치는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 양적 추론과 문제 해결

양은 실제로 존재하는 어떤 것이 아니라 상황을 인식하는 인간이 스스로 구성하는 인지적인 개념의 일종이다. 인간은 상황에서 자신이 인식한 대상의 질(quality)이 측정가능성을 수반할 때 양에 대해 생각하게 된다(Thompson, 1994). 예를 들어 롤러코스터를 탔을 때 롤러코스터는 대상, 이것이 낙하할 때 느끼는 움직임은 대상의 질이 될 수 있다. 여기서 속도가 점점 빨라지거나 느려짐에 주목한다면 속도는 측정가능성을 수반한 양으로 인식된다. 양에 대한 인식은 대상과 질, 측정가능성 등에 대한 개인의 발달 수준에 따라 차이가 발생하므로(Thompson, 1994) 같은 상황에서 모든 학생들이 쉽게 양을 인식할 수 있는 것은 아니며 모두가 똑같은 방식으로 양을 인식할 수도 없다. 양에 대한 이러한 개념은 개인의 경험이 완전히 자신 고유의 것이라는 구성주의적 입장에서 기인한다(Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009).

측정가능성이란 대상의 속성에 대해 적절한 단위의 수치를 부여할 수 있는 가능성으로 그 측정과정이 분명히 드러날 수도, 그렇지 않을 수도 있다. 우리가 일상생활이나 상상 속에서 경험하는 다양한 대상의 질을 수학적으로 조직하고 다루기 위해서는 측정이 반드시 수반되어야 한다. 양에 대한 측정의 결과로 주체가 대상의 속성에 수치를 부여하는 과정을 수량화라고 한다(Thompson, 1990; 2011). 측정의 결과는 수치(예: 9.8)로 나타날 수도 있지만 구체적인 수치 없이 상상된 크기로 나타날 수도 있다. 이러한 의미에서 Smith와 Thompson(2008)은 양과 수(number)를 동의어로 사용하지 않았는데, 이는 상황에 대한 양을 인지하고 추론하는 것이 구체적인 수치를 필요로 하지 않기 때문이다. 어찌됐든 이러한 측정의 결과를 대상 속성의 특징으로 사상하는 과정을 수량화라고 하며 측정으로 식별한 결과는 숫자가 아닌 ‘값’이라 불린다(Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009). 값을 나타내는 숫자는 추상적인 기호가 아니라 양을 표현하는 의미 있는 형식이 된다.

양적 추론은 인간이 인식한 상황에 대해 양을 구성하고 구성된 양 사이의 관계를 추론하여 제 3의 양을 생성하고 관련짓는 정신적 행동을 의미한다(Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009). Thompson(1990)은 양적 추론에 대해 인간이 인식한 상황을 자신의 양적 구조, 즉 양적 관계들의 네트워크로 분석하는 것이라 정의하였다. 양적 추론은 양들의 관계에 초점을 맞춤으로써 이것을 표현하는 형식인 숫자와 기호에 생명을 불어넣어 준다. 이는 산술과 대수를 의미 있게 학습할 수 있는 시작점이 되므로 양적 추론은 대수적 추론의 근본 바탕이 된다(Thompson, 1994; Chazan, 2000; Steffe & Izsak, 2002; Smith & Thompson, 2008; Ellis, 2011).

또한 양적 추론은 문제를 의미 있게 해결할 수 있는 초석이 된다. 양에 초점을 둔 관점에서 ‘문제’는 양과 양들의 성질, 그것들의 관계에 대한 것이고, 문제를 해결한다는 것은 양들의 관계에 대해 추론하여 결국 그것을 산술 및 대수적 조작과 연결시키는 것이라 할 수 있다(Smith & Thompson, 2008). 복잡한 문제 해결에서 양적 추론은 대수적 형식에 내용을 제공하여 그 표현이 최대한 잘 활용될 수 있는 힘을 제공하는 역할을 할 뿐 아니라 기호적 표현에 기댈 필요 없이 유연하고 일반적인 추론을 가능하게 한다(Smith & Thompson, 2008). 문제의 상황을 마주했을 때 학생들은 수량화될 수 있는 상황의 속성을 포함하여 상황에 대한 이미지를 구성해야 한다. 즉 문제 상황과 관련한 장면을 상상하여 문제 해결을 위해 다룰 양을 인식하고, 양과 양들 사이의 관계를 추론하고, 양들에 대해 자신만의 구조를 만들어내야 한다. 이러한 정신적 구조는 수학적인 이해와 추론을 발달시키고 반성할 수 있는 토대가 되기 때문에(Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009) 문제 해결이라는 결승지점을 향해 마치 위에서 길을 내려다보고 있는 것처럼 손쉽게 나아갈 수 있는 바탕이 된다. 문제 해결자가 자신의 양적 구조에 기반해 대수식과 수학적 표상들을 조작하고 해법을 도출하는 것은 문제 해결을 가치 있는 활동이 되게 한다. 이것은 단순히 문제에서 미지수를 설정하고 공

식을 사용해 풀이하는 것과 달리 양들의 관계를 직접 다룸으로써 문제 상황에 대한 깊은 이해와 일반적인 추론을 수반한다. 이때 학생들이 상황의 양을 인식하는 방식은 매우 다양하기 때문에 양적 추론에 기반한 해법은 전형적인 해법을 기대할 수 없을 만큼 다양한 방식으로 표현될 수 있다(Smith & Thompson, 2008). 따라서 양적 추론은 학생들의 문제 해결 절차가 서로 다를 수밖에 없는 이유에 대해 근본적인 통찰을 제공한다.

2. 연속 공변(continuous covariation)

1) 공변 추론

두 양이 서로 관계를 맺으며 '변화'하는 방식에 주목하여 그들 사이의 관계를 조정하는 정신적 활동을 공변 추론이라 한다(Carlson et al., 2002; Confrey & Smith, 1995; Thompson & Carlson, 2016). 양에 기반한 공변 추론이 이루어지기 위해서는 먼저 양과 그들 값의 변화에 대한 이미지를 구성한 다음, 머릿속에서 두 양의 결합으로 생성되는 곱셈적 대상을 개념화하고 그 결합을 지속하면서 상황에 대한 변화의 이미지 또한 지속적으로 유지해야 한다(Thompson, 2011). 이것은 단순히 두 양이 함께 변화하는 장면을 상상하는 것보다 훨씬 고등 사고를 요하므로 많은 학생들이 공변 추론에 어려움을 겪는다(Carlson, 1998; Thompson, 1994; Weber & Thompson, 2014). 공변적 접근은 수학을 양들 사이의 종속, 인과, 상호작용, 상관의 관계에 대한 현상을 이해하는 방식으로 바라보도록 하기 때문에 수학 학습에 있어 매우 중요하다(Chazan, 2000). 또한 공변적 접근은 전통적인 대응적 접근보다 미적분학의 핵심 개념인 함수에 대한 이해에 있어 대단히 중요하다는 것이 밝혀져 왔다(Carlson, 1998; Carlson et al, 2002; Thompson, 1994).

공변 추론에 수반되는 변화의 인식 방식에 대해 Confrey와 Smith(1995), 그리고 Saldanha와 Thompson(1998)은 서로 다른 관점을 제시하였다. Confrey와 Smith는 함수가 두 수열의 병치로 이해된다는 관점에서 공변적 관점을 기술하였다. 즉 대응표에서 한 칸씩 함께 올라가거나 내려가는 조정을 통해 공변 추론을 설명한 것이다. 이에 대하여 Saldanha와 Thompson은 그러한 방식이 두 변수가 연속적으로 변화한다는 것을 상상하는 것에 도움이 되지 않는다고 주장하였다. Confrey와 Smith의 방식은 이산적인 값들의 변화만 다룸으로써 그 사이의 값들에는 주의를 기울이지 않게 되는데, 이러한 이미지는 함수를 연속적으로 변화하는 현상에 대한 모델로써 인식하기에 불충분하기 때문이다(Thompson & Carlson, 2016). 우리는 아주 어릴 적부터 걷고, 움직이고, 살아가는 경험 속에서 변화라는 것이 언제나 연속적인 세계에서 일어난다는 것을 인지하며 살아간다(Castillo-Garsow, 2012). 따라서 공변을 다룸에 있어 먼저 학생들이 연속적으로 변화하는 양을 어떻게 인식하는가에 대한 연구의 고찰이 필요하다.

2) 연속 변동(continuous variation)과 연속 공변(continuous covariation)

만약 학생들이 두 양이 연속적으로 공변하는 것을 상상하려고 한다면 그들은 먼저 각각의 양이 연속적으로 변하는 것을 상상해야만 한다(Thompson & Carlson, 2016). 변수 값들이 연속적으로 변화한다는 아이디어는 실수 상의 함수, 그래프, 관계를 이해하는데 중요한 요소이며 공변적 사고의 기초가 되므로 학생들에게 매우 유용하다(Carlson et al., 2002; Castillo-Garsow, 2010; Thompson, 1994). 그러나 변동에 대한 수학은 상황 안에서 연속적으로 변화하는 양의 상상과 그 측정에 관련된 개념적 조작을 발달시켜야 하므로 학생들에게 쉽지 않다(Thompson, 2011).

Castillo-Garsow, Johnson, & Moore(2013)은 연속적인 변화에 대한 이미지를 두 가지로 구분하여 학생들의 연속 변동에 대한 사고를 이해하는데 매우 유용한 통찰을 제공하였다. 먼저 변화에 대한 덩어리의 이미지(chunky image of change)는 변화를 일정한 단위를 가진 일련의 덩어리로 잘라서 상상하는 것을 뜻한다. 예를 들어 연속적인 시간의 변화를 1초, 2초, 3초, … 로 잘라서 다루는 것이다. 이렇게 변화를 덩어리 지어 사고하는 학생들은 1초, 2초라는 덩어리의 가장자리 값에 주목하지만 덩어리 내에서 일어나는 변동은 거의 주목하지 않는다. 중요한 것은 이러한 사고를 하는 학생들은 연속 상황에 대해 자동적으로 덩어리의 가장자리 값을 기준으로 하여 이산적으로 수량화 하게 된다는 점이다.

이에 반해 변화에 대한 매끄러운 이미지(smooth

image of change)는 변화를 계속 진행중인 것으로 상상하는 것을 뜻한다(Castillo-Garsow, 2010; 2012). 이것은 변수를 우리의 경험 안에서 흐르는 시간에 따라 언제나 연속적인 값을 지니는 것으로 개념화할 때 생성된다. 변화에 대한 매끄러운 이미지는 덩어리의 크기를 매우 잘게 나누어 상상하는 것과 다르다. 덩어리 짓는 사고를 이용하는 학생들은 아무리 덩어리의 크기, 또는 간격을 줄여도 여전히 덩어리 단위로 변화를 상상하기 때문이다. 변화에 대한 매끄러운 이미지와 덩어리 짓는 이미지는 완전히 서로 다른 방식의 개념화이며 서로 다른 수학을 산출해낸다. 그러나 매끄러운 연속 추론과 그 양들의 측정이 동시에 존재하는 것은 다소 불가능해 보인다. 변화하고 있는 양을 측정하고 계산하기 위해서는 반드시 진행중인 변화를 잠시 멈추어야 하고 멈춘 순간 덩어리가 생성되기 때문이다(Castillo-Garsow, 2012). 이에 대해 Thompson(2011)은 인간이 변동을 측정하기 위해서는 언제나 구간이라는 척도를 통해 인식할 수밖에 없다는 것을 인정하고 그럼에도 변동을 연속적으로 인식할 수 있는 방식에 대해 제안하였다. 이는 측정의 정확성을 위해 작고 작은 덩어리로 나누면서 덩어리와 매끄러운 사고를 번갈아 재귀적으로 수행하는 것이다. 다시 말해 조각들로 변동이 일어난다고 생각할 때도 그 조각 내에서도 변화가 일어난다고 끊임없이 상상하는 것이다(Thompson, 2011).

후에 Thompson & Carlson(2016)은 변화에 대한 매끄러운 심상과 덩어리 짓는 심상을 구분한 Castillo-Garsow(2010, 2012)의 연구와 연속 변화에 대해 재귀적인 이미지를 구성한 Thompson(2008, 2011)의 연구를 종합하여 변수 값이 변하는 것에 대한 사고를 [표 1]과 같이 여섯 수준으로 기술하였다. 가장 높은 두 수준은 연속적인 변동에 관련된 것으로, 매끄러운 연속 변동 수준의 학생은 어떤 변동도 재귀적인 작은 변화로 정제하며 예상해나갈 수 있다. 덩어리 연속 변동 수준의 학생은 고정된 덩어리로 변화를 상상하는데, 자들의 끝을 붙여 늘어놓은 것처럼 각 덩어리 안에서 일어나는 변동의 이미지는 수반하지 않는다.

연속적으로 변동하는 두 양의 결합을 통해 곱셈적인 대상이 형성될 때 인간은 연속적인 공변을 사고할 수 있다. 만약 매끄러운 연속 공변을 추론할 수 있다면, 사람은 매 순간 한 양이 값을 가질 때 다른 양의 값을 즉각

[표 1] 변동 추론에 대한 주요 수준(Thompson & Carlson, 2016)
[Table 1] Major levels of variational reasoning(Thompson & Carlson, 2016)

수준	기술
매끄러운 연속 변동	변수 값의 변동에 대해 무한소 크기의 조각으로 낱낱이 증가하면서 각 조각마다 변수 값이 매끄럽게 변하는 것을 동시에 예상하여 생각한다. 이때 대체로 동일한 크기의 구간의 변동을 생각하지만 반드시 동일할 필요는 없다.
덩어리 연속 변동	변수 값의 변동을 고정된 크기의 구간들의 증가로 생각한다. 이 구간들은 대체로 동일한 크기를 가지나 반드시 동일할 필요는 없다. 예를 들어, 변수의 값이 0에서 0.5, 0.5에서 1, 1에서 1.5, ... 이런 식으로 변화한다고 상상한다. 각 덩어리 사이의 값들은 “따라오는” 것이지만, 0, 0.5, 1 일 때의 값과는 다른 방식으로 값을 가진다.
전반적인 변동	변수 값이 증가하거나 감소하는 것을 상상하지만 변화하는 동안의 값들에 대해 거의 생각하지 않는다.
이산 변동	변수를 구체적인 값을 갖는 것으로 생각한다. a에서 b까지 변화할 때 변수 값을 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 을 취하는 것으로 본다. 하지만 변수에 대해 a_i와 a_{i+1}사이의 어떠한 값들도 상상하지 않는다.
변화 없음	변수를 고정된 값으로 상상한다. 또 다른 고정된 값을 가질 수는 있으나 이것은 다른 시나리오를 상상할 때만 가능하다.
문자로써의 변수	변수는 문자이다. 이는 변화와 관계없다.

적으로, 분명하게, 끊임없이 자각하면서 양의 값을 추적할 수 있다(Saldanha & Thompson, 1998). Thompson & Carlson(2016)은 양적 추론과 곱셈적인 대상의 형성을 강조하고(Thompson), 양들의 값의 변화를 조정하고(Carlson, Confrey), 개인이 양의 변화를 인식하는 방식(Castillo-Garsow)를 추가하여 공변 추론에 대한 여섯 가지 수준의 틀을 [표 2]와 같이 제시하였다.

[표 2]에 제시된 틀은 공변 추론에 대한 기존 연구들을 모두 통합한 핵심적인 틀로써 학생들의 추론 방식을 분석하기에 적합하다고 판단되었다. 따라서 이 틀을 바탕으로 본 연구에 참여한 학생들의 공변 추론 방식을 분석하였다.

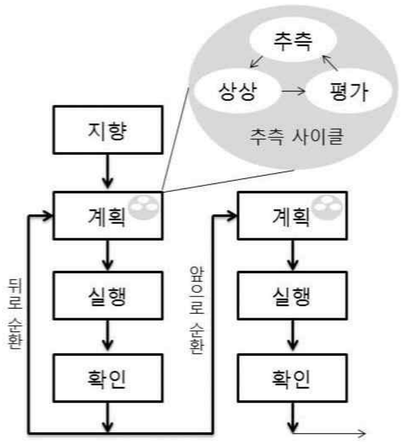
3. 다차원 문제 해결 틀

Carlson과 Bloom(2005)은 문제 해결에 관한 방대한 문헌 연구 및 수학자 12명의 문제 해결 행동 분석을 통해 문제 해결의 단계와 문제 해결의 속성에 대한 연구를 통합할 수 있는 다차원 문제 해결 틀을 제안하였다. 이 틀은 문제 해결의 네 단계(지향, 계획, 실행, 확인)를 세로 행으로 갖고 문제 해결의 네 속성(자원, 발견술, 정서, 감시)을 가로 행으로 갖는 4×4 형태의 표로 제시되었다. 이때 각 행과 열의 교차점에는 해당 단계의 일반적인 행동에 대한 해당 속성의 상호작용이 구체적으로 기술되어 있다. 예를 들어 지향 단계와 자원 속성의 교차점에는 다음과 같이 기술되어 있다. “문제 이해를 시도할 때 수학적 개념, 사실들, 알고리즘 등에 접근한다. 또한 문제를 분류하기 위해 자신의 바탕 지식을 스캔한다.”(Carlson & Bloom, 2005, p.67).

지향 단계는 문제에 대한 의미를 만들고 문제 상황에 대한 표상을 조직하고 구성하는 단계이다. 이때 미지수 정의, 그래프 그리기, 표 구성하기 등의 행동이 주로 나타나는데 이는 주체가 문제 상황에 대한 개인적인 표상을 구성하기 위해 행하는 것이다. 계획 단계는 개념적 지식과 발견술을 통해 “X를 시도하면 어떻게 될까?”와 같은 추측을 한 후 이에 대해 상상하고 평가하고 다시 추측하는 순환적인 구조를 갖는다. 여기서 채택된 계획은 실행 단계에서 수식을 쓰고 계산하는 행동으로 이어지는데 이때 폭넓은 발견술, 알고리즘, 계산법 등에 접근하게 되며 과정이 전개됨에 따라 좌절, 기쁨과 같은 강한 감정 반응을 보이게 된다. 마지막 확인 단계에서는 정답의 효과성, 정확성 등에 대한 감시가 이루어지고 여러 자원을 이용해 검산하고 정당화하는 행동을 나타낸다. 여기서 해에 대한 결정에 따라 답을 도출하거나 다시 계획 단계로 돌아가 이 과정을 반복하게 된다. 이러한 순환적인 과정을 도식화하면 [그림 1]과 같다.

[표 2] 공변 추론에 대한 주요 수준(Thompson & Carlson, 2016)
[Table 2] Major levels of covariational reasoning(Thompson & Carlson, 2016)

수준	기술
매끄러운 연속 공변	한 변수 값의 변화와 다른 변수 값의 변화가 동시에 일어난다고 상상하면서 두 변수 값의 변동을 매끄럽고 연속적으로 상상한다.
덩어리 연속 공변	한 변수 값의 변화와 다른 변수 값의 변화가 동시에 일어난다고 상상하면서 두 변수 값의 변동을 덩어리 연속 변동으로 상상한다.
값들의 조정	한 변수 값(x)에 대한 다른 변수 값(y)을 이산적인 순서쌍 $(x,\ f(x))$들의 집합을 생성하는 것의 예상으로 조정한다.
값들의 전반적인 조정	“이 양이 감소함에 따라 저 양은 감소한다.”와 같이 양의 값들이 함께 변동한다는 전체적인 심상을 형성한다. 이때 양들 각각의 값이 함께 간다고 상상하지 않는다. 대신 두 양의 값들의 전반적인 변화 사이의 느슨한, 비곱셈적인 연결을 상상한다.
값들의 전-조정	두 변수 값이 함께 변하지만 동시에 변한다기 보다 교대로 하나씩 변화한다고 상상한다. 값들의 순서쌍 생성을 예상하지 않는다.
조정이 없는 변동	변수들이 함께 변화한다는 것에 대한 이미지가 없다. 값들에 대한 조정 없이 한 변수 또는 다른 변수의 변동에 초점을 둔다.



[그림 1] 문제 해결 사이클(Carlson & Bloom, 2005)
[Fig. 1] The problem solving cycle(Carlson & Bloom, 2005)

다차원 문제 해결 틀은 문제 해결의 단계 뿐 아니라 속성까지 포함하고 있어 학생들의 문제 해결 과정을 세부적으로 기술하기에 매우 적합하다고 여겨졌다. 또한 이 틀은 문제 해결의 순환적 본질을 잘 반영하고, 특히 계획 단계에서 추측을 실행하기 전에 상상하여 평가하는 작은 사이클을 제시하여 실제 문제 해결 과정을 잘 반영한다고 판단되었다. 따라서 본 연구에서는 학생들의 문제 해결 행동을 세분화하고 그 차이를 구체적으로 분석하기 위하여 이 틀을 사용하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 6달 간 진행한 총 16차시의 수업 중 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론이 문제 해결에 미치는 영향을 알아보기 위해 일부 사례를 분석한 것이다. 전체 수업은 중학교 3학년 학생들의 공변 추론 방식을 이해하고 이를 신장시키는 것을 목적으로 이루어졌다. 학생 개개인의 사고를 심도 있게 연구하기 위해 연구 대상의 수를 최소화하되 학생 간의 상호작용을 고려하여 연구 대상의 수를 2명으로 설정하였다.

수업에 참여한 학생은 S시 위탁 영재교육원 사사교육에 참여한 중학교 3학년 남학생 '학생 C'와 '학생 W'이다. 두 학생은 수학 성적이 상위권에 해당하는 학생들로 표면적으로는 문제 해결 실력이 비등하였다. 즉 두 학생이 보이는 행동의 차이는 이전 학습의 심각한 결손이나 소위 말하는 수학 실력의 차이에 의한 것이라기보다 각자에게 익숙한 양적 추론 방식의 차이에 의한 것이라 볼 수 있었다. 따라서 두 학생의 대조를 통해 각자의 사고 방식에 관한 모델을 구성하는 것이 용이했기 때문에 대상 선정이 연구 목적에 적합했다고 볼 수 있다.

두 학생 모두 한 문제에 대해 장시간 깊이 탐구할 수 있는 집중력과 과제 집착력을 보였고 자신의 생각을 조리 있게 표현할 수 있었다. 학생 C는 문제에 신속하게 접근하고 자신의 사고 흐름을 여과 없이 곧장 말이나 기록으로 나타내는데 익숙하였다. 반면 학생 W는 겉으로 자신의 생각을 드러내기보다는 머릿속으로 사고하는 것에 익숙했고 필요시에 최소한의 표상만을 기록으로 나타내었다. 하지만 연구자의 발문에 대해 자신의 생각을 말로 잘 표현하였기 때문에 추론 방식에 대한 모델을 구성하는 것에 큰 어려움은 없었다.

2. 사례 연구

정성적 연구방법 중 사례연구의 목적은 하나의 현상 또는 요소(사례)에 집중함으로써 현상에 대한 특징을 이루는 중요한 요소들 사이의 상호작용을 밝혀내는 것이다(Merriam, 2007). 따라서 본 연구에서는 문제를 해결하는 상황에서 학생들이 공변하는 두 양에 대해 추론하는 방식과 문제 해결 행동과의 관계를 밝히기 위해 사례연구 방법을 택하였다.

연구에 앞서 본 연구자들은 학생들의 수학적 실재가 연구자들의 수학적 실재와 서로 독립적이라는 관점을 취하였다(Steffe & Thompson, 2000). 연구자가 자신이 조작 가능한 수학적 방식으로 학생들의 수학적 방식에 접근하는 것은 불가능하다(Steffe & Thompson, 2000). 대신 연구자가 할 수 있는 일은 학생들과의 학생들의 입장에서 그들의 사고방식에 대한 최선의 모델을 구성하고, 학생들과의 상호작용을 통해 모델을 끊임없이 개선해 나가는 것이다. 이러한 관점에서 본 연구에서 행한 수업은 학생들의 현 상태에 대한 모델을 구성하고 이를 바탕으로 그들의 도식과 조작을 확장할 수 있는 방식으로 설계되었기 때문에(Steffe & Thompson, 2000) 전통적인 의

미에서 학생들에게 지식을 전달하는 수업이 아니라 일종의 실험 수업이라 할 수 있다.

3. 연구 절차

전체 수업은 2015년 5월에서 10월 사이에 실시되었다. 학생들은 한 차시에 한 문제를 심도 있게 다루었고 한 차시는 1시간 내외로 유동성 있게 운영되었다.

수업에는 학생 C와 학생 W, 그리고 교사와 관찰자가 참여하였다. 교사와 관찰자의 역할은 제 1저자와 현직 교사인 대학원생이 차시마다 번갈아가며 수행하였다. 교사는 학생들과 가까이에서 실시간으로 상호작용하며 그들에 대한 모델을 구성하고 사고를 촉진시키는 역할을 하며, 관찰자는 수업이 진행되는 동안 대안적 관점을 제공하고 교사가 즉각 보지 못한 가설을 테스트하기 위한 발문을 하는 역할을 한다(Hackenberg, 2010). 학생들의 사고에 대한 모델을 구성하기 위해 교사와 관찰자 모두 문제 해결에 필요한 지식을 직접 전달하지 않고 발문을 통해 학생들의 설명 및 추론을 이끌어내었다.

수업이 이루어진 교실에서 두 학생은 긴 탁자에 나란히 앉았고 교사는 두 학생 사이에 위치하였다. 학생들과 교사의 정면에 캠코더를 설치하여 전체 수업 장면을 촬영하였고 탁자 위에 2대의 실물 화상캠과 녹음기를 설치하여 학생들이 문제를 해결하는 전 과정을 녹음 및 촬영하였다. 관찰자는 캠코더 옆에서 학생들과 마주보고 앉아 수업 상황을 객관적으로 지켜보고 노트북을 통해 실물 화상캠에 기록되는 두 학생의 풀이를 관찰하였다. 한 수업이 끝나면 캠코더 및 녹음기에 기록된 것을 한 화면으로 볼 수 있도록 비디오 파일을 편집, 제작하였다.

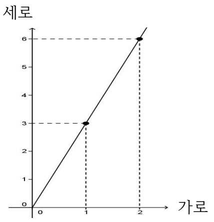
한 수업이 끝날 때 마다 연구자들은 기록된 자료를 바탕으로 학생들의 공변 추론 방식과 반복적으로 나타나는 수학적 행동에 대해 분석하였다. 그 후 회의를 통해 학생들의 공변 추론 방식에 대한 가설을 생성하고 다음 수업에서 가설을 확인하거나 학생들의 사고를 향상시킬 수 있을 것이라 예상되는 과제를 선정하였다. 그러나 실제 수업이 이루어지는 중에는 최대한 가설을 잊고 학생들과 이루어지는 상호작용에 집중하여 그들의 사고를 촉진시키는 것에 최선을 다하였다(Steffe & Thompson, 2000). 수업이 끝나면 연구자들은 다시 회고적으로 돌아와 새로운 가설을 생성하거나 검증하는 것에 집중하였다.

본 연구에서는 학생들의 함수 학습을 위한 공변 추론 능력 신장을 위해 학생들이 두 양이 함께 변화하는 상황에 대해 충분히 추론할 수 있는 과제를 제시하고자 하였다. 너무 쉬운 문제의 경우 이미 숙달된 전략을 적용할 수도 있으므로 학생들의 양적 추론을 촉진시키기 위해서는 그들의 사고 모델에 비추어 다소 복잡한 문제를 제시해야 한다(Smith & Thompson, 2008). 또한 학생들에게 변동적인 추론을 요하는 문맥은 그저 움직이고 있는 대상에 대한 것이 아니라 반드시 양의 측정을 수반하는 변동을 다루어야 하므로(Thompson & Carlson, 2016) 과제 문맥의 설계 시 반드시 양적인 면을 고려해야 한다. 연구자들은 이러한 권고에 따라 과제를 개발하였고 수업이 진행되는 동안 매 차시마다 학생들의 사고 모델에 적합하다고 판단되는 과제를 선정 및 수정하여 사용하였다. 학생들은 대체로 두 양이 함께 변화하는 상황[1]을 다루는 문제, 또는 공변적 상황에 대한 그래프를 구성하거나 해석하는 문제를 풀었다. 이중 본 연구의 분석 대상이 된 과제는 [표 3]에 제시된 4 개의 과제이다.

페인트 문제, 행성 문제, 직사각형 문제, 양초 문제 모두 시간에 따른 연속적인 변화를 내포하는 상황의 과제이다. 페인트 문제와 행성 문제의 경우 연속적으로 변화하는 시간에 따라 연속적으로 변화하는 속도를 수량화해야 하고, 양초 문제의 경우 연속적으로 변화하는 시간에 따라 연속적으로 변화하는 양초의 길이를 수량화해야 한다. 직사각형 문제의 경우, 학생들이 미분 개념을 학습하지 않았기 때문에 정확한 답을 요구하기보다 가로의 길이가 연속적으로 증가할 때 그에 따라 연속적으로 증가하는 넓이의 변화를 수량화하는 방식을 알아보고자 하였다.

1) 이때 문제 상황이란 문제 해결에 참여하는 학생들의 행동을 통해 이들이 인식했다고 판단되는 상황을 의미한다. 양초가 일정한 속도로 녹는 상황을 손가락을 위에서 아래로 연속적으로 긋는 제스처로 표현하는 것 등이 그 예이다.

[표 3] 본 연구에 사용된 과제
[Table 3] Tasks used for this study

페인트 문제	직사각형 문제
진희가 $100m^2$ 넓이의 방을 페인트로 칠하려고 한다. 진희는 의욕 있게 시간당 $60m^2$ 칠하는 속도로 방을 칠하기 시작하였으나 점점 기운이 빠져 결국 한 시간 뒤에는 시간당 $50m^2$의 속도로 칠하고 있다는 것을 알았다. 진희가 한 시간 동안 칠한 방의 넓이는 얼마일까? (단, 진희의 칠하는 속도는 일정하게 줄어든다고 가정한다.)	가로, 세로 길이의 관계가 아래의 그래프를 따르는 직사각형이 있다. 가로의 길이에 따른 직사각형의 넓이에 관한 그래프를 그리시오. 또, 가로의 길이에 따른 직사각형의 넓이의 변화를 나타내는 그래프를 그리시오. 
행성 문제	양초 문제
엑소 행성의 빌딩 옥상에서 돌을 떨어뜨리면 매초당 $6m/s$ 만큼의 속도가 일정하게 증가한다고 한다. $100m$ 높이의 빌딩 옥상에서 돌을 떨어뜨렸을 때 3초에서 3.5초 사이의 0.5초 동안 돌은 몇 m 떨어졌을까?	길이가 다른 A, B 2개의 양초에 불을 붙였더니 2시간 후에 남아 있는 양초의 길이가 같아졌다. 예상되는 양초의 모양을 그리고 그 이유를 설명하시오. (단, A 양초는 10시간 지속되고, B 양초는 7시간 지속된다.)

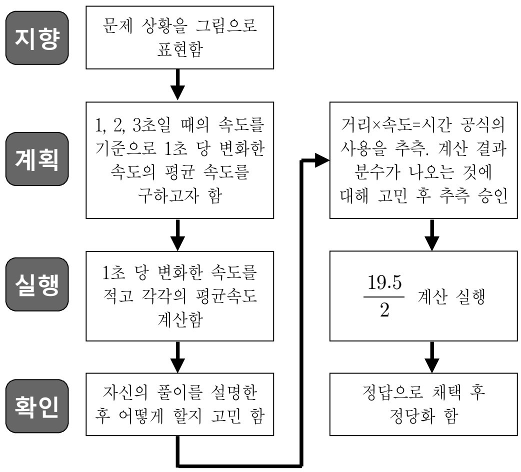
4. 자료수집 및 분석

정성연구에서의 자료수집과 분석은 동시에 행해진다. 자료수집 후 실시한 자료의 분석이 계속되는 자료 수집에 영향을 미치는 일련의 상호과정을 통해 연구자는 타당하고 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있다(Merriam, 2007). 본 연구에서는 수업 촬영 비디오 파일과 학생들의 학습지를 통해 문제를 해결하는 전 과정에서의 학생들의 발언 및 대화, 제스처, 풀이 과정에 대한 자료를 수집하였다. 1차 분석은 자료를 수집하는 동안 수업과 수업 사이에 이루어졌다. 한 수업이 끝난 후 연구자들은 수업 흐름에 대한 레슨 그래프를 제작하거나 필요한 부분을 전사하였다. 이를 바탕으로 학생들의 말과 행동 뒤에 놓인 가능성 있는 의미들을 계속해서 가정해 나가며 학생 사고 모델 구성을 위한 특징적 요소들을 파악하고자 하였다(Steffe & Thompson, 2000). 학생들의 공변 추론 방식 및 반복적으로 나타나는 수학적 행동에 대한 가설을 생성한 후 다음 차시 수업에서 가설을 확인하거나 학생들의 사고를 향상시킬 수 있을 것이라 생각되는 과제를 선정하였다. 매 수업마다 이러한 과정을 반복하며 학생들의 사고방식에 대한 가설을 수정하고 정제해나갔다.

2차 분석은 모든 수업이 끝난 후 이루어졌다. 회고 분석에서는 필연적으로 학생들과 상호작용에서 인식하지 못했던 부분을 발견하게 되는데 이때 학생의 수학에 대한 진일보한 해석을 생성하는 기회를 갖게 된다(Steffe & Thompson, 2000). 2차 분석은 본 연구의 연구문제에 관련한 가설을 생성한 후 학생들의 공변 추론 방식 및 그와 관련된 양적 구조를 알아보는 것에 초점을 두고 수행되었다. 두 학생의 공변 추론 방식의 차이를 잘 드러낼 수 있는 사례로 페인트 문제, 행성 문제, 직사각형 문제, 양초 문제에 대한 에피소드를 선정하였다. 각각의 에피소드에 대한 사례 내 분석과 사례 간 분석을 통해 두 학생의 공변 추론 방식에 있어 각자 공통적으로 드러나는 요소를 추출하였다. 특히 문제 상황의 두 양을 조직하는 과정에서 두 학생이 보이는 중요한 오류(essential mistake)는 그들이 할 수 있는 것과 그렇지 않은 것을 안정적으로 구분하여 사고 모델을 형성에 도움을 주었다(Steffe & Thompson, 2000). 두 학생의 공변 추론 방식에 대한 연구자의 가설적 모델을 구성한 다음 이를 범주화하기에 적합한 도구로 Thompson과 Carlson(2016)의 공변 추론에 대한 주요 수준 틀([표 2])을 사용하였다.

3차 분석은 위의 네 문제를 해결하는 동안 두 학생이 보인 문제 해결 행동의 차이에 초점을 두고 이루어졌다. 문제 해결 과정을 분석하기 위한 틀로 Carlson과 Bloom(2005)이 제시한 다차원 문제 해결 틀을 사용하였다. 3차 분석은 다음의 세 단계로 이루어졌다. 첫째, 문제 해결 과정을 자세하게 다루기 위해 학생 C와 학생 W가 문제를 해결하는 과정을 각각 지향, 계획, 실행, 확

인 단계의 사이클로 분류하였다. 이는 학생들이 생산한 표상, 발언 및 행동을 통해 연구자들이 판단하여 각 단계를 나눈 것이다. 예를 들어 행성 문제에 대한 학생 C의 문제 해결 사이클은 [그림 2]와 같다. 둘째, 문제 해결 과정에서 두 학생의 차이가 드러나는 부분을 다차원 문제 해결 틀의 단계-속성에 따라 분석하였다. 셋째, 문제 해결 과정의 차이와 두 번째 분석에서 드러난 두 학생의 공변 추론 방식의 차이를 관련지어 이러한 차이가 문제 해결 과정에 미친 영향에 대한 분석을 수행하였다.



[그림 2] 행성 문제에 대한 학생 C의 문제 해결 사이클
[Fig. 2] Problem solving cycle of student C for the planet problem

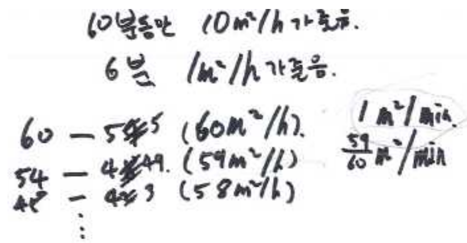
Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론 방식의 차이

이 장에서는 학생 C와 학생 W가 페인트 문제, 행성 문제, 직사각형 문제, 양초 문제를 해결하는 과정에서 보인 행동과 이들이 문제의 상황에 대해 구성한 양적 구조에 대해 분석할 것이다. 분석 결과를 바탕으로 두 학생이 연속적으로 두 양이 함께 변화하는 상황을 다루기 위해 행한 추론 방식의 차이를 논하고자 한다.

1) 페인트 문제

페인트 문제는 시간에 따라 방을 색칠하는 속도가 일정하게 감소하는 상황을 제시하고 있다. 학생 C는 '지향' 단계에서 '처음 $60m^2/h$ → 한 시간 뒤 $50m^2/h$' 라고 적고 지문의 '일정하게 줄어든다' 부분에 밑줄을 그은 뒤 잠시 생각하다 [그림 3]과 같이 적었다. 즉 학생 C는 연속적으로 변화하는 시간과 속도의 관계에 대해 6분 단위로 시간을 자르고 각 시간 덩어리 당 속도 값을 하나씩만 부여하는 방식으로 다루었다.



[그림 3] 페인트 문제에 대한 학생 C의 풀이(1)
[Fig. 3] Student C's work for the painting problem(1)

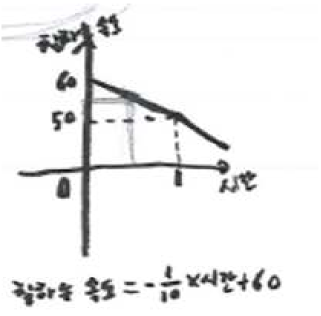
학생 C는 "여기 이 구간은 이 속도로 칠하고, 이 구간은 이 속도로 칠하고…" 라고 설명했고, 속도가 6분 단위로 달라지냐는 교사의 발문에 그렇다고 답하였다. 그 후 학생 C는 각 시간 덩어리 당 속도와 시간 6분을 곱한 항들의 합 $6+\frac{59}{10}+\frac{58}{10}+\cdots+\frac{51}{10}$을 계산하여 $55.5m^2$라고 적었다. 이 덧셈식을 계산할 때 학생 C는 첫 항과 끝항, 두 번째 항과 끝에서 두 번째 항을 짝짓는 방식으로 차례로 각 쌍을 짝 지은 후 한 쌍을 더하여 2로 나누고 항의 수를 곱하였다. 즉 이것은 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이라 할 때,

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n$$

와 같이 대칭적인 항의 쌍들의 합이 같음을 이용해 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$을 구하는 방식이다. 이 계산 알고리즘은 이산적 상황, 즉 일정하게 증가하는 유한 수열에 대해 앞뒤로 대칭적인 항을 짝짓고 이들의 편차를 서로 상쇄시켜 중간 값으로 다루는 정신적 조작을 할 수 있음을 의미한다. 이 아이디어는 이후 학생 C의 행성 문제의

해결에서 다시 언급된다.

한편 학생 W는 5분 정도 말없이 문제를 바라보다 $\frac{50+60}{2}=55$ 라고 적었다. 교사가 설명을 요구하자 “진희가 칠하는 속도가 일정하게 줄어든다고 하면, 그러면 시간…, 시간 당 칠하는 속도는, (펜 끝으로 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 하강하는 직선을 그으며) 속도가 줄어들면 계속, (같은 제스처 반복) 그냥 일차함수가 나올 것 같아요.” 라고 말했고, 이를 나타내어 보라고 하자 [그림 4]와 같이 그래프를 그렸다. 등식 $\frac{50+60}{2}=55$에 대해서는 속도에 시간을 곱해야 하는데 속도가 일정하게 변하기 때문에 0분에서 30분까지의 변화와 30분에서 60분까지의 변화가 같아서 가운데 30분일 때의 속도를 곱하면 될 것 같다고 설명하였다. 학생 W는 비록 명쾌하게 정당화하지 못했지만 학생 C가 자신과 다른 답을 내놓자 자신 있게 자신의 답을 내세우는 것으로 보아 어느 정도 확신을 가지고 있는 것으로 보였다.



[그림 4] 페인트 문제에 대한 학생 W의 그래프
[Fig. 4] Student W’s graph for the painting problem

그 후 학생 C는 상황을 그래프로 나타내는 과정에서 연속적으로 변화하는 속도를 이산적으로 조직한 자신의 방식에 문제가 있다는 것을 알아차렸다. 해결 방법을 찾지 못하는 학생 C에게 교사가 속도-시간 그래프를 그려보라고 하자 [그림 5]의 좌측과 같이 학생 W와 유사한 일차함수 그래프를 그렸다.

[그림 5] 페인트 문제에 대한 학생 C의 풀이(2)
[Fig. 5] Student C’s work for the painting problem(2)

학생 C는 [그림 5]의 일차함수 그래프를 그린 후 오른쪽에 ‘거속시’를 적고 [그림 5]에 나타난 것처럼 직각삼각형을 빗금으로 색칠한 후 이 삼각형의 넓이를 구하면 된다고 말했다. 교사가 그 이유를 묻자 학생 C는 [그림 5]의 우측 사각형(칠해야 할 $100m^2$의 방)을 굵은 펜으로 채우며 페인트를 칠한 넓이가 ‘거속시’의 거리와 같다고 말했고, “(진희가 1시간 동안 칠한 방의) 넓이를 구하면 되는데, 그 관계가 이것(삼각형)의 넓이를 구하는 것과 같지 않을까요.”라고 하였다. 그래프 상의 넓이가 페인트를 칠한 넓이와 같다는 학생 C의 아이디어는 이 문제에 국한된 것이라 정확한 분석이 어렵지만, 속도 곱하기 시간이 거리라는 아이디어와 거리가 모여 넓이가 된다는 아이디어의 조정에서 나온 것으로 추측된다. 하지만 적어도 이것은 [그림 4]의 그래프를 바탕으로 학생 W가 가운데 30분일 때의 속도를 구했던 방식과는 명확히 구분된다고 보여진다([그림 5]의 그래프 가운데 그어진 선은 학생 C가 학생 W의 설명을 들은 후 자신의 생각을 말하는 과정에서 따라 그은 것이다.). 학생 C와 같이 덩어리 짓는 사고를 하는 학생이 그린 그래프의 경우 매끄러운 사고의 생산물이 아니라 이전에 경험했던 어떤 ‘모양’을 복제한 것에 가깝기 때문에(Castillo-Garsow, Johnson, & Moore, 2013) 그래프 아래쪽 ‘삼각형’의 넓이를 통해 물리적인 방의 넓이를 구한다는 아이디어에 접근 가능했던 것으로 추측된다.

삼각형 넓이의 계산을 실행하고 확인하는 단계에서 학생 C는 속도와의 단위를 맞추기 위해 1시간을 60분으로 바꿔야할 것 같다고 말했다.

[대화문 1]

교사: 근데 속도 단위(m^2/h)가 지금 아까 C가 쓸 때 시간(h)에 대한 단위로 썼잖아. 이것(x축 단위)도 시간(h)이야. 근데 왜 갑자기 분으로 나누려고 하는 거지?

학생 C: 왜냐하면, 줄은 거는 분이잖아요. 변화한 그게.

교사: 아, 변화가 분으로 줄어든다? 작게, 작게, 작게?

학생 C: 네.

교사: 그러면 1분과 1분 사이도 변하고 있잖아, 근데. 지금 이 그래프(일차함수)에 의하면.

학생 C: 그럼 초로 해야 하나?

교사: 그럼 초와 초 사이도 줄고 있잖아.

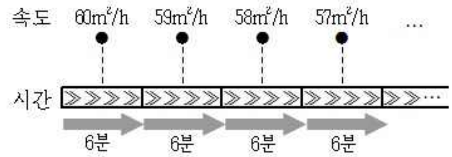
학생 C: 그런 거예요?

교사: 안 그래, 시간이?

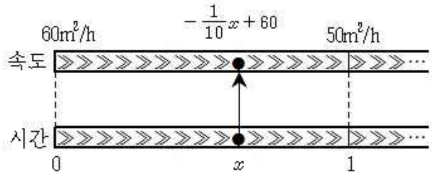
학생 C: 모르겠어요. (웃음) 좀, 제가 이런 걸 잘 못해서.

학생 C는 반성을 통해 자신의 풀이를 돌아보고 수정하였지만 연속적인 시간을 다루는 것에 있어서는 [대화문 1]에서와 같이 여전히 1분 혹은 1초 단위로 자른 형태로 추론하고 있었다. 학생 C가 매끄러운 형태의 일차함수를 그린 것과 관계없이 문제 상황의 연속적인 양들의 변화를 여전히 어떤 덩어리의 단위로 인지하고 있다고 볼 수 있다.

[그림 6]은 학생 C와 학생 W가 페인트 문제의 상황에 대해 조직한 두 양(속도와 시간)의 구조에 대해 도식화한 모델이다. 시간 혹은 속도 막대의 "≫≫" 표시는 학생이 해당 양의 변화를 연속적으로 인식하고 있음을 의미한다. 학생 C의 경우 시간이 연속적으로 흐르고 있음을 인식하지만 이를 6분 단위로 잘라서 다루었고, 각각의 6분 덩어리마다 속도를 하나씩 부여하였다. 이때 속도는 해당 시간동안 유지되는 것이 아니라 단지 대응되는 하나의 값으로 인식했다고 보았기 때문에 [그림 6](위)와 같이 점으로 표시하였다. 반면 학생 W는 시간과 속도 모두 연속적인 변화로 인식하고 있으며 일정한 단위의 덩어리로 이 양을 나누지 않고 시간에 따른 속도의 변화를 매끄럽게 인식한다고 판단하여 [그림 6](아래)와 같이 나타내었다.



<학생 C의 양적 구조>

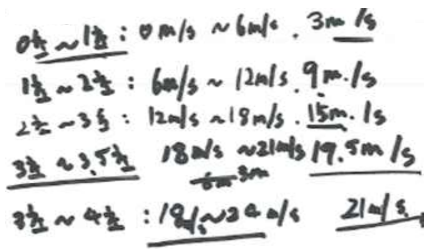


<학생 W의 양적구조>

[그림 6] 페인트 문제에 대한 두 학생의 양적 구조
[Fig. 6] Student C's and student W's quantitative mental structure regarding the painting problem situation

2) 행성 문제

행성 문제는 시간에 따라 돌이 떨어지는 속도가 연속적으로 일정하게 증가하는 상황을 제시하고 있다. 학생 C는 먼저 빌딩 옥상에서 돌이 떨어지는 상황을 그림으로 나타내고 1초, 2초, 3초일 때의 속도를 각각 적은 후 [그림 7]과 같이 시간이 1초 단위로 변화할 때 속도가 변화한 정도를 고려하여 문제 상황의 양들을 조직하였다. 학생 C가 시간을 일정한 단위로 잘라서 다룬 것은 페인트 문제에서와 동일하지만 시간 덩어리 당 한 속도 값만 부여했던 것과 달리 이번에는 1초 동안 속도가 변화한 정도를 인식했다고 볼 수 있다. 학생 C는 거리를 계산하기 위해 각 시간 덩어리에서의 속도를 한 값으로 나타내야한다고 생각한 것으로 보이며 각 구간의 대푯값(3m/s, 9m/s, …)을 우측에 적고 이것을 '평균속도'라고 말하였다. 마지막으로 3초와 3.5초 사이의 평균속도 19.5m/s와 0.5초를 곱하여 정답을 계산하였다.



[그림 7] 학생 C가 조직한 속도-시간의 관계
[Fig. 7] Student C's construction for the relationship between speed and time

[대화문 2]

관찰자: 음. 그게(평균속도) 뭘 의미하는지 좀 더 설명해 줄래?

학생 C: 어, 이거 0초에서 1초 동안의 평균의 속력은 이거 3m/s니까 여기서, 어, 초를 곱하면 이때 움직인 거리를 구할 수 있지 않을까요? (중략) 속력이 증가하는 건 똑같으니까 결국에는 이걸로 구해야할 것 같아요.

교사: 음. C가 지금 말할 때 0초일 때는 속력이 0m/s 였고, 여기 1초에는 6m/s라고 했잖아. 그 동안은 속력이 계속?

학생 C: 증가….

교사: 증가를 하면, 증가를 하는데, 그 중에 왜 하필 딱 중간에 있는 평균값을 가지고 계산을 한 건가? 중간에 여러 가지가 있을 수 있잖아. 2m/s가 있을 수도 있고, 4m/s가 있을 수도 있고.

학생 C: 그, 막, 1+2+ ⋯ +10이 있으면 이렇게 중간해가지고 곱할 때 있잖아요. 그런 걸 생각하면….

교사: 중간에 해서 곱한다고?

학생 C: 어, 그렇게 하지 않아요? 그러니까, (작은 동그라미를 그리며) 제일 작은 거랑 (오른 쪽에 다른 작은 동그라미 그리며) 제일 큰 거랑 있고, (두 동그라미 사이에 점을 찍으며) 이게 뭐가 이렇게 있을 때, 일정하게 있을 때, 중간 값을 구해서 곱하는….

학생 C는 자신의 '평균속도'에 대해 설명할 때 [대화문 2]에서와 같이 페인트 문제의 덧셈식을 계산할 때 사용했던 알고리즘을 언급하였다. 이것이 덧셈 계산 방식 중 하나임에도 불구하고 학생 C가 속도가 일정하게 증가하는 상황을 다루기 위해 이 알고리즘을 떠올린 것은 [대화문 2]의 마지막 문장에서 드러나듯 학생 C에게 이 계산 알고리즘이 일정하게 증가하는 이산량을 다루는 방식과 관련 있기 때문이다. 이는 가장 큰 값과 가장 작은 값부터 차례로 대칭적으로 짝을 이뤘을 때 차이가 상쇄되며 그들의 중간 값으로 같아진다는 아이디어를 내포한다. 이러한 측면에서 보았을 때 학생 C가 1초 내에서 끊임없이 증가하고 있는 속도의 변화를 이산적으로 바라보았다는 가능성을 생각해볼 수 있다. 즉 0초에서 1초 사이에 속도가 0m/s에서 6m/s로 매끄럽게 변화한 것이라기보다 0m/s과 6m/s 사이의 일정하게 증가하는 어떤 이산적인 값들이 변화한 것으로 본 것이다. 이때 학생 C가 사용한 '평균속도'라는 단어는 [대화문 2]에서도 드러나듯 한 구간에서의 평균 변화율이 아니라 일정하게 증가하는 이산량들의 중간 값의 의미에 가깝다고 볼 수 있다. 학생 C는 연속적인 변화 상황을 이산적으로 추론하였으나 이로 인해 변화하는 속도의 적절한 대푯값을 이용할 수 있었고, 문제 또한 해결할 수 있었다.

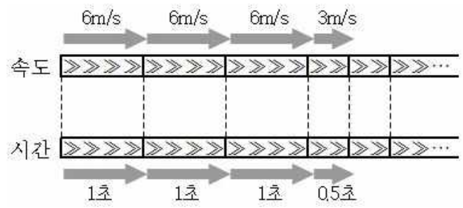
반면 학생 W는 '3초에서의 속력 18m/s, 3.5초에서의 속력 21m/s' 라고 적었을 뿐 끝내 문제를 해결하지 못했다. 상황의 변화를 매끄럽게 추론하는 학생 W는 한 구간에서 연속적으로 변화하는 속도의 대푯값을 학생 C와 같은 방식으로 구할 수 없었기 때문이다. 두 학생 모두 속도가 연속적으로 변화하는 상황을 수학적으로 다루기 위해 한 구간에서의 일정한 속도 변화에 대해 가운데 지점을 기준으로 균형을 맞추려는 경향을 보였다. 학생 W는 페인트 문제에서 1시간 동안 $60m^2/h$에서 $50m^2/h$로 일정하게 감소하는 속도에 대해 가운데 30분을 기준으로 양쪽 변화의 균형을 맞추려고 시도했었고, 학생 C 또한 행성 문제에서 일정하게 증가하는 속도에 대해 중간 값을 통해 변화의 균형을 맞추려고 하였다. 단, 상황의 양을 일정 단위로 자르거나 이산적으로 보는 학생 C는 일정하게 증가하는 이산량을 다루는 자신의 방식을 통해 변화의 균형을 맞출 수 있었으나 매끄럽게 추론하는 학생 W는 균형을 맞추는 것에 대해 스스로에게 타당한 설명을 만들어내기 못했다. 이로 인해 학생 W는 페인트 문제에서도 명확하게 설명하지 못했고 행성 문제 또한 해결하지 못한 것으로 보인다.

[대화문 3]
교사: (3초, 3.5초 일 때의 속력을 구한 것을 가리키며) 왜 이렇게 적었어?
학생 W: 1초당 6m/s씩 증가하니까 시간에 6m/s를…, 시간당…, 그러니까 시간 곱하기 6 하면 속력이 나온다고 생각했어요.
교사: 그렇지. 어…, 그럼 3.5에다 6을 곱한거야?
학생 W: 네.
관찰자: W야, 곱하기도 있고 더하기도 있고 많고 많은 것 중에 왜 곱하기를 썼어?
학생 W: 일정하게 증가하니까.

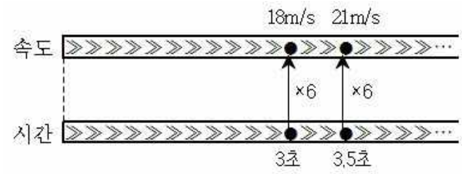
[대화문 3]에서와 같이 학생 W는 3초 및 3.5초에서의 속력을 구하기 위해 각각에 6을 곱하였다. 학생 W는 이 문제의 해결 과정에서 충분한 설명을 제공하지는 않았지만 페인트 문제에서 속도-시간 관계를 일차함수로 조직했던 사실과 3초 및 3.5초의 속도를 구하는 방식을 통해 속도-시간의 관계를 시간에 대한 속도의 비가 6으로 일정한 일차함수로 추론하고 있다고 추측할 수 있다. 따라서 학생 W의 양적 구조에 대한 가능성 있는 모델로 [그림 8](아래)와 같이 추측하였다. 학생 C의 경우 시간과 속도가 연속적으로 흐르고 있음은 인식하였으나 시간을 1초 단위로 잘랐고 속도도 이에 맞춰 잘라서 다루었다. 또한 학생 C는 3.5초에서의 속도를 구하기 위해 3초에서의 속도와 4초에서의 속도 차이인 6m/s의 절반, 즉 3m/s를 3초에서의 속도에 더했다. 즉 자신이 설정한 덩어리의 단위 '1초'의 가장자리의 값에 먼저 주목 한 후 덩어리 내의 변화를 고려한다는 것을 알 수 있었다. 학생 C가 행성 문제의 상황에 대해 조직한 두 양(속도와 시간)의 구조에 대한 연구자의 모델은 [그림 8](위)과 같다.

3) 넓이 변화의 설명

먼저 두 학생 모두 어려움 없이 직사각형의 넓이에 대한 이차함수 그래프를 그렸다. 학생 W는 '세로 = 3×가로, 직사각형의 넓이 = 3×가로×세로' 라고 적은 다음 그래프를 그렸고, 학생 C는 가로의 길이가 1, 2, 3일 때의 넓이를 각각 계산하여 이를 일반화한 $f(x)=3x^2$를 도출한 다음 그래프를 그렸다. 한편 넓이의 변화에 대해서는 두 학생 모두 바로 답하지 못하고 각자의 방식대로



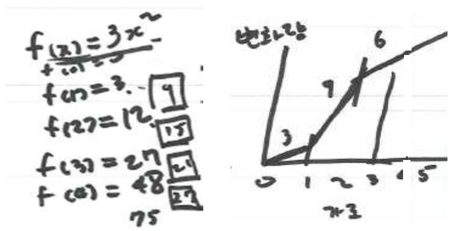
<학생 C의 양적 구조>



<학생 W의 양적 구조>[2]

[그림 8] 행성 문제에 대한 두 학생의 양적 구조
[Fig. 8] Student C's and student W's quantitative mental structure regarding the planet problem situation

변화하는 두 양에 대해 추론하기 시작했다. 학생 C는 [그림 9](좌)와 같이 넓이 값의 증가량 9, 15, 21, 27을 구한 다음 증가량이 "9에서 시작해 6씩 증가"한다고 결론지었다. 그리고 증가량과 증가량의 변화량을 혼동하여 "0에서 1까지는 3만큼, 1에서 2까지는 9만큼, 그 뒤로는 계속 6만큼씩 일정하게 증가"한다고 하며 [그림 9](우)와 같이 꺾은선 그래프를 그렸다.



[그림 9] 직사각형 넓이의 변화에 대한 학생 C의 설명
[Fig. 9] Student C's works for explaining the change of area of a rectangle

2) 이 모델에 대한 충분한 증거는 부족하지만 다른 모델들과의 일관성을 위해 가능성 있는 모델을 추측한 것이다. 행성 문제에 대해 학생 W가 구성한 양적 구조에 대해서는 더 나아간 조사가 필요하다.

한편 학생 W는 (1, 3), (2, 12), (3, 27)라고 적고 한참을 고민하였다. 이 점을 적은 이유에 대해, 원점에 가장 가까운 점들이기 때문이며 이것을 통해 변화를 보려고 했다고 설명하였다.

[대화문 4]

관찰자: W야, C는 6증가라는 표현을 썼거든. W는 어떻게 생각해? C의 생각에 대해서?

학생 W: 음…, (약간 망설이다 웃으며) 해봤는데 안 돼요.

관찰자: 해봤는데 안 돼?

학생 W: 정수로 증가할 때만 6씩 증가하고 나머지는 약간….

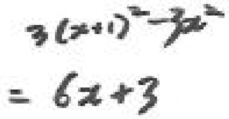
관찰자: 아아, 정수로 증가할 때만?

학생 W: (웃으며) 모르겠어요.

교사: 잠깐, 정수로 증가할 때만 6씩 증가한다?

학생 W: 그럼 1씩 증가할 때는 6씩…. 해봐야할 것 같아요. (계산하려다 갑자기) 1씩 증가하면 6씩 증가할까요, 아니면 정수에서만 되는 걸까요? 어…, 한 번 해봐야겠다. (계산 시작)

[대화문 4]에서 나타나듯이 학생 W는 가로의 길이가 1, 2, 3, ⋯ 으로 증가할 때처럼 임의의 x, $x+1$, $x+2$, ⋯ 로 증가할 때도 6씩 증가하는지에 의문을 품었다. 학생 W는 '1씩 증가한다'의 의미를 정수만 다루는 것이 아니라 임의의 x에서 $x+1$ 까지의 증가를 다루는 것이 더욱 타당하다고 여겨 이에 대한 계산을 실행하였다. 학생 W는 [그림 10]과 같이 $3(x+1)^2-3x^2=6x+3$ 을 적고 이것이 1만큼 증가했을 때의 넓이의 변화량이라고 설명한 후 잠시 고민하다가 $3x^2-3(x-1)^2=6x-3$ 으로 식을 바꾸었는데, 이 변화량을 어떤 x에 대응시켜야 할지에 대해 고민했기 때문으로 보인다. 교사가 학생 W에게 x가 정수가 아니면 어떻게 되냐고 묻자 상관없다고 하였다. 학생 C에게 학생 W가 적은 식에 대한 생각을 묻자 자신이 구했던 '9 시작 6씩 증가'와 $6x+3$가 일치하기 때문에 맞는 것이라고 답하였다. 학생 W는 왜 하필 1씩 증가할 때를 구한 것이냐는 교사의 물음에 차이가 1이 아니어도 되지만 학생 C가 6씩 변한다고 해서 그때 나오는 것을 구해본 것이라고 말하였다.



[그림 10] 직사각형 넓이의 변화에 대한 학생 W의 설명
[Fig. 10] Student W's work for explaining the change of area of a rectangle

[대화문 5]

관찰자 : 음…, 그럼 W가 생각하기에 (증가량이) 1 말고 다른 수가 올 수도 있는 거야? 어떤 수가 올 수 있어?

학생 W : (침묵)

관찰자 : C는 어떻게 생각해?

학생 C : 1 증가한다고 생각해요. 여기 좌표가 다 1 증가했을 때 좌표이기 때문에..

관찰자 : 어디가? 여기 처음에 제시된 그래프에?

학생 C : 네.

관찰자 : C가 생각하기에 이 그래프는 가로에 어떤 값을 가지는 것 같아?

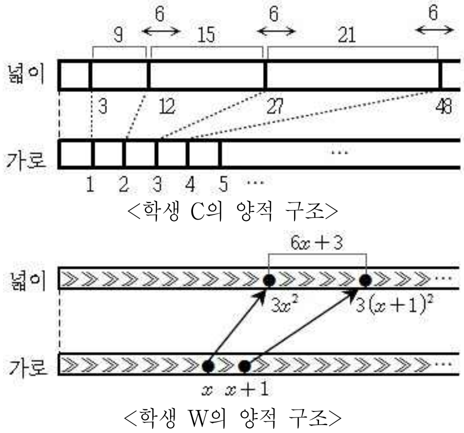
학생 C : 가로에 올 수 있는 수요? 모든 수요. 단지 여기서 준 점의 좌표가 정수이기 때문에 정수로 계산을 했어요.

교사 : 오, 그랬어? 만약 점이, 선생님이 그림 주어줄 때 점을 많이 찍어줬으면 어떻게 됐을까?

학생 C : 그러면 다 구해봐야죠.

학생 W는 그래프 상의 점이나 특정 숫자에 구애받지 않고 모든 수에서의 변화량을 나타내기 위해 식으로 나타내었다. 이를 통해 학생 W가 가로의 길이 뿐 아니라 그에 따른 넓이의 변화를 모든 점에서 매끄럽게 추론하고 있는 것으로 판단된다. 학생 W는 넓이의 변화량을 임의의 x에서 $x+1$ 까지의 변화로 다루었으므로 학생 W가 조직한 두 양(넓이와 가로 길이)의 구조에 대해 연구자는 [그림 11](아래)과 같은 모델을 구성하였다. 반면 학생 C는 정수나 그래프 위에 찍힌 점에 특별한 의미를 두고 이산적인 점의 값들의 차로 변화량을 구해야 한다고 주장하였다. 학생 C는 가로의 길이에 모든 수가 올 수 있다고 했지만 지속적으로 가로 길이가 1, 2, 3, ⋯

으로 변화할 때만을 고려하고 있으므로 연속적인 변화를 인식하고 있다고 보기 어렵다. 따라서 [그림 11](위)의 가로 길이와 넓이 부분에 연속성의 인식을 나타내는 “≫≫” 표시를 삭제하였다. 넓이 바의 칸 안에 있는 수(9, 15, 21)는 넓이의 증가량을 의미하고 위쪽의 “↔” 표시는 증가량의 변화량 6을 의미한다.



[그림 11] 직사각형 문제에 대한 두 학생의 양적 구조
[Fig. 11] Student C’s and student W’s quantitative mental structure regarding the rectangle problem situation

4) 양초 문제

학생 C는 먼저 명확한 수치 없이 A 양초보다 B 양초가 길 것이라 추측하였다. 교사가 얼마나 더 긴지 구체적인 수치로 표현하라고 하자 학생 C는 곧바로 ‘A가 1시간 동안 녹는 양초의 길이 = x, B가 1시간 동안 녹는 양초의 길이 = y’ 라고 적었다. 즉 양초의 변화를 수량화하기 위해 한 시간이란 시간의 덩어리에 따라 양초의 길이를 자르는 방식으로 추론한 것이다. 학생 C는 2시간 후 양초들의 길이가 같아진다는 조건을 통해 계산 결과 $8x=5y$ 를 적고 한참동안 고민하였다.

한편 말없이 20분 정도 문제를 응시하던 학생 W는 “뭔가 비가 나오는 것 같은데⋯.” 라고 중얼거렸다. “2시간 후에는 길이가 같아지잖아요. 그런데 A 양초는 8시간 걸리고 B 양초는 5시간, 그러니까, 속도는 시간 분의 거리니까, 그래서 속도비를⋯. (교사 : 속도비가 얼마가 되는데?) 5 : 8. 그렇게 나왔어요.” 즉 학생 W는 두 초의 길이가 같아졌을 때 남은 시간의 비인 8 : 5에 역수를 취하여 $\frac{1}{8}:\frac{1}{5}=5:8$ 이라는 두 초가 녹는 속도의 비를 구하였다. 그 후 속도비에 각각 녹는데 걸리는 시간인 10시간과 7시간을 곱해 두 초의 길이 비가 50 : 56, 즉 25 : 28 라는 결론을 내렸다.

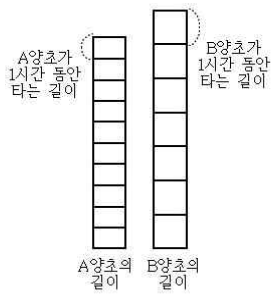
학생 W가 설명하는 동안 계속 고민에 빠져있던 학생 C는 [그림 12]와 같이 양초 A, B를 분할된 막대 그림으로 나타내었다. 교사가 그림에서 한 칸이 뭐냐고 묻자 “한 시간 동안 타는 길이. 그 기준으로 둬야 뭔가 풀 수 있을 것 같아요.” 라고 말했다. 학생 C는 자신의 그림과 등식 $8x=5y$를 통해 $x=\frac{5}{8}y$를 도출한 다음 무엇을 구해야할지 몰라 망설이다가 학생 W가 길이의 비를 구한 것을 보고 $10x$에 $x=\frac{5}{8}y$을 대입하여 A 양초의 길이 $\frac{25}{4}y$와 B 양초의 길이 $7y$의 비 25 : 28을 구하였다.

[그림 12] 학생 C가 그린 양초 A와 양초 B
[Fig. 12] Student C’s drawing for candle A and candle B

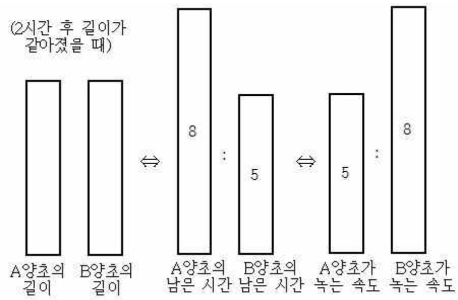
B 양초가 A 양초보다 몇 배 빨리 녹는가에 대해 교사가 질문하자 학생 C가 재빨리 $\frac{5}{8}$라고 대답하였다. 학생 W가 $\frac{8}{5}$라고 하자 학생 C는 등식 $8x=5y$를 다시 바라본 후 $\frac{8}{5}$이라고 정정하였다. 학생 W가 자신이 인식하고 있는 두 속도량의 비를 통해 답한 반면 학생 C는 대수식에 의존하여 한 시간 당 녹는 길이의 비교를 통해 답한 것으로 보인다.

양초 문제 상황에 대한 학생 C의 양적 구조는 [그림 12]와 유사한 방식으로 [그림 13](위)과 같이 구성하였다. 학생 C는 속도를 1시간 단위로 변화한 길이, 즉 속도-길

이(Thompson, 1994)로 인식하였고 전체 거리를 속도-길이로 나눈 개수를 '시간'으로 인식하였기 때문에 시간을 속도-길이라는 한 칸을 세는 도구로만 다루었다. 이에 반해 학생 W는 2시간 후에 A, B 양초의 길이가 같아진 상황에서 남은 '시간'의 비를 구하고 역수를 취한 것으로 보아 이를 하나의 양으로 인식한 것으로 보인다. 학생 W는 속도 또한 시간의 비의 역수로써 비를 구할 수 있는 하나의 양으로 다루었다고 볼 수 있다. 즉 학생 W는 시간, 속도, 거리를 각각 양으로 다룰 수 있었으며 그들 사이의 관계 또한 유연하게 조정할 수 있었다. 따라서 학생 W가 양초 문제의 상황에 대해 조직한 양의 구조에 대한 연구자의 모델은 [그림 13](아래)과 같다.



<학생 C의 양적 구조>



<학생 W의 양적 구조>

[그림 13] 양초 문제에 대한 두 학생의 양적 구조[3)]
[Fig. 13] Student C's and student W's quantitative mental structure regarding the candle problem situation

3) 타 모델들과 달리 수직으로 표현된 것은 [그림 12]에서 학생 C가 자신의 양적 구조를 수직으로 표현했기 때문에 이 형태가 두 학생의 양적 구조를 더욱 잘 표현할 것이라 판단해서이다.

5) 문제 해결 과정에서 드러나는 두 학생의 공변 추론 방식의 차이

문제 상황을 마주했을 때 우리는 먼저 문제의 상황을 인식하고, 우리가 인식한 상황에 대해 양을 구성하고, 구성된 양과 양 사이의 관계를 추론하는 정신적 행동을 거치는 양적 추론에 참여하게 된다(Moore, Carlson, & Oehrtman, 2009). 문제를 해결하기 위해서는 우리가 인식한 상황의 양적 구조, 즉 양과 양 사이의 관계망을 분석해야 한다. 양적 구조가 형성되면 이와 관련된 산술이나 대수적 표현을 통해 구조 내의 양에 대해 정보를 늘릴 수 있으므로(Thompson & Carlson, 2016) 궁극적으로 문제의 해결을 향해 나아갈 수 있게 된다.

페인트 문제, 행성 문제, 직사각형 문제, 양초 문제의 경우 학생들의 경험 안에서 연속적으로 흐르는 시간을 독립변수, 혹은 드러나지 않는 개념적인 정의역(Thompson, 2011)으로 취하고 있다. 모든 순간들을 통과하며 계속되는 연속적인 변화는 우리가 일상생활에서 언제나 겪는 친숙한 경험이다. 그러나 이를 수학적으로 다루기 위해서는 매 순간 한 양이 값을 가질 때 다른 양의 값을 즉각적으로, 분명하게, 끊임없이 자각하면서 그 양의 값을 추적할 수 있어야 한다(Saldanha & Thompson, 1998). 두 양과 그들의 결합으로 생성된 곱셈적 대상을 유지하면서 이들에 대한 측정과 함께 연속적인 변화를 상상하는 것은 쉬운 일이 아니다(Thompson & Carlson, 2016). 또한 본질적으로 양에 대한 개념, 공변 추론에 대한 능력은 각자의 도식 내의 구성 요소에 따라 '발달적'이므로 수준의 차이가 발생하게 된다(Thompson, 1994; Saldanha & Thompson, 1998). 따라서 똑같은 문제 상황일지라도 학생들이 연속적으로 공변하는 두 양과 그 관계를 다루기 위해 행하는 추론은 서로 다르고 그 수준의 차이 또한 발생할 수밖에 없다. 본 절에서는 연구에 참여한 학생 C, 학생 W가 앞서 소개한 네 문제를 해결하는 과정에서 일관되게 보여주었던 자신만의 추론 방식을 Thompson & Carlson(2016)의 여섯 가지 공변 수준([표 2] 참고)에 비추어 정리, 비교하고 이를 통해 두 학생의 추론 방식의 차이를 심도 있게 논하고자 한다.

학생 C와 학생 W는 다양한 문제 상황에서 연속적으로 공변하는 두 양을 수학적으로 조직함에 있어 각자 일

관된 방식으로 뚜렷한 차이를 보여주었다. 먼저 학생 C는 페인트를 칠하는 속도가 한 시간 동안 $60m^2/h$에서 $50m^2/h$로 일정하게 줄어드는 상황에 대해 한 시간을 6분 씩 10개의 구간으로 자른 다음 각 구간마다 하나의 속도가 6분 동안 유지되는 형태로 두 양을 조직하였다. 빌딩에서 돌이 떨어지는 속도가 매 초당 $6m/s$씩 증가하는 상황에 대해서는 1초 단위로 시간을 자르고 속도 또한 1초 동안 변화한 만큼 자르는 방식으로 두 양을 다루었다. 가로의 길이 x에 따른 직사각형의 넓이 $3x^2$의 변화를 설명하기 위해 x가 1, 2, 3, 4, ⋯ 일 때의 넓이 3, 12, 27, 48, ⋯ 을 구한 후 값 사이의 차 9, 15, 21, ⋯ 을 구하였다. 양초 A, B가 시간에 따라 각각 일정한 속도로 녹는 상황에 대해서는 A 양초와 B 양초의 길이를 한 시간 당 녹는 길이로 잘라서 다루었다. 이렇듯 학생 C는 매우 일관성 있게 연속량을 일정한 단위로 잘라서 다루는 행동을 보여주었다. 상황을 설명하는 제스처나 변화에 대한 진술 등을 비추어 보았을 때 학생 C는 연속적으로 변화하는 두 양에 대해 단순히 변수에 값을 대입하는 것 이상으로 동적인 심상을 바탕으로 추론하여 연속 공변적 사고를 한다고 여겨졌다. 그러나 학생 C의 양적 구조에 대한 연구자의 모델에서 명확히 드러나듯 학생 C는 언제나 연속적인 양을 일정한 크기의 덩어리로 잘라서 다루었다. 필요에 따라 1분을 1초로, 1초를 0.5초로 나누는 등 덩어리를 더 작은 사이즈로 자르긴 했지만 덩어리 사고를 하는 학생들은 아무리 잘게 잘라도 언제나 덩어리로 사고할 수밖에 없다 (Castillo-Garsow, Johnson, & Moore, 2013). 학생 C와 같은 학생들은 변화를 재단하는 단위로 덩어리를 사용하기 때문에 연속적인 상황을 일정한 단위의 눈금을 갖는 이산적인 점들로 추론하게 된다(Castillo-Garsow, Johnson, & Moore, 2013). 이는 직사각형의 넓이의 변화를 설명할 때 어떠한 단위에도 구애받지 않고 변화를 바라보는 학생 W와 달리 단위 1로만 변화를 설명하는 학생 C의 행동을 통해 극명하게 드러난다. 종합하면, 학생 C는 연속적인 변화에 대한 심상을 갖고 있지만 시간이나 길이를 항상 일정한 단위로 자르고 그에 따라 변하는 다른 양 또한 그 단위에 맞게 잘라서 다루고 있으므로 Thompson & Carlson(2016)의 공변 추론에 대한 주요 수준 중 두 번째로 높은 수준인 ‘덩어리 연속 공변’에 해당한다고 할 수 있다.

반면 학생 W의 경우 페인트를 칠하는 속도가 일정하게 줄어들어드는 상황에 대해 일차함수로 속도-시간 관계를 조직하였다. 빌딩에서 돌이 떨어지는 속도가 일정하게 증가하는 상황에 대해서도 연속적으로 흐르는 임의의 시간 값에 6을 곱한 것이 그때의 속도가 된다는 일차함수와 같은 방식으로 두 양을 조직한 것으로 보인다. 가로의 길이 x에 따른 직사각형의 넓이 $3x^2$의 변화에 대해 임의의 가로 길이 x와 $x+1$사이의 증가량인 $3(x+1)^2-3x^2=6x+3$ 으로 넓이의 변화를 설명하였고 이때 x가 꼭 정수일 필요도, 증가량 또한 꼭 1일 필요도 없다고 하였다. 마지막으로 양초 A, B가 시간에 따라 각각 일정한 속도로 녹는 상황에 대해 2시간 후 두 양초의 길이가 같아졌을 때 각각 남은 시간이 8시간, 5시간임을 통해 두 양초가 녹는 속도의 비 5 : 8를 끌어내었다. 이와 같이 학생 W는 학생 C와 달리 연속적으로 변화하는 양을 특정 단위로 자르지 않았고 공변하는 다른 양과의 연속적인 관계를 드러낼 수 있는 방식으로 양적 구조를 구성하였다. 종합하면, 학생 W는 모든 문제 상황에서 한 양이 연속적으로 변화할 때 이에 따라 변화하는 다른 양의 값을 매끄럽게 추론하였으므로 Thompson & Carlson(2016)의 공변 추론에 대한 주요 수준 중 가장 높은 수준인 ‘매끄러운 연속 공변’에 해당한다고 할 수 있다.

연속적인 변화를 수량화하기 위해 학생 C처럼 일정한 단위로 자르는 것은 매우 자연스러운 접근이다. “그 기준으로 둬야 뭔가 풀 수 있을 것 같아요.”라는 학생 C의 말처럼 우리는 언제나 변동이 일어나는 것을 측정하기 위하여 덩어리로 나눌 수밖에 없다. 그러나 덩어리 지어 변동이 일어날 때도 학생들은 그 조각 내에서 일어나는 변화를 상상할 수 있다(Thompson, 2011). 상황에 대한 심상을 구성하는 시작점에서부터 매끄럽게 사고하는 학생 W와 같은 학생들에게 측정을 위한 덩어리들은 그 내부에 빈 공간을 갖지 않는다.

Castillo-Garsow, Johnson, & Moore(2013)은 덩어리 짓는 사고를 하는 학생들이 덩어리 내에서 일어나는 일을 고려하기 위해서는 덩어리의 가장자리에서 일어나는 일을 먼저 상상하게 된다고 하였다. 학생 C 또한 마찬가지로 행성 문제에서 3.5초일 때의 속도를 구하기 위해

덩어리의 가장자리인 3초와 4초의 속도를 먼저 구해야 했고, 페인트 문제에서도 6분, 12분, … 후의 속도를 구하기 위해 한 시간 후의 속도를 먼저 구한 다음 이를 10등분 하였다. 다시 말해 이것은 덩어리 내의 값을 구하기 위해서는 한 덩어리의 끝까지 시간이 흐른 후 시간을 다시 되돌려 덩어리 내의 값을 다루어야한다는 것을 의미한다. 이러한 시간 순서의 부조화는 덩어리 사고를 이용하는 학생들이 역동적인 상황을 상상하는 동시에 이것에 대한 수학을 상상하는 것을 불가능하게 만든다(Castillo-Garsow, Johnson, & Moore, 2013).

변화에 대해 덩어리 짓는 사고의 생산물은 언제나 이산적이기 때문에 그 개수를 셀 수 있다(Castillo-Garsow, Johnson, & Moore, 2013). 학생 C가 양초 문제에서 양초의 길이를 한 시간 단위로 자르는 순간 한 시간에 녹는 길이는 '한 칸 씩' 셀 수 있는 존재가 된다. 반면 학생 W는 어떠한 종류의 세기 단위에도 얽매이지 않고 모든 순간을 연속적으로 주목할 수 있었기에 즉각 셀 수 있는 생산물을 만들어내지 않았다. 센다는 행동은 대상에 순서를 부여하는 것이므로 본질적으로 이산적이며 이는 매끄러운 심상을 갖는 것과는 상반되는 조작이다.

학생 C는 연속적으로 변화하는 독립변수의 양을 항상 일정한 단위로 자르고 그에 맞게 종속변수의 양도 잘라서 다루었다. 또한 두 변수의 관계를 그래프로 나타낼 때는 먼저 그 일정한 단위에 해당하는 점을 찍고 이를 선으로 연결하여 그렸다. 예를 들어 직사각형의 넓이에 대한 그래프를 그릴 때 학생 C는 가로의 길이가 1, 2, 3일 때의 점을 찍고 이 점을 연결하여 나타내었다. Castillo-Garsow, Johnson, & Moore(2013)가 지적했듯 덩어리 짓는 사고는 함수의 그래프를 몇 개의 점과 그것을 연결하는 곡선으로 보는 방식과 관련이 있고, 그래프에 대한 이러한 접근 방식과 덩어리 짓는 사고는 서로가 견고해질 수 있도록 지지하는 것으로 볼 수 있다. 덩어리 짓는 사고를 하는 학생들은 자신이 찍은 몇 개의 점 사이의 변화를 생각하기 어렵고 그 점에 의해 생성된 덩어리의 제약 때문에 그래프에 대해 매끄럽게 사고하는 것에 제약을 받게 된다.

학생 W는 연속적으로 공변하는 상황을 매끄럽게 추론함으로써 자신이 인식한 상황과 자신이 조직한 양적 구조 사이의 정합성을 확보한 것으로 보인다. 덩어리의 가장자리에 해당하는 몇몇 개의 값을 기준으로 연속 상황을 다루는 학생 C에 비해 학생 W는 모든 순간을 고려하고 있으므로 연속적인 변화 상황을 수학적으로 더욱 섬세하게 인식하고 다룰 수 있을 것이라 판단된다. 학생 W에게 함수의 그래프는 학생 C처럼 몇 개의 점을 지나는 곡선이 아니라 모든 순간의 변화를 나타내는 의미 있는 표상이므로 함수 학습에 대한 깊은 이해를 촉진할 수 있을 것이다. 또한 학생 W는 시간과 길이라는 두 양의 변화를 함께 연속적으로 다룸으로써 두 양 사이에서 일정하게 유지되는 비인 속도를 또 다른 양으로 사용할 수 있었고 이로 인해 길이, 시간, 속도 사이의 관계를 자유롭게 변환할 수 있었다. 이처럼 실수 상의 변수 값들의 연속적인 변화에 대한 사고는 학생들의 수학 학습에 매우 긍정적인 영향을 줄 수 있다(Thompson, 1994; Confrey & Smith, 1995; Castillo-Garsow, 2010).

두 학생은 문제 상황의 종류(페인트를 칠하는 속도-시간, 돌이 떨어지는 속도-시간, 직사각형의 넓이-가로의 길이, 양초의 길이-시간)와 두 양 사이의 관계(시간에 따라 속도가 일정하게 감소 또는 증가, 가로에 따른 넓이의 증가, 시간에 따른 일정한 속도)에 상관없이 각자 상당히 일관된 방식으로 두 양을 조직하였다. 이러한 공변 추론 방식은 문제 해결 시 표면적으로 드러나는 공식의 사용이나 대수적 조작 이면에서 보이지 않지만 강력한 기저로 작용할 것이라 생각할 수 있다. 다음 장에서는 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론 방식의 차이가 두 학생들의 문제 해결 과정에 구체적으로 어떻게 영향을 주었는지에 대해 논하고자 한다.

2. 추론 방식의 차이가 문제 해결에 미치는 영향

앞 장에서 기술한 바와 같이 두 학생은 문제를 해결하는 과정에서 여러 가지 행동의 차이를 드러내었다. 이 장에서는 이러한 문제 해결 행동의 차이가 두 양을 다루는 각자의 추론 방식과 밀접하게 관련이 되어 있을 것이라는 가설을 바탕으로 두 학생의 공변 추론의 차이가 문제 해결에 미치는 영향에 대해 논하고자 한다. 먼저 두 학생의 문제 해결 과정을 자세하게 다루기 위해 Carlson과 Bloom(2005)이 제시한 문제 해결 사이클([그림 1] 참고)로 각 문제의 풀이과정을 분해하였다. 이 사이클은 문제 해결 과정의 지향, 계획, 실행, 확인 단계를 한 사

이클로 간주하고 확인 단계의 판단에 따라 다시 이전 계획 단계로 돌아가거나 더 나아간 계획 단계로 나아가 또 다른 사이클이 시작한다고 본다([그림 2] 참고). 학생 C와 학생 W가 각 문제들을 해결하기 위해 필요했던 문제 해결 사이클 수는 [표 4]와 같다. 두 학생의 문제 해결 행동에 따라 그 과정을 이러한 큰 사이클로 나눈 후 필요에 따라 계획 단계를 다시 추측, 상상, 평가의 작은 사이클로 나누었다.

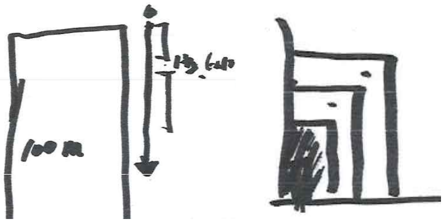
[표 4] 문제 해결 사이클 수
[Table 4] The number of problem solving cycles

	학생 C	학생 W
페인트 문제	6회	1회
행성 문제	2회	1회
직사각형 문제	2회	2회
양초 문제	5회	2회

두 학생의 문제 해결 사이클을 토대로 이들의 문제 해결 행동에 차이가 드러나는 부분을 명확히 기술하기 위해 Carlson과 Bloom(2005)의 다차원 문제 해결 틀의 단계-속성을 참조하여 문제 해결 과정의 특징을 분석하였다. 이 틀을 사용하면 문제 해결의 특정 단계에서의 특정 속성(자원, 발견술, 정서, 감시)을 함께 분석할 수 있어 학생들의 문제 해결 행동과 그 특징을 관찰한 내용을 기술하기에 적합하다고 판단하였다. 분석 결과, 두 학생이 연속적으로 공변하는 두 양에 대해 추론하는 방식은 문제 해결 과정 전반에 걸쳐 그들의 행동을 결정하는 중요한 기저로 작용하는 것으로 나타났다. 문제 상황을 처음 인식하는 지향 단계, 자신이 가진 문제 해결 자원을 이용해 문제 해결 전략을 발견하는 계획 단계, 계획 단계에서 해법의 실행여부를 판단하는 평가 기준, 확인 단계에서 반성이 이루어지는 범위, 마지막으로 문제 해결 전 과정에 대한 감시까지 학생들이 구성한 양적 구조의 차이는 문제 해결 과정의 전반에서 이들의 행동을 결정 및 제한하고 차이를 생성하는 요인으로 작용하는 것으로 보였다. 두 학생의 공변 추론의 차이가 문제 해결 과정에 미치는 영향에 대해 구체적으로 기술하면 다음과 같다.

1) 지향 단계에서 문제를 이해하는 방식의 차이

지향 단계에서 문제를 이해하기 위해 학생들은 흔히 미지수 정의, 그래프 그리기, 표 구성하기 등의 행동을 통해 문제 상황에 대한 개인적인 표상을 구성한다 (Carlson & Bloom, 2005). 두 학생의 공변 추론 방식의 차이는 문제 해결의 출발점인 지향 단계에서 문제 이해를 위해 구성하는 표상에서부터 차이를 생성하였다. 연속적으로 변화하는 두 양을 매끄럽게 추론할 수 있는 학생 W는 문제를 이해하기 위해 연속적인 공변 상황을 매끄럽게 담아내는 표상을 구성하였다. 예를 들어 페인트 문제에서 속도가 시간에 따라 일정하게 줄어드는 상황을 이해하기 위해 속도-시간에 관한 일차함수 그래프를 구성하였고 행성 문제에서도 동일한 방식으로 문제 상황에 대한 의미를 구성하였다. 반면 연속적으로 변화하는 두 양을 덩어리 지어 추론하는 학생 C는 문제 상황을 이해하는 순간부터 연속적인 양을 일정한 단위로 쪼갠 표상을 구성하였다. 예를 들어 행성 문제의 상황을 이해하기 위해 학생 C는 [그림 14](좌)와 같이 빌딩에서 돌이 떨어지는 장면을 그렸는데, 이때 이미 1초일 때의 순간을 끊어서 표현하고 있음을 확인할 수 있다. 직사각형 문제에서도 학생 C는 자신이 이해한 문제 상황에 대해 설명하며 가로의 길이에 따라 직사각형의 넓이가 늘어나는 장면을 [그림 14](우)와 같이 정수 단위로 끊어서 나타내었다. Castillo-Garsow, Johnson, & Moore(2013)에 따르면 변화에 대한 덩어리 혹은 매끄러운 심상의 구성은 학생의 의지와 관계없이 자동적으로 이루어진다. 즉 학생들은 문제 상황을 인식하는 순간부터 각자의 양적 추론의 차이로 인해 문제를 이해하는 방식에 차이가 발생하게 된다.



[그림 14] 행성 문제(좌)와 직사각형 문제(우)에서의 학생 C의 그림
[Fig. 14] Student C's drawings for the planet problem(L) and the rectangle problem(R)

2) 계획 단계에서 이용가능한 자원의 제한

공변 추론 수준은 학생 W가 학생 C보다 더 높았지만 행성 문제의 경우 학생 C만이 해결할 수 있었다. 이는 학생 C가 일정하게 증가 혹은 감소하는 유한 이산량에 대해 중간 값으로 균형을 맞출 수 있다는 아이디어를 계획 단계에 사용할 수 있었기 때문이다. 물론 두 학생 모두 시간에 따른 일정한 속도의 변화에 대해 가운데 지점을 기준으로 균형을 맞추려는 경향을 보였다. 학생 W 역시 페인트 문제에서 1시간 동안 $60m^2/h$에서 $50m^2/h$로 일정하게 감소하는 속도에 대해 가운데 30분을 기준으로 양쪽 변화의 균형을 맞추려고 시도했었다. 그러나 학생 W는 자신의 추측에 대해 자신 있게 정당화하지 못했고 행성 문제에서는 이 자원을 사용할 수 없었다. 왜냐하면 상황의 변화를 매끄럽게 추론하는 학생 W에게 학생 C와 같은 이산적인 접근은 사용할 수 없는 자원이었기 때문이다. 그러나 학생 C는 연속적인 변화 상황을 이산적인 양적 구조로 조직하였기 때문에 행성 문제의 일정하게 증가하는 연속량(속도)에 대해 이 자원을 사용할 수 있었다. 0초에서 1초 사이의 일정한 속도의 증가를 0m/s과 6m/s 사이에서 일정하게 증가하는 어떤 이산적인 값들의 변화로 본 학생 C는 변화하는 속도의 대푯값을 이용할 수 있었고 문제 또한 해결하였다.

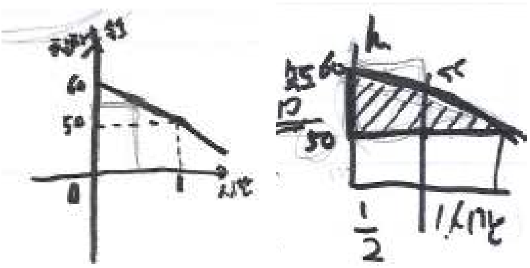
양초 문제에서 두 학생의 해법의 차이는 '속도'라는 자원의 사용 여부에 있었다. 학생 W는 시간과 길이의 변화를 매끄럽게 결합함으로써 두 양 사이에서 일정하게 유지되는 비인 '속도' 자원을 이용할 수 있었다. 속도 개념을 자유롭게 이용할 수 있었기 때문에 학생 W는 길이, 시간, 속도 사이의 유연한 변환을 통해 시간의 비에서 속도의 비를 이끌어내고, 다시 전체 시간의 비를 곱해 최종적인 양초 길이의 비를 구하였다. 하지만 학생 C의 경우 양초 A와 B의 길이를 각각 한 시간 단위로 쪼갠 x와 y를 '한 칸 씩' 더하거나 빼는 이산적인 방식으로 다루었다. 그 결과 '시간'이라는 양은 칸의 수를 세는 것에만 사용되었고 '속도'라는 양은 문제 해결에 사용되지 않았다. 학생 W가 구한 속도비 $5:8$와 학생 C가 구한 등식 $8x=5y$는 표면적으로 양립 가능해보일 수 있으나 학생 C에게 8과 5는 속도가 아니라 한 시간 단위인 속도-길이의 개수를 의미하므로 두 학생이 이용하고 있는 자원은 질적으로 다르다고 할 수 있다. 두 양초 사이의 속도비에 대해 질문하는 등 교사가 의도적으로 속도에 관한 대화를 유도했고 학생 W가 풀이를 설명할 때 사용하는 속도라는 단어를 명백히 들었음에도 불구하고 학생 C는 끝내 문제 해결 전 과정에서 속도 개념을 사용하지 않았다.

3) 계획 단계에서 해법의 추측 및 선택의 제한

Carlson과 Bloom(2005)은 문제 해결자들이 문제 해결의 계획 단계에서 가설적인 해법을 추측하고 상상하고 평가하는 하위 사이클을 거친다고 하였다. 이때 생산적일 것이라 판단된 해법은 다음 단계에서 실행되고 그렇지 않으면 새로운 추측을 생성하는 사이클을 반복하게 된다. 학생 C와 학생 W는 계획 단계의 하위 사이클에서 유사한 자원을 바탕으로 서로 다른 해법을 추측했고 심지어 같은 해법을 추측했더라도 각자 다르게 평가하여 최종 선택을 달리하는 모습을 보였다.

계획 단계에서 유사한 자원을 바탕으로 서로 다른 해법을 추측한 행동은 페인트 문제의 해결에서 나타났다. [그림 15]는 페인트 문제 해결 시 각각 학생 W와 학생 C가 그린 속도-시간 그래프이다. 두 학생은 유사해 보이는 이 일차함수 그래프와 '거리=시간×속도' 공식(이하 '거속시')을 자원으로 하여 페인트 문제의 해결 계획을 세우고자 하였다. 학생 W의 경우 지향 단계에서 문제 상황을 [그림 15](좌)의 그래프로 나타내었다. 이를 바탕으로 첫 번째 사이클의 계획 단계에서 '속도가 일정하게 변하기 때문에 0분에서 30분까지의 변화와 30분에서 60분까지의 변화가 같다. 따라서 가운데 부분의 속도를 구하면 될 것이다.'라고 추측하였다. 학생 C의 경우 다섯 번째 사이클의 실행 단계에서 교사의 권유에 따라 속도-시간에 관한 일차함수 그래프를 그리고 그 옆에 '거속시' 라고 적었다. 그 후 여섯 번째 사이클의 계획 단계에서 [그림 15](우)의 그래프를 바탕으로 '거리의 합이 넓이가 되므로 페인트를 칠한 거리의 합인 ([그림 15](우)에서 색칠된) 직삼각형의 넓이가 색칠한 방의 넓이' 라고 추측하며 속도의 변화량 10과 60분을 곱하여 삼각형의 넓이를 계산하였다. 매끄러운 연속 공변으로 추론하는 학생 W에게 일차함수는 시간에 따라 변화하는 속도를 의미하기 때문에 가운데의 속도를 고려하는 추측을 할 수 있었다. 그러나 덩어리 연속 공변으로 추론하는

학생 C에게 일차함수 그래프는 이전에 경험했던 어떤 ‘모양’을 복제한 것에 가깝기 때문에 넓이를 구한다는 추측이 가능했다고 볼 수 있다. 이처럼 연속적으로 공변하는 양들에 대한 추론의 차이는 문제 해결 자원을 사용한 추측의 구성에 영향을 주고 해법의 접근 방향을 결정하는 것으로 보인다.



[그림 15] 학생 W(좌)와 학생 C(우)의 속도-시간 그래프
[Fig. 15] Student W's(L) and student C's(R) speed-time graphs

두 학생은 같은 추측에 대해서도 이것을 상상하고 평가하는 과정에서 선택 여부를 달리하였다. 직사각형 문제에서 넓이의 변화를 나타내는 그래프를 그리기 위해 지향 단계에서 학생 C가 $f(1)=3$, $f(2)=12$, $f(3)=27$, $f(4)=48$을, 학생 W가 $(1,\ 3)$, $(2,\ 12)$, $(3,\ 27)$을 적어 각자 문제 상황을 유사한 표상으로 나타내었다. 계획 단계에서는 두 학생 모두 ‘넓이 값의 차이를 이용해야 한다.’는 발견술을 통해 해법을 탐색하기 시작한 것으로 보였다. 먼저 학생 C는 ‘각 넓이의 차 9, 15, 21, ⋯ 을 구하면 될 것이다.’ 라는 해법을 추측하여 이를 실행한 결과 9에서 시작하여 6씩 증가한다는 결론을 내놓았다. 그러나 학생 W는 학생 C처럼 추측하였으나 이를 상상하고 평가하는 과정에서 이 해법을 탈락시킨 것으로 보인다. 왜냐하면 학생 W는 모든 순간을 고려하며 매끄럽게 추론하기 때문에 $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일 때의 넓이만 갖고 차이를 구하는 방식을 받아들일 수 없었기 때문이다. 이것은 학생 W가 “(C처럼) 해봤는데 안 돼요.”라고 말한 것에서 명백히 드러난다. 학생 W는 다음 하위 사이클에서 자신의 양적 구조와 더욱 정합성을 이루는 전략인 ‘임의의 값인 $x+1$과 x의 차이를 구해야 할 것이다.’를 적합한 것으로 선택하여 $3(x+1)^2-3x^2=6x+3$ 라는 계산을 실행하였다. 이처럼 계획 단계에서 두 학생이 같은 해법을 추측 하더라도 이를 상상하고 평가하는 과정에서 자신의 양적 구조에 따라 전략의 선택 여부 및 문제 해결 계획 수립이 달라지는 모습을 볼 수 있었다.

4) 확인 단계에서 반성 가능한 범위의 제한

문제 해결 과정의 사이클을 점검하는 확인 단계에서 문제 해결자는 해법의 타당성 및 계산 결과의 정확성을 되돌아보고 즉각 평가하는 등의 행동을 보인다(Carlson & Bloom, 2005). 학생들은 이 단계에서 자신의 풀이의 타당성을 점검하거나 다른 관점에서 풀이를 생각해볼 수 있는 반성의 기회를 가진다. 그러나 개인이 스스로의 사고 과정을 다시 생각해볼 수 있는 범위의 한계에 대해 숙고해볼 필요가 있다. 본 연구의 분석 결과, 학생들의 반성은 각자가 문제 상황의 양에 대해 추론하는 방식과 그들의 양적 구조 안에서 이루어졌을 뿐 그것을 넘어서는 행동을 관찰할 수 없었다.

페인트 문제의 해결 시 학생 C는 네 번째 사이클의 확인 단계에서 자신의 풀이를 설명하던 중 연속적으로 변하고 있는 속도를 6분마다 이산적으로 조직한 자신의 방식에 문제가 있음을 알아차렸다. 이러한 반성을 통해 학생 C는 다음 사이클에서 속도-시간의 관계를 학생 W와 유사한 일차함수 그래프로 나타내었다. 그러나 [대화문 1]을 통해 알 수 있듯이 학생 C는 여전히 시간에 따라 매끄럽게 속도의 변화를 추론하는 것이 아니라 시간을 1분 혹은 1초 단위로 잘라서 다루고 있음을 알 수 있었다. 즉 덩어리 연속 공변 수준에 해당하는 학생 C는 시간 덩어리 내의 변화를 돌아보는 과정에서 반성을 통해 매끄러운 연속 공변 수준에 있는 학생 W와 유사한 그래프를 그렸지만, 그 반성은 여전히 덩어리 연속 공변 수준 내에서 이루어졌을 뿐 매끄럽게 두 양의 변화를 추론하지 않았다.

양초 문제 해결과정의 확인 단계에서 교사는 학생 C가 설정한 ‘양초 A와 B가 각각 한 시간 당 녹는 길이 x, y’를 한 시간 당 녹는 속도로 볼 수 있는 기회를 제공하기 위해 x, y를 길이가 아닌 다른 양으로 볼 수도 있다면 무엇이겠냐고 발문했다. 학생 C는 즉각 “시간?”이라고 대답했다가 교사의 잇따른 발문에 ‘속도’라고 답

하고 x와 y를 $x\,cm/h$, $y\,cm/h$로 바꾸어 적었다. 그러나 이후에도 학생 C는 여전히 x와 y를 길이로 보고 계산하였고 속도라는 단어를 언급하거나 속도-길이 개념 이상으로 다루지 않았다. 학생 C에게 자신이 다루는 양에 대한 반성의 기회를 제공했을 때 표면적으로는 이러한 피드백을 수용한 것처럼 보였으나 반성의 범위는 [그림 12]에서 자신이 구성한 길이와 시간 사이의 양적 구조를 벗어날 수 없었던 것으로 보인다.

양에 대한 추론 방식이 반성의 범위를 제한하는 것은 두 학생이 각자의 풀이에 대해 토론하는 상황에서도 드러났다. 직사각형 문제에서 학생 C는 가로의 길이가 1, 2, 3, 4, ⋯, 즉 정수일 때의 넓이를 구하고 그 차이를 통해 증가량이 '9에서 시작하여 6씩 증가' 한다고 변화를 설명하였다. 이에 대해 학생 W는 자신도 그렇게 생각해봤지만 가로의 길이가 정수가 아닐 때는 '9에서 시작하여 6씩 증가'가 성립하지 않는 것 같다며 임의의 가로 길이 x와 $x+1$ 사이의 넓이의 변화량을 구하였다. 그러나 학생 C는 그래프에 제시된 점이 정수이기 때문에 정수일 때만 고려해야 한다고 주장했고, 이에 대해 학생 W는 가로의 길이 뿐 아니라 심지어 증가량 또한 1이 아니어도 된다고 말하였다. 두 학생은 서로 다른 의견을 주장했지만 마지막으로 학생 C가 학생 W의 넓이의 변화량 $6x+3$이 자신의 답인 '9부터 6씩 증가'와 일치한다고 말하며 둘 사이에 합의가 이루어진 듯 보였다. 두 학생의 대화를 관찰한 결과, 학생 W의 공변 추론 수준에서는 학생 C의 방식을 받아들일 수 없고 학생 C의 공변 추론 수준에서는 학생 W의 방식을 받아들일 수 없는 것으로 보였다. 또한 서로 받아들일 수 있는 부분이 있다 해도 자신의 수준 안에서 이해할 수밖에 없는 것으로 여겨진다. 즉 다른 사람과의 토론을 통해 자신의 풀이에 대해 반성을 할 때도 학생들은 자신이 양을 다루는 수준, 본인 고유의 추론 방식을 뛰어넘어 새롭게 생각하는 것이 쉽지 않은 것으로 보인다. Moore, Carlson, & Oehrtman(2009)은 문제 상황에 대해 부정확한 심상을 구성했던 학생들도 계속된 반성을 통해 심상을 정제하여 정확한 해법을 도출하고 양적 관계에 대해 의미 있는 기술을 할 수 있었다고 하였다. 그러나 본 연구에 참여한 학생들의 경우 반성을 통해 정제된 심상 또한 본인이 초기에 구성한 양적 구조를 넘어서지 못한 것으로 보아 그 이상의 진전을 위해서는 단순한 반성의 반복보다 고차원적인 수준의 메타인지가 요구되는 것으로 보인다.

5) 문제 해결 전 과정에 대한 감시의 차이

문제를 해결하는 전 과정에서 학생들은 자신의 행동의 효율성과 효과성을 반성하는 메타인지 행동에 참여하게 된다. Carlson과 Bloom(2005)은 문제 해결 네 단계에서 일어나는 메타인지 행동이 감시, 즉 자신의 사고 과정과 생산물에 대한 반성 행동으로 가장 잘 드러난다고 하였다. 계획 단계에서의 감시는 "이것이 내가 풀려는 방향으로 가게 해주는가?" 혹은 "이런 접근이 얼마나 효과적인가?"와 같이 전략 및 계획의 효과성에 대한 사고를 포함하고, 실행 단계에서의 감시는 자신이 생산한 풀이 과정 및 결과에 대한 타당성을 되돌아보는 것을 포함한다(Carlson & Bloom, 2005). 이처럼 감시 행동은 문제 해결자에게 유용한 피드백을 제공하여 스스로 문제 해결 과정을 제어하고 효율적으로 해결할 수 있도록 도움을 준다.

[표 4]에서와 같이 페인트 문제, 행성 문제, 직사각형 문제, 양초 문제를 해결하는데 필요했던 문제 해결 사이클의 수는 학생 C가 각각 6회, 2회, 2회, 5회, 학생 W가 1회, 1회, 2회, 2회였다. 즉 학생 C는 평균 3.75회, 학생 W는 평균 1.5회 반복하여 학생 C가 문제를 해결하는데 학생 W보다 2배 이상의 사이클이 요구되었다. 학생 C는 문제를 해결하는 과정에서 학생 W에 비해 자신의 해법의 방향에 대해 명확히 파악하지 못한 채 시행착오를 겪는 모습을 보였고 이로 인해 더 많은 횟수의 사이클이 소요되었다. 학생 C는 계획 단계에서 자신이 사용할 자원 혹은 발견술이 최종 목표를 달성하는데 어떤 영향을 주는지를 긴 안목에서 예상하지 못하고 짧은 예상을 가진 계획의 선택과 실행을 반복하며 목표를 향해 더듬더듬 나아갔다. 이는 한 사이클이 끝날 때 마다 학생 C가 "여기서 어떻게 해야 할지 모르겠어요.", 혹은 자신이 적은 수식에 대해 "이게 뭔지는 설명할 수 있는데 왜 그런지는 잘 모르겠어요.", "제가 이런 걸 잘 못해서⋯." 등의 발언을 한 것을 통해 알 수 있다. 이에 비해 학생 W는 비교적 관찰 가능한 시행착오 없이 대부분 한 두 번의 사이클을 통해 문제를 해결해나갔다.

두 학생의 이러한 차이는 문제를 해결하는 과정에서

자신의 풀이의 효과성과 효율성을 관리할 수 있는 감시 행동과 관련이 있다. 문제 해결 과정에서 학생 W는 자신의 풀이에 대한 감시가 잘 이루어진 반면 학생 C는 일부 단계에서만 감시가 잘 이루어졌다. 이는 제시된 문제 상황이 연속적으로 두 양이 함께 변화하는 것이었으므로 매끄러운 공변 추론을 할 수 있는 학생 W가 학생 C에 비해 더욱 문제 상황에 정합성을 갖는 양적 구조를 조직했기 때문이라고 볼 수 있다. 학생 C는 연속적인 상황을 덩어리 혹은 이산적인 구조로 추론하였기 때문에 문제에 포함된 연속적인 변화를 잘 담아내지 못하는 양적 구조를 조직했다고 볼 수 있다. 이로 인해 목표를 향해 단 번에 나아갈 수 있는 자원 혹은 발견술의 접근이 용이하지 않아 문제 해결 과정의 효율성을 감시하는 데 상대적인 어려움을 겪었다. 이처럼 문제 상황에 포함된 양과 양들 사이의 관계에 정합성을 갖는 공변 추론 방식과 그에 따른 양적 구조의 구성은 문제 해결 전 과정을 효과적으로 제어하고 효율성을 획득하는 것에 도움을 주는 것으로 보인다.

V. 결론 및 제언

1980년에 미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics)가 An Agenda for Action에서 "문제 해결이 학교 수학의 중심이 되어야 한다."고 진술한 이후 문제 해결 분야는 큰 주목을 받아왔다 (Schoenfeld, 1992). 이에 따라 수학 전문가와 초보자 간의 차이 분석, Polya의 문제 해결 단계에 따른 해결 전략 지도, 문제의 해법을 다른 문제 상황에 전이하는 방식의 연구, 성공적인 문제 해결자의 고차원적 사고(메타인지, 신념, 성향) 등 다양한 연구들이 이루어졌다(Lesh & Zawojewski, 2007; Schroeder & Lester, 1989). 수학적 문제 해결의 지도에 관한 대부분의 연구들은 문제 해결자가 '어떻게' 문제를 해결하는가를 관찰하고 설명하는 것에 초점을 두고 있다. 그러나 이러한 연구들은 문제 해결 행동에 대한 사후설명일 뿐 학생들이 문제에서 다루는 특정 상황에 대해 '왜' 그렇게 사고할 수밖에 없는가에 대한 설명을 제공하기에는 다소 불충분하다. 문제 해결자의 사고 매커니즘을 탐구하기 위해서는 문제 해결 행위의 주체인 '학생'의 관점에서 그들의 문제 해결 과정을 이해하고 그들의 행동을 설명할 수 있는 과학적인 설명 가설의 제공이 필요하다. 이에 본 연구에서는 학생들의 사고방식 이해를 위해 양과 양 사이의 관계에 대한 추론의 관점에서 수학적 문제 해결을 바라보았다. 양적 추론은 대수적 추론의 근본 바탕을 이루므로(Ellis, 2011; Smith & Thompson, 2008; Steffe & Izsak, 2002; Thompson, 1994; Thompson, 2011) 학생들의 문제 해결 행동의 기저에서 문제 상황의 양에 대한 추론이 이루어지고 그것을 통해 문제를 이해하고 해결해나가는 것이라 예상할 수 있다. 이에 본 연구에서는 중학교 3학년인 학생 C와 학생 W를 대상으로 문제 상황에서 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론의 차이와 그것이 두 학생의 문제 해결에 미치는 영향에 대해 조사하였다. 연속적으로 공변하는 두 양과 관련한 문제 상황을 선택한 이유는 실세계 문맥의 역동적인 상황이 대부분 연속적으로 흐르는 시간을 내포하고 있기 때문에(Thompson & Carlson, 2016) 이와 관련한 학생들의 추론 방식이 문제 해결에서 중요하다고 판단했기 때문이다. 본 연구에서는 4 개의 과제([표 3] 참고)에 대한 학생들의 해결 과정을 분석하였다. 이 과제들은 모두 학생들이 두 양이 연속적으로 함께 변화한다고 인식한 것으로 판단되는 문제 상황을 포함하고 있다.

연구 결과는 다음과 같다. 첫째, 두 학생은 문제 상황의 종류(페인트를 칠하는 속도-시간, 돌이 떨어지는 속도-시간, 직사각형의 넓이-가로의 길이, 양초의 길이-시간)와 두 양 사이의 관계(시간에 따라 속도가 일정하게 감소 또는 증가, 길이에 따른 넓이의 증가, 시간에 따라 속도가 일정하게 유지)에 상관없이 각자 매우 일관된 방식으로 두 양을 조직하였다. 학생 C의 경우 문제 상황의 연속적인 변화에 대한 심상을 수학적으로 조직하는 과정에서 독립변수에 해당하는 양을 항상 일정한 단위로 자르고 그에 따라 변하는 양 또한 그 단위에 맞게 잘라서 다루었다. 페인트 문제에서는 시간을 6분으로, 행성 문제에서는 시간을 1초로, 직사각형 문제에서는 가로의 길이를 정수로, 양초 문제에서는 타는 양초의 길이를 한 시간 단위로 잘라서 다루는 등 연속적인 변화량을 다루는 데 있어 매우 일관된 추론을 보였다. Thompson & Carlson(2016)이 제시한 공변 추론에 대한 주요 수준([표 2] 참고)에 따르면 학생 C는 두 번째로 높은 수준인 '덩

어리 연속 공변'에 해당한다고 할 수 있다. 이와는 대조적으로 학생 W는 연속적으로 변화하는 양을 특정 단위로 자르지 않고 공변하는 다른 양과의 연속적인 관계를 드러낼 수 있는 방식으로 일관되게 추론하였다. 학생 W는 한 양이 연속적으로 변화할 때 이에 따라 변화하는 다른 양의 값을 매끄럽게 추론하였으므로 가장 높은 수준인 '매끄러운 연속 공변'에 해당한다고 할 수 있다.

둘째, 학생 C와 학생 W의 공변 추론 방식의 차이는 그들의 문제 해결 과정 전반에 걸쳐 영향을 미쳤다. 두 학생은 문제에 제시된 상황을 인식하는 순간부터 공변 추론 방식에 따라 상황을 서로 다르게 이해하였다. 계획 단계에서 문제를 해결하기 위해 접근할 수 있는 자원 또한 공변 추론 방식에 의해 제한되었다. 뿐만 아니라 계획 단계에서 서로 유사한 해법을 떠올리더라도 이것의 실행 여부를 판단하는 과정에서 공변 추론 방식에 따라 해법의 선택을 달리 하였다. 게다가 자신의 풀이를 점검하고 서로의 풀이에 대해 토론할 때도 학생들은 자신의 공변 추론 수준에 의해 제한된 범위 안에서만 반성이 가능했고 자신이 구성한 양적 구조를 벗어난 사고방식을 수용하는 것을 어려워하였다. 마지막으로 문제 해결 전 과정에서 풀이를 효율적으로 이끌어주는 감시 행동 또한 문제 상황에 정합성을 갖는 양적 구조를 구성했는가의 여부에 영향을 받는 것으로 보였다.

본 연구의 결과를 기존의 수학적 문제 해결 연구와 관련지어 논의하고자 한다. 첫째, 공변 추론 방식의 차이가 학생들의 문제 해결 전 과정에 걸쳐 행동을 결정하고 제한한다는 본 연구의 결과는 Schoenfeld가 제시한 문제 해결의 요소 중 '통제하기'와 관련된다. 통제하기는 문제 해결 과정에서 개인이 가지고 있는 인지적 자원들을 관리 및 배당하는 기능, 즉 계획, 감시, 평가하는 과정에서 행동을 결정하는 것과 관련된 지적 기능이다(장윤영, 2008). 이는 문제 해결의 성공 및 실패의 근본적인 요인으로(Schoenfeld, 2013) 특정 단계에 국한되지 않고 문제 해결 과정 전반에 걸쳐 영향을 미친다. 본 연구에서는 통제하기에 대한 기존의 일반적인 기술을 넘어 두 양이 연속적으로 공변하는 문제 상황에서 통제 역할을 하는 사고 메커니즘 중 하나를 구체적으로 밝혔다. 물론 공변 추론만으로 두 학생의 문제 해결 행동의 차이를 모두 설명할 수는 없지만 실세계 문맥에서 흔히 다루는 연속 공변 상황에서 문제 해결 전반을 통제하는 추론 방식 중 하나를 밝혀냈다는 것에 의의가 있다.

둘째, 본 연구의 결과는 문제를 해결하는 개인의 사고 과정이 양에 대한 추론 방식에서부터 매우 복잡하게 얽혀있기 때문에 단순히 수학적 자원, 전략 등의 분절적인 요소로 설명하기에는 어려움이 있음을 시사하고 있다. 앞서 기술한 바와 같이 수학적 문제 해결에 대해 수행된 여러 연구들은 문제 해결자의 행동을 분류하고 그 특성을 잘 설명하고 있다. 이러한 연구들은 대체로 수학적 자원과 문제 해결 전략을 구분 지음으로써 문제 해결 행동을 효과적으로 분석할 수 있는 토대를 제공하였다. 그러나 지금까지 많은 연구들이 이루어졌음에도 불구하고 문제 해결의 많은 측면들은 아직까지 이해되지 않고 있다(Carlson & Bloom, 2005). 이는 수학적 자원과 문제 해결 전략에 대한 분절적인 기술이 사후 설명 측면에서는 효과적이나 왜 그러한 결과가 발생하는지에 대한 가설을 제공하는 측면에서는 다소 불충분하기 때문이다. 본 연구의 결과 학생들이 문제 상황에 대해 구성한 양적 구조는 해당 문제 해결에 요구되는 수학적 자원의 선택, 그것을 사용하기 위한 전략의 선택까지 서로 긴밀하게 연결되어 있었다. 문제 해결 행동이 이러한 복잡한 네트워크를 바탕으로 이루어짐에도 불구하고 수학적 자원과 문제 해결 전략을 구분하여 기술하는 것은 문제 해결자의 사고 메커니즘을 극히 단순화시켜 바라보게 할 가능성이 있다. 이에 대해 구체적으로 두 가지 측면에서 논할 수 있다. 첫째, 다른 문제 해결 요소들과의 연결성을 배제한 채 수학적 자원만을 고려한다면 이것을 마치 문제 해결을 위해 소지해야 하는 도구처럼 다루게 되어 학생들이 가진 수학적 개념의 복잡성 및 모호성을 가릴 수 있다. 예를 들어 학생 C와 학생 W가 모두 '거리=시간×속도' 공식을 사용했을 때 두 학생 모두 동일한 자원을 사용했다고 기술할 수 있다. 그러나 양초 문제에서 학생 W가 속도를 하나의 양으로 보고 이 공식을 사용한 반면 학생 C는 속도를 한 시간 동안 타는 '길이'로 보고 공식을 사용하는 등 같은 자원에 대해서도 서로 다른 의미를 갖고 있음을 알 수 있었다. 이처럼 특정 수학적 개념은 단순히 문제 해결을 위해 개개인이 소지하고 있는 도구가 아니라 각자의 양을 다루는 방식에 따라 다양한 의미를 갖는 것이다. 둘째, 본 연구에 참여한 학생들의

경우 문제 해결 과정에서 수학적 개념과 별개로 일반적인 전략을 사용했다고 하기 보다는, 각 문제 상황에서의 양적 추론과 그에 따른 수학적 개념의 이해 방식에 의해 추측하는 전략과 그것의 실행여부의 판단이 제한됨을 알 수 있었다. 학생들은 자신만의 수학적 사고방식으로 문제 해결이라는 목표를 향해 끊임없이 나아갈 뿐이며 이때 학생이 어떤 수학적 개념이나 전략을 어떻게 사용했었는지는 그것을 관찰한 사람(교사, 연구자, 또는 학생 자신)이 그 상황을 설명하기 위해 해석하는 것이다. 따라서 수학적 자원과 문제 해결 전략을 분절지어 다루는 것은 문제 해결자의 사고 메커니즘 이해에 초점을 두었을 때 중요한 부분을 가리게 될 가능성이 있다. 학생들의 문제 해결 과정의 필연성을 이해하고 이를 바탕으로 실질적인 문제 해결 지도를 제공하기 위해서는 문제 해결 요소들 사이의 연결성과 상호작용에 주목한 연구들이 더욱 더 수행되어야 할 것이다.

최근 2015 개정 교육과정에서 문제 해결은 수학 교과의 여섯 가지 핵심역량 중 하나로 선정되어 미래 구성원으로서 학생들이 가져야 할 중요한 능력 중 하나로 주목받고 있다(교육부, 2015). 본 연구의 결과를 토대로 다음과 같이 제언하고자 한다. 첫째, 갈수록 그 중요성이 더해지는 수학적 문제 해결을 효과적으로 지도하기 위해 교사들은 학생들의 풀이 과정을 그들의 입장에서 바라보고 다양한 단원의 문제 해결에서 학생들의 사고 메커니즘에 대한 모델을 만들기 위해 노력해야 할 것이다. 둘째, 학생들의 공변 추론 방식이 세상의 변화를 구성하는 방식임을 인식하고 학생들이 스스로의 양적 구조를 자주 드러내어 고차원적인 반성이 일어날 수 있도록 하는 기회를 제공해야 할 것이다. 셋째, 추후에 연속 공변 상황에 대해 덩어리 지어 추론하는 학생이 매끄럽게 추론하기 위해 어떠한 교육적 처치가 요구되며 어떠한 방식으로 발달해 가는지에 대한 연구가 수행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Notification of the Ministry of Education No. 2015-74. [Vol. 8]

김지은, 신재홍 (2013). 유추 사상의 명료화를 통한 문장제 해결에 관한 연구. 수학교육논문집 27(4), 429-448.

Kim, J., & Shin, J. (2013). A study on solving word problems through the articulation of analogical mapping. *Communications of Mathematical Education 27*(4), 429-448.

김진호, 김인경 (2011). 수학적 문제 해결 연구에 있어서 미래 연구 주제: 델파이 기법. 初等 數學敎育 14(2), 187-206.

Kim, J., & Kim, I. (2011). Future research topics in the field of mathematical problem solving: Using delphi method. *Education of Primary School Mathematics 14*(2), 187-206.

박현정 (2007). 유사성 구성과 어포던스(affordance)에 대한 사례 연구. 수학교육 46(4), 371-388.

Park, H. (2007). The case study for the construction of similarities and affordance. *The Mathematical Education 46*(4), 371-388.

박현정, 이종희 (2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석. 수학교육학연구 16(2), 115-138.

Park, H., & Lee, J. (2006). An analysis of similarities that students construct in the process of problem solving. *Journal of Educational Research in Mathematics 16*(2), 115-138.

반은섭, 신재홍 (2012). 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 효과. 韓國學校數學會論文集 15(3), 535-563.

Ban, E., & Shin, J. (2012). The effects of mathematical problem solving depending on analogical conditions. *Journal of the Korean School Mathematics 15*(3), 535-563.

장윤영 (2008). 문제중심학습(PBL)에서의 수학적 문제 해결 행동 사례 연구. 박사학위논문, 단국대학교.

Jang, Y. (2008). *A case study on mathematical behavior through PBL in problem solving.* Doctoral dissertation. Dan Kook University.

전영배, 노은환, 강정기 (2011). 유사 문제 해결에서 구조적 유사성의 인식. 수학교육 50(1), 1-12.

Jun, Y., Roh, E., & Kang, J. (2011). Insight into an structural similarity in stage of similar mathematical problem solving process. *The Mathematical Education 50*(1), 1-12.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 3, CBMS issues in mathematics education* (Vol 7, pp. 114-162). Washington DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 352-378.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational studies in Mathematics, 58*(1), 45-75.

Castillo-Garsow, C. C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth* (doctoral dissertation). Arizona State University, Tempe, AZ. Retrieved from http://goo.gl/9Jq6RB

Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*, WISDOMe Monographs (Vol. 2, pp. 55-73). Laramie, WY: University of Wyoming.

Castillo-Garsow, C. C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics 33*, 31-37.

Chazan, D. (2000). *Beyond Formulas in Mathematics and Teaching: Dynamics of the High School Algebra Classroom*. New York, NY: Teachers College Press.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education 26*, 66-86.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. *In Early Algebraization* (pp. 215-238). Springer Berlin Heidelberg.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction 28*(4), 383 - 432. doi:10.1080/07370008.2010.511565

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning 2*, (pp. 763-804). IAP.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (2007). 앎의 나무: 인간 인지능력의 생물학적 뿌리 (최호영 역). 서울: 갈무리. (원저 1987년 출판)

Merriam (2007). 정성연구방법론과 사례연구 (고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형 역). 서울: 교우사. (원저 1998년 출판)

Moore, K. C., Carlson, M. P., & Oehrtman, M. (2009). The role of quantitative reasoning in solving applied precalculus problems. In Conference on research in undergraduate mathematics education (CRUME). Raleigh, NC.

Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America* (Vol. 1, pp. 298-304). Raleigh, NC: North Carolina State University. Retrieved from http://bit.ly/1b4sjQE.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast 10*(1/2), 9-34.

Schroeder, T. L. & Lester, F. K. (1989). Understanding mathematics via problem solving. In

P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, J., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 95-132.

Steffe, L., & Izsak, A. (2002). Pre-service middle-school teachers' construction of linear equation concepts through quantitative reasoning. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Noony (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1163 - 1172). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebra*. San Diego State University, Center for Research in Mathematics & Science Education.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 31-49). Morélia, Mexico: PME. Retrieved from http://bit.ly/10YE9al.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*, WISDOMe Monographs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2016). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking in mathematics. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics 87*(1), 67-85.

How does the middle school students' covariational reasoning affect their problem solving?

CHAEYEON KIM
Korea National University of Education
E-mail : chykim35@naver.com

JAEHONG SHIN†
Korea National University of Education
E-mail : jhshin@knue.ac.kr

There are many studies on 'how' students solve mathematical problems, but few of them sufficiently explained 'why' they have to solve the problems in their own different ways. As quantitative reasoning is the basis for algebraic reasoning, to scrutinize a student's way of dealing with quantities in a problem situation is critical for understanding why the student has to solve it in such a way. From our teaching experiments with two ninth-grade students, we found that emergences of a certain level of covariational reasoning were highly consistent across different types of problems within each participating student. They conceived the given problem situations at different levels of covariation and constructed their own quantity-structures. It led them to solve the problems with the resources accessible to their structures only, and never reconciled with the other's solving strategies even after having reflection and discussion on their solutions. It indicates that their own structure of quantities constrained the whole process of problem solving and they could not discard the structures. Based on the results, we argue that teachers, in order to provide practical supports for students' problem solving, need to focus on the students' way of covariational reasoning of problem situations.

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : problem solving, covariational reasoning, quantitative reasoning, smooth image of change
† Corresponding author