Journal for History of Mathematics http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.3.191
Vol. 29 No. 3 (Jun. 2016), 191–216

Moulton Geometry

물톤 기하

Jo Kyeonghee 조경희 YANG Seong-Deog* 양성덕

Moulton plane is the plane where all the plane axioms of Hilbert except the side-angle-side axiom hold true, and enables us to understand the importance and significance of the side-angle-side axiom. In this article, we start with the definitions of the Moulton lines, distance, angle, and then introduce many theorems of the Moulton geometry, with many intuitive proofs or explanations of our own with appropriate examples. In particular, we provide our independent study of the tangent lines to the Moulton circles and the rigid motions of the Moulton plane.

Keywords: Moulton geometry, SAS Axiom, Desargues' theorem; 물톤 기하, 변-각-변 공리, 데자르그 정리.

MSC: 51M04, 51M05, 01A05, 03-03

1 서론

기원전 300년 경 유클리드의 '원론'에서 시작된 기하학에 대한 공리론적 접근방법은 이천여 년에 걸쳐 많은 수학자들에 의해 연구되었다. 이러한 접근은 완전성을 추구하는 인간의 필연적인 노력으로, 그 결과 유일한 기하(그 당시에는 유일하다는 말조차 쓸 필요가 없었을 것이다)라고 믿어 왔던 유클리드 기하와는 다른 비 유클리드 기하를 발견하는 수학의 대혁명을 유도하였고, 이는 철학, 물리학 등 다른 분야에도 지대한 영향을 끼치게 되었다.

비 유클리드 기하의 존재를 받아들이는 시기를 지나며, 힐베르트는 유클리드 기하를 구성하는 공준과 공리들을 철저히 분석하여 평행공리만을 부정하여 얻어지는 쌍곡기하의 경우와 마찬가지로, 다른 공리를 부정하거나 또는 이 중 몇 가지 공리만의 조합으로 얻을

*Corresponding Author.
여기에 등장하는 모든 그림들을 그려준 이범영에게 감사의 뜻을 표합니다.
Jo Kyeonghee: Division of Liberal Arts and Sciences, Mokpo National Maritime Univ.
E-mail: khjo@mmu.ac.kr
YANG Seong-Deog: Dept. of Math., Korea Univ. E-mail: sdyang@korea.ac.kr
Received on Jan. 21, 2016, revised on Apr. 6, 2016, accepted on Jun. 20, 2016.

수 있는 유클리드 기하와는 다른 기하들을 다양하게 연구하였다 [7]. 힐베르트의 업적은 이러한 의미에서 역사적으로 중요한 의미를 가진다.

특히 힐베르트는 ‘평면기하는 항상 공간기하의 부분기하이다’ 라는 명백한 것처럼 보이는 명제를 구체적인 예를 통하여 거짓임을 밝혔으며, 거기에서 그치지 않고 데자르그 정리가 한 평면기하가 어떤 공간기하의 부분기하가 되기 위한 필요충분조건임을 보였다. 이 명제를 증명하는 과정에서 힐베르트는 공리 III, 5가 성립하지 않는 평면의 예를 들었는데 ‘기하학의 기초’ 초판 [7]과 10판 [10]에서 완전히 다른 예를 보여주고 있으며 10판에서 나타난 예가 바로 물톤 평면이다. 그 내용상 일반적으로 공리 III, 5를 변-각-변 공리라고 부른다 (부록 참조).

초판에 나타난 예는 복잡하고 공리 변-각-변 공리 이외에도 공리 III, 4도 또한 만족시키지는 않는다는 문제점이 있다.[1] 초판의 복잡한 예에 비하여 물톤(Forest R. Moulton, 1872–1952)이 1902년에 제시한 이 평면기하는 변-각-변 이외의 다른 모든 공리를 만족시킬 뿐만 아니라 비교적 이해하기 쉽기 때문에 힐베르트가 개정판에서 대체한 것으로 생각된다. 변-각-변 공리 하나의 결여로 데자르그 정리가 성립하지 않는 물톤 기하는 공간기하의 부분기하가 되지 못하며, 따라서 파스칼의 정리 또한 성립하지 않는다. 변-각-변 공리가 성립하지 않는 평면기하라도 공간공리가 성립하면 데자르그 정리는 성립한다. 물톤 평면 외에도 변-각-변 공리 이외의 모든 힐베르트 공리를 만족시키는 평면은 좌표 평면에 거리를 다르게 줌으로써 쉽게 만들 수 있다. 그 예로 택시 기하, 그리고 [11, Ex. 6.5]와 [3, Ch3, Ex.35]에 소개된 기하를 들 수 있다. 이들 기하에서는 당연히 데자르그 정리뿐만 아니라 파스칼의 정리도 성립한다.

힐베르트가 유클리드의 네 번째 명제[2]를 변-각-변 공리로 대체한 것은 유클리드 기하가 절대적인 기하가 아니라 가능한 기하의 하나라는 점에서 필연적인 과정이라고 보여진다. 물톤 평면은 여러 평면기하의 예 중에서도 유클리드 평면과 대비되는 여러 성질들을 가장 많이, 그리고 극명하게 보여주고 있다는 점에서 유클리드 기하와 비 유클리드 기하의 본질을 이해하려는 학생들과 수학교사들에게 큰 도움이 될 것으로 생각되어 물톤 기하의 자세한 내용과, 가능한 경우, 간단한 예를 통한 증명을 소개한다.

2 물톤 평면의 점, 직선, 거리, 각도

여기에 제시된 여러 정의는 [11]을 따른 것이며 [13]나 [10]에 제시된 물톤의 원래 정의와는 약간 다르지만 본질적인 내용은 같다.

---

1) 공리 III, 4는 반직선의 순서와 관계없이 각이 잘 정의된다는 내용이 포함되어 있다. 그런데 초판의 예에 나와 있는 각의 정의에 의하면 반직선 h와 k에 대하여 $\angle(h,k)$와 $\angle(k,h)$가 합동이 아닌 경우가 있다.

2) 이 논문에서 유클리드의 몇 번째 명제 또는 유클리드 명제 I.i(단 i는 자연수)라 할 때는 [1]에서 제시된 유클리드 기하의 체계를 따르고 있다.

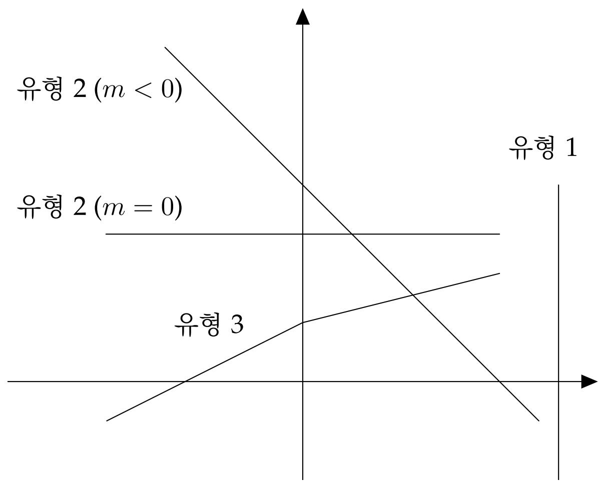

Figure 1. Lines in the Moulton plane; 물톤 평면의 직선

정의 2.1: 임의의 두 실수 x, y로 이루어진 순서쌍 (x, y)가 물톤 평면의 점이다. 물톤 평면에는 세 가지 유형의 직선이 있다. 이를 방정식으로 나타내면 다음과 같다. *(Figure 1 참조)*

- 유형 *1* : $x = a$.
- 유형 *2* : $y = mx + b$ (단 $m \le 0$)
- 유형 *3* : $y = \begin{cases} mx+b, & (\text{단 } x \le 0) \\ \frac{1}{2}mx+b, & (\text{단 } x > 0) \end{cases}$ (단 $m > 0$)

정의 2.2: 좌표 평면의 두 점 P와 Q에 대하여 둘 사이의 유클리드 거리를 $d_E(P, Q)$라 하자. 그러면 두 점 P와 Q 사이의 물톤 거리 $d_M(P, Q)$는 다음과 같다.

- 물톤 선분 PQ가 y축과 한 점, 이를 V라 하자, 에서 만나는 경우

$$d_M(P, Q) := d_E(P, V) + d_E(V, Q).$$

- 나머지 모든 경우

$$d_M(P, Q) := d_E(P, Q).$$

정리 2.1: d_M 에 대하여 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다

- 임의의 두 점 P, Q에 대하여 $d_M(P, Q) \ge 0$.
- $d_M(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
- 임의의 두 점 P, Q에 대하여 $d_M(P, Q) = d_M(Q, P)$.

여기에는 삼각부등식이 포함되어 있지 않은데 사실 물톤 평면은 삼각부등식을 만족시키지 않는다. 이를 구체적인 예를 통하여 알아보자.

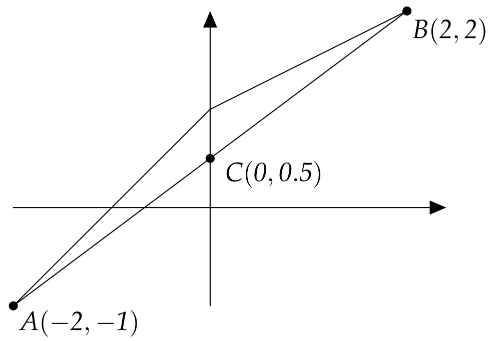

Figure 2. Moulton triangle ABC; 물톤 삼각형 ABC

Figure 2에서 점 C 는 물톤 삼각형 ABC 의 한 꼭지점이고 이 삼각형이 y 축과 만나는 점 $W(0,1)$ 은 이 물톤 삼각형의 꼭지점이 아니라 변 AB 에 있는 점일 뿐이다. 이제 물톤 삼각형 ABC 의 세 변의 물톤 길이 $d_M(A,B), d_M(A,C), d_M(C,B)$ 에 대해 살펴보면,

$$d_M(A,C) + d_M(C,B) = d_E(A,B) < d_E(A,W) + d_E(W,B) = d_M(A,B)$$

이므로

$$d_M(A,C) + d_M(C,B) < d_M(A,B).$$

즉, 삼각부등식이 성립하지 않는다.

정의 2.3: 동일 시점을 갖는 임의의 두 반직선은 하나의 각을 결정하며, 이때 각도는 다음과 같다.

- 꼭지점이 y-축에 있지 않을 때 *:* 물톤 각도는 유클리드 각도와 같다.
- 꼭지점이 y-축에 있을 때 *:* 먼저 서로 다른 두 점 $P=(a,c)$, $V=(0,b)$ 에 대하여 점 P_V 를 다음과 같이 정의한다*:*

$$P_V := \begin{cases} P=(a,c) & (\text{단 } a \le 0 \text{ 또는 } c \le b) \\ P+(0,c-b)=(a,2c-b) & (\text{단 } a > 0 \text{ 그리고 } c > b) \end{cases}$$

  이제 물톤 각 PVQ 의 크기 $m\angle PVQ$ 는 유클리드 각 P_VVQ_V 의 유클리드 크기 $m\measuredangle P_VVQ_V$ 로 정의한다*(Figure 3 참조)*. 즉

$$m\angle PVQ := m\measuredangle P_VVQ_V$$

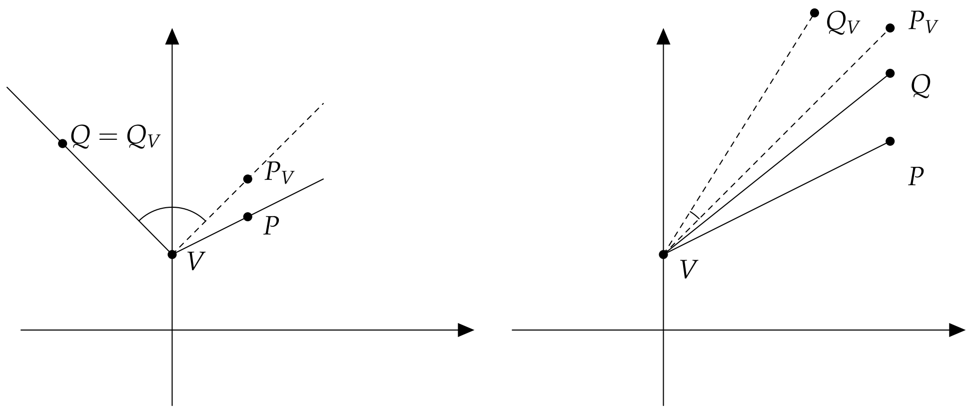

Figure 3. Magnitude of $\angle PVQ$ in the Moulton plane; 물톤 평면에서 $\angle PVQ$의 크기

3 물톤 평면에서 힐베르트 평면공리의 진위 여부

힐베르트는 그의 저서 '기하학의 기초' 에서 5개의 공리군으로 기하를 구성하였으며, 이를 현대수학에서는 힐베르트 공리계라 부른다. 이에 대한 자세한 소개는 [15] 에서 찾아볼 수 있는데 이론이 발전함에 따라 공리계를 새로 구성하기도 하여 여러 버전의 힐베르트 공리계가 존재하므로 편의상 우리는 [15, 부록 2] 에 소개된 힐베르트의 공리계를 따른다. 예를 들어 힐베르트의 공리 I, 1이라 함은 [15, 부록 2]에 있는 대로의 힐베르트 공리계를 말한다. 독자의 편의를 위하여 [15, 부록 2]를 이 논문의 부록으로도 제공한다.

결합공리군, 순서공리군, 합동공리군의 모든 평면 공리를 만족시키는 평면기하를 힐베르트 평면기하라 부르는데, 힐베르트 평면기하가 평행공리를 긍정도 부정도 하지 않음을 강조하여 중립 기하라는 용어를 사용하기도 한다.

이제 이 중에서 어떤 공리가 물톤 평면에서 성립하고 어떤 공리가 성립하지 않는지 알아보자. 이를 위해선 먼저 힐베르트의 공리계에 등장하는 용어들이 물톤 평면에서 무엇을 의미하는지 분명히 해야 하는데 합동공리군에 등장하는 선분의 합동과 각의 합동에 관한 정의만 분명히 한다. 나머지 용어의 뜻은 자명하다.

정의 3.1: 물톤 평면에서, 두 선분이 서로 합동이라 함은 두 선분의 길이가 같음을 말하며 두 각이 서로 합동이라 함은 두 각의 크기가 같음을 말한다.

일반적으로 두 도형이 합동이라 함은 강체운동으로 서로 포갤 수 있음을 말한다. 그러나 물톤 평면에는 아직 강체 운동이 무엇인지 정의되지 않았으므로 강체운동으로 합동을 정의할 수는 없다. 8절에서 물톤평면의 강체운동을 살펴볼 것인데 강체운동으로 포갤 수 없으면서도

서로 합동인 선분들이 있음을 보게 될 것이다.

정리 3.1: *[10, 13]* 물톤 평면에서는 *III, 5*를 제외한 모든 힐베르트 평면 공리가 성립한다.

증명. 물톤 평면에서 공리 I, 1–2가 성립함을 보이기 위하여 임의의 두 점 (x_1, y_1)과 (x_2, y_2)를 지나는 직선을 생각해보자. $x_1 = x_2$이거나 $y_2 \leq y_1$인 경우 이 두 점을 지나는 물톤 직선은 유클리드 직선과 같다. x_1과 x_2가 둘 다 양이거나 음일 때, 즉 $0 < x_1 < x_2$ 또는 $x_1 < x_2 < 0$일 때는 두 점을 잇는 유클리드 선분이 물톤 선분이 되며, 이 선분을 포함하는 물톤 직선은 y축에서 한번 꺾이게 된다. 마지막으로 $x_1 < 0 < x_2$이고 $y_1 < y_2$인 경우만 남는데, 이 경우는 두 점을 지나는 물톤 직선이 y축과 만나는 점을 $(0, b)$라 하면, 물톤 직선은 이 점에서 꺾이게 되며

$$\frac{b - y_1}{0 - x_1} = 2\frac{y_2 - b}{x_2 - 0}$$

을 만족시키게 된다. 그러므로

$$b = \frac{x_2 y_1 - 2x_1 y_2}{x_2 - 2x_1}$$

이고, y축 왼쪽 부분의 기울기는

$$m = \frac{b - y_1}{0 - x_1} = 2\frac{y_2 - y_1}{x_2 - 2x_1},$$

y축 오른쪽 부분의 기울기는

$$m/2 = \frac{y_2 - b}{x_2 - 0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - 2x_1}$$

인 직선이 된다. 어느 경우에나 두 점을 지나는 직선은 유일하게 결정됨을 보였다. 나머지 결합공리 중 공간공리 I, 7–8을 제외한 공리 I, 3–6이 성립함은 자명하므로 여기서는 생략한다.

합동공리군 III 중 선분의 합동에 관련된 III, 1–3은 이 평면에서 모두 성립함은 자명하다. 각의 합동에 관련된 III, 4는 각의 꼭지점이 y축에 있는 경우에만 증명하면 된다. 그런데 각의 정의에 따라 꺾이기 전의 각으로 옮기면 보통의 유클리드 평면에서 공리가 성립하므로 꺾인 후에도 여전히 성립함을 쉽게 알 수 있다.

평행공리 IV가 성립함은 명백하다. 특히, 주어진 직선의 기울기가 양인 경우 주어진 점을 지나 같은 기울기를 갖는 직선을 그린 후 똑같이 y축에서 꺾은 직선을 그리면 된다.

연속공리군 V가 성립함은 자명하다. □

합동공리군의 마지막 공리인 변-각-변 공리는 직관적으로 당연해 보이지만 모든 기하에서 참인 것은 아니다. 유클리드는 이것을 다른 공리들로부터 추론되는 정리(유클리드 명제 I.4)라 하고 증명을 제시하였는데, 이천여 년을 걸친 후대 수학자들의 노력에 의해 그 오류가 밝혀졌으며, 특히 힐베르트에 의하여 변-각-변 공리의 독립성 및 그 의미가 선명히 밝혀지게 되었다.

정리 3.2: *[10, 13]* 물톤 평면에서는 변-각-변 공리가 성립하지 않는다.

증명. Figure 4에서 아래에 있는 점선으로 된 유클리드 삼각형은 위에 있는 삼각형 ABC를 평행이동과 유클리드 회전을 하여 얻어진 것으로 보통의 유클리드 평면에서 합동이지만, 물톤 기하에서는 삼각형이 아닌 사각형이다. 선분 BC에 대응되는 부분이 두 선분으로 이루어져 있으므로 이 부분을 한 직선으로 바꾸어 선분 BC와 같은 거리만큼 B'으로 부터 떨어져 있는 점 C'을 찾아서 만든 삼각형이 $A'B'C'$이다. 그러므로

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \angle ABC \equiv \angle A'B'C', \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$$

이지만

$$\angle BAC \not\equiv \angle B'A'C'$$

이므로 변-각-변 공리가 성립하지 않음을 알 수 있다. □

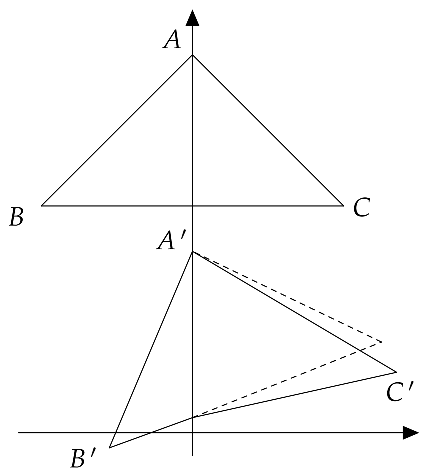

Figure 4. Example 1 which shows that the side-angle-side axiom does not hold in the Moulton plane; 물톤 평면에서 변-각-변 공리가 성립하지 않음을 보여주는 예 1

다음과 같은 예도 생각할 수 있다. Figure 5에서 $\triangle BVE$와 $\triangle BVF$를 비교해 보면,

$$\overline{BV} \equiv \overline{BV}, \quad \angle BVE \equiv \angle BVF, \quad \overline{VE} \equiv \overline{VF}$$

지만

$$\angle VBE \not\equiv \angle VBF, \quad \angle BEV \not\equiv \angle BFV$$

이다. 그리고 당연히 $\overline{BE} \not\equiv \overline{BF}$이다.

4 데자르그 정리

힐베르트의 공리군 I, II, IV를 모두 만족시키는 기하는 다음 정리를 만족시킨다.

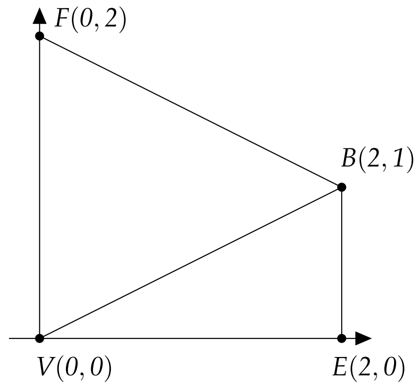

Figure 5. Example 2 which shows that the side-angle-side axiom does not hold in the Moulton plane; 물톤 평면에서 변-각-변 공리가 성립하지 않음을 보여주는 예 2

데자르그 정리[3)] 두 삼각형 ABC 와 $A'B'C'$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(i) 대응관계에 있는 세 쌍의 변이 각각 평행하면, 대응관계에 있는 꼭지점을 연결하는 세 직선 AA', BB', CC' 이 한 점에서 만나거나 서로 평행하다.

(ii) 세 직선 AA', BB', CC' 이 한 점에서 만나거나 서로 평행하고 대응관계에 있는 두 쌍의 변이 서로 평행할 때, 나머지 한 쌍의 대응관계에 있는 변도 서로 평행하다.

공간공리를 고려하지 않는 평면기하의 경우에도 힐베르트의 모든 평면공리를 만족시킨다면 데자르그 정리가 성립함을 힐베르트가 [7] 에서 증명하였다.

이제 변-각-변 공리를 제외한 힐베르트의 모든 평면공리가 성립하는 물톤 평면에서는 데자르그 정리가 성립하지 않음을 살펴보자.

정리 4.1: *([10, 13]) 물톤 평면에서는 데자르그 정리가 성립하지 않는다.*

증명. Figure 7에서, 대응되는 세 변이 모두 평행한 두 삼각형의 대응되는 꼭지점들을 연결한 세 직선은 유클리드 평면에서는 한 점에서 만난다. 그러나 물톤 평면에서는 기울기가 양인 직선은 y축 오른쪽 부분에서 꺾이게 되므로 대응되는 꼭지점을 연결한 세 직선이 한 점에서 만나지 않게 되어 데자르그 정리를 만족시키지 못한다. □

3) 데자르그 정리는 사영공간에서 표현하면 훨씬 간단해진다:

데자르그 정리 두 삼각형 ABC 와 $A'B'C'$ 에 대하여, 다음 두 명제는 동치다.

(i) 대응관계에 있는 세 쌍의 변의 교점들은 한 직선에 있다.

(ii) 대응관계에 있는 꼭지점을 연결하는 세 직선 AA', BB', CC' 이 한 점에서 만난다.

이 정리는 사영 평면에서 참이며, 일반적으로는 3차원 사영공간의 부분공간이기 위한 필요충분조건에 해당한다.

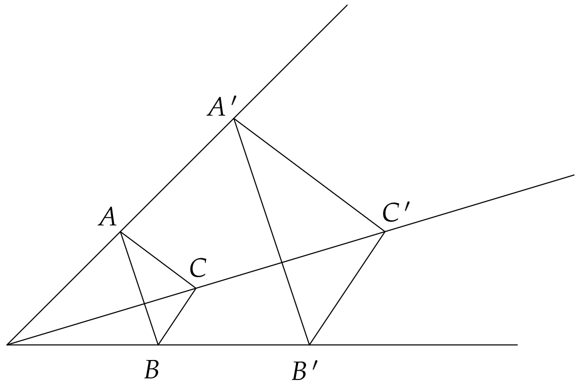

Figure 6. Desargues' theorem; 데자르그 정리

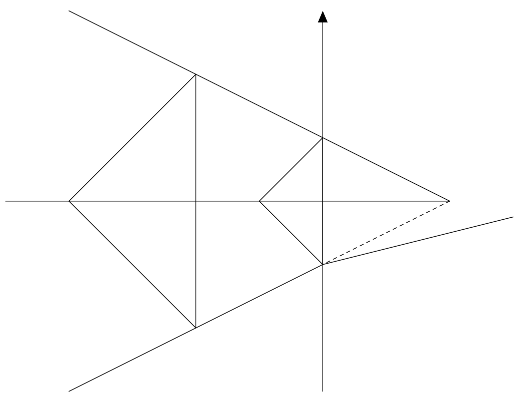

Figure 7. Example which shows that Desargues' theorem does not hold in the Moulton plane; 데자르그 정리가 성립하지 않는 물톤 평면의 예

힐베르트는 [7]에서 합동공리가 없지만 데자르그 정리를 만족시키는 평면기하에서 한 직선의 선분들 사이에 합과 곱을 정의하고 이때 선분들의 집합이 비가환체(skew-field)가 되며 주어진 평면기하는 이 비가환체의 좌표 기하가 됨을 보임으로써 주어진 평면기하가 공간기하의 부분기하임을 증명하였다. 다시 말해서 데자르그 정리는 어떤 평면기하가 공간기하로 확장되기 위한 필요충분조건임을 보였다. 물톤 평면에서는 변-각-변 공리를 제외한 모든 평면공리가 성립하지만 데자르그 정리가 성립하지 않으므로 물톤 평면기하는 어떠한 공간기하의 부분기하도 되지 못한다는 결론을 얻을 수 있다.

서론에서도 언급한 바 있듯이 좌표평면에 유클리드 거리와는 다른 거리를 줌으로써 변-각-

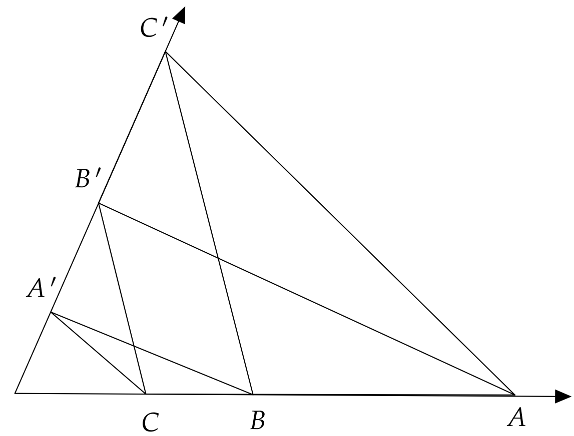

Figure 8. Pascal's theorem; 파스칼의 정리

변 공리를 만족시키지 않는 평면기하를 만들 수 있다 . 택시 기하는 두 점 $A = (x_1, y_1)$과 $B = (x_2, y_2)$ 사이의 거리를

$$d_t(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

로 정의하여 얻어지는 기하며, [11, Ex. 6.5]와 [3, Ch3, Ex.35]는 평면의 한 직선에서만 두 점 사이의 거리를 상수배로 확대 또는 축소하여 정의하여 얻어지는 기하다. 이들 평면기하의 경우 모두 직선의 정의에는 아무런 변화가 없으므로 데자르그 정리와 파스칼의 정리를 모두 만족시킨다. 그러나 거리가 달리 정의됨으로써 선분의 합동 관계가 유클리드 평면과는 달라지며, 이로 인해 변-각-변 공리는 성립하지 않는다.[4)]

5 파스칼의 정리

평면결합공리군(I의 1, 2)와 순서공리군(II), 합동공리군(III), 평행공리(IV)를 만족시키는 기하는 다음 정리를 만족시킨다.

> **(파스칼의 정리)** 교차하는 두 직선 중 한 직선에 점 A, B, C가, 다른 한 직선에 A', B', C'이 있으며 이들이 모두 두 직선의 교차점이 아니라고 할 때, CB'이 BC'에 평행하고 CA'이 AC'에 평행하면 BA'도 AB'에 평행하다.

평면기하에서 파스칼의 정리가 성립하면 데자르그 정리가 성립함은 잘 알려져 있다 (증명은 [10, 정리 61] 참조). 그리고 파스칼의 정리가 성립함은 일반적으로 비가환일 수 있는 선분대

4) 힐베르트 공리계에는 거리 개념이 전혀 들어 있지 않다. 좌표평면에 거리만 다르게 준 이러한 평면기하들은 당연히 좌표공간기하의 부분기하이다. 물론 데자르그 정리가 성립한다는 것으로부터 얻을 수 있는 결론이기도 하다.

수가 사실은 가환이 되어 체가 되는 것과 동치다.

물톤 평면에서는 데자르그 정리가 성립하지 않음을 앞 절에서 보았다. 그러므로 파스칼의 정리 또한 성립하지 않음을 힐베르트의 이론을 통해 알 수 있다.

정리 5.1: *[10, 13]* 물톤 평면에서는 파스칼의 정리가 성립하지 않는다.

이를 구체적인 예를 통하여 알아보자.

Figure 9에서 직선 $A'C$ 와 직선 AC', 직선 $B'C$ 와 직선 BC' 은 평행하지만, 직선 $A'B$ 와 직선 AB' 은 평행하지 않음을 보여주고 있다. 이는 보통의 유클리드 평면에서 파스칼의 정리가 성립하므로 직선 $A'B = A'B''$ 와 직선 $A''B'$ 이 평행하므로 직선 $A'B$ 와 직선 AB' 은 평행할 수 없다.

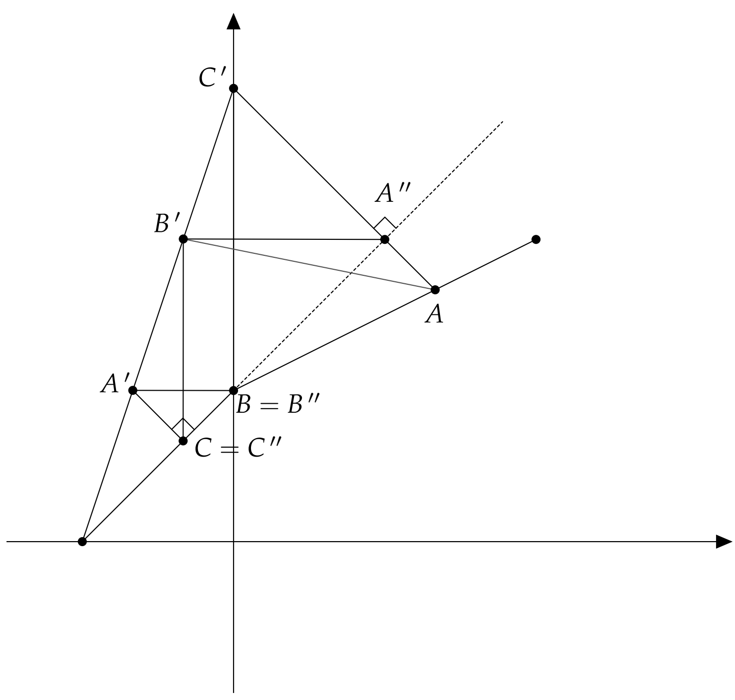

Figure 9. Example which shows that the Pascal's theorem does not hold in the Moulton plane; 파스칼의 정리가 성립하지 않는 물톤 평면의 예

파스칼의 정리에서 세 쌍의 직선이 평행하다는 것은 물톤 평면을 사영 평면 안에서 보았을 때는 이 세 쌍의 직선이 모두 무한원직선에서 만난다고 볼 수 있다. 사실, 파스칼의 정리는 사영공간에서는 더 일반적으로 다음과 같이 표현된다 :

파스칼의 정리*[5] 두 직선 중 한 직선에 점 A, B, C가, 다른 한 직선에 A', B', C'이 있으며 이들이 모두 두 직선의 교차점이 아니라고 할 때, 직선 CB'와 직선 BC'의 교점, 직선 CA'와 직선 AC'의 교점, 직선 BA'와 직선 AB'의 교점은 한 직선에 있다.

Figure 10은 파스칼의 정리의 사영 버전으로, 물톤 평면의 평행인 두 직선에 있는 각 세 점 A, B, C와 A', B', C'에 대하여 직선 $A'C$와 직선 AC'의 교점 q, 직선 $B'C$와 직선 BC'의 교점 r, 직선 $A'B$와 직선 AB'의 교점 p가 한 직선에 있지 않음을 보여주고 있다. 직선 $A'C$가 꺾이기 전에는 점선으로 표시되는데 이 직선과의 교점을 q'이라 하면 p, q', r이 한 직선에 있는 것은 사영 평면에서 파스칼의 정리가 성립하기 때문이다.

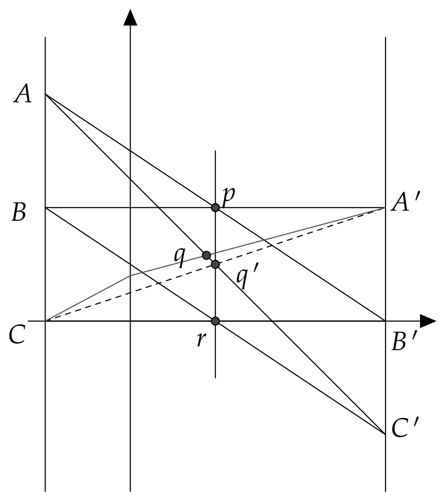

Figure 10. Example which shows that Pascal's theorem does not hold in the Moulton plane (Projective version); 파스칼의 정리가 성립하지 않는 물톤 평면의 예(사영 버전)

6 물톤 평면의 각에 관한 정리들

힐베르트의 공리 중 선분에 대한 합동공리는 III, 1–3이고 각에 대한 합동공리는 III, 4–5다. 각에 대한 합동공리를 다음 관점에서 볼 수 있다.

각도기 공준 (Protractor Postulate). 모든 각들의 집합에서 $(0, \pi)$로 가면서 다음을 만족시키는 함수 m이 있다.

1. 반직선 VA를 경계로 하는 반평면 H에 대하여, 임의의 실수 $r \in (0, \pi)$에 대하여,

5) 사영 평면기하에서 파스칼의 정리는 그 기하가 사영 평면처럼 어떤 체 F에서의 사영 평면 $PG(2, F)$임과 동치임이 알려져 있다

반평면 H 안의 점 P가 있어서 $m\angle AVP = r$.

2. 점 B가 각 AVC의 내부의 점일 때, $m\angle AVB + m\angle BVC = m\angle AVC$.

결합공리군, 순서공리군, 선분에 대한 합동공리군, 그리고 평행공리를 만족시키는 평면기하가 각도기 공준까지 만족시키면 다음 유클리드 명제들이 성립한다(증명은 [11, 160–161쪽] 참조).

(유클리드 명제 I.13) 한 직선이 다른 직선을 만나서 이루는 두 각의 합은 두 직각이다.

(유클리드 명제 I.14) 직선의 한 점을 지나는 두 반직선이 반대쪽에 있으면서 이루는 각의 합이 두 직각이면 그 두 반직선은 직선을 이룬다.

(유클리드 명제 I.15) 맞꼭지각은 같다.

물톤 평면은 각도기 공준을 만족시키므로 위 세 명제가 모두 성립한다. 그런데 핫숀(Hartshorne)은 이 명제들을 증명할 때, 변-각-변 공리를 이용하였는데 ([5, 92–93쪽] 참조), 물톤 평면의 예로부터 변-각-변 공리가 이 명제들이 참이기 위한 충분조건이나 필요조건은 아님을 알 수 있다. 실제로 각도기 공준으로부터 각에 대한 합동공리 중 III, 4를 유도할 수 있으나 변-각-변 공리인 III, 5는 이끌어낼 수 없다. 물톤 평면이 그 예라고 할 수 있다. 그러나 각도기 공준은 실수를 사용하여 각을 정의하고 있는데, 핫숀은 힐베르트와 마찬가지로 실수를 사용하지 않고 기하를 이해하려 하였으며 그러한 노력이 위 세 명제를 증명하는 데에도 이어지고 있는 것이다.

이제 변-각-변 공리가 성립하지 않는 물톤 평면에서 나타나는 특이한 점들을 살펴보자.

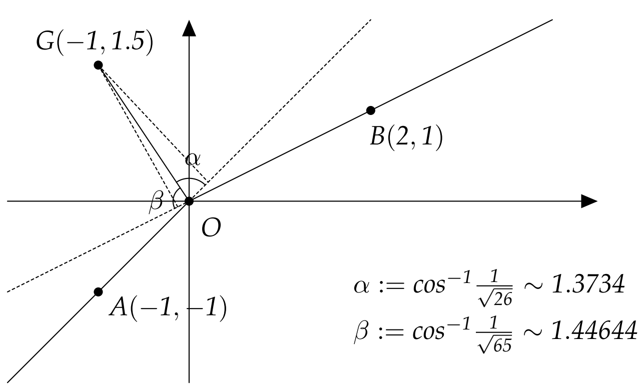

Figure 11. There is no foot of perpendicular from G to the line AB.; 점 G에서는 물톤 직선 AB에 수선의 발을 내릴 수 없다.

Figure 11을 보자. 점 P가 반직선 AO의 점이면 각 $\angle GPA$는 P가 O 일 때 $\pi-\alpha$이고, P가 O에서 멀어질 때 점점 커지며 π에 수렴한다. 반대로 P가 반직선 BO의 점이면 각 $\angle GPB$는 P가 O 일 때 α이고, $P \neq O$인 모든 점 P에 대해서는 $\pi-\beta$ 보다 크고, P가 O에서 멀어질 때 점점 커지며 π에 수렴한다. 즉, 직선 AB의 임의의 점 P에 대하여, $\angle GPA$와 $\angle GPB$는 다음을 만족시킨다.

$$m\angle GPA \notin [\beta, \pi-\alpha), \qquad m\angle GPB \notin (\alpha, \pi-\beta].$$

그런데 $\frac{\pi}{2} \in [\beta, \pi-\alpha) \cap (\alpha, \pi-\beta]$이므로 이로부터 다음을 알 수 있다:

- 점 G에서 직선 AB에 수선의 발을 내릴 수 없다.
- 각이 불연속적으로 변한다.

수선의 발이 2개 있는 경우도 존재한다 (Figure 12 참조). 수선의 발이 없거나 하나 이상 존재하는 경우 때문에 물톤 평면에서는 넓이를 정의할 수 없다.

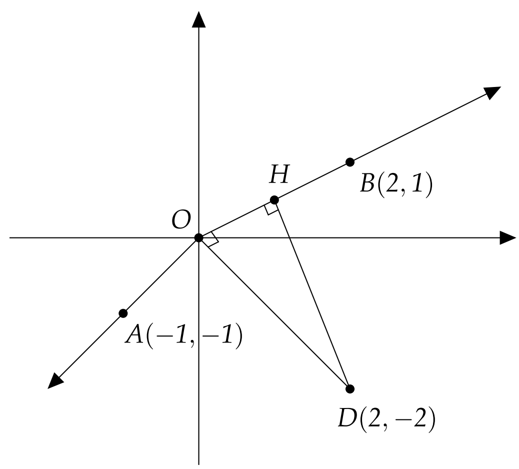

Figure 12. Two feet of perpendicular; 수선의 발이 2개 있는 경우

물톤 평면에서는 르장드르 정리가 성립하지 않는다.

르장드르 정리. 힐베르트 평면에서는 임의의 삼각형의 내각의 합이 항상 2 직각이거나 (준-유클리드적), 항상 2 직각보다 작다 (준-쌍곡적).[6)]

6) 아르키메데스 공리를 가정하지 않을 때에는 세 유형으로 나뉜다. 이 경우에는 준-유클리드적, 준-쌍곡적의 경우와 함께 삼각형의 내각의 합이 항상 2직각보다 큰 준-타원적 경우도 나타난다.

물톤 평면에서는 삼각형의 내각 중 두 개가 직각인 경우가 있으며 (Figure 12 참조), 내각의 합이 2 직각인 경우와 2 직각보다 큰 경우가 모두 나타난다. 이는 힐베르트 평면이 두 유형으로 나뉜다는 점과 대비된다.

다음 정리는 유클리드 명제 I.27로 물톤 평면에서는 성립하지 않는다 .

엇각 정리 (Alternate Interior Angle Theorem). 엇각이 같은 두 직선은 평행하다.

Figure 12에서 직선 AB 의 두 수선은 평행하지 않고 D 에서 만난다. 엇각 정리는 평행공리와 상관없이 모든 힐베르트 기하에서 성립하는 정리며, 평행공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 이 정리의 역도 성립한다. 그런데 물톤 평면은 평행공리가 성립함에도 변-각-변 공리가 성립하지 않아서 힐베르트 기하가 아니며, 이 정리가 성립하지 않는 기하임을 알 수 있다.

아래 명제들 또한 물톤 평면에서 성립하지 않는다.

외각 정리 (Exterior Angle Theorem). 삼각형의 임의의 외각은 인접하지 않은 그 어느 내각보다도 크다.

위 정리는 유클리드 명제 I.16으로, Figure 12에서 삼각형 DOH 는 외각 H 와 내각 O 가 같다.

(유클리드 명제 I.5) 이등변 삼각형의 두 밑각은 같다.

$A = (0, 0), B = (1, -1), C = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 를 생각해 보면 $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ 이지만 $m(\angle A) = \frac{\pi}{2} \neq m(\angle C)$ 이다.

(유클리드 명제 I.6) 두 내각이 같은 삼각형은 이등변 삼각형이다.

Figure 12에서 삼각형 DOH 를 보면 각 $\angle DOH$ 와 각 $\angle DHO$ 는 직각으로 서로 같지만 선분DO 의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이고 선분 DH 의 길이는 $\frac{6}{\sqrt{5}}$ 으로 서로 같지 않다.

7 물톤 평면의 원

물톤 평면의 기하를 좀더 알아보기 위하여 원을 정의하자. 힐베르트는 거리를 사용하지 않고 기하를 서술하였으므로 힐베르트 기하를 따르자면 원의 정의는 다음과 같다: 서로 다른 두 점 C 와 A 가 주어졌을 때 점 C 를 중심으로 하고 반지름이 CA 인 원은 선분 CP 와 선분 CA 가 합동이 되는 점 P 들의 집합이다.

이 정의는 합동이 정의된 물톤 평면에서 여전히 유효하나 물톤 평면에서는 거리를 이용하여 합동이 정의되기 때문에 물톤 평면의 한 점 C 와 양의 실수 r 이 주어져 있을 때 중심이 C 고 반지름이 r 인 원은 유클리드 평면에서와 같이 점 C 로부터 r 만큼 떨어져 있는 점들의 집합으로 생각해도 무방하다.

$$S(C, r) = \{P \mid d_M(C, P) = r\}.$$

중심이 y축에 있는 경우 모든 반지름에 대하여 물톤 원은 유클리드 원과 일치한다. 하지만 중심이 y축에서 벗어나는 경우 충분히 큰 반지름에 대해서는 물톤 원이 유클리드 원과 일치하지 않는다. 예를 들어 중심이 (a, b)인 경우, $a < 0$이면 $x > 0$이고 $y > b$인 사분면에서 변형이 일어난다(Figure 13 참조). 이 원은 다음과 같은 매개식의 이미지로 주어진다:

$$
\begin{array}{ll}
0 \le t \le \tan^{-1}\sqrt{99}\text{일 때} & \left(\dfrac{2(10-\sec t)}{\sqrt{4+\tan^2 t}}, \tan t + \dfrac{\tan t(10-\sec t)}{\sqrt{4+\tan^2 t}}\right), \\
\tan^{-1}\sqrt{99} \le t \le 2\pi\text{일 때} & (-1+10\cos t, 10\sin t).
\end{array}
$$

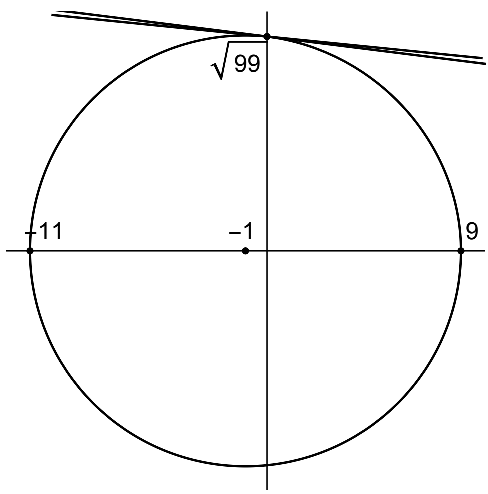

Figure 13. Moulton circle. At $(0, \sqrt{99})$, the left tangent line and the right tangent line are not the same.; 물톤 원. 점 $(0, \sqrt{99})$에서 왼쪽 접선과 오른쪽 접선이 다르다.

유클리드 평면에서는 원의 임의의 점에서 접선을 그을 수 있고 그 접선은 반지름과 수직으로 만난다. 그러나 물톤 평면의 원은 이러한 성질을 가지고 있지 않다. y축의 점이 원주에 있을 경우 접선을 그을 수 없는 경우가 생긴다. 예를 들어 Figure 13의 원은 y축과 만나는 두 점 중 아래 점에서는 접선이 존재하고 반지름과 수직으로 만나지만, 위의 점에서는 왼쪽 접선과 오른쪽 접선이 일치하지 않는다.

또 다른 예로 중심이 $D(2, -2)$이고 반지름이 $2\sqrt{2}$인 원 Γ가 있다. 원점 $(0, 0)$과 점 $(0, -4)$가 이 원에 있는데, 이 두 점에서는 접선을 그을 수 없다. 원점에서의 유클리드 접선은 기울기가 양이고 기울기가 양인 물톤 직선은 y축에서 항상 꺾이므로, 물톤 직선 중에서 원점을 지나는 직선은 모두 원 Γ를 두 점 또는 세 점에서 만난다. 점 $(0, -4)$에서 오른쪽 접선의 기울기는 -1이고 왼쪽 접선의 기울기는 -1 보다 작다(Figure 14 참조.)

평면기하에는 다음과 같은 공리들이 있다.

- 원-원 공리(Circle-Circle Axiom) : 한 원이 다른 원의 내부점과 외부점을 각각 포함하면 두 원은 (두 개의) 교점을 갖는다.

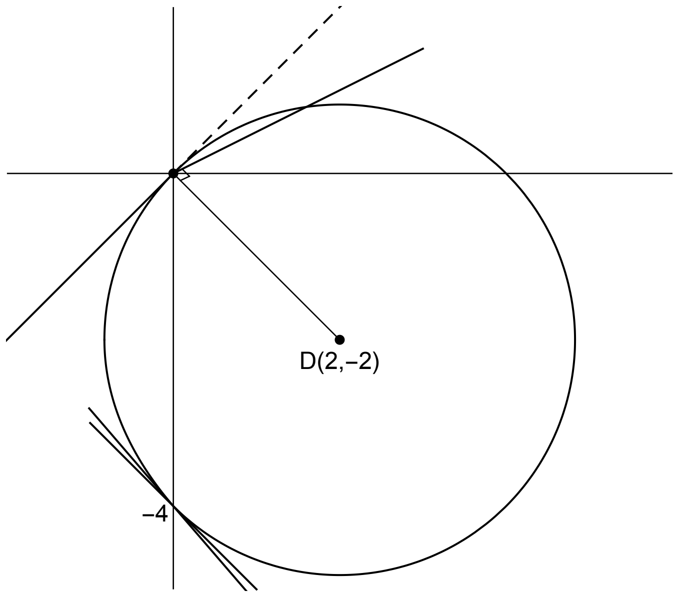

Figure 14. Tangent lines to a Moulton circle; 물톤 원에서의 접선

- 직선-원 공리 (Line-Circle Axiom) : 한 원의 내부점을 포함하는 직선은 그 원과 (두 개의) 교점을 갖는다.

- 데데킨트 공리 (Dedekind's Axiom) : 직선 l의 점들이 공집합이 아니고 교집합이 없는 두 집합 S와 T로 나눠지며 S와 T의 어떤 점도 나머지 다른 집합의 임의의 두 원소 사이에 있지 않을 때, 직선 l에는 다음을 만족시키는 점 P가 존재한다:

$$A \in S, B \in T \text{ 이면 } A = P \text{ 이거나 } B = P \text{ 이거나 } P \text{가 } A \text{와 } B \text{ 사이에 있다.}$$

유클리드의 '원론' 에 있는 대부분의 명제가 힐베르트 평면기하에서 성립하지만, 몇 개의 중요한 명제들은 증명되지 않는다. 예를 들어 첫 번째 명제와 22번째 명제 (Triangle Existence Theorem) 가 그렇다. 이 명제들을 증명하기 위해서는 공리가 하나 더 필요한데 그것이 바로 원-원 공리/직선-원 공리다. 힐베르트 평면에서는 이 두 공리가 동치임이 알려져 있다 [3]. 유클리드 평면이라 함은 힐베르트의 모든 평면공리와 이 공리가 하나 더 성립하는 평면을 말한다.

그렇다면 물톤 평면에서는 이 두 공리가 성립할까? 물톤 평면은 힐베르트 평면이 아니기 때문에 이 공리가 성립한다고 해서 유클리드 평면이 되는 것은 아니므로 모순이 발생하지는 않는다.

물톤 평면은 당연히 데데킨트 공리를 만족시키므로 원-원 공리와 직선-원 공리도 만족시킨

다.[7] 단지 직선-원 공리에서 두 개의 점이 아니라 세 개의 점에서 만나는 경우가 생기는데 이는 다음 원점을 지나는 원 γ와 직선의 예를 보면 짐작할 수 있다.

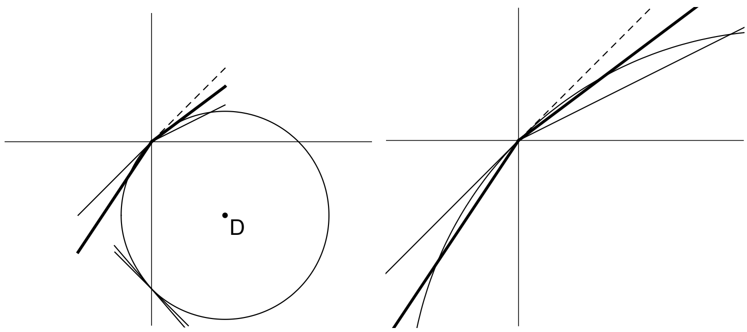

Figure 15. Example of a line and a circle in the Moulton plane which meet at three points. The right figure is a magnification of the left figure around the origin.; 물톤 평면에서 세 점에서 만나는 원과 직선의 예. 오른쪽 그림은 왼쪽 그림의 원점 근방을 확대한 것이다.

Figure 15에서 보듯이, 중심이 $D(2,-2)$이고 반지름이 선분 $2\sqrt{2}$인 원 Γ는 다음을 만족시킨다:

- 원 Γ는 y축과 두 점 $(0,0)$과 $(0,-4)$에서 만난다.
- 원 Γ는 원점과 $(0,-4)$에서 접선을 갖지 않는다.
- 원점을 지나는 직선 중 y축 왼쪽에서 기울기가 1보다 크고 2보다 작은 경우는 원 Γ와 세 점에서 만난다.
- 원점을 지나는 모든 직선은 원 Γ와 두 점 또는 세 점에서 만난다.

이는 y축과 두 점에서 만나는 원에서 일어나는 일반적으로 현상으로, 그 두 교점 중 위쪽 점을 지나는 직선 중에는 그 원에 접하는 직선이 존재하지 않으며, 아래쪽 점을 지나는 직선 중에는 접선이 없을 수도 있고(중심이 y축 오른쪽에 있는 경우) 있을 수도 있다(중심이 y축 왼쪽에 있는 경우).

8 물톤 평면의 강체사상

마지막으로 물톤 평면의 강체사상에 대하여 알아보자.

주어진 평면기하에서 변-각-변 공리가 성립한다는 것은 그 기하의 어느 부분을 보더라도 모든 것이 같다는 것을 의미한다. 유클리드가 변-각-변 공리를 다른 공리들로부터 추론되

7) 데데킨트 공리로 부터 원-원 공리가 유도된다 [5, 116쪽 연습문제 12.3].

는 정리로 생각하여 증명하였을 때 사용한 '중첩원리(method of superposition)' 는 사실 임의의 도형이 이동하여도 변형되지 않고 항상 그대로라는 기하의 균질성(homogeneity) 또는 대칭성(symmetry)의 개념이 이미 사용된 것이다. 후대의 수학자들에 의하여 변-각-변 공리는 본질적으로, 변-각-변 공리를 제외한 I, II, III 군의 다른 모든 평면공리가 성립한다는 가정하에서, 주어진 기하에 충분히 많은 강체사상(rigid motions)이 있다는 것과 동치임이 밝혀졌다.

정의 8.1: 점, 선, 각 사이에 결합공리가 성립하고, 선분과 각에 합동이 정의되어 있는 평면기하 Π에서 정의된 함수 $\phi : \Pi \to \Pi$가 다음을 만족시킬 때, ϕ를 Π의 강체사상이라 한다.[8)]

1. ϕ는 1-1 대응이다.
2. ϕ는 직선을 직선으로 보낸다.
3. ϕ는 한 직선에 있는 점들 사이의 결합관계를 보존한다.
4. 임의의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB와 선분 $\phi(A)\phi(B)$는 합동이다.
5. 임의의 각 α에 대하여, $\angle\alpha$와 $\angle\phi(\alpha)$는 합동이다.

물톤 평면은 유클리드 평면과 많은 점에서 유사하지만 y축에 있는 점 주변에서는 다른 점들의 주변과 완전히 다른 모습을 보여 준다. y축과 멀리 떨어져 있는 도형을 y축 주변으로 가져왔을 때 많은 변형이 일어남을 우리는 바로 확인할 수 있다. 이러한 물톤 평면의 특징을 변환군의 관점에서 이해해 보자.

먼저 Figure 11과 Figure 12을 통하여 살펴본 바와 같이 직선 AB에 수선의 발을 유일하게 내릴 수 없는 점들이 존재하는데 이는 직선 AB에 대한 대칭변환이 존재하지 않음을 의미한다. 이는 물톤 평면의 강체사상이 제한적일 수 있음을 암시하는데, 실제로 물톤 평면의 강체사상은 y축 방향으로의 평행이동밖에 없음을 보일 수 있다.

정리 8.1: 물톤 평면의 강체사상군은 y축 방향으로의 평행이동만으로 이루어진다.

증명에 앞서 강체사상과 합동의 관계에 대하여 약간의 설명을 추가적으로 제시한다. 유클리드 평면에서는 두 선분의 길이가 같다는 것은 두 선분이 강체사상으로 포갤 수 있다는 것이기 위한 필요충분조건이다. 그러나 물톤 평면에서는 두 선분이 합동이어도 강체사상으로 포갤 수 없는 경우가 생긴다. 즉 두 선분이 합동이라는 것은 강체사상으로 포갤 수 있다는 것을 의미하는 것이 아니다.

증명. 우선 y축 방향으로의 평행이동은 물톤 평면의 강체사상이 됨은 자명하다.

8) [5, 149쪽] 참조.

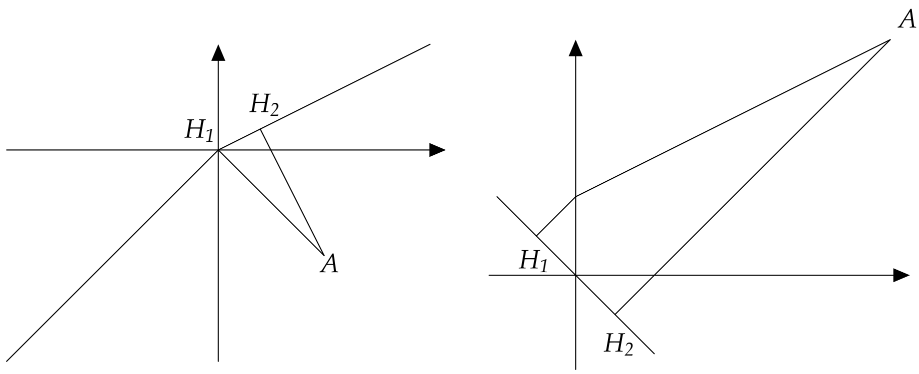

Figure 16. There are two feet of perpendicular from A to the given line.; 점 A에서는 직선에 수선의 발을 두 개 내릴 수 있다.

이제 물톤 평면의 강체사상은 y축 방향으로의 평행이동밖에 없음을 보이자. y축 방향이 아닌 임의의 방향으로의 평행이동은 직선을 직선으로 보내지 못하므로 강체사상이 될 수 없음을 바로 확인할 수 있다. 이제 임의의 실수 b에 대하여 g_b를 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하는 사상을 나타낸다고 하자. 물톤 평면에서는 x축이나 y축에 평행한 직선이 아닌 임의의 직선은 수선을 두 개 내릴 수 있는 직선 밖의 한 점을 가진다(Figure 16 참조). 그러므로 물톤 평면의 임의의 강체사상 T는 y축을 x축이나 y축에 평행한 직선으로 보낼 수밖에 없다.

강체사상 T에 의해 y축이 y축에 평행한 직선 $x = a$로 가는 경우(경우 1)과 y축 이 x축에 평행한 직선 $y = b$로 가는 경우(경우 2)로 나누어 살펴보자.

- 경우 1 : $T(\{(x, y)|x = 0\}) = \{(x, y)|x = a\}$

T는 각을 보존하며 수직선을 수직선으로 보내므로 수평선은 수평선으로 보내야 한다. 즉, x축은 x축에 평행한 다른 직선 $y = b$로 가게 된다. 그런데 T에 y축 방향으로의 평행이동 g_{-b}를 왼쪽에 합성한 사상 $T' = g_{-b} \circ T$은 x축을 보존하면서 y축을 직선 $x = a$로 보내는 강체사상이다. 만약 $a \neq 0$이라면, $k > |a|$인 실수 k에 대하여 네 점

$$A = (k, 0), \quad B = (0, k), \quad C = (-k, 0), \quad D = (0, -k)$$

은 T'에 의하여 다음 네 점

$$E = (a + k, 0), \quad F = (a, k), \quad G = (a - k, 0), \quad H = (a, -k)$$

으로 가게 됨을 알 수 있다. 특히 T'은 x축을 보존하고 y축을 직선 $x = a$로 보내므로

$$T'(A, C) = \{E, G\}, \quad T'(B, D) = \{F, H\}$$

이고, 사각형 $ABCD$는 T'에 의해 사각형 $EFGH$로 가게 된다. 그런데 사각형 $ABCD$는 정사각형인데 반하여 사각형 $EFGH$의 네 변 중 세 변의 길이는 같지만 나머지 한 변의 길이는

더 크므로 정사각형이 아니다 (Figure 17 참조). T' 에 의해 사각형 $ABCD$ 의 네 변 중의 한 변이 합동이 아닌 선분으로 가야 하므로 이는 강체사상의 정의에 모순이 되어 우리는 $a \neq 0$ 인 경우는 일어날 수 없음을 알 수 있다.

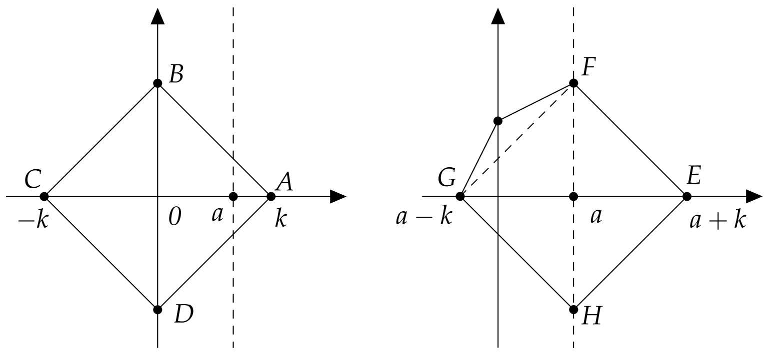

Figure 17. Case 1: $a \neq 0$.; 경우 1: a $\neq 0$인 경우

그러므로 강체사상 T' 는 x축과 y축을 보존하는 강체사상이다. 그런데 x축에 대한 유클리드 대칭변환은 물톤평면의 강체사상일 수 없으므로, 강체사상 $T' = g_{-b} \circ T$ 은 항등사상임을 알 수 있고 이는 강체사상 T 가 g_b 임을 의미한다.

- 경우 2 : $T(\{(x,y)|x=0\}) = \{(x,y)|y=b\}$

y축의 점 $(0,d)$ 이 T 에 의하여 $(0,b)$ 로 가는 점이라고 하면

$$T \circ g_{d-b}(0,b) = T(0,d) = (0,b)$$

이므로 점 $(0,b)$ 는 $T' = T \circ g_{d-b}$ 의 고정점이 되며, 그러므로 강체사상 T' 은 점$(0,b)$ 를 중심으로 한 모든 원을 보존하고, 점 $O = (0,b)$ 를 지나는 수직선과 수평선을 교환한다. (y축의 점을 중심으로 하는 임의의 원은 유클리드 원과 일치함을 앞에서 보았다.)

Figure 18은 점 $(0,b)$ 을 중심으로 한 단위원을 나타낸다. 즉, x축, y축과 만나는 네 점은

$$A = (0, b+1), \quad C = (-1, b), \quad E = (0, b-1), \quad G = (1, b)$$

이고, 점 B, D, F, H 는 네 사분원의 각 중점을 나타낸다.

T' 이 점 $O = (0,b)$ 를 지나는 수직선과 수평선을 교환하는 강체사상이므로 다음 네 가지 중의 한 경우에 해당된다.

- 경우 2-1 : $T'(A) = C, \quad T'(C) = A, \quad T'(E) = G, \quad T'(G) = E,$
- 경우 2-2 : $T'(A) = C, \quad T'(C) = E, \quad T'(E) = G, \quad T'(G) = A,$
- 경우 2-3 : $T'(A) = G, \quad T'(C) = A, \quad T'(E) = C, \quad T'(G) = E,$

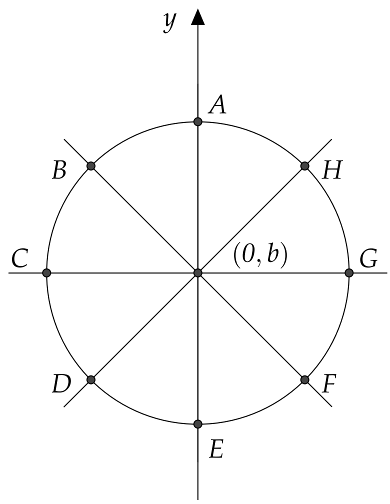

Figure 18. Case 2: A unit circle in the Moulton plane centered at $(0, b)$; 경우 2 : 고정점 $(0, b)$를 중심으로 한 물톤 단위원

- 경우 2-4 : $T'(A) = G, \quad T'(C) = E, \quad T'(E) = C, \quad T'(G) = A.$

경우 2-1을 먼저 살펴 보면, 강체사상은 선분을 합동인 선분으로 보내므로 T'에 의해 점 B와 F는 고정되고, 점 D와 H는 서로 교환된다. 즉,

$$T'(B) = B, \quad T'(F) = F, \quad T'(D) = H, \quad T'(H) = D$$

이 성립한다. 그런데

$$m\angle BOD = \frac{\pi}{2}, \quad mT'(\angle BOD) = m\angle BOH \neq \frac{\pi}{2}$$

이므로, 이 경우는 일어날 수 없다.

경우 2-2를 살펴보면,

$$T'(B) = D, \quad T'(F) = H, \quad T'(D) = F, \quad T'(H) = B$$

가 된다. 그러나 이는 직선 BF가 꺾인 선(유클리드 직선 DH)으로 감을 의미하므로 이 경우 또한 일어날 수 없다.

마찬가지 방법에 의하여 경우 2-3과 경우 2-4도 일어날 수 없음을 알 수 있다. □

References

1. Euclid, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Vols. 1,2,3, Dover Publications, Inc., New York, 1956.
2. M. J. Greenberg, Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries, *American Mathematical Monthly* 117(3) (March 2010), 198–219.

3. M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries : Development and History*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
4. M. Hallett, U. Majer, eds., *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*,Springer, New York, 2004.
5. Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
6. D. Hilbert, Úber ternáre definite Formen, *Mathematische Annalen* 17 (1893), 169–197.
7. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1st ed, Authorized translation by E. J. Townsend, The open court publishing company, 1902. – Kessinger Publishing's Rare Reprints.
8. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1st ed, Authorized translation by E. J. Townsend, The open court publishing company, 1902. – BiblioBazaar Reproduction Series.
9. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1st ed, Authorized translation by E. J. Townsend, The open court publishing company, 1902. – LateX Source From Internet.
10. D. Hilbert, *Foundations of Geometry*, Translated by Leo Unger from the tenth German Edition, Open Court Classics, Revised and Enlarged by Paul Bernays, Open Court, 1971.
11. George E. Martin, *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*, Springer, New York, 1975.
12. Edwin Moise, *Elementary Geometry From an Advanced Standpoint*, Addison Wesley, Reading, MA, 1963.
13. F. R. Moulton, *A simple non-Desarguesian plane geometry*, Transactions of the AMS, April, 1902, 192–195.
14. H. Poincare, *Poincare's review of Hilbert's 'Foundations of Geometry'*, Bulletin of the AMS, Oct., 1903, 1–23.
15. Yang Seong-Deog and Jo Kyeonghee, On Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie', *The Korean Journal of for History of Mathematics* 24(4) (2011), 61–68. 양성덕, 조경희, 힐베르트의 저서 '기하학의 기초' 에 관하여, 한국수학사학회지 24권 4호, 2011년 11월, 61–86.

부록 : '기하학의 기초' 10판 영역 [10]에 제시되어 있는 힐베르트의 공리계 ([15, 부록 2]에서 발췌)

I 결합공리군

I, 1. 어떠한 두 점 A, B에 대해서도 점 A와 B를 모두 지나는 직선이 있다.

I, 2. 어떠한 두 점 A, B에 대해서도 점 A와 B를 모두 지나는 직선은 많아야 하나 있다.

I, 3. 한 직선에는 점이 적어도 두 개 있다. 한 직선에 있지 않은 점이 적어도 세 개 있다.

I, 4. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C에 대하여 A, B, C를 포함하는 평면이 있다. 어떤 평면에도 그것이 포함하는 점이 있다.

I, 5. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C를 포함하는 평면은 많아야 하나 있다.

I, 6. 한 직선 a의 두 점 A, B가 평면 α에 있으면 a의 모든 점이 평면 α에 있다.

I, 7. 두 평면 α, β가 점 A를 공유하면 두 평면은 적어도 다른 한 점 B를 공유한다.

I, 8. 한 평면에 있지 않은 점이 적어도 네 개 있다.

II 순서공리군

II, 1. B가 A와 C 사이에 있으면, A, B, C가 한 직선의 서로 다른 세 점이고 B는 또한 C와 A 사이에 있다. [9)]

II, 2. 임의의 두 점 A와 C에 대하여, 직선 AC에 적어도 한 점 B가 있어서 C가 A와 B 사이에 있다.

II, 3. 한 직선에 있는 세 점 중 많아야 한 점만이 나머지 두 점 사이에 있다.

II, 4. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C와 평면 ABC에 있으면서 A, B, C 중 어느 점도 지나지 않는 직선 a가 있을 때, 직선 a가 선분 AB의 한 점을 지나면 a는 선분 BC 또는 선분 AC의 한 점을 지난다.

9) [10]에서는 [7]과는 달리 'B가 A와 C 사이에 있다' 라는 말의 정의가 이미 세 점이 모두 한 직선에 있다는 것을 포함하고 있다.

III 합동공리군

III, 1. 직선 a의 두 점 A, B와 직선 a'(직선 a와 같을 수도 있음)의 점 A'이 주어졌을 때, 직선 a'의 A'으로부터 임의의 방향에 선분 AB와 선분 $A'B'$이 합동이 되는 점 B'을 항상 찾을 수 있다. 이 관계는

$$AB \equiv A'B'$$

으로 표시한다.

III, 2. 선분 $A'B'$과 선분 $A''B''$이 동일한 선분 AB와 합동이면 선분 $A'B'$은 선분 $A''B''$과 합동이다; 간단히 말하여, 두 선분이 제 삼의 선분과 합동이면 그 두 선분은 서로 합동이다.

III, 3. 직선 a의 두 선분 AB와 BC가 점 B만을 공유하고, 직선 a'의 두 선분 $A'B'$과 $B'C'$이 점 B'만을 공유한다고 하자. 여기서 a와 a'은 같은 직선일 수도 있다. 이 경우, 만약 $AB \equiv A'B'$이고 $BC \equiv B'C'$이면 $AC \equiv A'C'$이다.

III, 4. $\angle(h,k)$가 평면 α의 각이고 a'이 평면 α'의 직선이며, a'에 대한 α의 한쪽 면이 주어졌다고 하자. h'이 점 O'을 시점으로 하는 직선 a'의 반직선이라 하자. 이러면 평면 α'에 각 $\angle(h,k)$가 각 $\angle(h',k')$과 합동이거나 같고 동시에 각 $\angle(h',k')$의 모든 내부점들이 주어진 a'의 한쪽 면에 있게 되는 반직선 k'이 단 하나 있다. 우리는 이러한 관계를

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

로 표시한다. 모든 각은 자신과 합동이다; 즉,

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k).$$

III, 5. 두 삼각형 ABC와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하면,

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

IV 평행공리

IV. 직선 a와 그 직선에 있지 않은 한 점 A가 주어졌을 때, a와 A로 결정되는 평면에는 점 A를 지나고 직선 a를 만나지 않는 직선이 많아야 하나 있다.

V 연속공리군

V, 1 (아르키메데스 공리). 어떠한 두 선분 AB와 CD에 대해서도 A에서 시작하여 반직선 AB를 따라 선분 CD를 n번 인접하여 붙여만든 선분이 점 B를 넘게 되는 자연수 n이 있다.

V, 2 (직선의 완비성 공리). 공리군 I-III과 V, 1로부터 나오는 직선에서의 순서와 합동에 관한 기본 성질들 뿐만 아니라 기존 원소들 사이에 있는 관계까지 보존하는 새로운 순서와 합동 관계를 가지는 집합으로 직선을 확장하는 것은 불가능하다.