

# 미국 캘리포니아 주의 수학과 교육과정 고찰<sup>1)</sup> - 초등학교 도형 영역을 중심으로 -

강홍재<sup>2)</sup>

미국의 새 수학과 표준인 Common Core State Standards for Mathematics는 잘 알려진 것처럼 모든 학생이 대학에 진학하거나 직업에 종사하기 위한 준비를 위해 명료하고 일관된 틀을 제공하는 것을 목표로 개발되어, 현재 40개의 주가 이 새로운 표준을 채택하고 있다. 이 표준에 관한 최근 우리나라의 선행연구들은 표준을 Cluster Heading 수준에서 소개하고 있고, 표준의 수준에서 우리나라의 교육과정과 비교하고 있다. 그러나 실제로 각 세부 표준의 내용을 상세하게 해석한 내용은 수면 아래의 모습을 보여 준다. 캘리포니아 주의 수학과 표준의 내용을 상세하게 해석한 책이 Mathematics Framework for California Public Schools이다.

이 연구는 미국 캘리포니아 주의 수학과 표준인 California Common Core State Standards(CA CCSSM)와 이 표준의 해설서라고 부르기엔 적당한 Mathematics Framework for California Public Schools에서 제시한 초등학교 도형영역을 상세하게 살펴보는 것이 목적이다.

주제어: CCSSM, CA CCSSM, 수학적 내용 표준, 도형영역, 캘리포니아 주

## I. 들어가며

제7차 교육과정기(1997년~2007년)를 마지막으로 교육과정의 수시개정 체제로 전환한 우리나라는 초등학교의 수학과 교육과정을 2007년, 2011년 그리고 2015년 개정해 오고 있다. 외국의 수학과 교육과정을 살펴보는 것은 자국의 교육과정의 개정에 중요하고 유용한 기초적 자료를 제시할 수 있다. 이와 같은 맥락에서 미국, 일본, 영국, 러시아, 중국, 싱가포르, 인도, 독일, 프랑스, 뉴질랜드 등 제외국의 수학과 교육과정은 꾸준히 연구의 대상이 되어 왔는데 연구의 대상으로 주목을 받아 온 국가는 일본, 미국, 영국이다. 이들 국가 중에서도 2010년 6월 2일에 공표된 미국의 Common Core State Standards for Mathematics(이하 CCSSM)에 대한 연구가 최근 활발히 진행 중이다(이광호, 2010; 박경미, 2010; 김영옥, 2011; 장혜원, 2012; Noh, Huh & Ko, 2012; 김지원, 박교식, 이정은, 2014; 안지영, 전영주, 윤마병, 이종학, 2014).

김지원 외(2014)는 CCSSM에서 학년별로 구체화된 지침을 제공하고 있기는 하지만, CCSSM은 실제 학교 현장에서 구현되는 교육과정이라기보다는, 주별 또는 학교별 교육과

1) 이 연구는 2014학년도 진주교육대학교 교내연구비 지원을 받아 작성된 것임.

2) 진주교육대학교 수학교육과

정 개발을 위한 지침이라고 할 수 있기 때문에, 그 성격은 우리나라의 수학과 교육과정의 성격과는 다소 다르다고 언급하면서 NCTM(1989) 이후 20여년이 넘도록 미국의 수학교육의 흐름이 우리나라 수학과 교육과정 개정에 많은 영향을 주어 왔다는 것을 생각하면, CCSSM의 이해는 우리나라 수학과 교육과정의 개선을 위해 필수적이라고 말하고 있다.

그러나 지금까지 연구되어온 주제로는 ‘학년군’ 과 ‘수학적 과정’ 을 중심으로 한 분석(박경미, 2010), CCSSM이 제시한 개요의 Cluster Heading에 대한 소개(이광호, 2010; 김영옥2011), CCSSM에 대한 전반적 내용 소개(Noh et al., 2012)이다. 안지영 외(2014)는 우리나라의 2009 개정 수학과 교육과정과의 비교연구이고, 김지원 외(2014)는 가장 최근이라고 할 수 있는 2011 개정 수학과 교육과정과의 비교연구라는 점에서 의미를 찾을 수 있으나, 연구내용이 모든 학년의 모든 내용영역이어서 상세한 정보를 얻을 수 없는 조금의 아쉬움이 있다. 장혜원(2012)은 CCSSM의 전체의 흐름이라고 설명할 수 있는 수학적 실천기준을 자세히 소개하고 미주리 주 차원의 적용 사례까지 제시하고 있다.<sup>3)</sup>

이 논문은 우리나라 교육과정 문서에 해당하는 캘리포니아 주의 수학과 교육과정 문서인 California Common Core State Standards : Mathematics(California Department of Education, 2013)와 교육과정 해설서라고 부르기엔 적당한 Mathematics Framework for California Public Schools : Kindergarten Through Grade Twelve(California Department of Education, 2015; 이하 Mathematics Framework)의 초등학교 도형영역을 자세히 소개하고자 한다. Thomas B. Fordham Institute(2010)에서 펴낸 흥미로운 보고서는 The State of State Standards- and the Common Core- in 2010이다. (이 연구소는 2005년에도 The State of State Mathematics Standards 2005라는 제명으로 출판하였다.) 이 보고서는 50개 주와 콜롬비아 자치구의 영어과와 수학과와 표준을 평가했는데, 이에 따르면 CCSSM의 등급을 A-라 평가를 하고, Mathematics Framework for California Public Schools (2005)를 대상으로는 impressive A로 평가하였다. (수학과 교육과정에서 캘리포니아 주와 함께 A등급을 받는 주는 인디애나 주와 매사추세츠 주이나 impressive의 표현은 캘리포니아 주에만 제시하였다.) 이러한 맥락에서 미국에서 가장 큰 영향력을 미치는 캘리포니아 주의 교육과정(박경미, 2010)이라는 표현을 사용해도 좋을 듯하고, 2015년에 새롭게 발표된 Mathematics Framework에 대한 소개로 이 논문의 의미를 찾을 수 있을 것이다.

## II. Mathematics framework의 구성

### 1. 캘리포니아

Snyder & Dillow(2015)의 National Center for Education Statistics 2013 보고서에 따르면 2011년 현재 미국의 K~8학년은 약 3875만 명이고 9~12학년은 약 1605만으로 학교에 재학 중인 학생 수는 약 5480만 명이다. 이중 공립학교에 다니는 학생 수는 K~8학년이 약 3478만 명이고 9~12학년은 약 1475만 명이다. 미국 전역에 있는 학교의 수는 초등이 86,386개교이고 중등이 27,034개교, combined 학교가 14,799개교, 특수교육학교나 대안학교 등 그 외가 971개교이다. 이중 공립학교는 차례로 66,689개교, 24,357개교, 6,311개교, 971개교이

3) 알래스카, 미네소타, 네브래스카, 텍사스, 버지니아는 처음부터 CCSSM을 채택하지 않았고, 2014년 3월 인디애나를 시작으로 5월 사우스캐롤라이나, 6월 오클라호마가 관련 법안을 폐기하였고, 2015년 미주리와 테네시도 표준을 새롭게 쓰기로 하며 빠져 40개 주만 남은 셈이다.

다. 교사의 수는 약 352만인데 공립학교의 교사가 약 310만 명이라 밝히고 있다.

캘리포니아 주의 초- 중등의 재학생은 약 630만 명으로 그중 K~8학년은 약 430만 명이다. (미국의 모든 주가 그렇듯 캘리포니아 주도 그 학교의 형태가 다양하다. 주 교육국의 통계를 보면 Elementary, K-12, Middle, Junior High, High, Combine, Juvenile Court(소년원)의 학생 수를 제공하고 있다. 따라서 K-8학년으로 정리하는 것이 그 중 근삿값을 나타낸다고 볼 수 있다.) 초- 중등의 재학생 수가 200만 명이 넘는 주는 5개의 주(텍사스 주 약 500만, 뉴욕 주 약 270만, 플로리다 주 약 267만, 일리노이 주 약 208만 명)인데 이 가운데서도 압도적으로 많다. 재학생의 수가 가장 적은 와이오밍 주는 약 9만 명인데 이와 비교하면 약 70배 학생들이 캘리포니아 주에 재학하고 있다고 볼 수 있다. 그리고 공립학교 교사의 수는 약 30만 명이다. 미국의 공립학교 교사 10명 중 1명은 캘리포니아 주에서 근무하고 있는 셈이다. 이러한 배경에서 미국의 수학교과서 3대 출판사라 불리는 McGraw-Hill, Houghton/Harcourt, Pearson이 캘리포니아 주의 수학과 교육과정에 촉각을 세우는 것도 당연해 보인다. 미국에서 가장 큰 영향력을 미치는 캘리포니아 주의 교육과정(박경미, 2010)이라는 표현을 이러한 맥락에서도 사용해도 좋을 듯하다.

## 2. 캘리포니아 주 기존의 수학과 교육과정

기존(1997년)의 캘리포니아 주 수학과 교육과정의 정식 명칭은 Mathematics Content Standards for California Public Schools: Kindergarten Through Grade Twelve이다. 이 내용 기준은 서론에서 성격과 목표, 기준의 조직, 기준과 공학에 대하여 제시한 후 유치원부터 7학년까지의 기준을 제시한다. 다음 8학년부터 12학년에 대한 소개와 더불어 기준을 제시하며, 마지막에 용어사전(glossary)을 제공하는 72쪽짜리 문서이다.

Mathematics Framework for California Public Schools(2006)는 우리나라의 이전 교육과정 해설서와 유사하다고 말할 수 있는 400쪽에 해당하는 책이다. 이 책은 서론, 1장: 지도 원리와 주요 요소, 2장: 내용 기준, 3장: 학년 수준 고려, 4장: 수업 전략, 5장: 평가, 6장: 보편적 접근, 7장: 교사, 학생, 학부모, 행정가의 책무, 8장: 교사 연수, 9장: 공학 도구 사용, 10장: 교수 자료 평가 준거, 부록의 순으로 구성되어 있다.

특히 2장에서는 내용 기준을 모두 제시하고 각각의 기준에 적절한 예시 문항 또는 교수법 등을 아주 상세하게 다른 색상으로 제시하고 있고, 3장에서는 캘리포니아 주가 정한 Key Standards에 대한 구체적 설명과 다른 기준과의 관계를 상세히 적고 있다.

1장에서 언급하였듯이 Thomas B. Fordham Institute(2010)의 보고서는 CCSSM의 등급을 A-라 평가를 한 반면 캘리포니아의 Mathematics Framework(2005)는 impressive A등급으로 평가하였다. 실제로 CCSSM과 Mathematics Framework(2005)의 K-5학년을 비교해보면 학습 내용의 변화(a new focus in the CCSS)는 거의 없고(1곳), 학습 시기의 변화(move from grade A to B in the CCSS)는 많은 부분에서 찾을 수 있다. 이 내용은 논문의 주제를 벗어나고 게다가 주 교육국이 학부모와 교육 당사자들을 대상으로 펴낸 책(A Look at Kindergarten Through Grade Six in California Public Schools : Transitioning to the Common Core State Standards in English Language Arts and Mathematics)에서 구체적으로 비교된 표를 볼 수 있다.

## 3. CA CCSSM과 Mathematics Framework

2010년 8월 2일에 캘리포니아 주 교육부에 의해 채택되고 2013년 12월에 수정된 수학과 교육과정의 정식 명칭은 California Common Core State Standards Mathematics(이하

CA CCSSM이다. 이 내용 기준은 소개를 시작으로, 수학적 실천에 대한 기준의 설명, K-8 기준, 고등(higher) 수학 기준, 용어사전(glossary)을 차례대로 제공하는 151쪽의 문서이다. 앞에서 언급한 것처럼 이 내용은 모두 Mathematics Framework에 수록되어 있다. 그리고 이 문서에 CA CCSSM은 두 형태의 기준, 수학적 실천 기준과 수학적 내용 기준, 이 있음을 밝히고 있다. 수학적 실천 기준(Standards for Mathematical Practice, 이하 MP)은 장혜원(2012)이 잘 설명하고 있어 여기서는 생략하고 다음 표만 제시하기로 한다.

<표 1> CCSSM의 수학적 실천(장혜원, 2012)

표기	수학적 실천
MP.1	문제를 이해하고 끈기 있게 풀기
MP.2	추상적으로, 정량적으로 추론하기
MP.3	실행 가능한 주장을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하기
MP.4	수학으로 모델링하기
MP.5	적절한 도구를 전략적으로 사용하기
MP.6	정확성에 주의를 기울이기
MP.7	구조를 찾고 활용하기
MP.8	반복된 추론에서 규칙성을 찾고 나타내기

CA CCSSM의 수학적 내용 기준은 CCSSM과 거의 같다고 할 수 있다. 거의라고 표현한 이유는 K~5학년에서 삭제나 수정이 없이 오히려 CCSSM의 기준 세 곳에 기준을 덧붙이고 있다. <표 2>에서처럼 마지막에 CA를 넣어 CCSSM과의 차이를 표현하고 있다. 표기 2.MD.7은 2학년 Measurement and Data 영역 기준 7을 의미하고, G는 Geometry를 OA는 Operations and Algebraic Thinking을 의미한다. 표기처리에서도 알 수 있는 것처럼 2.MD.7과 4.G.2는 CCSSM에 덧붙인 것이고, 5.OA.2.1은 기준 2의 하위기준이다.

<표 2> CA CCSSM에 추가된 내용

표기	기준
2.MD.7	Know relationships of time (e.g., minutes in an hour, days in a month, weeks in a year). CA
4.G.2	(Two-dimensional shapes should include special triangles, e.g., equilateral, isosceles, scalene, and special quadrilaterals, e.g., rhombus, square, rectangle, parallelogram, trapezoid.) CA
5.OA.2.1	Express a whole number in the range 2-50 as a product of its prime factors. For example, find the prime factors of 24 and express 24 as $2 \times 2 \times 2 \times 3$ . CA

Mathematics Framework은 2012년 3월 관계자들의 만남을 시작으로 2013년 4월에 초안을 공고하고 이후 대중의 의견 수렴을 거쳐 2013년 12월에 최종적으로 주 교육부에 의해 채택되었다. 책으로 출판된 것은 2015년 3월이다(California Department of Education, 2014b). 이 책의 목차는 소개, 개요, 과도기의 유치원, 유치원-8학년 기준, 고등 수학 소개, 대수 I, 기하, 대수 II, 수학 I, 수학 II, 수학 III, 미적분, 통계와 확률, AP 통계와 확률, 보편적 접근, 교수 전략, 적용, 수학교수에서의 공학도구, 평가, 교수 자료, 부록, 용어사전, 참고문헌, Resources로 구성되어 있고, 무려 934쪽에 달하는 두꺼운 책이다.

특히 ‘과도기의 유치원’의 장에서는 기존의 주 교육과정 아래에서 학습한 학생들이 유치원에 입학하면 새 교육과정에 적용되므로 학부모와 교사들에게 두 교육과정의 차이를 충분한 지면(22쪽)을 통해 상세하게 설명하고 있다. 그리고 유치원에서 AP 통계와 확률까지의 수학적 내용 기준을 모두 제시하고 각각의 기준에 적절한 예시 문항 또는 교수법 등을 아주 상세하게 제시하고 있다.

[그림 1]은 CA CCSSM이 제공하는 각 학년의 내용영역이다. K- 5학년과 6- 8학년에 경계를 주고 있고, 내용영역의 이름도 다르다. 김지원 외(2014)는 CCSSM은 평면도형의 둘레와 넓이, 입체도형의 겉넓이와 부피를 기하영역에 포함시키고 있다고 하였으나, K- 5학년은 측정과 자료 영역에서 학습하도록 하지만 6- 8학년은 이에 해당하는 내용을 도형 영역에서 학습하도록 하였다. 따라서 내용영역은 K- 5학년을 비교하는 것이 타당하다고 생각된다. 이러한 맥락에서 연구자는 다음 장에서 K- 5학년의 도형 영역을 살펴보기로 한다.

Grade	K	1	2	3	4	5	6	7	8	Higher Mathematics Conceptual Categories
K-8 Domains	Counting and Cardinality (CC)						Ratios and Proportional Relationships (RP)		Functions (F)	Functions (F)
	Operations and Algebraic Thinking (OA)						Expression and Equations (EE)			Algebra (A)
	Number and Operations in Base Ten (NBT)						The Number System (NS)			Number and Quantity (N)
	Number and Operations - Fractions (NF)									
	Measurement and Data (MD)						Statistics and Probability (SP)			Statistics and Probability (SP)
	Geometry (G)						Geometry (G)			Geometry (G)

[그림 1] CA CCSSM의 내용 영역(California Department of Education, 2015b)

### III. Mathematics framework의 도형영역 내용<sup>4)</sup>

#### 1. 유치원

Mathematics Framework는 학생은 물체의 모양과 상대적인 위치를 경험함으로써 기하학적 개념과 공간적 추론이 성장한다고 언급하면서 다음의 기준을 제시하고 있다.

첫 번째 Cluster Heading은 ‘모양을 인식하고 설명하기’이다. 모양은 괄호를 사용해 정사각형, 원, 삼각형, 직사각형, 육각형, 정육면체, 원뿔, 원기둥, 구를 제시하고 있다.

<표 3> 유치원의 ‘모양을 인식하고 설명하기’ 기준

1.	모양의 이름을 사용해 주위에 있는 대상들을 설명하고, 이 대상들의 관계적 위치를 above, below, beside, in front of, behind, next to의 용어를 사용해 설명하기.
2.	모양의 크기나 방향에 상관없이 정확하게 명명하기.
3.	2차원(평면에 놓여 있는, 평평한) 또는 3차원(입체의)으로 모양을 인식하기.

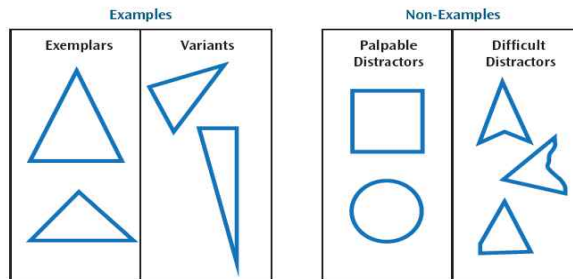
4) 연구자는 shape을 모양, figure를 도형, object를 대상으로 하여 번역하였음을 미리 밝혀 둔다.

학생들이 주위의 대상들을 설명할 때 위치적 단어를 사용(K.G.1)하도록 하면서 규준에서 제시한 단어들 외에도 in과 out, inside와 outside, down과 up, above와 below, over와 under, before와 after, top과 bottom, front와 back, right와 left, on과 off, begin과 end 그리고 near과 far를 이와 관련된 단어들의 예로 들고 있다.

또한 학생들은 그들의 일상과 기하학적 모양을 연결시켜 공간 감각을 키우기 때문에 교실 내·외부에 있는 2·3차원 모양들의 이름을 지어보는 기회와 상대적인 위치로 설명할 수 있는 기회가 학생들에게 필요하다고 언급하면서 그런 기회를 다음과 같은 질문으로 제공하게 하고 있다. · Which way is the cafeteria? · Which shape is near the rectangle? · Where is the green ball? · What types of shapes do you see on the floor of the basketball court?

학생들은 구, 정육면체, 원기둥, 원뿔과 같은 수학적 용어로 3차원 모양을 명명하고 설명하기 시작하기 때문에 MP.6, MP.7에 관련된 질문에 답할 수 있도록 하고 있다. 규준 K.G.1에 대한 예로 다음을 들고 있다. 교실에서 직사각형을 찾게 하고 그들이 보고 있는 직사각형의 상대적 위치를 설명하게 함, 교사가 대상-아이스크림 콘, 주사위 또는 공-을 들고서 학생들에게 각 모양을 인식하게 함, 교사가 대상을 다른 대상의 바로 옆에, 뒤에, 위에, 아래에, 옆에, 앞에 두고 “Where is the object?” 와 같은 위치적 질문을 함.

유치원 아이들은 크기가 다른 모양의 다양성과 다른 방향을 가지더라도 이를 2차원 모양들과 관련이 있음(K.G.2)을 배워야 한다고 언급하면서 매일 볼 수 있는 원, 삼각형, 정사각형과 같은 모양을 이름 짓고 이 범주의 예와 예가 아닌 것을 구별해야 함을 강조하고 있다. 학생들은 각 모양의 범주에 대한 직관적 이미지를 개발시켜야 한다고 하면서 삼각형을 예로 들어 [그림 2]를 제시하고 있다.



[그림 2] 삼각형의 예와 예가 아닌 것(California Department of Education, 2015a)

[그림 2]에 대하여 설명하면서 범주의 일반적인 시각적 원형을 Exemplars로, 범주의 다른 예를 Variants로 해서 예를 2개의 관점에서 나누어 살펴게 하고, Exemplars와 조금 또는 전체적으로 유사성이 없는 것을 Palpable distractors로, 시각적으로는 예와 비슷해 보이나 적어도 하나의 정의적 속성이 결여된 것을 Difficult distractors로 해서 예가 아닌 것도 이 두 시각에서 살펴게 하고 있다.

대부분의 유치원 아이들은 거꾸로 된 삼각형을 그것의 방향 때문에 삼각형으로 인식하지 못한다고 하면서 삼각형은 항상 꼭짓점이 위에 있고, 정삼각형이라는 오개념을 없애기 위해 다양한 방향과 형태의 삼각형을 학생들은 경험해야만 한다고 강조하고 있다. 그리고 꼭짓점의 방향이 아래와 위에 있는 정사각형을 교사들이 ‘diamond’라 부르는데 방향이 비정형적이지만 정사각형이라는 사실에 혼동을 주므로 이러한 이름의 소개는 피해야 할 것이라고 조언하고 있다.

두 번째 Cluster Heading은 ‘모양을 분석하고, 비교하고, 창출하고, 구성하기’이다.

<표 4> 유치원의 ‘모양을 분석하고, 비교하고, 창출하고, 구성하기’ 기준

4.	크기와 방향이 다른 2차원, 3차원 모양들의 유사성, 차이점, 일부분(예, 변의 수, 꼭짓점의 수) 그리고 그 밖의 속성(예, 등변을 가지는)을 설명하기 위해 비형식적인 용어를 사용해 비교·분석하기.
5.	부품(예, 막대와 점토 공)으로 모양을 쌓거나 모양을 그려서 주위의 모양을 만들기.
6.	큰 모양을 작은 모양들로 구성하기. 예를 들어, 사각형을 만들기 위해 두 개의 삼각형으로 변이 꼭 맞게 연결할 수 있습니까?

새로운 형태의 모양을 만들기 위해 두 개 또는 그 이상의 모양을 비교하거나 다루는 것은 K.G.1- 3에서 제시한 도형들을 인식하고 분류하는데 도움을 제공한다. 이러한 인식과 분류에 대한 이해가 일학년 때의 Cluster Heading인 ‘모양과 그 속성으로 설명하기’의 기반을 닦는 것이라고 하고 있다.

학생들이 비공식적 용어로 모양들 사이의 유사점과 다른 점을 설명(K.G.4)하는 이러한 경험은 원기둥의 밑면이 원이고, 정육면체의 면이 정사각형이라는 것과 같이 3차원 모양이 어떻게 2차원 모양으로 구성되는 지를 이해하는데 도움을 준다고 하면서 결국 이러한 기하학적 속성에 대한 이른 탐구에서 학생들은 도형의 범주가 어떻게 다른 범주에 포함되는가에 대하여 알게 된다고 언급하고 있다.

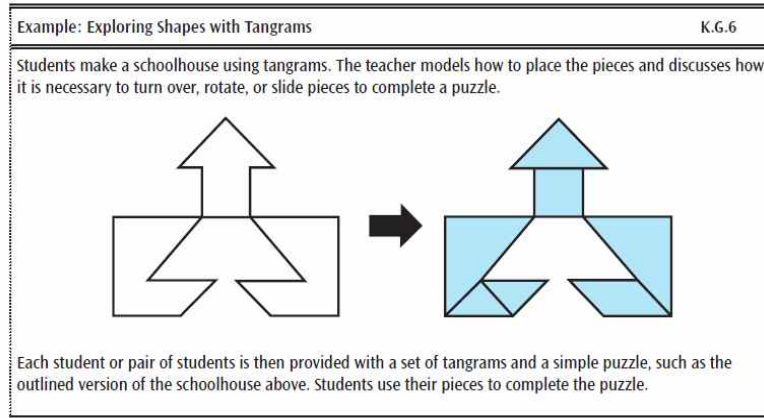
학생들은 변의 길이가 다른 다양한 삼각형, 사각형, 육각형을 연구대상으로 해야 한다고 지적하면서, 먼저 일상의 언어를 사용해 모양들을 설명하고 그 후에는 변, 꼭짓점과 같은 기하학적 용어를 포함한 어휘를 늘려야 한다고 말하고 있다. 그리고 그림을 이용한 표현, 구체적 조작물뿐만 아니라 공학을 사용해 학습할 수 있는 기회는 2차원과 3차원 모양에 대한 설명적 어휘와 이해를 진전시키는데 큰 도움이 될 것이라고 하고 있다.

유치원에서는 아이들이 다양한 부품들(예, 점토, 접착제, 테이프, 막대기, 종이, 빨대)로 모양을 쌓거나 그림을 그려서 일상생활에서 관찰되는 모양을 만들도록(K.G.5) 권유하면서 다시 한 번 이차원 모양은 평평하고 3차원 모양은 평평하지 않기 때문에 아이들이 2차원 모양은 그리고 만들어 보아야하고, 3차원 모양은 쌓아 보아야 한다고 강조하고 있다.

학생들은 큰 모양을 작은 모양들로 만들고, ‘사각형을 만들기 위해 두 개의 삼각형으로 변이 꼭 맞게 연결할 수 있습니까?’ 라는 질문에 답할 수 있도록 해야 한다(K.G.6). 모양을 만드는 것은 유치원에서 중요한 개념이라 강조하면서 간단한 모양들의 인식과 분류에서 새로운 모양을 만들기 위해 두 개 또는 그 이상의 모양들을 조작하는 것으로 나아가야 한다고 밝히고 있다. 아이들은 퍼즐 조각들을 돌리고 뒤집고, 배열해서 제시된 그림으로 만들고, 마지막으로 새로운 모양을 만들기 위해 모양들을 조작할 수 있도록 하고 있다.

퍼즐은 학생들에게 재미있고 의미 있는 방법으로 공간 관계의 적용과 문제해결 기술을 습득할 기회를 제공한다. 패턴 블록과 탱그램은 학생들이 2차원 모양을 다룰 때 종종 이용된다.

직각을 가진 모양(정사각형, 직사각형, 직각삼각형)의 조립과 분해는 나중 학년에서 학습할 중요한 기하학적 개념(변환과 같은)에 중요한 기초를 제공한다. 상호적 탱그램 퍼즐의 예들은 NCTM의 웹사이트 주소를 제공하고 그곳에서 구할 수 있음을 알리고 있다.



[그림 3] K.G.6의 예(California Department of Education, 2015a)

## 2. 1학년

1학년에서는 학생들이 기하학적 모양의 속성과 이러한 모양들의 구성과 분해에 대해 추론하는 것이 지도의 중요한 영역이라고 하며 다음의 기준을 제시하고 있다.

Cluster Heading은 ‘모양과 그 속성으로 설명하기’이다.

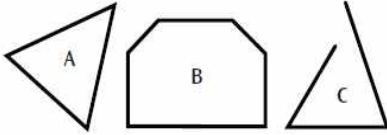
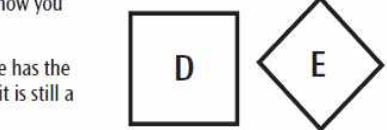
<표 5> 1학년의 ‘모양과 그 속성으로 설명하기’ 기준

1.	정의적 속성과 비정의적 속성을 구별하고, 정의적 속성을 지니기 위해 모양들을 만들어보고 그려보기.
2.	2차원 (평면)모양(직사각형, 정사각형, 사다리꼴, 삼각형, 반원, 사분원) 또는 3차원 (입체)모양(정육면체, 직육면체, 직원뿔, 직원기둥)으로 합성 모양을 만들고 그 모양에서 새로운 모양을 구성하기.
3.	원과 직사각형을 2개와 4개의 동일한 부분(share)으로 분할한 모양을 ‘반’, ‘사분의’ 용어를 사용해 설명하고, half of, fourth of, quarter of의 구(句)를 사용하기. 부분 2개 또는 부분 4개로 전체를 설명하기. 좀 더 많은 부분으로 분해하면 부분이 작아진다는 예를 이해하기.

1학년 학생은 기하학적 속성에 따라 모양을 설명하고 분류해야 하고, 그리고 그들은 모양이 제시된 범주(예, 정사각형, 삼각형, 원, 직사각형, 마름모, 육각형, 사다리꼴)에 왜 속하는지에 대해서도 설명해야 하므로 학생들은 정의적 속성(예, ‘육각형은 여섯 개의 곧은 변을 가지고 있다.’)과 색깔, 크기, 방향과 같은 비정의적 속성을 구별해야 한다(1.G.1).

속성은 모양의 특징 중의 어느 것을 나타낸다. 학생들은 2차원 모양을 설명하기 위해 속성의 용어(예, 변의 수, 꼭짓점(점)의 수, 곧은 변, 닫힌 도형)를 사용하는 것을 배워야 한다. 학생들은 ‘오른쪽이 올라갔다’ 또는 ‘빨갰다’라고 삼각형을 설명할지도 모르지만, 이런 것들은 모양이 삼각형인지의 여부와 관련이 없기 때문에 비정의적 속성이라는 것을 배워야 한다. 이 내용과 관련해서 Mathematics Framework는 [그림 4]를 제공하고 있다.



Examples: Using Attributes to Name Shapes	1.G.1
Teacher: "Which figure is a triangle? How do you know?" Student: "I know that shape A has three sides and the shape is closed up, so it is a triangle. Shape B has too many sides, and shape C has an opening, so it's not closed."	
Teacher: "Are both figures presented here squares? Explain how you know." Student: "I know that a square has 4 sides and that each side has the same length. Even though figure E has a point facing down, it is still a square."	

[그림 4] 1.G.1과 관련된 MP1, 3, 4, 7.(California Department of Education, 2015a)

학생들은 정규적 그리고 비정규적인 모양을 접하게 된다. 1학년 때 학생들은 아래의 모양들이 왜 삼각형이 아닌지를 설명할 때 속성의 용어를 사용해야 한다고 설명한다.



[그림 5] 삼각형이 아닌 예(California Department of Education, 2015a)

학생들은 주어진 3차원 모양을 적절한 용어를 사용하여 설명할 기회가 있어야 한다(예, 면의 수, 꼭짓점/점의 수, 모서리의 수). 예를 들어, 원기둥은 (면이라 생각하지 않는) 곡면과 연결된 2개의 둥근 면을 가진 3차원 모양이지만 1학년 학생은 캔으로 보인다고 말할지도 모른다. 이때 교사는 적절한 수학용어를 정의하고 사용해서 학습을 지원해야 한다.

학생들은 정의적 속성을 사용해 2차원 모양과 3차원 모양을 비교하고 대조할 기회가 있어야 한다고 하며 다음의 두 예를 제시하고 있다.

- 학생들은 직사각형과 정육면체 사이에서 2가지의 공통점과 차이점을 찾아야 한다.
- 원과 구가 주어졌을 때, 학생들은 3차원으로의 구, 그리고 모양이 모두 둥글다는 것을 인식해야 한다.

모양을 구성하고 분해하는 효과를 말하고, 사용하고, 시각화하는 능력은 중요한 수학적 기능(1.G.2)이다. 이것은 기하학에 관련될 뿐만 아니라 수를 구성하고 분해하는 아이들의 능력과도 관련된다.

학생들은 새로운 도형을 만들기 위해 패턴 블록, 플라스틱 도형, 탱그램 또는 컴퓨터를 사용해도 된다. 교사는 학생들에게 잘려진 도형들을 주고서 특별한 도형을 만들도록 주문할 수 있다. 정사각형과 직사각형으로, 그리고 직각삼각형들로 정사각형과 직사각형을 만들어 보는 것은 장애의 기하학적인 사고를 위해 특별히 중요하다.

학생들이 무언가를 같은 크기의 조각으로 잘랐을 때, 각각의 조각이 처음 전체의 반이 됨을 인식하기 위해서 다른 크기의 원과 직사각형으로 경험해 보는 것이 필요하다(1.G.3). 아이들은 2개의 서로 다른 전체의 반이 반드시 같은 크기이지 않음을 인식해야만 하고 동일한 부분(share)을 많이 분해하려면 동일한 부분(share)이 작아짐도 추론해야 한다.

3. 2학년

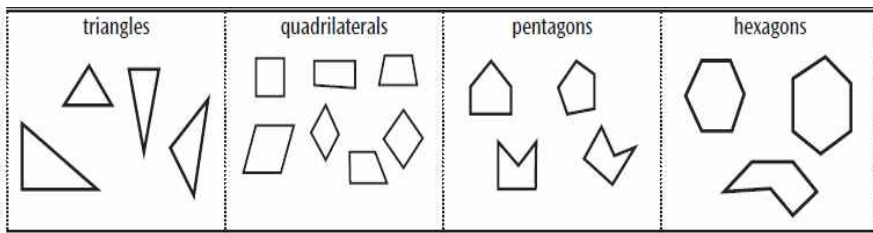
1학년 때 학생들은 기하학적 모양의 속성에 대하여 추론하였다. 2학년에서는 학생들이 모양의 변과 각을 조사해 설명하고 분석하는 것이 지도의 중요한 부분이다. 이 학습은 이후 학습할 넓이, 부피, 합동, 닮음과 대칭에 대한 토대를 발달시킨다고 하며 다음의 기준을 제시하고 있다.

Cluster Heading은 ‘모양과 그 속성으로 설명하기’ 이다.

<표 6> 2학년의 ‘모양과 그 속성으로 설명하기’ 기준

1.	각의 개수나 동일한 면의 개수와 같은 특별한 속성을 가진 도형을 인식하고 그리기. (크기는 직접적으로나 시각적으로 비교하고 측정으로는 비교하지 않는다.) 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형과 정육면체 인식하기.
2.	직사각형을 같은 크기의 정사각형으로 행과 열로 분할하고 그 정사각형의 개수 세기.
3.	원과 직사각형을 2개, 3개, 4개의 동일한 부분(share)으로 분할하기. halves, thirds, half of, a third of 등의 용어를 사용해 부분을 설명하고, 2개의 halves, 3개의 thirds, 4개의 fourths로 전체를 설명하기. 같은 전체의 동일한 부분(share)은 같은 모양이 필요 없음을 인식하기.

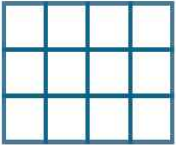
학생들은 삼각형, 사각형(정사각형, 직사각형, 평행사변형과 사다리꼴), 오각형, 육각형과 정육면체를 인식하고 묘사하고 그린다(2.G.1). 오각형, 삼각형과 육각형은 regular(등변과 등각)인 것과 아닌 것들이 나타날 것이다. 2학년 학생은 4개의 변을 가진 모양은 사각형이라 인식한다. 그들은 corner 대신에 각이라는 어휘를 사용하지만 각의 유형에 따른 이름(예, 직각, 예각, 둔각)을 지을 필요는 없다. 도형은 다양한 방향과 구성으로 제시되어야만 함을 강조하고 있다. 이 내용과 관련해서 framework는 [그림 6]를 제공하고 있다.



[그림 6] 모양의 예(California Department of Education, 2015a)

학생들이 모양을 인식하고 설명하기 위해 속성을 사용하는 것처럼 주어진 것과 제약의 분석(MP.1), 결론의 정당화(MP.3), 수학에 의한 modeling(MP.4), 전략적으로 적절한 수단 사용(MP.5), 정확성에 주의 기울이기(MP.6), 그리고 패턴이나 구조 찾기(MP.7)와 같은 수학적 실천 또한 발전시킨다.

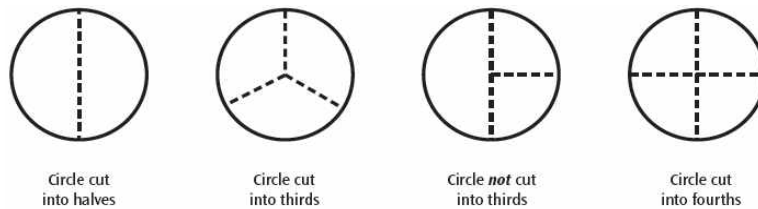
학생들은 직사각형을 같은 크기의 정사각형으로 행과 열로 분할하고 그 정사각형의 개수를 알기 위해 세어 본다(2.G.2). 학생들이 직사각형을 행과 열로 분할하는 것으로 직사각형의 넓이에 대한 학습과 곱셈에서 배열을 사용하는 것에 대한 기초를 닦을 것이다.

<p><b>Example</b></p> <p><b>Teacher:</b> Partition this rectangle into 3 equal rows and 4 equal columns. How can you partition into 3 equal rows? Then into 4 equal columns? Can you do it in the other order? How many small squares did you make?</p> <p><b>Student:</b> I counted 12 squares in the rectangle. This is a lot like when we counted arrays by counting <math>4 + 4 + 4 = 12</math>.</p>	<p>2.G.2</p> 
--	---

[그림 7] 2.G.2의 예(California Department of Education, 2015a)

조작물(Interactive whiteboard나 정사각형 타일, 정육면체, 또는 다른 정사각형 모양)을 사용하는 것은 학생들이 직사각형을 나누는 활동에 큰 도움이 될 것이다(MP.5).

일학년 때 학생들은 모양을 halves, fourths 그리고 quarters로 분할하였다. 2학년 학생은 원과 직사각형을 2개, 3개 또는 4개의 동일한 부분(영역)으로 분할한다. 학생들은 이 개념을 종잇조각과 그림 표현으로 찾게 되고 halves, thirds와 fourths라는 어휘가 학습의 대상이다(2.G.3). 학생들은 원을 3개의 같은 조각으로 잘랐을 때 각각의 조각이 전체(처음의 원)의 3분의 1과 같음을 알아야 하고, 전체가 3의 3으로 설명될 수 있음도 알아야 한다. 만약 원을 4개의 같은 조각으로 자른다면 각각의 조각이 전체(처음의 원)의 4분의 1과 같고, 전체가 4분의 4임을 설명할 수 있어야 한다.



[그림 8] 원 분할의 예(California Department of Education, 2015a)

같은 전체에서 동일한 몫이 다른 모양이 될 수 있음을 알기위해서 학생들은 복수의 방법으로 원과 직사각형이 분할됨을 학습하여야 한다.

학생들은 원과 정사각형을 분할하고 그들의 생각을 설명함으로써 양의 이해(MP.2), 결론의 정당화(MP.3), 정확성에 주의 기울이기(MP.6) 그리고 결과에 대한 타당성 평가(MP.7)와 같은 수학적 실천 또한 발전시킨다. 또한, 이러한 이해는 3학년 때의 Cluster인 ‘수로서의 분수에 대한 이해 발전시키기’ (3.NF.1-3)를 이해하는데 도움을 줄 것이다.



[그림 9] 복수의 방법 예(California Department of Education, 2015a)

## 4. 3학년

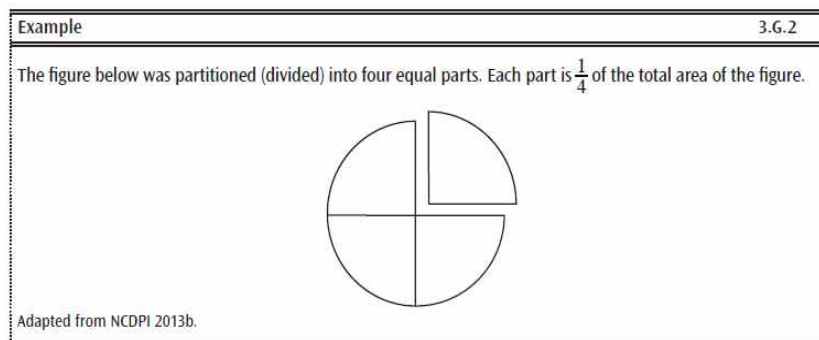
Cluster Heading은 ‘모양과 그 속성들로 설명하기’ 이다.

<표 7> 3학년의 ‘모양과 그 속성으로 설명하기’ 기준

1.	다른 범주(예, 마름모, 직사각형과 그 외)에서 모양이 속성(예, 4개의 변을 가짐)을 공유할 수도 있음과, 그 공유되는 속성이 상위범주(예, 사각형)를 정의할 수 있음을 이해하기. 마름모, 직사각형과 정사각형을 사각형의 예로 인식하고, 이러한 하위범주에 속하지 않는 사각형의 예를 그리기.
2.	모양을 같은 넓이를 가지는 조각들로 분할하기. 전체의 단위분수로 해서 각 조각들의 넓이를 표현하기. 예를 들어, 모양을 같은 넓이를 가지는 4개의 조각으로 분할하여 각 조각들의 넓이를 모양의 넓이의 1/4로 말하기.

학생들이 모양을 설명하고 분석하는 것은 3학년에서 지도할 중요한 부분이다. 학생들은 4개의 변과 같은 공통적인 속성에 기초하여 평범한 기하학적 모양(예, 직사각형과 사각형)을 비교한다(3.G.1). 이전 학년에서 학생들은 기하학적 속성에 따른 구분과 분류를 통해 특별한 모양을 비형식적으로 설명하였다. 또한 면의 수, 각의 수, 변의 수가 주어진 모양을 쌓고 그렸다. 3학년에서는, 각 모양의 겉모습보다는 공유된 속성을 참고하여 조금 더 확실한 방법으로 2차원 모양의 성질에 대하여 설명할 수 있도록 한다. 예를 들면, 직각이 있는 모양의 인식으로부터 시작하여 분류하고, 남아있는 모양들이 왜 이 범주에 적합하지 않는가에 대하여 설명하고 토의하여야 남아있는 모양들의 공통적인 특징들도 결정할 수 있을 것이다.

학생들은 그들이 모양을 같은 넓이를 가지는 조각들로 분할하고, 전체의 단위분수로 해서 각 조각들의 넓이를 표현하는 것을 통해 분수에 대한 학습내용과 기하를 관련지을 것이다(3.G.2)<sup>5)</sup>.



[그림 10] 3.G.2의 예(California Department of Education, 2015a)

5) 2학년과 3학년에서 살펴 본 것처럼 기준 2.G.2는 우리나라에서 도형의 넓이(측정영역)를 구하는 내용을 학습할 때 근간이 되는 내용이고, 기준 2.G.3과 3.G.2는 분수의 개념을 도입할 때나 단위 분수의 대소 비교에서 주로 사용하는 방법이다. 이를 CA CCSSM은 도형영역에서 학습하도록 하고 있다. 이것은 핵심과 일관성을 강조하는 CCSSM의 전형적인 예라고 설명할 수 있다.

5. 4학년

4학년에서는 학생들이 기하학적 도형이 평행한 변, 수직인 변, 특별한 각도, 대칭성을 가지는 것과 같은 그 도형의 성질에 기초하여 분석되고 해석될 수 있음을 이해하는 것이 지도에서 중요한 부분이라고 하며 다음의 기준을 제시하고 있다.

Cluster Heading은 ‘직선과 각을 그리고 인식하기, 직선과 각의 성질에 따라 모양 분류하기’이다.

<표 8> 4학년의 기준

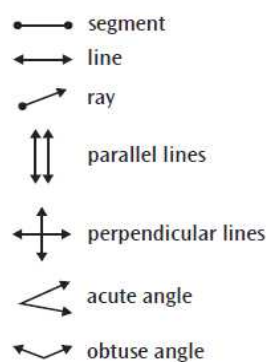
1.	점, 선, 선분, 반직선, 각(직각, 예각, 둔각), 수선, 평행선 그리기. 이들을 2차원 도형으로 인식하기.
2.	평행선 또는 수선의 유무, 또는 지정한 크기의 각의 유무에 근거하여 2차원 도형을 분류하기. 직각삼각형을 하나의 범주로 인정하고 직각삼각형을 인식하기. (2차원 모양은 특별한 삼각형(예, 정삼각형, 이등변삼각형, 부등변삼각형)과 특별한 사각형(예, 마름모, 정사각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴)을 포함해야 한다.) CA
3.	도형을 가로지르는 선, 이 선을 따라 접어면 양쪽이 똑같이 겹쳐지는, 을 2차원 도형에 대한 대칭축으로 인식하기. 선대칭도형을 인식하고 대칭축 그리기.

4학년에서 학생들은 처음으로 반직선, 각, 수선과 평행선의 개념을 접하게 된다(4.G.1). 덧붙여 평행선 또는 수선, 그리고 각의 유무에 기초하여 도형을 분류한다(4.G.2). 점, 선분, 직선, 각, 평행, 수직을 시각적으로 상기할 수 있도록 오른쪽의 예를 학생들에게 제공하는 것이 유용하다. 예를 들어, 오른쪽에 제시한 것을 도표로 해서 교실의 벽에 걸어 보여줄 수 있을 것이다.


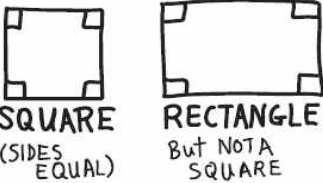
학생들은 다른 방향에서 이러한 표현들을 확인할 필요가 있다. 학생들은 다른 방향에서 이러한 표현들을 그려보고 그린 것 모두가 타당한지도 결정해야 한다. 또한 예각과 둔각인 각의 범위를 확인하고 그리는 것도 필요하다.

2차원 도형은 평행선 또는 수선의 존재나 각도에 따른 특징에 따라 분류할 수 있다. 학생들은 두 직선을 그린 투명지를 사용해 두 직선이 한 점에서 만나거나 또는 서로 만나지 않음을 알아내기 위해 여러 가지 방법으로 두 직선을 배열해 볼 것이다. 이러한 활동에 의해 학생들은 평행선의 개념을 이해하게 된다. 심화 연구는 기하학 소프트웨어로 접하게 될 것이다. 이러한 유형의 탐구는 각도에 대한 논의로 이어질 수 있다.

직각, 둔각 그리고 예각을 그리고 인식하는 학생들의 사전 경험은 지정한 각도에 기초하여 2차원 도형을 분류하는데 도움이 된다. 그들은 90°, 180° 그리고 360°의 각을 기준점으로 사용한다. 직각삼각형(하나의 직각을 가지는 삼각형)은 분류에서 하위범주(예, 두 개의 등변을 가지는 직각이등변삼각형, 등변이 없는 부등변직각삼각형)를 가지는 상위 범주가 될 수 있다.



[그림 11] 예(California Department of Education, 2015a)

<b>Examples: Classifying Shapes According to Attributes</b>	<b>4.G.2 (MP.3)</b>
1. Identify which of the following shapes have perpendicular or parallel sides, and justify your selection(s).	
	
<p><i>Solution:</i> "I know that pairs of lines are perpendicular if they cross to form square corners or right angles. Lines are parallel if they are always the same distance apart and never cross each other. I compared pairs of line segments in each of the four figures and found the first figure includes both parallel and perpendicular lines, and the last figure includes one pair of parallel lines. The other two figures do not include either perpendicular or parallel lines."</p>	
2. Explain why a square is considered a rectangle, but a rectangle is not necessarily a square.	
<p><i>Solution:</i> "I know that rectangles are four-sided shapes that have four right angles. This makes any square a rectangle, since a square has four sides and four right angles also. But a square is a <i>special</i> kind of rectangle. What I mean is that you can have a rectangle that has its sides not all equal, and then it isn't a square. I drew examples to show what I mean."</p>	

[그림 12] 4.G.2(MP.3)의 예(California Department of Education, 2015a)

마지막으로, 학생들은 도형을 가로지르는 선(이 선을 따라 접어면 양쪽이 똑같이 겹쳐지는)을 2차원 도형에 대한 대칭축으로 인식해야 한다.

### 6. 5학년

5학년 때 학생들은 이전 학습내용인 수직선의 기반위에 두 수직하는 수직선을 사용하여 좌표계의 정의를 할 것이다(5.G.1). 학생들은 좌표계의 구조에 대한 이해를 할 수 있게 된다. 그들은 두 축이 좌표평면에 점을 지정할 수 있도록 하는 것과 두 축과 그에 대응하는 좌표의 이름(즉,  $x$ - 축,  $x$ - 좌표,  $y$ - 축,  $y$ - 좌표)을 배울 것이다. 좌표평면의 학습은 처음이고, 5학년에서는 학습내용을 제1사분면으로 제한한다.

5학년의 첫 번째 Cluster Heading은 ‘실생활 문제와 수학적 문제를 해결하기 위해 점을 그래프로 나타내기’이다.

<표 9> 5학년 ‘실생활 문제와 수학적 문제를 해결하기 위해 점을 그래프로 나타내기’ 기준

1.	좌표계를 정의하기 위해 축이라 불리는 수직으로 만나는 두 수직선-평면에 주어진 점을 그 점의 좌표라 불리는 수의 순서쌍으로 지정하기 위해 이 두 직선의 교점(원점)이 각 수직선의 0이 되도록 조절하여-을 사용하기. 순서쌍의 처음 수는 하나의 축의 방향으로 얼마나 이동하였는지를 가리키는 것, 두 번째 수는 두 번째 축의 방향으로 얼마나 이동하였는지를 가리키는 것, 두 축과 그에 대응하는 좌표의 관계적인 이름(예, $x$ - 축, $x$ - 좌표, $y$ - 축, $y$ - 좌표)을 이해하기.
2.	좌표평면의 제1사분면에서 점을 그래프로 나타내는 것으로 실생활 문제와 수학적 문제를 나타내고 상황의 맥락에서 점의 좌표 값을 해석하기.

학생들은 좌표격자를 만들어 보고, 좌표의 순서쌍과 격자점의 관계를 연결 짓고, 그리고 어떻게 위치시킬 수 있는지를 설명할 기회가 필요하다. 예를 들어, 먼저 순서쌍 (2, 3)은 ‘원점에서  $x$ -축을 따라 2만큼 그리고  $y$ -축을 따라 위로 3칸’ 또는 ‘오른쪽으로 2 그리고 위로 3’의 거리로 설명될 수 있다.

<b>Example</b>	<b>5.G.1</b>
<p>Students might use a classroom-size coordinate system to physically locate coordinate points. For example, to locate the ordered pair (5, 3), students start at the origin point (0,0), then walk 5 units along the <math>x</math>-axis to find the first number in the pair (5), and then walk up 3 units for the second number in the pair (3). They continue this process to locate all the points in the following graph. Students recognize that ordered pairs name points in the plane.</p>	
<p>Students graph and label the points below in a coordinate system.</p>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>A (0, 0)</li> <li>B (5, 1)</li> <li>C (0, 6)</li> <li>D (2, 6)</li> <li>E (6, 2)</li> <li>F (4, 1)</li> </ul>	

[그림 13] 5.G.1의 예(California Department of Education, 2015a)

학생들은 좌표평면의 제1사분면에서 점을 그래프로 나타내는 것으로 실생활 문제와 수학적 문제를 나타낸다(5.G.2).

<b>Example</b>	<b>5.G.2</b>
<p>Use the following graph to determine how much allowance Jack makes after doing chores for exactly 10 hours.</p>	
<p><i>Solution:</i> "I can see that when I look up from the <math>x</math>-coordinate on the horizontal axis, the <math>y</math>-coordinate that matches up to it is 20. So Jack makes \$20 if he does 10 hours of chores."</p>	
<p>Adapted from ADE 2010 and KATM 2012, 5th Grade Flipbook.</p>	

[그림 14] 5.G.2의 예(California Department of Education, 2015a)

오개념 : 학생들은 좌표에 점을 찍는 순서가 중요하지 않다고 생각할 지도 모른다. 이러한 오개념을 처리하기 위해 교사는 학생들에게 좌표의 순서를 바꾼 점을 찍게 할 수 있다. 예를 들어 위의 책의 그래프<sup>6)</sup>에서 (4, 6)과 (6, 4)를 이용해 순서가 바뀔에 따라 받는 수당에 대하여 토론하게 하는 것이 좋다. 그러면 교사는 학생들에게 방향과 거리의 중요성을 깨달을 수 있는 기회를 제공하게 되는 것이다.

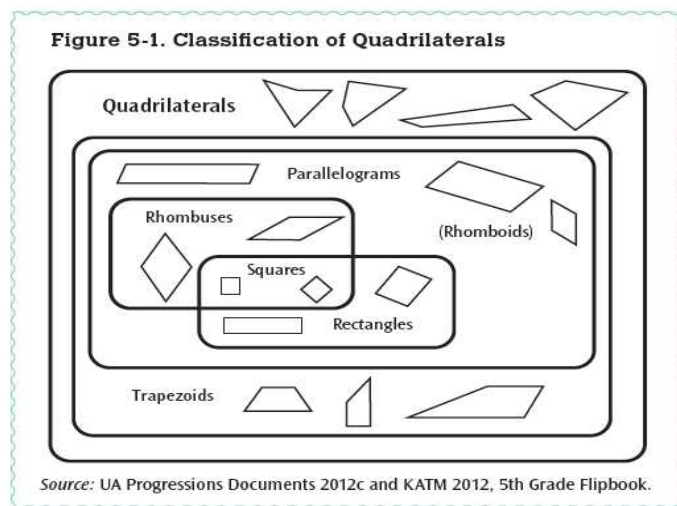
이전에 학생들은 2차원 모양의 성질들을 기술하고 비교해 보았고, 이러한 모양들을 만들고, 그리고, 분석하였다. 5학년 학생들은 2차원 모양의 속성(성질)에 대한 추론에 대하여, 그리고 성질에 기반을 둔 체계에서 이러한 모양들의 분류에 대한 그들의 이해의 폭을 넓혀야만 한다(5.G.4).

두 번째 Cluster Heading은 ‘성질에 따른 범주로 2차원 도형 분류하기’이다.

<표 10> 5학년 ‘성질에 따른 범주로 2차원 도형 분류하기’ 기준

3.	2차원 도형의 범주에 속하는 속성은 그 범주의 하위범주에도 속함을 이해하기. 예를 들면, 모든 직사각형은 4개의 직각을 가지고 있고, 정사각형은 직사각형이므로 모든 정사각형은 4개의 직각을 가지고 있다.
4.	성질에 기반을 둔 체계에서 2차원 도형을 분류하기.

기하학적 성질은 변의 성질(평행, 수직, 일치), 각의 성질(유형, 크기, 일치), 대칭의 성질(점, 선)을 들 수 있다. 예를 들면, 학생들은 모든 직사각형은 두 쌍의 대변이 평행하고 길이가 같은 사각형이기 때문에 모든 직사각형은 평행사변형이라고 결론을 낸다. 이러한 방법으로 학생들은 모양의 특별한 범주를 다른 범주의 하위범주로 연결 짓는다(5.G.3).



[그림 15] 5.G.2의 예(California Department of Education, 2015a)

6) [그림 14]의 그래프를 이용하여 10시간을 일하고 나서 받는 수당이 얼마인지 결정하라는 문제.



#### IV. 나가며

우리는 III장에서 Mathematics Framework(2015a)가 제시한 유치원부터 5학년까지 도형역에 대하여 살펴보았다. 교육과정 해설서에 교사용 지도서의 모습도 보이는 것 같다. 무엇보다 교사는 무엇을, 왜 그리고 어떻게 가르쳐야 하는지, 학생은 그것을 왜 배워야 하는지에 대하여 잘 나타내고 있다고 생각한다. CCSSM은 ‘이 문서의 기준은 학년별로 구체적인 기준을 설정하였으나 각각의 학년에서 기대치보다 훨씬 밑에 또는 훨씬 위에 있는 학생을 지원하는데 필요한 방법이나 자료를 규정하지 않는다.’ 라고 밝히고 있다. 따라서 규정하지 않은 일부분을 Mathematics Framework(2015a)가 대신하고 있다고 설명할 수 있겠다.

우리나라 초등학교 교사용 지도서의 각 권에는 약 90쪽에 달하는 ‘수학과의 지도’ 부분이 있다. 같은 내용을 12권의 책에서 제시하고 있는 셈이다. 지도서가 두꺼워질 뿐만 아니라 ‘지도의 실제’ 부분과 함께 볼 때 참고하기가 어렵고 자원의 낭비임이 분명하다. 교육과정 해설서로 이를 충분히 대체할 수 있을 것이라 판단되기에 교사는 무엇을, 왜 그리고 어떻게 가르쳐야 하는지, 학생은 그것을 왜 배워야 하는지에 대하여 잘 나타낸 교육과정 해설서의 재출판을 기대해 본다.

2, 3학년에서 살펴 본 것처럼 기준 2.G.2는 우리나라에서 도형의 넓이(측정영역)를 구하는 내용을 학습할 때 근간이 되는 내용이고, 기준 2.G.3과 3.G.2는 분수의 개념(수와 연산 영역)을 도입할 때나 단위분수의 대소 비교에서 주로 사용하는 방법이다. 이를 CA CCSSM은 도형영역에서 학습하도록 하고 있는데 핵심과 일관성을 강조하는 CCSSM의 전형적인 예라고 설명할 수 있다. 우리나라도 각 내용영역을 넘나들며 구성된 단원을 볼 수 있지만 그 수는 적다. 가르쳐야 할 내용과 배워야 할 내용의 적합성과 난이도를 고려하여 내용영역에 구애받지 않는 단원의 다양함이 필요하다고 생각한다.

박경미(2010)는 외국의 수학 교육과정을 탐색하는 것은 우리나라의 수학과 교육과정의 체제와 내용 구성이 다른 국가와 어떤 면에서 유사하고 어떤 면에서 다른지 확인하는 과정을 통해 의미 있는 시사점을 추출할 수 있기 때문에 의미가 있다고 하며 ‘어떤 점에서 어떻게 다르다’는 사실이 ‘다르기 때문에 이렇게 바뀌어야 한다.’는 것을 논리적으로 함의하는 것은 아니라고 말하고 있다. 충분히 공감할 수 있는 내용이다. 그러나 이것만은 꼭 바꾸었으면 좋겠다. 캘리포니아 주의 기존 수학과 교육과정이라 말할 수 있는 Mathematics Content Standards(1997)는 95년 5월부터 2년 6개월의 개발 기간 끝에 나왔다. 2000년에 나온 NCTM의 ‘학교수학을 위한 원리 및 기준’ 이후 10년 만에 CCSS가 얼굴을 내밀었고, 그 연구 기간도 2년이 넘는다. Mathematics Framework(2015a)의 개발 기간도 1년 10개월 이상이다. 게다가 모두 공개적 의견 수렴의 기간을 반드시 가진다. 이와 같이 교육과정은 개발과 안착에 많은 시간을 소비해야만 한다. 또한 개정의 때는 이전 교육과정에서 파생된 문제점들에 대한 면밀한 검토와 분석을 위해 많은 시간을 투자해야만 한다. 교육과정이 다른 교육과정보다 더 좋다고 하는 근거나 교육과정을 개정해야만 하는 근거가 이상한 통계적 사실에 기반을 두지 말고 교육과정 입안자들이 가지고 있는 수학에 대한 신념에 따르면 좋겠다. 연구자는 교육대학에 임용이 된지 횃수로 11년째이다. 연구실의 책꽂이에 세 종류의 초등학교 교과서가 꽂혀 있다. 내년엔 책꽂이의 또 다른 한 칸을 새로운 교과서가 장식(?)하게 된다.

## 참 고 문 헌

- 김지원, 박교식, 이정은 (2014). 2011 개정 초등학교 수학과 교육과정과 미국 CCSSM 비교·분석 연구. *한국초등수학교육학회지*, 18(2), 279-295.
- 김영옥 (2011). 미국 Common core state standards for mathematics 소개. *East Asian Mathematical Journal*, 27(4), 471-483.
- 박경미 (2010). ‘학년군’ 과 ‘수학적 과정’ 을 중심으로 한 외국 수학과 교육과정의 최근 경향 비교·분석. *학교수학*, 12(4), 667-686.
- 안지영, 전영주, 윤마병, 이종학 (2014). 한국의 2009 개정 수학과 교육과정과 미국의 수학과 교육과정 기준 CCSSM의 비교·분석-초등학교 수와 연산 영역을 중심으로-, *한국학교수학회논문집*, 17(4), 437-464.
- 이광호 (2010). Common core state standards for mathematics 소개. *수학교육학논총 제38회*, 717-726.
- 장혜원 (2012). 미국의 수학교육과정 기준 CCSSM의 수학적 실천에 대한 고찰. *수학교육학연구*, 22(4), 557-580.
- California Department of Education (1997). *Mathematics content standards for california public schools : Kindergarten through grade twelve*. Sacramento, California.
- California Department of Education (2006). *Mathematics framework for california public schools : Kindergarten through grade twelve*. Sacramento, California.
- California Department of Education (2011). *A look at kindergarten through grade six in california public schools : Transitioning to the common core state standards in English language arts and mathematics*. Sacramento, California.
- California Department of Education (2014a). *California common core state standards for mathematics*. Sacramento, California.
- California Department of Education (2014b). *Mathematics curriculum framework development process*. Sacramento, California.
- California Department of Education (2015a). *Mathematics framework for california public schools : Kindergarten Through Grade Twelve*. Sacramento, California.
- California Department of Education (2015b). *Executive summary : Mathematics framework for california public schools*. Sacramento, California.
- Huh, N. J., Ko, N. H. (2012). A new age in mathematics education in the U.S.. *Korean J. Math*, 20(4), 493-505.
- Thomas, S. D., & Sally, D. A. (2015). *Digest of education statistics 2013*. NCES 2015-011, U.S. Department of Education.
- Thomas B. Fordham Institute (2010). *The state of state standards--and the common core--in 2010*.

---

<Abstract>

Study on California Common Core States Standards for Mathematics  
-Focused on the Geometry Domain of Elementary School-

Hong Jae Kang<sup>7)</sup>

The Common Core States Standards was developed by building on the best state standards in the U.S.; examining the expectations of other high-performing countries around world; and carefully studying the research and literature available on what students need to know.

The Common Core States Standards for Mathematics are reshaping the teaching and learning of mathematics in California classroom using the California Common Core States Standards for Mathematics(CA CCSSM).

The aim of this study is to observe CA CCSSM. The CA CCSSM were established to address the problem of having a curriculum that is 'a mile wide and an inch deep'. And it have two types of standards. One is standards for mathematical practice which are the same at each grade level, the other is standards for mathematical content which are different at each grade level. This study focused on standards for mathematical content, in particular, on Geometry domain in elementary level, using Mathematics Framework for California Public Schools.

Key words: CCSSM, CA CCSSM, Mathematical Content Standards, Geometry, The State of California

논문접수: 2016. 04. 15

논문심사: 2016. 05. 12

게재확정: 2016. 05. 21

---

7) kanghj@cue.ac.kr