한국초등수학교육학회지 20(1) 131-148. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 20(1) 131-148.
2016. 02. 28 February 28. 2016.

# 초등학교 영재학급 학생들의 형식적 정당화를 돕기 위한 교사 발문의 역할[1]

오세연[2] · 송상헌[3]

본 연구는 초등학교 5학년 영재학급 학생들(8명)이 패턴의 일반화 과제를 해결함에 있어 귀납 추론으로 일반식은 추측하였으나 그에 대한 형식적 정당화로 이행하는 과정에서 겪는 어려움을 분석하고 그 해결을 돕기 위한 교사 발문의 역할 모색과 발문 기법 제안을 목적으로 하였다. 학생들의 형식적 정당화를 돕기 위한 교사 발문 목록들을 3차에 걸친 현장 적용을 통해 확인한 결과, 초등학교 영재학급 학생들은 형식적 정당화로 이행을 할 때 정당화를 시도해야하는 이유, 연역적 탐구에 대한 인식 부족, 유연한 탐구 방법에 대한 심리적 저항감으로 인해 어려움을 겪었다. 면담 분석 결과 학생들이 정당화의 필요성과 귀납적 탐구 결과의 한계를 체감할 수 있도록 교사가 태도면에서 출발하여 방법면과 내용면으로 구체화해갈 수 있도록 체계적인 발문을 준비하는 것이 중요함을 확인할 수 있었다. 이에 따라 내용면에서의 4가지와 절차면에서의 3가지 발문 기법을 제안하면서 논의를 바탕으로 발문 일람표와 그 흐름도를 제시하고 교사 발문의 역할이 주는 교육적 시사점을 논의하였다.

주제어: 영재학급, 정당화, 형식적 정당화, 발문, 패턴 과제, 수학적 태도

## Ⅰ. 서 론

Polya(1954:vi)는 수학적 정리를 증명하기에 앞서 먼저 추측을 해야 하고 세세한 부분을 수행하기 전에 증명에 대한 아이디어를 추측해야 한다고 한다. 관찰한 것을 결합시키고 유추하되, 몇 번이고 시도해 보아야 하며, 수학자의 창조적인 연구는 연역적 추론 곧 증명이라는 것이다. 수학은 본질적으로 증명에 관한 학문이므로 초등학교 영재학급 수준의 수학 학습에서는 어느 정도 형식적인 증명 활동이 이루어질 필요가 있다(권성룡(2003, p.85). 하지만 일반적인 초등학교 영재학급 학생들은 규칙을 찾아내고 일반화하는 데에는 익숙하지만 자신이 만들어 낸 일반식을 적절히 정당화하는 데에는 상당한 어려움을 겪는다. 최병훈과 방정숙(2012)는 문제를 해결할 때 동일한 영재 학급의 집단에 속한 학생들이라도 일반화를 명확히 하는 능력은 다르기 때문에 학생들에게 다양한 수준의 정당화에 관련된

1) 이 글은 오세연(2014)의 석사학위논문을 요약/수정한 것임.
2) [제1저자] 인천부현초등학교
3) [교신저자] 경인교육대학교

교육 활동을 지도할 필요가 있다고 한다. 그렇다면 수학영재교육을 담당하는 교사들이 학생들에게 형식적 정당화를 시도할 수 있도록 돕는 구체적인 방법에 대해서도 연구해야할 필요가 있다. 영재학생들을 대상으로 한 정당화에 관한 연구(김민정, 이경화, 송상헌, 2008; 김지영, 박만구, 2011; 송상헌, 허지연, 임재훈, 2006; 이경화, 최남광, 송상헌, 2007)는 일부 있고, 영재를 대상으로 한 타 교과나 중등학교 수학에서의 발문에 관한 연구는 일부 있다. 하지만 이주희(2004), 한정민과 박만구(2010)처럼 각각 학생들의 수학적 사고력과 창의력에 영향을 미치는 일반 학급에서의 발문에 대한 분석에 비해 초등학교 수학 영재 학급에서의 정당화를 유도하기 위한 구체적인 발문 기법에 관한 연구는 아직 찾아보기 힘들었다.

이 논문은 초등학교 영재학급 학생들이 패턴의 일반화 과제에서 자신이 찾은 일반적 규칙을 정당화 하는 과정에서 겪는 어려움을 분석하여 그들이 형식적 정당화 수준으로 이행할 수 있도록 도움을 줄 수 있는 교사 발문 기법을 고안하고, 실제 수업에서 이루어진 발문의 사례를 분석해 봄으로써 교사 발문의 역할을 모색하면서 발문 기법을 제안하는 것을 목적으로 한다.

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 수학적 정당화

엄밀한 논리적 전개의 의미를 내포하는 중등 수준의 증명(proof)과 달리 정당화(justification)는 자신 또는 다른 사람에게 자신의 어떤 주장이 참임을 확신시키는 과정(김정하, 2010)이다. 즉, 증명이 수학의 내용적 가치를 중시하는 결과적 활동이라면 정당화는 교육적 가치를 보다 중시하는 과정적 활동이다. 송상헌, 허지연, 임재훈(2006)은 대수적 과제를 중심으로 나타낸 Simon과 Blume의 정당화 수준을 바탕으로 <표 1>과 같은 정당화 유형을 제시하면서 초등 수학 영재들은 자신의 생각을 정당화할 때 주로 포괄적 정당화 혹은 형식적 정당화를 하려는 경향이 강하다고 하였다. 김정하(2010)는 이를 확장하여 <표 2>와 같이 형식적 정당화를 좀 더 세분하였다.

<표 1> 수학적 정당화의 단계 및 유형(송상헌, 허지연, 임재훈, 2006)

| 유형 | 설명 |
|---|---|
| 외부적 정당화 | 다른 사람의 의견을 빌려 자신의 생각이 옳음을 설명 |
| 귀납적 정당화 | 공통된 성질 혹은 성질의 일반화로 인한 설명 |
| 포괄적 정당화 | 특정한 사례에 대해 연역적으로 설명 |
| 형식적 정당화 | 특정한 사례와는 별개로 연역적인 논증을 통해 설명함 |

<표 2> 수학적 정당화의 단계 및 유형(김정하, 2010)

| 단계 | 내용 |
|---|---|
| 0 | 정당화가 없음 |
| 1 | 외적 확신에 의한 정당화 |
| 2 | 경험적·귀납적 정당화 |
| 3 | 포괄적 예를 통한 연역적 정당화 |
| 4 | 단순 연역적 정당화 |
| 5 | 형식적·이론적 정당화 |

송상헌, 허지연, 임재훈(2006)은 초등 수학영재들은 연역적으로 논리적으로 사고하려 하

는 경향이 있다고 하였으며, 김정하(2010)는 수학 성취도가 높은 학생들은 연역적 정당화를 선호하는 모습 역시 나타났다고 하였다. 하지만 두 연구 모두 초등학교 수준에서는 영재라서 수학적 정당화의 수준이 높을 것으로 기대한 것과는 달리 포괄적 정당화나 경험적-귀납적 정당화의 수준에 머무는 경우도 있는 것으로 보고하고 있다.

수학영재들의 수학적 정당화에 관련하여 초등학교 수학영재 학생의 수학적 정당화 능력이나 수학적 정당화 유형에 대한 실증 연구는 일부(김민정, 이경화, 송상헌, 2008; 김지영, 박만구, 2011; 송상헌, 허지연, 임재훈, 2006; 이경화, 최남광, 송상헌, 2007; 박준철, 2013) 찾아볼 수 있지만 그에 비해 정당화를 지도하기 위한 구체적인 방법에 관한 연구는 드물다. 특히 박준철(2013)은 교사의 발문이나 안내 등 교사의 역할, 그리고 교사와 영재교육 대상자들과의 상호작용에 관한 보다 미시적인 접근의 연구가 필요하다고 제언하고 있다. 따라서 본 연구를 통해 귀납적 정당화와 형식적 정당화 사이에 머물러 있는 초등학교 영재학생들의 정당화 수준을 향상시키는 구체적인 방법을 고안할 필요가 있다.

### 2. 발문

발문이란 학생을 가르치는 것 보다는 학습자의 사고 작용의 변화에 초점을 둔다. 알맞은 상황에서 교사가 학습자에게 행하는 발문을 통해 학습자의 '사고를 유발하는 힘'이 생기고, 이 힘이 '수학적인 생각'으로 연결된다(이주희, 2004:2). 수학영재들에게 어떤 사고의 도약을 기대한다면 이들의 사고에 변화를 줄 수 있는 교사의 발문이 필요하다.

<표 3> 片桐重男(1992)의 문제 해결 과정

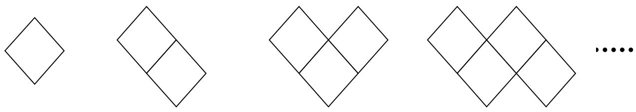
| 문제 형성 및 파악 | | 해결 방안 구상 | | 해결 실행 | | 논리적 조직화 | | 검증 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 문제가 요구하는 내용을 파악 | → | 풀이 계획 구상 | → | 규칙 찾기 일반식 만들기 | → | 정당화하기 위한 탐구 및 도출한 일반식을 정당화 | → | 정당화한 내용을 검증하고 공고히 함 |

片桐重男(1992)는 <표 3>과 같은 문제 해결 과정과 함께 <수학적 생각·태도에 관한 발문 분석 일람>을 제시한 바 있으며 이국형(2011)은 이 발문과 권고에 따라 재조직한 교사의 발문이 중학교 영재학급 학생들의 문제해결 과정에 미치는 수학적 사고 특성의 변화를 분석한 바 있다. 이 5단계 중 앞의 3단계는 폴리야의 문제해결 4단계 중 3단계(문제의 이해-계획 수립 - 계획 실행)와 유사하며 마지막 2단계인 논리적 조직화와 검증 단계는 폴리야의 문제해결 4단계 중 마지막 단계(반성)와 유사하지만 보다 세분화되어있다. 이 마지막 두 단계는 해결한 풀이를 스스로 되돌아보고 세련되게 하며 더 나아가 발전적인 탐구를 하기 위해서는  주어진 문제의 정답을 얻는 것 이상으로 수학적으로 일반화, 확장, 응용, 경제화하려는 목적의식이나 의지의 수반이 필요한 단계로 정당화 또는 정교화를 위해서는 매우 중요한 단계이다. 따라서 본 연구는 특히 논리적 조직화 이후의 단계에서 영재학급 학생들이 자발적으로 의식하고 시도할 수 있도록 지도하기 위한 구체적인 교사 발문의 역할에 집중하고자 한다.

## Ⅲ. 연구 방법

### 1. 연구의 과제

본 연구에 사용한 과제는 유미경, 류성림(2013)의 패턴 유형 검사지 중 단위 도형을 변형한 과제로 마름모의 한 변을 순차적으로 연결하여 만들어낸 도형의 둘레를 구하는 문제이다.



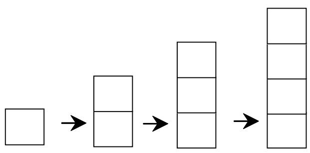
[그림 1] 패턴 과제 : 연속하는 마름모로 이루어진 도형의 둘레

대부분의 초등학교 학생들은 각 단계별로 도형의 둘레를 직접 구하여 귀납적으로 추측할 수 있지만 일반학급 학생들은 이를 일반식으로 표현하는 데 어려움이 있다. 이 과제는 [그림 2]와 같이 둘레에 포함되는 변을 중심으로 살펴볼 때 그 수가 변하지 않는 양 끝의 변을 ×, 그 수가 증가하는 부분의 변을 ○로 표현하여 대칭의 형태로 재조직하여 쉽게 나타낼 수 있다. 이와 같은 표현을 통하여 증가하지 않는 변은 항상 2, 증가하는 변은 항상 $2n$이 됨을 알 수 있다.

| | | |
|---|---|---|
| ×○ | ○× | n=1 |
| ×○○ | ○○× | n=2 |
| ×○○○ | ○○○× | n=3 |
| ×○○○○ | ○○○○× | n=4 |

[그림 2] 둘레에 포함되는 변을 기호(×,○)로 표현 후 대칭 구조로 재조직

변의 네 변의 길이가 같은 마름모의 특징을 이해하고 있다면 [그림 3]처럼 변형할 수 있고 가로의 길이는 항상 1이고, 세로의 길이는 정사각형의 개수만큼의 길이를 나타낸다는 것을 시각적으로 금방 파악할 수 있기 때문에 직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법을 이용하여 $2(n+1)$의 일반식으로 나타낼 수 있다.



[그림 3] 형식적 정당화를 하기 위한 도형의 변형

### 2. 연구의 대상자

본 연구는 A초등학교 5학년 단위학교 영재학급 학생들을 세 그룹으로 나누어 진행하였

으며, 패턴의 일반화 과제에서 식의 일반화 도출에 성공한 학생들 중에서 인터뷰에 응한 일부 학생들만을 실질적인 연구의 대상자로 하였고 각 대상자들의 ID는 실험 회차와 학생의 순번을 고려하여 S3-1(3차 실험 첫 번째 학생)과 같은 방식으로 표기하였다. 사전 검사를 통해 나타난 각 학생들의 정당화 수준과 일반화한 식, 그리고 그들의 선행 학습 정도는 <표 4>와 같다.

<표 4> 연구의 대상자

| 구분 | 학생ID | 사전 검사의 정당화 수준 | 사전 검사에서 일반화한 식 | 선행학습 정도 |
|---|---|---|---|---|
| 1차 실험 | S1-1 | 포괄적 정당화 | (□×4)-{(□-1)×2} | 없음 |
| | S1-2 | 귀납적 정당화 | $n\times2+2$ | 중학1학년 과정 |
| 2차 실험 | S2-1 | 귀납적 정당화 | (단계×2)+2 | 1~2개 단원 |
| | S2-2 | 귀납적 정당화 | (단계×2)+2 | 없음 |
| 3차 실험 | S3-1 | 귀납적 정당화 | (단계+1)×2 | 없음 |
| | S3-2 | 귀납적 정당화 | (전단계×2)+4 | 1~2개 단원 |
| | S3-3 | 귀납적 정당화 | (단계×2)+2 | 1~2개 단원 |
| | S3-4 | 귀납적 정당화 | (단계+1)×2 | 없음 |

### 3. 연구의 방법 및 절차

片桐重男(1992)의 <수학적 생각·태도에 관한 발문 분석 일람>에 따라 해당 과제에 적합한 발문 목록(초안)을 작성하였다. 학생들이 패턴의 일반화 과제를 해결한 이후 이 발문 목록에 따른 교사와 학생의 대화 내용은 녹취/전사하여 분석하였다. 1차 실험 및 2차 실험을 통하여 투입 전에 비하여 의미 있는 반응을 보인 발문들을 중심으로 수정 및 명료화하면서 발문 목록을 구체화하였다. 3차 실험에서는 2차 실험 결과까지 반영한 발문 목록을 적용하여 학생들이 형식적 정당화를 성공하기까지 겪는 어려움들과 이를 돕는 발문들의 역할 및 투입 과정을 재점검하면서 발문의 흐름도를 작성하였다. 회차별 실험 절차와 발문 목록에서의 코드는 회차별로 조금씩 달라짐에 따라 다음 장의 표 아래에 기술해 두었다.

## Ⅳ. 연구 결과 분석 및 논의

### 1. 1차 실험

#### 가. 발문 목록 및 흐름

<표 5>는 1차 실험에 적용한 발문 목록에서 유효한 역할을 한 발문들이다. 이 발문들은 片桐重男(1992)에 따라 크게 태도, 방법, 내용의 순으로 제시하였다. 1차 실험에 적용한 발문 목록은 순차적으로 제시하였으며 실험 도중 목표를 달성하면 실험을 종료하였다. 예비실험을 거치면서 상위 정당화를 위한 과정 역시 정당화하려는 태도, 정당화를 하기 위한

탐구 방법, 정당화를 하기 위한 탐구에 있어서 관련된 구체적 내용이 순서대로 필요함을 확인하였기에 태도-방법-내용의 틀은 그대로 유지하였다.

<표 5> 1차 실험 발문 목록 - 논리적 조직화(L)단계 및 검증(V)단계

| 영역 | 범주 | 하위범주 | 발문 |
|---|---|---|---|
| 논리적 조직화 | 태도 | 논리적으로 생각하려는 태도 | ▶ 왜 이 식이 항상 옳은가? 틀릴 수 있지 않을까?<br>▶ 그 수의 규칙이 끝까지 옳을 것이라고 어떻게 설득할 수 있을까? |
| | | 명확하게 하려는 태도 | ▶ 보다 정확하게 말하는 방법은 없을까? |
| | | | ▶ 지금 한 말을 조금 더 간단하게 말한다면? |
| | 방법적 사고 | 연역적인 생각 | ▶ 이 식이라면 몇 번째 단계의 둘레를 구하든지 확실히 찾아낼 수 있음을 근거를 들어 설명해 줄 수 있는가? |
| | | | ▶ 그렇게 생각하는 이유는 무엇인가? |
| | | | ▶ 각 단계의 둘레를 확인한 내용은 어디까지나 일부분의 결론일 뿐이다. 그것 말고 이미 알고 있는 수학적 지식을 바탕으로 왜 이렇게 될 수밖에 없는지 설명할 수 없을까? |
| | 내용적 사고 | 표현, 성질, 조작의 생각 | ▶ 규칙적으로 둘레의 길이가 늘어난다는 사실을 다른 방법으로 나타내어 보라.<br>▶ 이 문제에서 특징적으로 가지고 있는 조건들은 무엇인지 생각해보라.<br>▶ 이 문제의 특징적 성질들은 변화시키지 않으면서 달리 변형해보자. |
| | | 도형화, 식에 관한 생각 | ▶ 자신의 지금 생각을 확실히 나타낼 수 있는 식으로 표현해보자. |
| | | 알고리즘의 생각 | ▶ 나타낸 식을 더 간결하게 정리해 볼 수는 없을까 |
| 검증 | 태도 | 사고 노력을 절약하려는 태도 | ▶ 자신이 말한 정당화를 핵심 내용을 중심으로 간단히 말해 볼 수 있을까? |

나. 태도-방법-내용 발문의 적용 및 결과

〈논리적 조직화의 단계〉 중 태도 발문은 학생에게 정당화를 하려는 동기를 부여하거나 필요성을 인식시키는 역할을 한다. 하지만 학생들이 스스로 당연하다고 생각하는 답에 대해 정당화의 필요성을 인식하기 전까지는 정당화 시도 자체를 어렵게 만들었다. 이는 곧 상위 수준의 정당화로 이행할 때 학생이 겪는 곤란함으로 볼 수 있지만 반드시 거쳐야 하는 부분이라 할 수 있다. 태도 발문에서 정당화의 필요성을 인식하지 않으면 탐구 자체에 피로감을 보였고 끝까지 수 규칙에만 집착하는 모습을 보이기도 하여 형식적 정당화에는 이르지 못하였다. 하지만 학생 S1-1처럼 자신의 식이 항상 옳지 않을 수도 있다는 문제를 인식한 후부터는 스스로 탐구를 시작하였다.

T : (LA-1) 이 식이 항상 맞는 답을 낸다고 어떻게 확신을 하지?

S1-1 : (무응답)

T : (LA-1) 혹시 항상 맞지 않을 수도 있다는 생각은 안 드니?

S1-1 : 음. 그럴 수도 있을 것 같아요.

연역적 탐구 방법에 도움을 주어야 할 방법적 발문들은 일부 수정이 필요하였다. 표현의 방법과 성질 및 조작에 대한 생각에 이르러 학생 S1-1은 사고의 도약을 보였으며, 형식적 정당화에 성공하였다. 다만 둘레의 길이를 구하는 방법을 이용하는 모습으로 보아 눈에 띄는 반응을 보이지 못했던 연역적인 생각이 사고의 발판이 되는 역할을 했다. 학생 S1-2는 중학교 선행학습을 통해 일반식은 쉽게 도출하였으나 패턴 과제 탐구의 해결을 위해 다른 방식으로 식을 변형한 후 연역적 탐구 방식으로 전환하는 데 저항감을 보였다. 정당화의 필요성을 느끼지 못하는 것은 후속 활동을 위한 유연한 탐구에 어려움을 가져오는 것으로 보인다.

## 2. 2차 실험

### 가. 발문 목록 및 흐름

1차 실험의 결과를 반영하여 발문 목록을 수정한 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6> 2차 실험 발문 목록

| 단계 | 하위범주 | 발문 의도 | 발문 | 코드 |
|---|---|---|---|---|
| 정당화 하려는 태도 Attitude | 정당화의 필요성 인식 | 정당화를 요구 | ① 이식을 다른 사람에게 이해시키려면 어떻게 설명해야 할까? | A① |
| | | 정당화의 필요성 재인식 | ② 이 식의 의미를 이해하지 못하는 사람에게는 어떻게 설명해야 할까? | A② |
| 정당화에 대한 방법적 사고 Method | 1. 연역적 정당화의 필요성 인식 | 귀납적 탐구 결과의 한계를 인식 | ① N번째 단계의 도형을 직접 확인하여 둘레의 길이를 확인하였나? 만약 그렇지 않았다면 그 이유는 무엇인가? | M1① |
| | | | ② 그 이유는 확인한 사실인가, 추측인가? | M1② |
| | | | ③ 추측은 항상 참이라고 말할 수 있는가? | M1③ |
| | 2. 형식적 정당화를 위한 탐구 방향 안내 | 탐구 방식의 방향 전환 | ① 각 단계의 일일이 조사하여 관계를 파악하는 방법 이외에 만든 식을 설명할 수 있는 방법이 있을까? | M2① |
| | | 연역적 탐구 방법 제시 | ② 이전에 배운 수학적 지식을 이용하여 자신의 풀이가 항상 옳음을 설득해 보라. | M2② |
| 정당화를 위한 내용적 사고 Contents | 1. 문제의 본질적 구조파악 | 구조 탐구 | ① 각 단계는 어떤 규칙을 가지고 변화하는가? | C1① |
| | | | ② 각 단계의 변화에는 어떤 특징을 가지고 있는가? | C1② |
| | | | ③ 왜 그런 특징을 가지고 있는지 구조를 살펴보라. | C1③ |
| | 2. 조작적 불변자 이외의 요소 변형 | 과제 변형에 대한 심리적 저항감 감소 | ① 다른 사람에게 자신의 풀이를 이해하기 쉽게 설명하기 위해서 도형의 모양을 변화시켜 보라. | C2① |
| | | 조작적 불변자 인식 | ② 도형의 변형을 시도할 때 변화시켜도 되는 것과 변화시키면 안 되는 것은 무엇인가? | C2② |

각 단계별 발문의 의도를 분명히 하였고 하위 범주 설정 부분 등에서 수정이 이루어졌다.

첫째, 과제에 대한 연역적 탐구로의 안내를 염두에 두고 작성하였다. 본 실험에 참여한 학생들은 영재 교육 대상자임에도 귀납적 정당화 수준에 머무르는 경우가 대다수였다. 따라서 귀납적 탐구의 한계점을 인식하고 연역적 탐구로 이동할 수 있도록 발문을 수정하였다. 둘째, <논리적 조직화 단계>, <검증단계>로 나뉘어져 있던 발문의 단계를 통합하고 성격에 따라 <정당화하려는 태도(To Justify Attitudes, 이하 태도 발문(A))>, <정당화를 위한 방법적 사고(Display question for Thinking how to do research for Deductive justification, 이하 방법 발문(M))>, <정당화를 위한 내용적 사고(Contents for Deductive justification, 이하 내용 발문(C))> 영역으로 나누면서 각 영역을 구분하기 위해서는 코드화할 필요가 생겼다. A발문은 정당화 자체에 대한 필요성을 인식하는 것이 목적이다. M발문은 연역적 정당화의 필요성을 인식하고, 탐구 방향을 안내하는 것이 목적이다. C발문은 학생의 관점을 과제 자체의 본질적 구조 파악으로 옮기도록 돕고, 탐구 방법을 구체적으로 지도하는 것을 목적으로 한다. 셋째, 각 발문은 고유한 의도를 갖는다. 넷째, 나중에 제시하는 발문일수록 직접적이고 구체적으로 도움을 줄 수 있도록 하였다. 다섯째, 모호하거나 의미를 쉽게 파악하기 어려운 발문의 문구를 수정하였다. 2차 실험은 1차 실험에 비하여 비교적 효율적으로 진행되었는데, 1차 실험에서 40분 이상 걸리던 정당화까지의 시간이 30분 이내로 감축되었다.

### 나. 태도-방법-내용 발문의 적용 및 결과

학생 S2-1과 학생 S2-2 모두 태도 발문에 대하여 긍정적인 반응을 보였으나 여전히 귀납적 정당화의 모습을 보였다. 방법 발문에서는 실제로 형식적 정당화를 위한 탐구가 본격적으로 시작되었다. M1① ~ ③을 거치면서 학생들은 자신이 설명한 방식이 불확실성을 가지고 있음을 인식하였고 그것의 해결을 위해 실험 종료까지 진지하고 집중력 있는 탐구 태도를 보였다.

T : (M1①)1000번째 단계의 도형을 직접 확인하여 둘레의 길이를 확인하였니?
S2-1: 음, 아니요. 그런데 식에 넣어서 풀면 맞아요. 10단계를 보면 이 경우에도 맞으니까!
T : (M1②)식에 넣어서 나온 둘레가 확실한 사실이니?
S2-1: 음….. 네!
T : (M1③)추측은 항상 참이라고 할 수 있을까?
S2-1: 아하, 아니요.

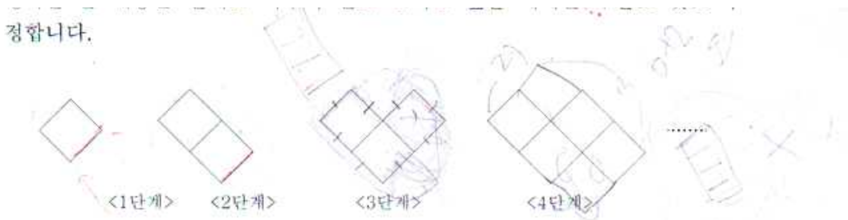
M2①에 대하여 두 학생 모두 수 규칙을 다시 살펴보는 모습을 볼 수 있었지만 제시된 패턴 일반화 과제의 본래 구조를 탐구하는 것까지는 고려하지는 못하였다. 이는 연역적 탐구 자체에 대한 미인식이 그 원인으로 작용했다. M2②를 통해 학생 S2-2는 탐구 대상을 기존의 수 규칙에서 과제의 구조로 옮기는 모습을 보였다. 학생 S2-2는 도형의 둘레를 이용하여 정당화 할 수 있을 것 같다고 하였으나 3단계와 4단계가 낯선 형태의 외형을 가지고 있어서 곤란해 했다. 그래서 원래의 발문 목록에는 없었지만 5학년 교육과정에서 이미 접한 평행사변형의 넓이를 구하는 원리를 예시로 제시하였다. 학생 S2-2는 연역적 탐구에 대한 경험을 예시를 통하여 기억을 환기하는 것에 그치지 않고 새로운 탐구 방향으로 안내함으로써 비교적 쉽게 형식적 정당화를 성공하는 모습을 보였다.

T : (**예시를 통한 기억의 재생**)평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 수학시간에 배웠었지? 어떻게 했지?

S2-2: 밑변 × 높이요.

T : (**새로운 탐구 방향으로 안내**)왜 그러한 공식이 다른 모양의 평행사변형에도 항상 옳게 적용될 수 있지?

S2-2: 음.. 이렇게... 변을 잘라서 옮겨서 변형하면 직사각형과 같으니까.. 가로 × 세로와 같기 때문에요. (그림을 그리면서 설명함) (과제로 돌아와서 3단계와 4단계를 [그림 4]와 같이 변형함)




[그림 4] 학생 S2-2의 도형 변형 시도

M2②를 거쳤으나 형식적 정당화에 이르지 못한 학생 S2-1에게는 내용 발문 중 C2①를 적용하였더니 학생 S2-1은 도형을 직사각형의 형태로 변형하여 자신의 식을 정당화하는데 곧 성공하였다.

위 사례들을 통하여 학생들에게 과제의 본래의 형태를 변형하는 것은 생각보다 심리적 저항감이 크다는 것을 알 수 있었다. C2①은 '이미 수업에서 배운 연역적 증명의 형태의 예시'보다 직접적인 형태의 요구이다. 두 발문 모두 효과가 있었는데, 영재학급 학생들에게는 비슷한 경험에 대한 기억을 재생시켜 새로운 탐구 방향으로 안내하는 정도만으로도 사고의 유연성을 발휘할 수 있음을 확인할 수 있었다.

### 3. 3차 실험

#### 가. 발문 목록 및 흐름

2차 실험 결과를 반영하여 발문 목록을 수정하였으며 그 내용은 <표 7>과 같다.

<표 7> 3차 실험 발문 목록

| 단계 | 하위범주 | 발문 (발문 의도) |
|---|---|---|
| A 정당화하려는 태도 | 정당화 필요성 인식 | 1. 이 식을 다른 사람에게 이해시키려면 어떻게 설명해야 할까? |
| M 정당화에 대한 방법적 사고 | [4] R 연역적 탐구의 필요성 인식 | 1. 파악한 단계간의 관계가 조사하지 않은 단계까지 항상 적용될지 어떻게 확신을 하였나? (**귀납적 정당화의 한계 인식**) |
| | | 2. 학생의 답변은 직접 확인한 사실을 말한 것인가, 아니면 확인한 사실을 기초로 한 추측을 말한 것인가? (**사실과 추측을 구분하여 귀납의 한계 인식**) |
| | [5] D 탐구 방향 안내 | 1. 각 단계의 둘레를 일일이 조사하여 관계를 파악하는 방법 이외에 다르게 생각할 수 있는 방법은 없을까? (**귀납적 탐구 이외의 탐구 방법 모색**) |
| | | 2. 표에서 관계를 보는 것을 벗어나 문제의 도형 본래의 구조를 탐구하여 보자. 이미 알고 있는 수학적 지식을 이용하여 설명할 수 있는 방법은 없을까? (**탐구 대상의 명확화로 탐구 방향 전환**) |
| | | 3. 평행사변형의 넓이를 구하는 식을 만들어 낼 때 어떻게 하였나? 이 방법처럼 이미 알고 있는 수학적 지식을 이용하여 어떤 상황에서도 학생이 만든 식이 옳음을 설명하는 방법을 찾을 수 없을까? (**형식적 정당화를 위한 탐구 방법을 예시로써 안내**) |
| C 정당화를 위한 내용적 사고 | [6] C 과제 점검 | 1. 각 단계는 어떤 규칙을 가지고 변화하는가? |
| | | 2. 각 단계는 왜 그러한 규칙을 공통으로 가지고 변화하는가? |
| | | 3. 이 패턴의 규칙과 관련이 없는 요소들은 무엇인가? |
| | | 4. 이 도형의 전체 단계에 공통적으로 적용되는 핵심적인 구조는 무엇인가? |
| | [7] G 과제 탐구 | 1. 도구를 이용하여 직접 조작하여 탐구하여 보자. |
| | | 2. 본질적 요소들을 그림이나 기호 등으로 표현하여보자. |
| | | 3. 본질적 요소가 바뀌지 않도록 문제를 보기 쉽게 변형해보자. |
| | | 4. 발견한 내용을 알고 있는 지식을 이용하여 표현해보자. |
| MR′ 연역적 탐구의 필요성 재인식 | | 1. 이전에 설명한 방법과 문제의 구조를 파악하여 설명한 방법은 어떠한 차이점이 있는가?<br>2.각 방법은 어떤 장점이 있는가?<br>3. 타인에게 만들어낸 식을 설명할 때 어느 쪽이 더 쉽고 설득력 있는가? |

2차 실험에 비교하여 수정된 부분은 다음과 같다. 첫째, 『정당화에 대한 방법적 사고』 단계에 ‘이미 수업에서 배운 연역적 증명의 형태의 예시’를 발문의 형태로 추가하였다. 둘째, 연역적 정당화의 필요성을 재인식하는 발문을 형식적 정당화를 성공한 직후에 제시하였다. 그래야 이 발문을 통하여 자신이 실행한 정당화에 대한 만족감을 높이고 필요성

4) MR (Realizing the limits of an inductive method and the need of deductive justification) : 귀납적 방법의 한계 및 형식적 정당화의 필요성 인식
5) MD (Direction guide for mathematical inquiry) : 수학적 탐구를 위한 방향 안내
6) CC (Checking ideas ) 과제에 대한 내용을 질문을 통해 점검
7) CE (Guiding deductive exploration ) 연역적 탐구 방법을 보다 구체적으로 안내

을 재인식하게 된다. 셋째, 『정당화를 위한 내용적 사고』 발문의 하위 범주를 조정하고 발문 역시 이에 맞게 수정하였다. 3차 실험에 사용한 발문 목록 중 태도 발문은 형식적 정당화로 이행을 위한 탐구를 준비하는 과정으로 볼 수 있으며 방법 및 내용 발문은 이를 순차적으로 돕는 도구적 역할을 수행한다.

보다 구조화되고 명료해진 발문으로 인해 3차 실험은 2차 실험에 비하여 학생들이 형식적 정당화에 이르기까지 시간을 단축하는 결과를 얻었다. 40여분이 소요된 학생 S3-3을 제외한 나머지 3명의 학생들은 20~30분의 시간이 걸렸다. 3차 실험에 사용된 발문 목록은 1차 및 2차 실험에 사용한 발문 목록에 비하여 비교적 효율적으로 학생의 사고와 탐구를 자극할 수 있는 것으로 생각된다.

### 나. 태도-방법-내용 발문의 적용 및 결과

A발문의 의도는 정당화의 필요성을 인식하는데 있다. 이 발문을 시작으로 학생들이 문제의 답을 찾아내는 수준의 사고에서 자신의 식을 설명하고 설득하기 위한 사고를 시작하였다. 학생 S3-1, S3-2, S3-3 모두 큰 의미 없는 답변을 한 것처럼 보이나, 그 답변이 발문 직후 바로 나온 것은 아니며, 생각 후 다른 대안을 찾지 못하여 답변한 것으로 보여 지기 때문이다. 또한 이어지는 방법 발문 MR1, MR2로 이어지는 연역적 정당화의 필요성을 인식하는 과정의 시작점 역할을 하기도 하는데 이러한 점에서 다소 의미를 갖는다.

『정당화에 대한 방법적 사고(이하 방법 발문)』는 2개의 하위 범주인 『연역적 탐구의 필요성 인식(이하 MR)』발문과 『탐구 방향 안내(이하 MD)』발문으로 이루어졌다. MR발문은 연속하는 2가지 발문으로 차례로 제시한다. 연역적 정당화의 필요성을 인식하게 되어 본격적인 연역적 탐구를 시작하게 함이 발문의 의도이다. MD 발문은 3가지 발문으로 구성되어있으며 탐구 방향을 안내한다. MR이 교사의 발문을 중심으로 학생이 답변을 하면서 따르는 구조라면, MD는 학생의 탐구가 중심이 되며 발문은 탐구를 돕는 역할을 하게 된다. MR 및 MD 발문에 대한 실험 참여자의 답변은 <표 8>과 같다.

<표 8> MR 및 MD 발문에 대한 3차 실험 참여 학생의 반응

| 발문 / 학생 | MR1 | MR2 | MD1 | MD2 | MD3 |
|---|---|---|---|---|---|
| S3-1 | 계속 해보니 맞았음 | 추측 | 도형 둘레가 2씩 증가 규칙 언급 | 도형 1 증가시 둘레 2 증가 규칙 언급 | 3단계와 4단계를 직사각형 형태로 변형 형식적 정당화 |
| S3-2 | 100, 1000 단계도 구해봄 | 추측 | 무응답 (답보) | 무응답 (답보) | 본질적 요소를 살려 도형을 변형하나 형식적 정당화 실패, 내용 발문으로 이동 |
| S3-3 | 특정 단계에서 맞기 때문 | 추측 | 다음 발문 요구 | 구조 안에서 규칙 탐구 | 탐구 시간 요구, 내용 발문으로 이동 |
| S3-4 | 증가 규칙 제시, 특정 단계 적용 시 정답 도출 | 추측 | 탐구 대상을 도형으로 전환, 특정 단계 예시 | 직사각형의 둘레를 이용 형식적 정당화 | |

형식적 정당화를 위한 탐구에 관여하는 방법적 사고 관련 발문인 MD 발문에 대한 학생들의 의미 있는 반응 여부는 〈표 8〉과 같다. 형식적 정당화에 성공하였을 경우 ★, 발문 의도와 부합하는 탐구 활동이 이루어진 경우 ○, 이전 발문에 대한 반응 및 다음 발문에 대한 반응으로 연관 지어 볼 때 발문 의도와 부합하는 탐구가 시도되었을 것으로 추측은 되는 경우에는 △, 무응답 또는 아무런 반응 없이 다음 발문을 요구한 경우에는 ×로 표시하였다. 각 발문은 대상에 따라 미흡한 역할을 한 경우도 있었으나 대체적으로는 그 역할에 부합하는 반응을 얻었다.

<표 8> MD발문에 대한 2차 및 3차 실험 참여 학생들의 반응

| 발문 | 발문 의도 | S2-1 | S2-2 | S3-1 | S3-2 | S3-3 | S3-4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MD1 | 새로운 탐구 방법 모색 | ○ | ○ | ○ | × | △ | ○ |
| MD2 | 탐구 대상 명확화 | △ | ○ | ○ | × | ○ | ★ |
| MD3 | 예시로써 탐구방법 제시 |  | ★ | ★ | ○ | △ | - |

『정당화를 위한 내용적 사고(이하 내용발문)』 발문은 『과제 점검(이하 CC)』와 『과제 안내(이하 CG)』의 하위 범주로 구성되어 있다. CC와 CG는 각각 4개의 발문으로 이루어져 있다. CC와 CG는 학생의 탐구 과정에서 필요에 따라 선택하여 제시한다. 3차 실험에서는 학생 S3-2와 학생 S3-3에게만 적용된 발문이며 이 학생들에게 적용된 발문은 내용발문 중에서도 일부분에 불과하다. 따라서 내용 발문의 효용성에 대해서는 추가적인 사례연구가 필요할 것이다. 3차 실험부터는 연역적 탐구의 필요성 재인식 발문을 추가하였다.

형식적 정당화로 자신의 식을 온전히 형식적 정당화에 성공한 학생들은 만족감을 표현하며 추가적인 탐구 의지 또는 연역적 탐구 방법에 대해 흥미를 보인 경우도 있었다. 그러나 태도 영역에서 정당화를 하는 데에 소극적이었던 학생 S3-2는 MR′에서도 형식적 정당화에 대해서 만족감을 나타내지 못하였다.

### 4. 논의를 바탕으로 수정한 교사 발문 목록과 그 흐름도

#### 가. 논의 및 시사점

초등학교 영재학급 학생들이 형식적 정당화로 이행할 때 겪는 어려움에 대해 본 연구를 통해 확인한 점은 다음과 같다.

첫째, 초등학교 영재학급 수준의 학생들은 아직 형식적 정당화를 시도해야 할 필요성과 당위성을 인식하지 못하고 있었다. 주어진 문제의 답을 이미 얻은 문제에 대해 굳이 형식적 정당화를 해야 할 필요성을 느끼지 못한다면 본인이 감내해야 할 탐구 과정에 대한 인내, 노력이 충분히 수반되지 않고 기계적이거나 수동적인 탐구가 이루어져 형식적 정당화에 스스로 이르기에는 어려움을 겪는다. 귀납적 탐구 결과의 한계를 학생들이 인식하는 것은 곧 연역적 탐구의 필요성을 깨닫게 되는 것과 연결된다.

둘째, 연역적 탐구를 위한 구체적인 출발점 설정이 불확실하여 탐구에 대한 접근 자체가 쉽지 않았다. 귀납적 한계를 느껴서 뭔가 다른 시도를 하려 하더라도 학생 스스로는 무엇을 어떻게 해야 할지 모르는 경우가 실험 과정 중에 여러 차례 목격이 되었다. 따라서 탐구의 시작을 위한 교사의 발문과 조언이 필요하다.

셋째, 패턴 일반화 과제의 구조적 특성을 파악하는 것 까지는 수행하더라도, 자신이 생각한 답에 대한 재구성 및 변형에 대해서는 심리적으로 저항감을 가지고 있었다. 학생들은 제시된 패턴 일반화 도형을 변형하면 전혀 다른 문제가 되어버릴 것처럼 걱정하는 듯 보였다.

형식적 정당화로 이행하는 과정에서 이러한 어려움을 겪는 영재학급 학생들을 돕는 교사의 발문은 내용과 절차 측면에서도 각각 구체적으로 작성되어야 할 필요가 있다. 이를 위해  우선 교사발문의 내용면에서 고려해야 할 점은 다음과 같다.

첫째, 정당화 자체에 필요성에 대해 느끼도록 발문을 구성해야 한다. 정당화 요구에 있어서 부정적인 반응을 보일 경우 이후 이어지는 후속 탐구활동에도 부정적인 영향을 미치게 된다.

둘째, 귀납적 탐구 결과의 한계를 체감할 수 있도록 발문을 구성해야 한다. 초등학생에게 다소 까다로울 수 있는 연역적 탐구를 적극적으로 수행하도록 하려면 이러한 탐구 과정이 감내할 만한 필요한 것임을 스스로 수용해야 한다. 귀납적 탐구 결과의 한계를 확실히 느낄수록 연역적 탐구 활동을 수행하는 과정에 있어서 어려움에 봉착하더라도 끈기 있게 탐구를 수행하는 모습을 관찰할 수 있었다. 단, 포괄적 정당화 수준의 영재학급 학생들의 경우 이미 초보적인 연역적 탐구를 수행하는 수준에 있기 때문에 형식적 정당화로 이행을 위한 탐구를 시작하기 위해서는 귀납의 한계를 체감하는 발문으로는 충분치 않았다. 학생 S1-1의 사례를 볼 때, 포괄적 정당화 수준의 학생은 귀납적 탐구 결과의 한계를 체감하는 것 이외에 탐구 결과를 더욱 논리적으로 정리하고 조직할 필요성을 인식하도록 발문을 구성해야 할 것이다.

셋째, 과제에 적합한 예시가 될 수 있는, 이미 배운 내용을 바탕으로 형식적 정당화의 예시를 찾아 제시할 수 있어야 한다. 수학 영재학생들 대부분은 연역적 탐구 경험의 기억을 환기하는 것만으로도 형식적 정당화를 위한 의미 있는 탐구를 수행하고 정당화에 성공하는 모습을 관찰할 수 있었기 때문이다.

넷째, 제시할 과제에 대한 깊은 연구를 통해 학생들이 도출할 수 있는 다양한 일반화식을 예측하고 각 일반화식을 학생 수준에서 정당화해볼 수 있는 탐구 내용 및 방법을 예측하고 체계화하여 준비해야 한다. 이러한 노력은 내용 발문인 CC와 CG 발문에 관련되어 있다. 대부분의 영재학급 학생들은 필요성을 인식하고 연역적 탐구의 동기가 잘 갖추어지면 대체적으로 형식적 정당화에 이르는 것이 가능하다는 것을 사례 연구 결과 알 수 있었다. 그러나 일부 학생은 방법 발문만으로는 형식적 정당화에 이르지 못하였는데, 이런 경우 그 원인을 찾아 내용 발문을 제시해야 한다. 형식적 정당화에 이르지 못한 원인을 분석하여 내용 발문을 제시하려면 사전에 내용 발문에 과제의 성격에 맞게 정교하게 준비되어 있어야 한다. 이를 위해 『정당화를 위한 내용적 사고 발문』은 많은 보완과 검증이 필요하다. 형식적 정당화로 이행을 지도하기 위한 패턴 일반화 과제의 개발과 함께 해당 과제에 대한 내용 발문이 연계되어 개발이 된다면 학교 현장에서 수학 영재의 정당화 지도에 더 나은 도움이 될 것이다.

절차적 측면에서 영재학급 학생들의 형식적 정당화로 이행을 돕는 교사의 발문은 다음을 고려해야 한다.

첫째, 가장 먼저 정당화의 필요성과 연역적 탐구의 필요성을 느끼도록 하는 등의 정당화해보려는 태도 관련 발문을 가장 처음에 제시해야 한다.

둘째, 발문 제시 순서 측면에서 방법 발문은 순차적으로, 내용 발문은 교사가 학생의 탐구 진행 정도와 문제점을 파악하여 선택적으로 적용해야 된다. 태도 발문 이후에는 방법

발문 및 내용 발문은 전체적으로 볼 때 간접적, 포괄적 발문에서 직접적, 구체적 성격의 발문으로 나아가게 해야 한다.

셋째, 형식적 정당화의 일시적 성공 이후에도 또 다른 방법, 더 나은 방법 등으로 발전/확장하여 새롭게 또는 추가적으로 정당화해보려는 태도가 형성될 수 있도록 반성(반복)할 필요가 있다.

### 나. 수정한 발문 목록과 흐름도

MR 발문은 학생에게 탐구의 필요성을 느끼도록 한다는 점에서 『정당화하려는 태도(A)』 발문과 비슷한 성향을 가지고 있다. 발문 목록이 의도하는 바가 명확하고 알기 쉬워야 발문을 제시하는 교사가 혼란 없이 효율적으로 정당화를 주제로 교육활동을 할 수 있음을 생각해 볼 때, MR 발문을 『정당화하려는 태도(A)』 발문 영역에 포함하는 것이 보다 더 발문의 성격을 명확히 인식하고 학생의 탐구를 원활히 도울 수 있을 것으로 본다. 탐구 방향에 관련된 『정당화에 대한 방법적 사고(M)』 발문은 현재 MR과 MD로 나뉘어져 있으나, MR을 A단계와 통합하고, MR′ 역시 A′ 단계로 수정, 방법 발문에는 MD에 해당하는 발문만 남겨 연역적 탐구 활동에 대한 도움의 역할로 그 성격을 명확히 하는 것이 바람직 할 것으로 보인다.

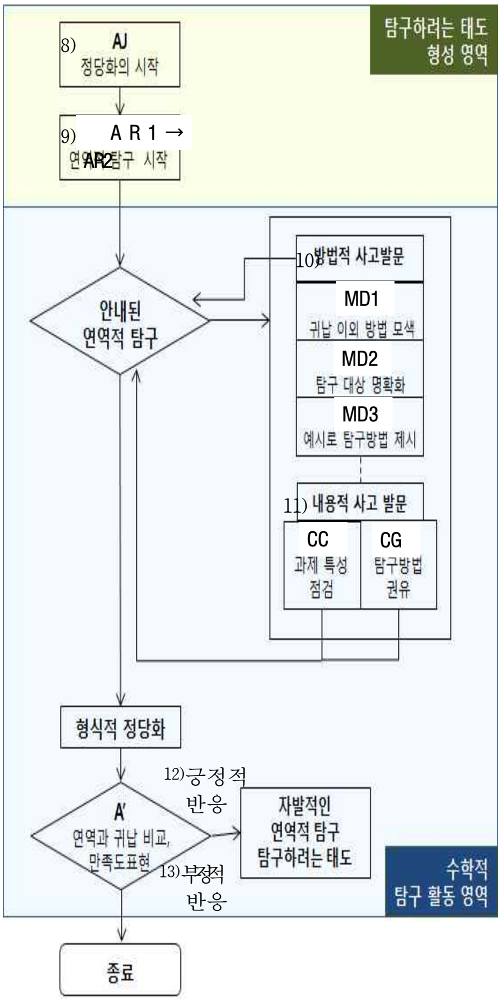
1차에서 3차에 이르는 실험 결과들과 발문 자체의 의도 및 성격에 대한 반성을 반영하여 형식적 정당화로 이행을 위한 발문 목록을 정리하면 <표 9>와 같고 이를 시간 및 절차적 흐름으로 시각화하면 <그림 5>와 같다.

## Ⅴ. 요약 및 결론

본 연구는 초등학교 5학년 영재학급 학생들이 패턴의 일반화 과제를 해결함에 있어 귀납 추론으로 일반식은 추측하였으나 그에 대한 형식적 정당화로 이행하는 과정에서 겪는 어려움을 분석하고 그 해결을 돕기 위한 교사의 발문의 역할을 제안하는 것이다. 학생들의 형식적 정당화를 돕기 위한 교사 발문 목록들을 만들기 위해 3차에 걸친 현장 적용을 통해 확인한 결과, 초등학교 영재학급 학생들은 형식적 정당화로 이행을 할 때 정당화를 시도해야하는 이유, 연역적 탐구에 대한 인식 부족, 유연한 탐구 방법에 대한 심리적 저항감으로 인해 어려움을 겪었다. 하지만 정당화의 필요성을 통해 태도가 충분히 갖추어질 경우에는 간단한 예시만으로도 연역적 탐구를 수행해 낼 수 있음도 알 수 있었다. 보다 구조화되고 명료해진 교사의 발문 일람을 통해 학생들이 과제를 완수하는 시간도 점점 줄어들었다. 이는 학생들이 정당화의 필요성과 귀납적 탐구 결과의 한계를 체감할 수 있도록 교사가 태도면에서 출발하여 방법면과 내용면으로 구체화해갈 수 있도록 체계적인 발문을 준비하는 것이 중요함을 시사한다.

<표 9> 형식적 정당화로 이행을 돕기 위한 발문 목록(종합)

| 단계 | 목표 | 발문 예시 (발문의 의도) |
|---|---|---|
| A 정당화하려는 태도 | J 정당화 필요성 인식 | 내가 얻은 답을 다른 사람에게 설득하려면 어떻게 하면 좋을까? **(정당화의 필요성 인식)** |
| | R 연역적 탐구의 필요성 인식 | 1. 파악한 단계간의 관계가 조사하지 않은 단계까지 항상 적용될지 어떻게 확신을 하였나? **(귀납적 정당화의 한계 인식)** |
| | | 2. 학생의 답변은 직접 확인한 사실을 말한 것인가, 아니면 확인한 사실을 기초로 한 추측을 말한 것인가? **(사실과 추측을 구분하여 귀납의 한계 인식)** |
| M 정당화에 대한 방법적 사고 | D 탐구 방향 안내 | 1. 각 단계의 둘레를 일일이 조사하여 관계를 파악하는 방법 이외에 다르게 생각할 수 있는 방법은 없을까? **(귀납적 탐구 이외의 탐구 방법 모색)** |
| | | 2. 표에서 관계를 보는 것을 벗어나 문제의 도형 본래의 구조를 탐구하여 보자. 이미 알고 있는 수학적 지식을 이용하여 설명할 수 있는 방법은 없을까? **(탐구 대상의 명확화로 탐구 방향 전환)** |
| | | 3. 평행사변형의 넓이를 구하는 식을 만들어 낼 때 어떻게 하였나? 이 방법처럼 이미 알고 있는 수학적 지식을 이용하여 어떤 상황에서도 학생이 만든 식이 옳음을 설명하는 방법을 찾을 수 없을까? **(형식적 정당화를 위한 탐구 방법을 예시로써 안내)** |
| C 정당화를 위한 내용적 사고 | C 과제 점검 | 1. 각 단계는 어떤 규칙을 가지고 변화하는가? |
| | | 2. 각 단계는 왜 그러한 규칙을 공통으로 가지고 변화하는가? |
| | | 3. 이 패턴의 규칙과 관련이 없는 요소들은 무엇인가? |
| | | 4. 이 도형의 전체 단계에 공통적으로 적용되는 핵심적인 구조는 무엇인가? |
| | E 과제 탐구 | 1. 도구를 이용하여 직접 조작하여 탐구하여 보자. |
| | | 2. 본질적 요소들을 그림이나 기호 등으로 표현하여보자. |
| | | 3. 본질적 요소가 바뀌지 않도록 문제를 보기 쉽게 변형해보자. |
| | | 4. 발견한 내용을 알고 있는 지식을 이용하여 표현해보자. |
| A′ 발전/확장하여 정당화해보려는 태도 | | 1. 이전에 설명한 방법과 문제의 구조를 파악하여 설명한 방법은 어떠한 차이점이 있는가?<br>2. 방법은 어떤 장점이 있는가?<br>3. 타인에게 만들어낸 식을 설명할 때 어느 쪽이 더 쉽고 설득력 있는가? |




[그림 5] 형식적 정당화로 이행을 위한 발문의 흐름도

8) 학생이 귀납으로 답을 추측한 후 그것을 정당화하려는 태도를 유도하는 발문으로서 이 발문이 제대로 이루어지지 않아 학생 스스로 정당화해보려는 의지가 부족하면 이후의 과정에 진전이 별로 없다. 따라서 이 과정은 출발점일 뿐 아니라 반복을 위한 재출발점이기도 하다.

9) 이 발문이 제 역할을 못하면 학생은 이후 연역적 탐구를 교사의 기대에 부응하려는 목적으로 수동적인 탐구를 하게 되거나 기계적으로 교사의 발문에 답만 하는데 급급하여 제대로 된 탐구가 이루어지지 않거나 형식적 정당화에 이르지 못할 수 있다. 형식적 정당화에 이르더라도 그 과정에 학생에게 피로감을 주거나 만족감이 높지 않게 된다.

10) 방법적 사고 발문(M)에서 학생들이 탐구 결과가 형식적 정당화에 이르기까지 MD1, MD2, MD3의 순서대로 제시하면서 순환 반복한다.

11) 내용적 사고 발문(C)는 방법적 사고 발문의 MD3까지 모두 제시하였음에도 형식적 정당화에 이르

본 연구의 수업 분석을 통해, 초등학교 영재학급 학생들이 형식적 정당화로 이행할 때 겪는 3가지의 어려움(형식적 정당화를 시도해야 할 필요성과 당위성 미 인식, 연역적 탐구를 위한 구체적인 출발점 설정 불확실, 자신의 답에 대한 재구성 및 변형에 대한 심리적 저항감)을 가지고 있음을 확인하였다. 정당화로 이행하는 과정에서 이러한 어려움을 겪는 영재학급 학생들을 돕기 위한 교사의 발문을 내용면에서 4가지(정당화의 필요성 유도, 귀납적 탐구 결과의 한계를 스스로 체감해 보는 경험, 과제에 적합한 형식적 정당화의 예시 제시 또는 연역적 탐구 경험의 기억 회상, 탐구하는 내용의 구조에 적합한 구체화된 발문 준비)와 절차면에서 3가지(정당화해보려는 태도 관련 발문을 가장 먼저 제시, 방법 발문은 순차적으로 내용 발문은 선택적으로 적용하되 간접적/포괄적 발문에서 직접적/구체적 성격의 발문으로 진행, 성공 이후에도 추가적으로 정당화해보려는 태도가 형성될 수 있도록 반성하며 반복)을 제안하였다. 이를 바탕으로 구체적인 발문을 추가한 발문 일람표(<표 9>)와 그 흐름도([그림 5])를 완성하였다.

다만 본 연구의 제한점을 보완하기 위해 제언하고자 하는 바는 다음과 같다. 정당화의 수준이나 방식은 본 연구에서 사용한 특정 과제(패턴의 일반화)와 다른 과제에서도 적용될 수 있는지는 미지수이다. 본 연구에서 제시한 발문 목록은 패턴 일반화 과제에 대하여 (단계+1)×2의 형태로 일반화 식을 도출했을 경우에 형식적 정당화로 안내하기에 비교적 효과적이었으나, 교사가 충분히 예상치 못한 일반화를 한 학생에게도 교사가 준비한 방법으로만 탐구를 이끌게 되면 오히려 그 학생에게는 혼란을 초래할 수 있음도 알 수 있었다. 따라서 일반화 식을 어떠한 형태로 도출했는가에 따라서 정당화를 위한 과제의 구조를 탐구한 결과들을 조직하는 방법은 다양한 모습을 보일 수 있는 데 이 부분에 대한 추가적인 연구가 필요할 것이다.

---

지 못하였을 내용을 보다 구체화한 발문을 제공할 필요가 있을 때 상황에 따라 교사의 판단 하에 CC와 CG를 선택적으로 제시할 수 있다.

12) 긍정적 반응의 예로는 연역적 탐구를 통한 만족감/성취감 표현, 다음번 탐구에 대한 의지 등이 있다.

13) 부정적 반응의 예로는 연역적 탐구의 필요성에 대한 의문, 탐구 과정에 대한 피로감 호소, 귀납적 방법이 더 편리하다는 생각 등이 있다.

## 참 고 문 헌


권성룡 (2003) 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. **초등수학교육, 7**(2), 85-99.

김민정, 이경화, 송상헌 (2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. **학교수학, 10**(1), 23-42.

김지영, 박만구 (2011). 수학 영재 교육 대상 학생의 기하 인지 수준과 증명 정당화 특성 분석. **초등수학교육, 14**(1), 13-26.

김정하 (2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구.** 이화여자대학교 박사학위논문.

박준철 (2013). **수학적 정당화를 주제로 한 초등수학 영재프로그램 개발.** 서울교육대학교 석사학위 논문.

송상헌, 허지연, 임재훈 (2006) 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석. **수학교육학연구, 16**(1), 79-94.

유미경, 류성림 (2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른 일반화 방법 비교. **학교수학, 15**(2), 459-479.

오세연 (2014). **초등 수학 영재의 수학적 정당화 과정과 교사 발문의 역할.-패턴 일반화 과제를 중심으로-.** 경인교육대학교 석사학위논문.

이국형 (2011). **교사의 발문과 권고가 영재학급 학생들의 문제해결 과정에 미치는 수학적 사고 특성 변화 분석**. 아주대학교 교육대학원.

이경화, 최남광, 송상헌 (2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구 과정 - 정당화 과정과 표현 과정을 중심으로-. **학교수학, 9**(4), 487-506.

이주희 (2004). **학습자의 반응에 기초한 교사의 발문이 수학적 사고력에 미치는 영향.** 대구교육대학교 석사학위논문.

최병훈, 방정숙 (2012). 초등학교 4, 5, 6학년 영재학급 학생의 패턴 일반화를 위한 해결 전략 비교. **수학교육학연구, 22**(4), 619-636.

한정민, 박만구 (2010). 수학적 창의성 관점에서 본 교사의 발문 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(3). 865-884.

片桐重男 (1992). **문제해결 과정과 발문 분석.** 이용률, 성현경, 정동권, 박영배 역. 서울: 경문사.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible reasoning Volume II: Patterns of Plausible Inference.* Princeton University Press.

Simon. M. A & Blume. G. W (1996). Justification in the mathematics classroom : A Study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior. 15*, 3-31.

<Abstract>

## A Questioning Role of Teachers to Formal Justification Process in Generalization of a Pattern Task for the Elementary Gifted Class

Oh, Se-Youn[14]; & Song, Sang Hun[15]

Mathematical formal justification may be seen as a bridge towards the proof. By requiring the mathematically gifted students to prove the generalized patterned task rather than the implementation of deductive justification, may present challenges for the students. So the research questions are as follow: (1) What are the difficulties the mathematically gifted elementary students may encounter when formal justification were to be shifted into a generalized form from the given patterned challenges? (2) How should the teacher guide the mathematically gifted elementary students' process of transition to formal justification?

The conclusions are as follow: (1) In order to implement a formal justification, the recognition of and attitude to justifying took an imperative role. (2) The students will be able to recall previously learned deductive experiment and the procedural steps of that experiment, if the mathematically gifted students possess adequate amount of attitude previously mentioned as the 'mathematical attitude to justify'. In addition, we developed the process of questioning to guide the elementary gifted students to formal justification.

Key words: gifted class, justification, questioning, pattern task, formal justification, mathematical attitude

논문접수: 2016. 01. 17
논문심사: 2016. 02. 12
게재확정: 2016. 02. 19

14) loodel@naver.com
15) song2343@hanmail.net