Journal for History of Mathematics
Vol. 29 No. 3 (Jun. 2016), 157–172
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.3.157

Development of Geometry in the 19th century and Birth of Lie's theory of Groups

19세기 기하학의 발달과 리군론의 시작

Kim Young Wook 김영욱 Lee Jin Ho * 이진호

Sophus Lie's research is regarded as one of the most important mathematical advancements in the 19^{th} century. His pioneering research in the field of differential equations resulted in an invaluable consolidation of calculus and group theory. Lie's group theory has been investigated and constantly modified by various mathematicians which resulted in a beautifully abstract yet concrete theory. However Lie's early intentions and ideas are lost in the mists of modern transfiguration. In this paper we explore Lie's early academic years and his object of studies which clarify the ground breaking ideas behind his theory.

Keywords: Sophus Lie, Felix C. Klein, line geometry, line complex, transformation group, infinitesimal transformation group, differential equation; 소푸스 리, 페릭스 클라인, 선기하학, 선복합체, 변환군, 미소변환군, 미분방정식.

MSC: 01A55, 22E99, 44-03, 54H15

1 서론

19세기는 기하학의 세기라고 할 수 있다. 2000년도 더 전에 유클리드가 당시 그리스 수학의 중심이었던 기하학을 총 정리한 이후 발전하던 기하학(synthetic geometry)은 로마시대에 들어서면서 그 빛을 잃어 갔고, 중세의 암흑시대가 끝나고 다시 수학이 발전하면서는 대수적 방법론에 그 자리를 내주었다. 기하학은 가우스와 보야이, 로바체프스키 등이 비유클리드 기하학을 발견하면서 다시 관심을 끌기 시작했다. 이는 19세기 초반의 기하학 시대를 열었고 해석학과 함께 발전해 나갔다. 19세기 초반의 해석학은 현대해석학의 기초를 닦았지만 19세기 중반에는 리만을 거치면서 기하학적인 해석학으로 변모했고 구조적이고 위상적인 관점을 세웠다 [4].

*Corresponding Author.
Kim Young Wook: Dept. of Math., Korea Univ. E-mail: ywkim@korea.ac.kr
Lee Jin Ho: Dept. of Math., Sookmyung Women's Univ. E-mail: jhlee@sm.ac.kr
Received on Jun. 16, 2016, revised on Jun. 27, 2016, accepted on Jun. 29, 2016.

한편 여러 방향의 이론이 난무하던 19세기 전반의 사영기하학을 종식시키고 정리하여 20세기로 넘겨준 사람은 리(Sophus Lie, 1842–1899)와 클라인(Felix Klein, 1849–1925)이다. 그들은 19세기 전반에 발전된 다양한 기하학 이론을 정리하고 이에 새로운 관점을 더해서 대수학적이며, 기하학적이고 또 해석학적인 이론으로 탈바꿈시켰다. 이들의 이론은 당시의 수학보다 훨씬 새롭고 구조적인 이론으로 성장하였으며 리만의 관점을 이어받아 20세기 수학을 태동시켰다고 할 수 있다. 그러나 당시 클라인과 리가 개발했던 풍부한 아이디어나 기법들은 현대에 이르러 대부분 잊혀지고 그 연구 결과는 현대적인 형태로 변모하여 원래의 의미와 중요성은 간과된 채 간단하게만 언급되고 있다 [8]. 이에 대하여 Robert Hermann은 다음과 같이 말하고 있다 [10]:

> The subject of Lie groups as it is studied today is vastly different from what the research by Sophus Lie was about and *among the 19th century masters, Lie's work is in detail certainly the least known today*.

클라인과 리의 1870년 전후의 연구과정은 이후 그들 일생의 연구의 근간이 되는 것으로 초기 이론의 발전 과정을 이해하는 것이 리군론과 관련된 수학사 및 수학 교육에 중요하다. 여기서는 클라인과 리가 만나 같이 공부했던 상황을 알아보고 여기서 어떤 과정을 거쳐서 리의 초기 이론이 만들어졌는지, 그리고 이때 리는 어떤 연구를 한 것인지를 알아보려고 한다.

2 클라인과 리에 대하여

클라인은 1849년 독일 뒤셀도르프에서 태어났다. 본 대학에서 수학과 물리학을 공부한 클라인은 당시 본 대학의 수학과 과장이던 플뤼커(Julius Plücker, 1801–1868)의 지도를 받았다. 플뤼커는 기하학에 관심을 갖고 있었는데 클라인은 플뤼커의 지도아래 선기하학(line geometry)과 역학에의 응용에 관한 논문으로 1868년 본 대학에서 박사학위를 받았다. 플뤼커는 당시 선기하학의 기초에 대한 책을 저술하던 중이었으나 그 책을 완성하지 못하고 1868년에 타계하였고 클라인은 플뤼커가 집필 중이던 'Neue Geometrie des Räumes'의 뒷 부분을 완결하는 책임을 맡게 되었다.

클라인의 첫 수학적인 업적은 1870년 리와 함께 연구한 쿰머 곡면에서 점근선(asymptotic lines on the Kummer surface)의 기본 성질을 발견한 것으로 그 후 리와 함께 W-곡선, 사영변환군에 대하여 불변인 곡선(curves invariant under a group of projective transformations)에 대하여 연구하게 된다. 클라인이 기하학연구에 군의 개념을 도입하게 된 것에는 리와 함께 연구한 영향이 크게 작용하였다. 그 후 클라인은 1871년 괴팅겐대학에서 강사(lecturer)가 되었고 이듬해인 1872년에 에르랑겐 대학의 교수가 되었다. 이때

클라인은 에르랑겐 프로그램을 발표하였다. 1880년에 라이프치히 대학 교수로 있다가 1886년부터 1913년까지 괴팅겐대학의 교수로 재직하였다.

한편 리는 1842년 노르웨이에서 태어났다. 크리스티아니아(Christiania) 대학(현재의 오슬로 대학)에서 수학을 전공한 리의 첫 연구결과는 1869년에 발표한 2차원 복소평면에서의 사영기하와 3차원 사영공간의 선기하학의 대응관계에 대한 연구 결과이다. 선기하학에 관심을 갖게 된 리는 그 다음해인 1869년 베를린대학에서 클라인을 만나게 되었고 3번에 걸친 클라인과의 만남은 이후 리의 연구에 큰 영향을 주었다. 리는 1871년 학위 논문 "On a class of geometric transformations"으로 박사학위를 받았다. 리의 학위논문에 대하여 다부(Darboux)는 「현대 기하의 가장 뛰어난 발견 중의 하나」라고 표현하였다 [8]. 1884년 라이프치히 대학에 있던 클라인의 주선으로 젊은 엥겔(Friedrich Engel, 1861–1941)이 크리스티아니아로 와서 리를 도와 함께 연구를 하기도 하였다. 1886년 리는 괴팅겐으로 옮긴 클라인의 후임으로 라이프치히 대학의 교수가 되었고 그 후 지병의 악화로 1898년 노르웨이로 돌아간 리는 이듬해인 1899년 사망하였다 [14].

역사적 사건, 클라인과 리의 만남

리가 박사학위를 받았던 1871년의 전후 시기인 1869년부터 1873년의 기간 동안 리와 클라인과의 만남은 이후 리의 연구 전반에 커다란 영향을 미쳤다. 클라인과 리의 첫 만남은 1869년 베를린 대학에서 이루어졌다. 당시 베를린대학은 바이어스트라스(Karl Weierstrass), 크로네커(Leopold Kronecker) 등이 주도하는 복소함수론이 주류를 이루었다. 이런 분위기에 동화되지 못한 클라인과 리는 선기하학(line geometry)이라는 공통 관심사를 통해 서로에게 관심을 갖고 토론을 통하여 연구에 영향을 주게 된다.

다음 학기인 1870년 4월 클라인과 리는 파리에서 다시 만나게 된다. 파리에 머무는 동안 Michel Chasles, Camille Jordan, Gaston Darboux, Jordan 과 같은 수학자들을 알게 되고 특히 Darboux와 Jordan과의 만남은 클라인과 리에게 많은 영향을 주어 기하 연구에서 군 이론의 중요성을 인식하게 된다 [12]. 파리에서 함께 지내는 동안 클라인과 리는 두 개의 공동 노트를 작성하였으며 후에 공동으로 발표하는 몇 편의 논문의 기초작업을 하였다. 이 시기에 클라인과 리는 사영변환 군에 불변인 곡선에 대한 연구를 함께 하였으며, 또한 리는 이 시기에 변환군 이론에 대한 아이디어를 개발하기 시작하였다 [9].

클라인의 기하 연구에 중요한 역할을 하는 군의 개념은 파리에서 리와의 공동 연구에서 비롯된 것이었으며 이후 클라인이 발표하는 「에르랑겐 프로그램」*Erlangen program*의 기초가 되었다. 리와 클라인이 파리에서 함께 토론하며 연구하던 중 6월에 Franco-Prussian 전쟁이 발발하여 Prussia국적인 클라인은 프랑스를 떠나 독일로 돌아갔다. 클라인과 헤어지기 1주일 전에 리는 그의 중요한 발견중의 하나인 line-to-sphere transformation을

발견하고 이 내용은 이후 클라인과 공저 논문으로 발표되었다.

3 19세기 기하학 발전의 역사

클라인과 리의 연구가 어떻게 시작되었는가를 이해하려면 19세기 당시의 수학의 연구 동향을 알아야 하며 특히 기하학의 역사를 전반적으로 볼 필요가 있다. 이 절에서는 쿨리지(J. L. Coolidge)의 뛰어난 역사서인 『기하학 방법론사』*A History of Geometrical Methods* [4]를 따라서 19세기의 기하학의 배경이 되는 역사를 알아본다.

3.1 고전 기하학

이미 잘 알려져 있는 바와 같이 그리스의 수학은 정수의 이론을 중심으로 한 수론과 선분의 이론을 전개해 나간 기하학으로 나뉜다. R. Hartshorne은 이 시기의 기하학이 현대 기하학과는 다른 독특한 이론이었음을 강조하고 있다 [7].

특히 닮음의 기하를 전개하여 선분을 서로 더하고 곱할 수 있는 대상으로 본 것은 기하학적 대수학을 전개한 것이며 기하에 실수체 또는 그의 부분체를 대응시킨 것과는 본질적으로 다른 것으로 이해해야 함을 강조하였다. 이는 수학사적 입장에서 유클리드 원론에 대한 두 가지 상반되는 관점에서 볼 때, 고전 기하학을 현대 기하학적 관점에서 이해하는 것을 지양하고 고전 기하학은 독특한 유리수 및 실수의 대수학을 대체하는 이론이라는 관점을 지지하는 견해이며 이를 매우 설득력 있게 주장한 논문이라고 할 수 있다.

이에 따르면 이러한 선분의 대수학의 관점은 쭉 이어져서 유럽의 기하학의 주류를 이루게 되며 특히 데카르트의 기하학은 이러한 관점을 최대한 잘 유지한 학문이었다. 데카르트가 전개한 해석기하의 변수는 그 크기가 변화하는 선분 자체를 x라고 불렀으며, 그 선분의 길이를 실수로 나타내어 그 수를 x라고 부른 것이 아님을 강조하고 있다. 이러한 관점이 바뀌어 선분은 기하학적 도형이고 우리가 계산하는 것은 단위선분을 잡은 다음 미지 선분의 길이를 나타내는 실수를 x라고 쓰기 시작한 것은 대략 르쟝드르 시기임을 문헌 고증을 통해 알 수 있다. 서구 수학이 초기 미적분학에서 벗어나 갈루아이론과 아벨적분을 거치면서 비약적인 발전을 한 것이 이 시기와 맞물려 있는 것은 우연이라 할 수 없다.

3.2 19세기 이전의 기하학 발전

고전 기하학은 대략 2차곡선의 이론까지 발전한 다음 그 이상의 발전 방향을 찾지 못하고 정체되었으며 이것이 유럽에서 다시 시작된 것은 유클리드 기하학의 대수적 특성을 유럽 기하학자들이 인식하게 되면서부터이다. 쿨리지는 그의 『기하학 방법론사』에서 이러한 변화의 시작을 페르마와 데카르트로 잡고 있다. 이 시기에 대수적 관점에서 본 기하학이

탄생했으며 발전의 기틀이 다져졌다. 그에 의하면 페르마는 그리스 기하학에서부터 이차곡선에 나타나는 기하학적 양들이 2차식을 만족시킨다는 것을 알아봤으며 이를 대수적으로 계산하여 문제를 해결할 수 있다는 것을 처음 알아보았다. 그러나 페르마는 이런 계산을 발전시켜 기하학을 전개할 생각은 별로 없었던 듯하고 이를 제대로 전개해 나가서 현대의 해석기하학을 만들어낸 사람은 데카르트라고 적고 있다 [4]. 이렇게 발전한 새로운 기하학은 Wallis, Barrow, L'Hospital, Newton, Maclaurin 등을 거쳐서 지속적으로 발전하여 18세기 말의 Cramer와 Lacroix 까지 이르게 된다. 이 과정에서 3차원의 기하학도 발전하게 되며 Parent, Clairaut, Euler, Lagrange, Monge, Lacroix 등은 3차원의 기하학이나 운동의 이론(kinematics)등을 함께 발전시켰다. 이 과정에서 기하학에 필요한 기초적인 계산 방법들이 개발되었으며 19세기의 수학에 필요한 기초가 다져졌다고 하겠다.

3.3 19세기 초의 기하학 발전

19세기 수학 발전의 대강은 클라인의 유명한 저서 [11]를 참조하는 것이 좋다. 여기서는 19세기 초반의 사영기하학의 전개에 초점을 맞추어 본다.

19세기 초반의 기하학의 특징은 사영기하학의 번창으로 요약할 수 있다. 그 배경은 물론 위와 같은 해석기하학의 발전이고 이에 더하여 점차 기초적인 대수적 구조를 활용할 수 있게 되었던 것에 있다. 19세기 전반의 사영기하학자들의 업적 가운데 가장 중요한 것으로 쿨리지는 여러 종류의 좌표계를 도입할 수 있었던 것에 주목하고 있다. 그는 좌표계 도입의 시작을 Lamé, Bobillier 등이 도입한 간단한 기호(abbriged notation)에 있다고 보았다 [4].

예를 들어 삼각형의 한 변을 나타내는 직선의 방정식을 $A = 0$와 같이 나타내고 두 변을 사용하여 두 변을 품는 꼭지점을 두 방정식 $A = 0$ 와 $B = 0$로 나타내는 식으로 간단한 2차곡선의 이론을 전개해 나갔다. 이는 프랑스 기하학자들의 아이디어였지만 이것이 꽃핀 것은 이 프랑스 학파와 긴밀한 관계를 유지하며 연구하던 플뤼커에서였다. 비록 동료 기하학자들인 Poncelet나 Steiner 등과 같이 순수 기하학적 방법론을 사용하여 이론을 전개하는 것이 유행이었지만, 그는 기하학을 연구하는 가장 효율적인 방법은 대수적인 방법일 수밖에 없다고 굳게 믿고 연구했다. 그는 이런 방법을 발전시켜서 도형의 방정식을 나타내는 다항식을 하나의 기호로 나타내어 계산하였다. 예를 들어 『3개의 원이 서로 만날 때 나타나는 3개의 공통현이 한 점에서 만난다』는 것을 증명하는 데 다음과 같은 방법을 썼을 것이라고 쿨리지는 설명한다 [4]:

> 세 원의 방정식을 각각 $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$라 하자. (여기서 방정식은 물론 2차항의 계수가 1이 되도록 잡았다.) 그러면 세 공통현의 방정식은 각각 $B - C = 0$, $C - A = 0$, $A - B = 0$이 되고 이 세 직선은 당연히 한 점에서

만난다.

여기서 세 직선이 한 점에서 만나는 것은 두 직선의 교점이 만족시키는 식이 세 번째 식도 만족시키기 때문이다.

이러한 대수적 방법의 발전은 Feuerbach와 Möbius 등이 공간의 사면체의 꼭지점에 대해서 일반적인 점을 좌표의 행렬식의 비로 나타낼 수도 있음을 보이면서 다양한 좌표로 발전해 나갔다. 플뤼커는 이러한 관점을 조금 일반화하여 평면에 주어진 하나의 삼각형에 대하여 평면 위의 점을 이 삼각형의 세 변에 내린 수선의 길이 p, q, r을 좌표로 사용할 수 있게 됐으며 이 좌표는 특별히 동차방정식에서 유용하다는 것을 알게 되었다. 그는 이런 아이디어를 발전시켜서 직선의 방정식이 1차식으로 나타내어지는 좌표계 가운데 가장 일반적인 꼴이 무엇인가를 결정하였다. 쿨리지는 이것을 선형좌표계(linear coordinates) 라고 불렀다. 플뤼커는 이러한 좌표계가

$$\eta = \frac{\pi(y + ax + b)}{\rho(y + a''x + b'')}, \quad \xi = \frac{\chi(y + a'x + b')}{\rho(y + a''x + b'')}$$

꼴이 될 수밖에 없다고 증명 없이 사용하였다. 어쩔 수 없이 플뤼커가 공부한 것은 사영적인 공간에서의 사면체의 이론이고 특히 이 사면체의 네 꼭지점을 보존하는 기하학에 이르게 된다.

한편 Leibniz에 의하여 처음 시작된 행렬식은 코시 등의 수학자에게서도 나타나지만 이것은 Cramer가 연립일차방정식의 풀이에서 제대로 사용했고 이는 Cayley가 2차곡선의 접선과 극선의 이론을 전개하는 데서 사용되기 시작하였다. 이러한 쌍대성의 이론은 대수적 도구의 발전과 함께 급격히 발전하였으며 어려웠던 고전 기하학을 간단한 해석기하학의 범주에 넣어버렸다. 이러한 방법은 Clifford의 기하학에서 최대한 활용되었다.

이러한 방법론은 계속하여 대수적으로 발전하여 19세기 초중반의 대수기하학적 이론의 발전을 가져왔으며 결국은 Riemann과 Weierstrass를 거쳐서 Poincaré에 이르러 현대적 기하학의 틀을 갖추게 된다.

3.4 19세기의 사영기하학

유클리드 기하에서의 합동 개념이 발전시킨 공간의 유클리드 변환 개념은 위의 대수적 발전 및 동차좌표의 발전과 더불어 필연적으로 사영변환 개념을 탄생시켰다.

일반적인 사영기하학에서 맨 처음 변환을 사용하여 문제를 간단히 바꾸어 해결하는 아이디어를 사용한 사람은 Poncelet였다. 그의 이러한 아이디어는 Waring에 이르러 처음으로 변환을 대수적으로 나타내었으며 그는 특히 변환

$$x = \frac{pz + qv + r}{Az + Bv + C}, \quad y = \frac{Pz + Qv + R}{Az + Bv + C}$$

는 평면곡선의 차수를 변화시키지 않는 가장 일반적인 형태의 변환이라는 것을 알고 있었

다. 이러한 방법은 Möbius와 플뤼커에 이르러 훨씬 발전되고 다루기 쉬운 기법이 되었다. 특히 직선의 일반선형변환(general linear transformation)[1)]은 간단한 대수적 기법을 사용할 수 있었으며 반전(involution)의 성질에 잘 적용할 수 있었고 복비(cross ratio)라는 불변량을 탄생시켰다. Von Staudt는 이러한 성질을 잘 활용하였다.

사영기하의 변환은 동차좌표와 어울려서 매우 유용한 기법이 되었으며 사영변환의 초기 개념으로 선형변환이라는 이름으로 자리잡았다. 특히 같은 성질을 가지는 변환들은 묶어서 군이 되었으며 여러 종류의 변환군을 사용해서 이론을 설명하게 되었다. 이는 클라인에 의하여 체계적으로 이론화되었으며 그가 중요하게 거론한 것은 공간의 변환 가운데 유한개의 원소로 이루어진 변환군으로서 순환군, 이면체군, 그리고 $n = 4, 6, 8, 12, 20$에 대한 n면체군이었다. [8, 11]

당시에 사영기하학을 연구했던 기하학자들은 다음과 같다: Poncelet (1788–1855), Möbius (1790–1868), Steiner (1796–1863), Von Staudt (1798–1867), Plücker (1801–1868), Clebsch (1833–1872).

19세기 초반의 사영기하의 연구에서 중요한 대상 가운데 하나는 선복합체의 연구이다. 이것을 선기하학(line geometry)이라고 불렀다. 선기하학의 시작은 Poncelet의 1822년 저술인 *Traité des propriété projectives des figures*에서 였으며 이 연구 방법은 종합기하학(synthetic geometry)의 관점에서였다. 이것은 직관적으로 이해하기 어려워서 J. Stein은 이것을 「가리워져 있는 기하학 왕국의 유령」(ghosts in the shadowy kingdom of geometry)이라고 불렀다. 이는 M. Chasles에 의해 좌표를 사용한 해석적 관점이 도입되면서 보다 명확해졌다.

19세기 중반의 사영기하학에서 이러한 예로서 대표적인 것은 3차원 사영공간의 직선 가운데 무한원 평면 위의 직선인 구면원(spherical-circle)을 지나는 것들만을 모은 공간이 있다. 리는 이것을 「괴상한 직선들」(verrücken Geraden; crazy lines)이라고 불렀다. 이런 모임 가운데 이 직선들이 만족시키는 방정식이 n차 방정식이고, 이 방정식이 퇴화되지 않으면 이런 모임을 일반적으로 n계 선복합체라 부른다. 예를 들어 2계인 선복합체를 평면위에 나타내면 Figure 1과 같은 꼴들을 보인다.

4 플뤼커의 기하학과 사면체 선복합체

한편 사영기하학의 발달은 몇몇 수학자들로 하여금 고차원의 기하학에 눈뜨게 하였다. 쿨리지는 대표적으로 Cayley, Grassmann, Hamilton, Plücker, Riemann 등을 들고 있으며 이들은 다각적으로 고차원 공간의 기하학을 다루는 방법을 개발하였다. 이들은 각각 중요한 이론을 개발하였지만 여기서는 플뤼커에 대하여 알아본다.

1) 일반선형변환이란 현재의 선형분수변환 즉 Möbius 변환을 말한다. 19세기의 언어로 선형변환이란 현재의 선형대수의 선형변환을 뜻하지 않는다.

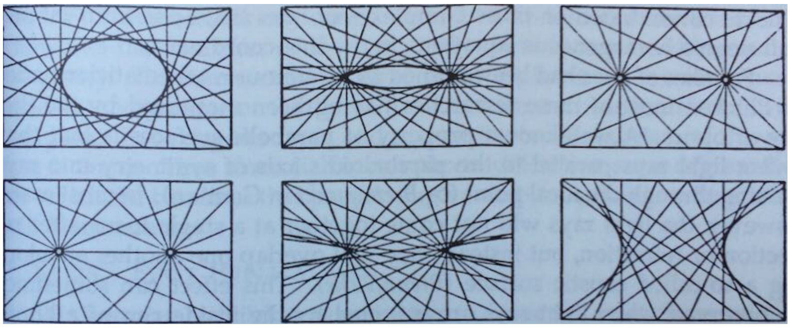


Figure 1. Typical examples of order 2; 2계 선복합체의 예 [12].

학창시절에 리의 관심을 끈 플뤼커의 기하학은 소위 사면체 선복합체(tetrahedral line complex)라는 대상의 기하학이었다. 이것을 간단히 서술하여 보자. 3차원 실 또는 복소사영공간 안에서 일반적 위치에 놓이는 네 개의 특정 점 P_0, P_1, P_2, P_3을 잡는다. 이 네 점을 꼭지점으로 하는 사면체 Δ는 네 개의 면을 갖는다. 플뤼커가 생각하고 있던 문제는 이러한 3차원 사영공간 안의 직선들 가운데 특정한 조건을 만족시키는 것을 뽑아 그 대수학 및 기하학적 성질을 규명하는 것이었다. 그는 이런 대상을 일반적으로 선복합체(line complex)라고 불렀다. 선복합체를 직선진(直線榛)이라고 번역하기도 하는 듯하다.

이러한 직선들의 모임은 동차좌표를 생각하면 4차원 공간 안에서 2차원 부분벡터공간을 생각하는 것과 같으므로 현대적 언어로는 그라스만 다양체인 $\mathrm{Gr}(2,4)$에 해당한다. 클라인은 이것을 다음과 같이 대수적으로 나타내었다. $\mathbb{P}^3$의 직선 ℓ이 주어졌을 때 이 직선을 결정하는 임의의 두 점의 동차좌표를 각각 $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, $[y_1, y_2, y_3, y_4]$라 하자. 이때 $j \neq k$에 대하여

$$p_{jk} = \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{vmatrix} = x_j y_k - x_k y_j$$

로 정의되는 6개의 수 $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$는 ℓ을 나타내는 수로 일종의 좌표라고 할 수 있다. 이것들은 동차좌표로부터 만들어졌으므로 이 좌표도 동차좌표의 성격을 가지고 있으며 이들은 다음과 같은 특별한 방정식을 만족시킨다:

$$\Omega = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

이러한 상황에서 선복합체란 이 p_{jk}들이 특정한 방정식 특히 대수방정식을 만족시키는 그런 직선들의 모임을 말한다. 이로부터 알 수 있듯이 3차원 사영공간의 직선의 공간은 4차원 다양체를 이루며 이들 가운데 하나의 조건을 만족시키는 대상은 3차원 공간이 된다.

플뤼커가 관심을 가지고 있었던 대상은 이 상황에서 주어진 사면체 Δ의 네 면과 만나는 네 교점의 복비가 일정한 상수인 직선들만 뽑아서 생각하는 기하학이었다. 사영공간에서 사영변환이 복비를 보존하는 변환이므로 사영변환 가운데 이 사면체(즉 네 꼭지점)를 보존하는 변환들은 직선을 직선으로 보내며 이 직선과 사면체의 네 면과의 교점의 복비도 보존한다. 따라서 플뤼커의 사면체 선복합체는 이 사면체를 보존하는 변환들에 의하여 주어진 한 직선 ℓ을 모두

이동하여 얻어진 궤적에 불과하다. 리가 주목한 것은 이러한 선복합체의 기하학을 연구하는 것은 결국 이 선복합체를 보존하는 사영변환들의 군의 성질을 연구하는 것이 핵심이라는 것을 꿰뚫어본 것이라고 할 수 있다. 위에서 동일한 복비를 갖는 직선들은 3차원만큼 있어서 3차원 대수다양체가 된다. 그리고 또 사면체를 보존하는 사영변환도 3차원만큼 존재하며 현재 언어로는 3차원 리군을 이룬다.

현대적 표현

현대적인 언어를 사용하면 이러한 수학의 배경을 쉽게 이해할 수 있다. 즉 $\mathbb{P}^3$ 의 직선 π 를 그 위의 두 점 $P_1 = (x_i^{(1)})$, $P_2 = (x_i^{(2)})$ 로 나타내는 것은 이 두 점의 동차좌표는 $\mathbb{C}^4$ 의 두 벡터이고 이 두 벡터로 생성되는 2차원 부분공간을 π 로 보며 그 부분공간을 이 두 벡터의 외적곱 (exterior product) 으로 나타낸다고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$P_1 \wedge P_2 = (x_i^{(1)}\omega^i) \wedge (x_j^{(2)}\omega^j) = p_{ij}\, \omega^i \wedge \omega^j$$

그러면 p_{ij} 는 앞에서와 같이 나타내어지며 당연히 다음을 만족시킨다:

$$0 = \Omega_{pp} := \begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix} = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12}$$

특히 두 직선 $P_1 \wedge P_2$ 와 $Q_1 \wedge Q_2$ 가 만나는 필요충분조건은 $\det[P_1, P_2, Q_1, Q_2] = 0$ 이므로

$$0 = 2\Omega_{pq} := p_{01}q_{23} + p_{02}q_{31} + p_{03}q_{12} + p_{23}q_{01} + p_{31}q_{02} + p_{12}q_{03}$$

임도 알 수 있다 [13].

현대 용어에서는 이런 직선 가운데 동차다항식 $h(p_{01}, \ldots, p_{23}) = 0$ 하나 또는 여러 개를 만족시키는 직선들의 대수다양체를 일반적으로 line system이라 부르며, 그 다양체가 1차원이면 선직면 (ruled surface), 2차원이면 선합동 (line congruence), 3차원이면 선복합체 (line complex) 라고 부른다. 이의 일반적인 이론은 현대 대수기하학에서도 중요한 연구 대상이다 [5].

5 리 이론의 시작

사영변환군을 활용하는 리의 아이디어는 적절한 사영변환을 통하여 이 네 점 가운데 한 점은 유클리드 공간의 원점으로 사상하고 나머지 세 점은 각각 x, y, z 축의 무한원점으로 사상하는 것이었다. 그러면 이 사면체는 세 좌표평면과 무한원평면으로 이루어진 사면체가 된다. 이러한 좌표에서 이 사면체를 불변이 되도록 하는 변환은 간단히 다음과 같은 꼴임을 알 수 있다:

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu y, \quad z' = \nu z, \quad \lambda\mu\nu \neq 0.$$

이 변환들은 당연히 군의 성질을 가진다. 즉 이런 변환들 두 개 T_1, T_2가 있으면 그 합성은 다시 이러한 변환일 뿐만아니라 이 경우에는 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$이 되어 가환군이다. 그리고 주어진 사면체 위에 있지 않은 두 점 p, q에 대하여 p를 q로 사상하는 이러한 변환은 단 한 개 존재한다. 이 변환들의 모임은 3차원을 이루며 (즉 3차원 리군이다.) 사면체 위에 놓이지 않은 임의의 점 p를 고정시키는 변환은 단위변환뿐이다.

이러한 사실을 처음 활용하여 사면체 선복합체의 기하에 응용한 것은 리이며 이는 클라인이 설명해 준 군론의 역할이 컸다. 리는 원래 이 이론의 공부를 시작할 때는 이러한 사실을 알아채지 못하였다. 그러나 클라인과 같이 연구를 시작하고 사면체 선복합체의 기하학을 발전시켜 W-곡선과 W-곡면의 이론을 체계적으로 연구하면서 그는 이런 사실을 인지하고 이것이 핵심적이라는 사실을 알아차렸다. 특히 그는 이를 활용한 계산을 하면서 위의 변환을 그대로 사용하기보다는 이 변환에서 좌표를 로그로 변환하게 되면 계산이 간단해진다는 사실을 발견하였다 [8]. 즉

$$X = \log x, \quad Y = \log y, \quad Z = \log z$$

라 정의하면 위의 변환 $(x, y, z) \to (x', y', z')$은

$$X' = X + \alpha, \quad Y' = Y + \beta, \quad Z' = Z + \gamma$$

가 된다. 여기서 $\alpha = \log \lambda$, $\beta = \log \mu$, $\gamma = \log \nu$이다. 이러한 사실은 그의 기록(1893)과 강의(1896)에 언급되어 있으며 이 시기가 1869년에서 1870년이라고 회고되어 있다고 한다.

5.1 리의 사면체 선복합체

리가 공부했던 사면체 선복합체를 시각적으로 나타내보기로 하자. 3차원 유클리드 공간의 원점과 세 좌표축의 단위벡터를 꼭지점으로 하는 사면체 Δ를 대표로 잡고 이 사면체의 빗면 위의 한 직선을 사영변환 가운데 사면체를 고정시키는 것들로 움직인 궤적을 나타내면 Figure 2와 같은 것이 나온다. 이 그림의 직선들은 빗면 위에서 어떤 2차곡선의 접선들이 된다. 이것은 3차원 실사영공간을 그리고 있지만 복소사영공간의 경우에도 이와 유사한 것을 상상할 수 있다. 리는 단순히 직선의 궤적뿐이 아니라 곡선들의 궤적도 공부해나갔다.

이러한 대상을 연구하게 된 리는 당연히 이런 선복합체가 평면 위에서 어떤 곡선의 접선으로 나타내게 되면 이 곡선의 방정식을 찾고 싶었을 것이다. 가장 쉬운 것이 평면 위에서 어떤 직선군을 접선으로 가지는 곡선을 찾는 것이고 이것은 단순히 포락선을 구하는 것으로 미적분학에서 공부하는 것이다. 하지만 차원이 올라가면 이는 일반적으로 미분방정식의 이론이 된다. 리가 마주쳤음직한 계산을 이해해 보기 위해서 가장 간단한 포락선 이론을 미분방정식으로 만들어보자.

어떤 곡선이 $z(x, y) = c$로 정의되었다고 하자. 각 점에서 $z_x = p$, $z_y = q$라고 할 때 접선의 정보를 안다는 것은 어떤 방정식

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

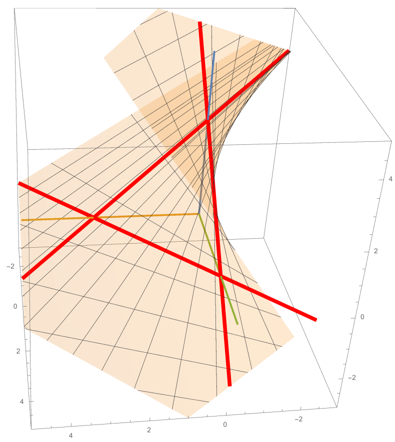


Figure 2. The lines on the inclined plane of a tetrahedron which are moved by the projective transformations which preserves the tetrahedron in Euclidean space; 유클리드 공간의 사면체를 보존하는 사영변환에 의해서 움직이는 직선들 가운데 사면체의 빗면 위에 놓인 직선들.

이 주어져 있다는 뜻이다. 이는 미소적으로는 그 접선의 수선방향을 안다는 뜻이고 이 수선방향을 $(M(x,y), N(x,y))$ 라고 주었다고 하고 접선의 좌표계를 (dx, dy) 라고 나타내기로 하면 이 두 벡터가 수직이라는 뜻에서 다음 미분방정식을 가진 것과 같다:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

즉 위의 문제를 푸는 것은 일반적으로 이런 식으로 주어진 상미분방정식 (또는 차원이 올라가면 편미분방정식)을 푸는 것에 해당할 것이다. 이렇게 $z(x,y) = c$에 접하는 방향을 정해주는 1–형식 $dz = p\,dx + q\,dy$를 당시에는 contact form이라고 불렀다.

리는 이런 문제의 선기하학은 관련된 사영변환의 군에 대하여 불변인 형태를 가지므로 미분방정식도 이 군에 대하여 불변인 형태를 띨 것이고 이것을 활용하여 미분방정식을 푸는데 도움을 받을 수 있을 것이라는 아이디어를 내었다 [6].

5.2 변환군과 미분방정식

미분방정식을 푸는 여러 가지 방법 중 기본적인 것이 완전미분방정식 (exact differential equation)의 형태로 만들어 적분하여 해를 구하는 것이다. 해결하려는 미분방정식이 완전미분방정식의 형태이면 적분하여 해를 구하면 되지만 그렇지 않은 경우에는 식을 변형하여 완전미분방정식의 형태로 만들어야 한다. 완전미분방정식이 아닌 방정식에 적당한 함수를 곱하여 완전미분방정식이 될 때, 곱한 함수를 적분인자 (integrating factor)라 한다. 대부분의 미분방정식 교재에서 적분인자를 이용하여 완전미분방정식의 형태로 바꾸어 미분방정식의 해를 구하는 방법을 다루고 있으나 각각의 방정식에 적절한 적분인자를 사용할 뿐 적분인자를 구하는 원리나 방법을 소개하지는 않는다.

리는 미분방정식을 해결하는 과정에서 변환군 개념을 이용하여 적분인자를 구하였다. 일반

적으로 변수 a에 대하여 (x, y)를 (x_1, y_1)에 대응시키는 변환

$$T_a(x, y) = (x_1,\, y_1) = (\phi(x, y, a),\, \psi(x, y, a))$$

에 대하여 이런 변환 T_a, T_b를 연속하여 실행한 결과가 다시 이런 형태의 변환으로 나타내어지면 이 변환들은 군이 된다. 특히 $\phi(x, y, a)$와 $\psi(x, y, a)$가 a에 대하여 연속함수이면 a의 작은 변화에 대하여 (x, y)도 연속적으로 변하게 되는데 이때 (x, y)의 자취를 이 변환군의 path-curve라 한다. 또한 a의 미소변화량(infinitesimal)에 대한 $\phi(x, y, a)$와 $\psi(x, y, a)$ 의 변화량(differential)을

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} \equiv \xi(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial a} \equiv \eta(x, y)$$

라 하면 $\delta x = \xi(x, y)\delta a$, $\delta y = \eta(x, y)\delta a$ 로 생각할 수 있다. 이것을 미소변환(infinitesimal transformation)이라 하고 리는 기호 Uf를 도입하여

$$\delta f = Uf = \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\sigma y}\right) \delta a$$

와 같이 나타냈다. 이것은 현재의 의미로 미분작용소의 벡터장 $U = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$ 로 생각할 수 있다.

변환군이 주어지면 미소변환을 구할 수 있고, 반대로 미소변환 $\delta x = \xi(x, y)\delta t$, $\delta y = \eta(x, y)\delta t$ 가 주어지면 이로부터 얻어지는 연립 미분방정식

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi(x, y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta(x, y)$$

를 풀어 변환군을 구할 수 있다.

한편 변환군의 모든 변환에 대하여 $f(x, y)$가 불변일 때 $f(x, y)$를 변환군 Uf에 대하여 불변이라 하며, 어떤 곡선족의 각각의 곡선이 변환군의 모든 변환에 대하여 불변일 때 그 곡선족을 변환에 대하여 불변이라 한다. 특히 곡선 $\phi(x, y) = c$와 $f(x, y) = c'$이 어떤 변환군에 대하여 불변인 곡선족이면 f는 ϕ의 함수로 나타낼 수 있으며 이 둘은 같은 미분방정식의 해가 된다.

이 사실을 이용하여 미분방정식 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ 해를 구하는 과정을 알아보자. ([3] 참조) 미분방정식의 해곡선(integral curve)을 $\phi(x, y) = c$라 할 때 해곡선들이 변환 $U = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$ 에 대하여 불변이면 위에서 언급한 성질에 의해 $U\phi = 1$이라 가정할 수 있다. 즉

$$U\phi = \xi\phi_x + \eta\phi_y = 1 \tag{1}$$

또한 곡선 $\phi(x, y) = c$ 위에서는 이 방정식을 미분해서 얻은 관계식 $\phi_x\,dx + \phi_y\,dy = 0$이 성립한다. 이 곡선이 미분방정식 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$의 해이므로 이 두 방정식은 동치인 방정식이고 따라서

$$N(x, y)\phi_x - M(x, y)\phi_y = 0 \tag{2}$$

를 얻는다. 두 식 (1), (2)를 연립하여 풀면

$$\phi_x = \frac{M}{\xi M + \eta N}, \quad \phi_y = \frac{N}{\xi M + \eta N}$$

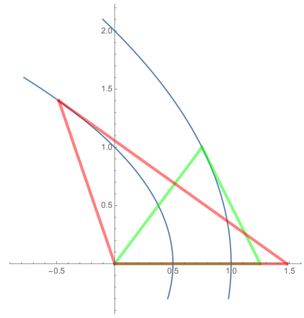


Figure 3. Curves such that, at each point P of the curve, the tangent line at P, the line OP and the x-axis always form an isosceles triangle; 곡선의 한 점 P에서의 접선과 OP와 x축이 항상 이등변삼각형을 이루는 곡선.

을 구할 수 있고 $\dfrac{M\,dx + N\,dy}{\xi M + \eta N} = 0$은 완전(exact) 미분방정식이 되어 적분가능하게 된다. 여기에서 $\dfrac{1}{\xi M + \eta N}$은 이 미분 방정식의 적분인자(integral factor)이다.

적분인자 계산의 예

다음 문제는 Cohen [3]에 들어 있는 문제로 리의 방법을 써서 풀이하고 있다.

[문제] 곡선 $\phi(x, y) = c$의 각 점 P에서의 접선과 OP와 x축이 항상 이등변삼각형을 이루는 ϕ를 구하여라.

즉 Figure 3과 같은 곡선을 찾으라는 문제이고 이 문제의 해곡선은 당연히 원점을 중심으로한 닮음변환(homothety)

$$T_a(x, y) = (ax, ay)$$

을 하여도 다시 해곡선이 될 것이다. 즉 이 문제는 원점중심닮음변환에 대하여 불변인 방정식이라 할 수 있다.

이 문제를 미분방정식으로 나타내면

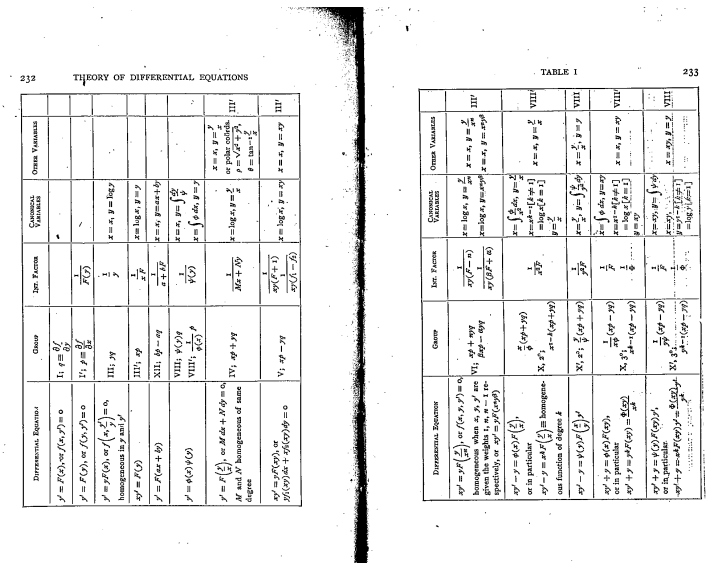
$$\frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx}} = -\frac{dy}{dx}$$

이고 이 식을 정리하면

$$(x \pm \sqrt{x^2 + y^2})dx + ydy = 0$$

이다. 일반적으로 이와 같이 y/x의 식으로 나타내어지는 미분방정식은 원점중심닮음변환에 대하여 불변이고 이 변환은 벡터장 $U = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$로 생성된다. 리의 방법에 따라 적분인자를 구하면

$$\frac{1}{\xi M + \eta N} = \frac{1}{x^2 + y^2 \pm x\sqrt{x^2 + y^2}}$$



232 THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

TABLE I 233

Figure 4. A table of integrating factors shown in the Cohen's 1911 book on the Lie's theory of transformation groups [3]; Cohen이 1911년에 쓴 리의 변환군론 해설서의 부록의 적분인자 표 [3].

이다. 미분방정식에 적분인자를 곱하여 식을 정리하면

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ydy}{\pm\sqrt{x^2+y^2}(x \pm \sqrt{x^2+y^2})} = 0$$

과 같이 완전미분방정식으로 나타낼 수 있고 적분하여 해를 구하면

$$\phi(x,y) = \log(x \pm \sqrt{x^2+y^2}) = c$$

즉 $y^2 = c^2 - 2cx$ 이다.

리는 1차 상미분방정식뿐만 아니라 고차 편미분방정식 등 다양한 형태의 미분방정식에 대하여 변환군 이론을 발전시켰다.

5.3 변환군과 여러 가지 적분인자

미분방정식 교과서에서 보는 많은 종류의 적분인자 계산법은 대부분 위에서 설명한 리의 변환군 이론을 적용한 것이다. 이의 예로써 Cohen [3] 에 실려있는 계산법 표를 한 페이지만 보면 Figure 4와 같다. 대학교 미분방정식 교재는 대부분 적분인자를 공식으로서만 다루며 그 이면에 놓인 변환군의 작용에 대하여는 언급하지 않고 있다. 이는 수학을 단순한 공식 암기의 이론으로 만들어서 학생들의 학문적 발전을 저해하는 요인이 될 수 있음을 지적하여 둔다.

6 결론

리의 수학적 연구는 19세기 수학 발전에서 가장 중요한 것 중의 하나이다. 그의 연구는 뛰어난 발상과 새로운 방법을 이용하여 전개되었고 결과적으로 미적분과 군론의 결합이라

는 멋있고도 유용한 결실을 맺었다. 리의 군론은 많은 뛰어난 수학자들에 의하여 해석되고 변형되어 매우 추상적이면서도 구체적인 이론으로 거듭났다. 초기의 리의 이론은 클라인의 영향을 크게 받았으며 기하학의 문제에서 출발하였다. 리의 연구는 연속군의 이론쪽으로 가닥이 잡히면서 필연적으로 미분방정식의 문제로 나아갔고 결국 불변미분방정식 이론으로 전개되었다. 갈루아 이론처럼 미분방정식의 풀이를 불변군을 이용하여 분류하려던 리의 시도는 실패하였지만 리의 이론은 당시 발전하던 물리학의 여러 이론과 맞물려 리 변환군 및 그 불변량 이론 등으로 발전하였다.

현대 수학의 모든 분야에서 핵심적인 위치에 있는 리군의 이론은 대부분 리의 연구 방향과는 전혀 다른 방향으로 발전해 나왔다. 그러나 R. Bryant [1, 2]는 R. Hermann처럼 리의 초기 아이디어의 중요성을 간파하고 이 관점에서 상미분방정식 및 편미분방정식의 이론을 전개하여 중요한 이론으로 발전시켰다. 이러한 새로운 미분방정식의 이론은 현대 기하학의 정수를 보여주고 있다.

현대 수학의 연구에서 이러하듯이 대학 수준의 수학 교육에서도 이는 똑같이 적용될 수 있다. 리의 초기 아이디어가 미적분학의 연습문제 수준을 넘지 않으므로 이러한 역사적 발전 단계를 이해하는 것은 미적분학을 제대로 습득하는 좋은 연습문제가 될 것이라고 생각된다.

References

1. Bryant, R., *An introduction to Lie groups and symplectic geometry*, Park City, 24 June–20 July 1991.
2. Bryant, R., Griffiths, P., Grossman, D., *Exterior Differential Systems and Euler-Lagrange Partial Differential Equations*, U. of Chicago Press, 2003.
3. Cohen, A., *An introduction to the Lie theory of one-parameter groups*, G. E. Stechert Co., 1911.
4. Coolidge, J., *A history of geometrical methods*, Oxford U. P., 1940.
5. Dolgachev, I. V., *Classical algebraic geometry: a modern view*, Cambridge U. P., 2012.
6. Gray, J. J., *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincare*, Birkhauser, 2000.
7. Hartshorne, R., Teaching Geometry According to Euclid, *Notices of the AMS* 47 (4) (2000), 460–465.
8. Hawkins, T., *Emergence of the theory of Lie groups*, Springer, 2000.
9. Hawkins, T., Line Geometry, Differential Equations, and the Birth of Lie's Theory of Groups, in Rowe, D. E. and McCleary, J. (Eds.), *The history of Modern Mathematics*, Vol. I: Ideas and Their Reception, Academic Press, 1989.
10. Hermann, R., *Sophus Lie's 1880 transformation group paper*, Math Sci Press, 1975.
11. Klein F., *Development of mathematics in the 19th century*. 한경혜 역, 『19세기 수학의 발전에 대한 강의』, 나남, 2012.
12. Rowe D. E., The early Geometrical Works of Sophus Lie and Felix Klein, in Rowe, D. E. and McCleary, J. (Eds.), *The history of Modern Mathematics*, Vol. I: Ideas and Their

Reception, Academic Press, 1989.
13. Semple J. G., Kneebone, G. T., *Algebraic Projective Geometry*, Oxford U. P., 1952.
14. Wikipedia, 영문판 위키피디아, https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie, (30 May, 2016).