한국초등수학교육학회지 20(4) 601-625. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 20(4) 601-625.
2016. 11. 30 November 30. 2016.

초등예비교사의 비례추론 과제에 대한 전략 분석

최은아[1]

본 연구는 비례추론 과제에 대한 초등예비교사들의 반응을 분석함으로써 예비교사들의 비례추론 과제에 대한 이해 정도를 살펴보고, 비례추론 전략에 따른 비례추론 과제의 적합도와 비례추론 과제에 따른 전략의 특징을 살펴보고자 하였다. 이를 위해 총 8개로 구성된 검사도구를 개발하여 초등예비교사 72명에게 적용하였으며, 연구결과를 종합하여 예비교사교육에서의 비례추론 지도에 대한 시사점을 다음과 같이 도출하였다. 예비교사들이 실제적이고 다양한 비례추론 과제들을 다루는 경험, 양적 관계에 대한 의식적인 분석을 행하는 경험, 예비교사들이 미흡한 이해를 보이는 특정 과제 유형에 대한 보완, 다양한 비례추론 전략들을 분류하고 탐구하는 경험, 비례추론 전략에 적합한 과제 유형을 파악하고, 비례추론 과제에 보다 유용하고 사용가능한 비례추론 전략을 파악하도록 하는 학습경험이 필요하다고 보았다.

주제어: 비례추론, 비례추론 과제, 비례추론 전략, 비의 속성, 양적 추론, 질적 추론, 예비교사교육

Ⅰ. 서 론

비례추론은 학생들의 인지적 발달의 표석이며(Lamon, 2007), 이후에 학습하게 되는 함수를 비롯한 다양한 수학적 개념 발달에 기초가 된다(Lobato & Ellis, 2010). 학교수학에서는 비와 비율, 백분율, 닮음, 축척, 일차방정식, 기울기, 상대도수, 히스토그램, 확률, 변화율 등의 수학적 개념이 비례추론과 연결된다(NCTM, 2000). 비와 비율 개념을 바탕으로 양 사이의 비례관계를 인식하는 것은 사상의 선형성 인식으로 발전되어 선형함수 개념의 기초가 될 뿐 아니라 다양한 상황에 대한 문제해결의 도구가 된다. 우리나라 2009 개정 교육과정의 초등수학으로 한정한다면, 비와 비율, 비례식과 비례배분, 정비례와 반비례가 해당되며, 2015 개정 교육과정에서는 정비례와 반비례를 제외한 나머지 학습요소가 해당된다.

비례추론이 무엇인가에 대해서는 학자에 따라 다양하게 정의되어 왔지만, 비례, 곱셈적 비교, 공변성, 비의 일정성, 선형성, 다중비교, 양적·질적 사고 등이 주로 언급되는 키워드이다. 이를 종합한 대표적인 정의로 '비례, 비, 비율, 비례식과 관계된 추론으로서 공변과 다중비교의 의미를 포함하는 양적 및 질적 추론(정은실, 2013)'과 '비와 비례 개념에 대한 이해를 바탕으로 다양한 비례 상황에서 곱셈적 관계와 공변성과 일정성을 이해하며, 질적·양적 사고에 기초한 적절한 곱셈적 전략과 모델을 이용하여 문제를 해결하고, 비례

1) 우석대학교 수학교육과

상황과 非비례상황을 인식하는 수학적 추론의 한 유형(정영옥, 2015)’을 들 수 있다. 위 두 정의에서 주목해야 할 것은, 곱셈적 관계에 초점을 맞추어 양적 관계를 파악하는 추론 과정에서 양적 사고뿐 아니라 질적 사고를 필요로 한다는 것과 비례상황과 非비례상황의 구분을 포함한다는 것이다. Cramer & Post(1993), Lobato & Ellis(2010), Post, Behr, & Lesh(1988), Van de Walle(2008)는 비례추론에서 질적 사고의 필요성을 강조한 바 있으며, 덧붙여 Van de Walle는 비례적 사고 발달을 위해서 비례상황과 非비례상황을 구별하는 경험을 제공할 것을 주장하였다.

한편 학생들의 비례추론 능력의 발달에 대한 연구들은 비례추론 능력이 점진적이고 연속적으로 발달한다고 보고 있다(정영옥, 2015; Langrall & Swafford, 2000; Lesh, Post, & Behr, 1988; Nabors, 2003). 이들은 비례추론 능력의 발달이 非비례 추론에서 비형식적 추론을 거쳐 형식적 추론에 이르기까지 몇 개의 단계로 구분된다고 본다. 그런데 한 가지 주의할 점은 비례식과 같은 형식적 전략의 사용이 비례적 추론의 충분한 증거가 되지 못한다는 것이다(Lobato & Ellis, 2010). 자동화된 기계적 알고리즘에는 양 사이의 관계에 대한 의식적인 분석이 결여될 가능성이 높기 때문이다. 오히려 비례추론 능력의 발달은 비형식적 추론 전략을 포함한 다양한 비례추론 전략의 유연성에 달려있다고 보고 있다.

Freudenthal(1983)은 비 개념이 알고리즘화되고 자동화된 교사들과 예비교사들이 학생들을 지도할 수 있는 모델을 만드는데 어려움을 겪고 있을 뿐 아니라 그 모델이 적절한가에 대한 판단조차 못하고 있음을 우려한 바 있다. 이는 대부분의 교사들이 비형식적인 다양한 전략들을 생략한 채 형식적 알고리즘으로 직접 향했던 개인적 경험을 소유하고 있기 때문으로 보인다. 실제로 교사들이 비례추론 과제에서 어떤 비례추론 전략들을 사용하며 어떻게 비례추론을 이해하고 있는지에 대한 연구들을 찾아볼 수 있다. 몇몇 연구들은 학생들에게 나타나는 비례추론에 대한 오개념들이 초등교사와 중등교사에서도 일반적으로 관찰되었다는 것과(Cramer, Post, & Currier, 1993; Post, Harel, Behr, & Lesh, 1988) 초등 예비교사들의 비례추론 지식이 미흡한 것을 지적한다(Ekawati, Lin, & Yang, 2015). 반면에 실제적인 비례추론 과제들을 다루는 경험이 예비교사들의 비례추론에 대한 내용지식과 교수학적 지식, 태도와 신념에 긍정적인 변화를 가져왔으며(Ben-Chaim, Keret, & Ilany, 2007), 교사의 양적 추론 접근이 대각선 곱셈 알고리즘을 이용하는 수학 구조적 추론 접근에 비해 학생들의 비례추론 능력을 개발하는데 효과적임을 주장하기도 하였다(Lobato, Orrill, Druken, & Jacobson, 2011).

국내연구의 경우에는 학생들을 대상으로 한 비례추론 연구는 지속적으로 이루어져 왔다. 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 한 권미숙・김남균(2009)과 박지연・김성준(2016)의 연구는 교과서에 비례식 외에 다양한 상황과 내용의 비례문제를 포함할 것과 학생들이 절대적・상대적 변화를 비교하는 수준에 이를 수 있도록 다양한 형태의 비례추론 문항을 개발할 것을 각각 주장하였다. 안숙현・방정숙(2008)의 연구에서는 정비례 상황의 미지값과 비교, 반비례 상황의 미지값, 질적 예측 및 비교문제 순으로 학생들의 이해도가 높았으며, 약 34%의 학생들이 非비례상황을 비례관계로 오인하는 결과가 나타났다. 고은성・이경화(2007)는 경험한 익숙한 상황이 아닌 경우와 도형 문제에서 학생들이 비례상황을 인식하지 못한다는 것과 비례식의 구성요소들을 유의미하게 연결시키지 못한다는 것을 지적하였다. 정유경・정영옥(2015)은 6학년 학생들이 비례식을 학습했음에도 불구하고 형식적 전략보다는 인수 전략, 단위 비율 전략 등의 비형식적 전략을 사용하는 비율이 상대적으로 높았다는 의미 있는 결과를 제시하고 있다.

반면에 비례추론과 관련하여 교사와 예비교사들을 대상으로 살펴본 국내 연구는 찾아보

기 힘든 실정이다. 이에 본 연구는 다양한 비례추론 과제에 대한 초등예비교사들의 반응을 분석함으로써 예비교사들의 과제 유형에 따른 이해 정도와 사용 전략에 따른 과제의 적합도, 과제에 따른 전략의 특징을 살펴보고, 비례추론과 관련된 예비교사교육에 대한 시사점을 도출하고자 한다. 이를 위해서는 비례추론 과제 유형과 전략 유형의 분류가 기본이 되므로, 비의 속성을 비롯한 비례추론 과제의 분류기준에 대한 논의와 이에 따른 과제 유형, 비례추론의 발달 수준 및 전략들을 살펴볼 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비례추론 과제의 분류기준과 유형

실제적이고 다양한 비례추론 과제들을 다루는 경험은 학생들과 교사들의 비례추론 능력을 신장시킨다(Ben-Chaim et al., 2007; Lobato & Ellis, 2010). 학생들의 비례추론 능력을 좀 더 정확히 판단하기 위해서도 다양한 유형의 비례추론 과제들이 필요하다. 이는 전형적인 미지값 과제 유형의 지도에서 벗어나야 함을 뜻한다. 그동안 Cramer & Post(1993), Lamon(1993)을 비롯한 다수의 학자들이 학생들의 비례추론 능력을 평가하고 비례적 사고의 특징을 살펴보고자 비례추론의 과제 유형을 다양하게 분류해왔다.

Cramer & Post(1993)는 ‘키다리와 난장이’, ‘주스의 진하기’ 문제 등 기존에 널리 알려져 있던 비례추론 문제를 중심으로 미지값 유형, 비교 유형, 질적 추론 유형 등 3가지로 분류한 바 있다. 미지값 유형은 하나의 비와 다른 한 양이 주어진 경우에 나머지 한 양을 구하는 문제이며, 비교 유형은 네 개의 양이 주어진 경우에 두 개의 비를 비교하는 문제이고, 질적 추론 유형은 정확한 수치가 제시되어 있지 않은 상태에서 대략적인 어림으로 변화의 방향을 판단하는 문제이다. Lamon(1993)은 4가지 유형, 즉 양의 측정, 부분-부분-전체, 관련된 집합, 확대와 축소 유형으로 분류한다. Lamon의 분류는 문제의 맥락에 초점을 맞춘 의미론적 유형에 해당하며, 주어진 조건과 구하고자 하는 값 등 문장의 형식적 측면에서 분류한 Cramer & Post의 분류와 차별화된다고 할 수 있다. 문제 맥락을 중시한 Lamon이 각 유형의 예시로 제시하고 있는 과제들은 모두 Cramer & Post의 비교 유형에 한정된다는 한계가 있다. 다양한 유형과 형태의 비례추론 문제 제시를 통한 비례추론 능력의 평가의 필요성을 이야기하고 있는 Lobato & Ellis(2010)는 미지값을 구하는 문제 이외에 비를 비교하는 문제, 변환 문제, 평균값 문제, 부분-부분-전체와 포함 문제, 기하적 닮음과 축척 문제를 추가로 제시한다. 이 중에서 변환 문제는 Cramer & Post(1993)의 질적 추론 유형과 일치하며, 평균값 문제는 $a:x=x:b$ 형태로 형식화되는 미지값 유형이다. 부분-부분-전체와 포함 문제는 Lamon(1993)의 부분-부분-전체 유형과 일치하며, 닮음과 축척 문제는 확대와 축소 유형과 일치한다.

정영옥(2015)은 Lesh et al.(1988), Van de Walle(2008) 등의 분류를 참고하여 구체적 수치 기준, 축척비 기준, 비교 기준을 설정하고, 이에 따라 비례추론 과제를 질적 과제와 양적 과제, 대수 과제와 양적 과제, 비교 과제와 미지값 과제로 분류하고 있다. 세 가지 기준을 반영한 과제는 질적-대수-비교 과제부터 양적-기하-미지값 과제에 이르기까지 총 8가지 유형으로 제시되었다.

본 연구에서는 정영옥(2015)의 분류를 적극적으로 수용하여 구체적 수치 기준과 비교 기

준을 비례추론 과제의 분류기준으로 설정하였다. 다만, 축척비 기준은 비의 속성 기준으로 대체하였다. 이는 Freudenthal(1983)의 비의 속성 구분이 비례추론의 기초라고 판단했기 때문이다. 두 양의 관계가 곱셈적 비교로서의 비 개념인지, 합성단위로 두 양의 결합으로서의 비 개념인지를 파악하는 것은 Lobato & Ellis(2010)가 주장하는 비에 대한 필수적 이해이기도 하지만, Freudenthal(1983)이 말한 내적비와 외적비 개념이기도 하다. 여기에 Freudenthal이 닮음이라는 현상을 조직하는 의미 있는 수단이라고 한 기하 맥락에서의 비, 즉 확대·축소로의 비를 추가할 수 있다. 비의 속성에 따른 분류는 Ben-Chaim et al.(2007)이 예비교사들을 위해 제작한 비례추론 과제의 분류방식이기도 하다. 이상을 종합하여 본 연구에서는 비의 속성 기준, 구체적 수치 기준, 비교 기준을 설정하여 비례추론 과제 유형을 <표 1>과 같이 정리하였다. 또한 과제 유형별 이해를 돕기 위해, 예시 과제는 동일한 비의 속성에 대해서 동일한 맥락으로 구성하였다.

<표 1> 비례추론 과제의 분류 기준에 따른 과제 유형 및 예시

분류 기준			예시 과제
비의 속성	구체적 수치	비교	
곱셈적 비교	양적	미지값	남학생 3명, 여학생 2명 비율로 조를 편성할 때, 남학생 15명에 필요한 여학생은 몇 명인가?
		비교	남학생 3명, 여학생 2명인 A조와 남학생 5명, 여학생 4명인 B조 중에 여학생 비율이 더 높은 조는 무엇인가?
	질적	미지값	A조는 B조보다 남학생 수가 두 배 정도 많다. 두 조의 남학생, 여학생 비율이 같다면, B조의 여학생 수는 대략 얼마라고 할 수 있는가?
		비교	A조는 B조보다 남학생 수가 몇 배 많고 여학생 수는 비슷하다. A조와 B조 중 누가 더 여학생 비율이 더 높은가?
두 양의 합성	양적	미지값	A는 2시간 동안 10km를 걸었다. 같은 속력으로 3시간 동안 걸은 거리는 얼마인가?
		비교	A는 2시간 동안 10km를 걸었고, B는 3시간동안 12km를 걸었다. A, B 중 누가 더 빨리 걸었는가?
	질적	미지값	A는 B보다 많은 거리를 쉬는시간 내내 달렸다. 두 사람의 속도가 같다면, B가 달린 시간은 대략 얼마인가?
		비교	A는 B보다 많은 거리를 적은 시간 동안 달렸다. A, B 중 누가 더 속력이 빠른가?
확대 축소	양적	미지값	가로가 10cm, 세로가 15cm인 사진을 확대하였다. 가로가 18cm일 때, 세로의 길이는 얼마인가?
		비교	가로가 10cm, 세로가 15cm인 작은 사진과 가로가 18cm, 세로가 24cm인 큰 사진이 있다. 작은 사진을 확대하면 잘린 부분 없이 큰 사진을 얻을 수 있는가?
	질적	미지값	다음 사진 속의 나무와 그 그림자를 보고, 나무 옆에 서있는 사람의 그림자를 그려 보아라.
		비교	다음 사진 속의 나무와 사람, 그 그림자의 길이를 보고 판단할 때, 그림자의 길이에 이상이 없다고 할 수 있는가?

<표 1>에는 구체적 수치가 제시된 양적 추론뿐 아니라 정확한 수치가 제시되어 있지 않은 질적 과제의 예시가 다수 포함되어 있다. 질적 과제 수행에서 대략적인 어림으로 변화의 방향을 판단하는 추론 능력은 수치를 사용하는 양적 추론의 사전 활동으로서뿐 만 아니라 학생들의 비례 감각을 증진시킨다는 측면에서 더욱 의미가 크다고 할 수 있다. 이외에도 <표 1>에는 제시되지 않았지만, 비례 상황과 非비례 상황을 구별하는 과제를 추가가능하다. 만약 非비례 상황을 습관적으로 비례식으로 해결하려는 학생이 있다면, 이 학생은 비례 관계가 비의 일정성, 비의 상등을 바탕으로 이루어진다는 사실을 이해하지 못한 채 기계적이고 절차적 수준으로 비례식 알고리즘을 적용할 가능성이 높기 때문이다.

2. 비례추론의 발달 수준 및 전략

정은실(2013)과 Lobato & Ellis(2010)는 형식적 비례식 알고리즘을 올바르게 사용했다는 것이 비례적으로 추론했다는 것을 의미하지 않는다는 것을 강조한다. 비례식과 관련된 기계적 알고리즘은 비례적 추론을 쉽게 하도록 한다기보다는 오히려 비례적으로 사고하는 것을 방해하는 장애가 될 수도 있는 것이다. 형식화된 알고리즘이 아닌 다양한 비형식적 추론 전략을 사용하는 유연성이야말로 비례적 사고의 핵심이며, 형식적 수준 이전에 나타나는 비형식적 전략들은 이후의 비례 추론을 형식화시키는데 기여한다(Lamon, 1993; Lesh et al., 1988; Van de Walle, 2008).

비례추론 과제에서 어떤 전략을 사용하는가는 학생들의 비례추론의 발달 수준을 구분하는 기준이 된다. Lesh et al.(1988)은 비례추론 발달 단계를 가법적 추론을 하는 개념화 1단계부터 비례식 형태의 승법적 추론을 하는 개념화 5단계까지로 구분하였다. Nabors(2003)는 두 양에 대한 합성단위를 반복적으로 더해가는 구성 접근인 제1수준, 곱셈적 아이디어로 사고로 합성단위를 압축하여 구성하는 제2수준, 단위 인수를 이용하여 승법적 관계를 해석하는 제3수준, 형식적 비례식을 이용하는 제4수준으로 구분한다. Langrall & Swafford(2000) 또한 추론 전략에 따른 비례추론 발달 단계를 비례적 사고가 관찰되지 않는 수준0부터 형식적 추론단계인 수준3까지 네 수준으로 구분하고 있다. 정영옥(2015)은 Langrall & Swafford의 수준을 토대로 하되, 비형식적 전략들을 일부 추가하여 비례추론 발달 단계를 네 수준으로 제시하였다. 수준0은 임의 전략과 덧셈 전략을 사용하는 非비례 추론의 단계이고, 수준1은 곱셈적 사고와 그림을 포함한 모델을 사용하는 비형식적 추론 단계로, 시행착오 전략, 세기 전략, 모델링 전략, 질적 비교 전략을 관찰할 수 있다. 수준2는 모델을 수치적 계산과 연결할 수 있는 양적 추론 단계로, 비의 단위화 전략, 합성단위 전략, 구성 전략, 단위 비율 전략, 조정 전략, 전체 부분 전략, 인수 전략 등을 사용한다. 수준3은 비의 동치관계를 이해하는 형식적 추론 단계로 비례식 전략과 분수 비의 상등 전략을 이용한다.

<표 2>는 정영옥(2015)이 정리한 비례추론 발달 단계와 전략을 전략 유형에 대한 설명에 약간의 수정을 가하여 다시 제시한 것이다. <표 2>에서 제시된 비례추론 전략을 ‘3개에 2달러인 풍선 21개의 가격’이라는 맥락에 적용하면 다음과 같다. 먼저 풍선의 개수에 해당하는 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21을 뛰어 세고, 각 금액에 해당하는 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14를 뛰어 세어 14달러를 계산하는 것은 세기 전략이다. 반면에 3개에 2달러, 6개에 4달러, 9개에 6달러와 같이 덧셈에 의해 계속 반복하여 21개에 14달러를 얻는 것은 구성전략이다. 두 전략 모두 덧셈을 반복 적용했다는 면에서는 공통점을 가지나, 세기 전략이 두 양을 별도로 세고 있는 반면에 구성전략은 두 양을 하나로 묶어 관계 속에서 더하고 있다는 점에서 좀 더 상위의 추론으로 볼 수 있다. 정영옥(2015) 또한 세기 전략을 수준1에 해당하는

전략으로, 구성 전략을 수준2에 해당하는 전략으로 분류하고 있다. 한편 위 문제를 구체물을 이용하거나 간단한 그림을 그려가면서 해결한다면 이는 모델링 전략을 사용한 것이다.

<표 2> 비례추론 발달 수준에 따른 전략 유형(정영옥, 2015, p.28, 수정)

비례추론 발달수준	전략 유형	전략 설명
비형식적 수준	시행착오 전략	여러 번에 걸쳐 직접 시행하는 것을 반복하여 성공에 이르는 방법
	세기 전략	뛰어 세기 등 다양한 수 세기 전략을 이용하는 방법
	모델링 전략	구체물을 이용하거나 그림을 이용하는 방법
	질적 비교 전략	정확한 수치를 사용하지 않고 대략 어림을 사용하는 방법
양적 추론 수준	단위화 전략	하나의 비를 단위로 하여 다른 비 안에 몇 번 들어갈 수 있는지, 이 때 남은 나머지 비의 크고 작음을 해석하는 방법
	합성단위 전략	하나가 아닌 특정한 양을 합성 단위로 정하여 다른 양에 합성 단위가 몇 개 포함되는지를 이용하는 방법
	구성전략	하나의 비 내에서 관계를 정하여 덧셈에 의해 계속 반복하는 방법
	단위비율 전략	하나에 해당하는 양이 얼마인지를 구하여 계산하는 방법
	조정 전략	두 양의 최소공배수를 이용하는 방법
	전체-부분 전략	주어진 비를 전체-부분의 분수로 해석해서 다른 양에 분수를 곱하는 방법
	인수전략	하나의 비 내에서의 곱셈적 관계를 다른 비에 적용시키는 방법
형식적 수준	비례식	두 비의 관계를 비례식으로 표현하고 형식적 절차를 이용하는 방법
	분수 비의 조작	두 비를 분수로 표현하여 두 비가 동치임을 형식적 절차로 해결하는 방법

양적 추론 단계에 이르면 좀 더 다양한 해결 전략을 사용할 수 있다. 풍선 3개에 2달러이므로, 풍선 1개에 $\frac{2}{3}$달러임을 계산하고 $21\times\frac{2}{3}=14$(달러)를 얻는 방법은 풍선 하나에 해당하는 것이 얼마인가를 생각한 것이므로 단위비율 전략이다. 만약 풍선 3개를 새로운 단위로 생각하여, 풍선 21개에 새로운 합성단위 3개가 몇 개 포함되는지를 계산하였다면, 이는 합성단위 전략으로 볼 수 있다. 이와 유사한 것이 인수 전략이다. 풍선 21개는 3개의 7배이므로, 금액도 7배가 되어야 하므로 $2\times7=14$(달러)를 얻는 방법이다. 합성단위 전략이 3을 단위로 생각하여 21을 분할하여 단위 반복하는 측정의 사고에 초점을 맞추었다면, 인수 전략은 24와 3의 곱셈적 비교를 통해 인수 7을 찾아내고 이를 다른 비에 확장하여 적용시켰다는 점에서 차이가 있다.

한편 형식적 수준에서는 $3:2=21:x$ 또는 $3:21=2:x$라는 비례식을 세워 해결 가능하다. 전자는 풍선 개수당 금액이라는 외적비의 상등을, 후자는 풍선개수끼리, 금액끼리의 내적비의 상등을 이용한 비례식이라는 차이점이 있다. 또한 두 비를 분수 $\frac{2}{3}, \frac{x}{21}$로 표현하여 두 비가 상등임을 형식적 절차로 해결하는 방법도 생각할 수 있다.

이와 같은 미지값 상황은 일반적으로 세 개의 양이 주어졌을 때, 제4의 양을 구하는 구조를 가진다. 그런데 미지값 상황에도 주어진 비에 따라 전체를 분배하는 특별한 유형을 생각할 수 있다. 예를 들어, ‘풍선 21개를 3:4의 비율로 A와 B에 나누어줄 때, 각각 몇 개씩 나누어 주는가?’ 라는 문제는 두 개의 미지의 양을 구해야 하는 특별한 구조를 가지고 있다. 이에 대해 3:4를 합성한 7을 새로운 단위로 하여 21을 측정하면 3번 포함되므로, A는 $3\times3=9$(개), B는 $4\times3=12$(개)를 나눠줄 수 있다고 해결한다면, 7이라는 새로운 단위로 21을 측정하므로 합성단위 전략이라고 볼 수 있다. 반면에 3:4의 부분인 3, 4와 그 합인 7의 관계를 비로 나타내어 A는 21개의 $\frac{3}{7}(=\frac{3}{3+4})$, B는 $\frac{4}{7}(=\frac{4}{3+4})$을 가진다는 방식으로 해결한다면, 이는 전체-부분 전략이라고 할 수 있다.

그러나 미지값 상황 과제에서 <표 2>에서 제시한 비례추론 전략을 모두 확인할 수 있는 것은 아니다. 주어진 두 양의 비가 일정하게 유지되도록 미지의 양을 구하는 구조를 가진 미지값 상황이 아닌, 네 개의 양에 대한 두 개의 비를 비교하는 상황에서 관찰 가능한 추론 전략들이 추가적으로 존재한다. 예를 들어, 위 문항을 ‘노란 풍선 3개에 2달러이고, 빨간 풍선 10개에 8달러일 때, 어떤 풍선이 더 비싼가?’ 라는 비교 상황 문제로 변형하면, 하나의 비를 단위로 하여 다른 비와 비교하는 단위화 전략이 사용가능하다. 즉 3:2를 단위로 하여 10:8을 측정하면, 10:8안에는 3:2가 3번 들어가고 1:2이 남는다. 빨간 풍선 1개에 2달러가 남으므로, 노란 풍선 3개에 2달러와 비교하여 빨간 풍선이 더 비싸다고 해결하는 방식이다. 조정 전략은 3과 10의 최소공배수 30을 이용하여, 노란 풍선 30개에 20달러, 빨간 풍선 30개에 24달러를 비교하여 구하는 방식이다. 물론 두 비를 분수 $\frac{2}{3}, \frac{8}{10}$로 표현하여 두 비의 대소관계를 판단할 수도 있다. 이상이 구체적 수치에 근거한 양적 추론과 형식적 수준이라면, 정확한 수치를 사용하지 않고 대략적으로 어림하는 질적 비교 전략을 생각할 수 있다. ‘노란 풍선 3개에 2달러이고, 빨간 풍선 4개에 7달러’ 라는 문제에서 ‘풍선의 개수가 증가한 것에 비해 금액이 너무 많이 증가했으므로 빨간 풍선이 더 비싸다’ 와 같이 해결하는 것은 정확한 수치를 이용하지 않는 비형식적 전략이라고 할 수 있다.

이와 같이 비례추론 과제 유형의 분류 기준에 따라 보다 자연스럽고 적절한 비례추론 전략이 존재한다. 예를 들어, 미지수 상황에서는 세기 전략, 모델링 전략, 합성단위 전략, 구성 전략, 단위 비율 전략, 인수 전략, 형식화 전략 등이 활용 가능하며, 특히 전체를 분배하는 미지수 상황에서는 합성단위 전략과 전체-부분 전략, 형식화 전략이 유용하다. 반면에 비교 상황에서는 단위화 전략, 조정전략, 형식화 전략 등이 자연스럽다고 할 수 있다. 비례추론 과제 유형별로 보다 효율적인 전략을 탐색하는 경험은 학생들의 비례추론 능력 신장에 도움이 될 뿐 아니라, 교사들의 비례추론 지도를 위한 지식을 강화시키는데 기여할 것이다. 이와 관련하여 Ben-Chaim et al.(2007)과 Lobato & Ellis(2010)는 다양한 비례추론 과제들을 다루는 경험이 학생들과 교사들의 비례추론 능력을 신장시킨다고 한 바 있다. 그러나 교사들이 다양한 비례추론 과제와 전략을 경험할 수 있는 기회는 다소 제한적인 것으로 보인다. 이미 서론에서 언급한 바와 같이, Freudenthal(1983)을 비롯한 다수의 학자들이 알고리즘화되고 형식화된 비례추론 전략에 기인한 교사와 예비교사들의 불완전한 비례추론을 지적하였다. Cramer, Post, & Currier(1993), Post, Harel, Behr, & Lesh(1988)는 학생들에게 나타나는 비례추론에 대한 오개념들이 교사들에서도 관찰되었다고 보고하였으며, Ekawati, Lin, & Yang(2015)는 인도네시아 초등예비교사들의 비례추론에

대한 지식이 미흡함을 보여주었다. 그들의 연구에서 非비례상황과 비례상황을 구분하는 6문항 중에서 4문항 이상을 맞춘 비율은 53.9%였으며, 거리와 시간의 외적비 $\frac{s_1}{t_1}=\frac{s_2}{t_2}$와 내적비 $\frac{s_1}{s_2}=\frac{t_1}{t_2}$의 의미를 옳게 설명한 비율이 각각 35.4%와 9.6%에 그쳤다. 이에 본 연구자는 우리나라 초등예비교사들을 대상으로 비례추론 전략을 살펴보는 연구가 필요하다고 보아 다음과 같은 방법으로 연구를 수행하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구대상자

본 연구는 지방 중소도시인 J시 소재의 교육대학교 2학년에 재학 중인 초등예비교사 72명을 대상으로 수행되었다. 대상 학생 모두 심화과정으로 수학교육이 아닌 타교과(초등교육, 실과교육, 윤리교육)를 전공하는 학생들이었으며, 조사가 이루어진 시기는 본 연구자가 강의한 수학교육론 과목의 수강이 종료된 학기말 시점이었다. 또한 연구가 수행된 해당 학기를 포함하여 네 학기 동안 예비교사들이 특별히 비와 비율, 비례추론에 대한 내용지식을 학습할 기회는 없었다. 따라서 이번 검사 결과가 초등예비교사들의 초등수학을 포함한 학교수학에 대한 개인적 경험이 그들의 비례추론에 대한 이해에 미친 영향을 드러낼 것이라고 판단하였다.

2. 검사도구

초등예비교사의 비례추론에 대한 내용지식을 조사하기 위한 검사도구의 개발은 비례추론의 과제 유형을 선정하는 것에서부터 시작하였다. Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이, 비례추론의 과제 유형은 Cramer & Post(1993), Lamon(1993), Hull(2000), Lobato & Ellis(2010), 정영옥(2015) 등 여러 학자에 따라 다양하게 분류되어 왔으며, 본 연구자는 비례추론의 과제 유형을 <표 1>과 같이 정리한 바 있다. 이 중에서 익숙한 미지값 유형보다는 비교 유형을 우선적으로 선정하였고, 이에 따라 질적 유형 중에서도 보다 자연스러운 맥락이라고 판단한 곱셈적 비교와 두 양의 합성 속성의 비교 과제만을 포함하였으며, 非비례 과제를 추가하여 검사문항의 수를 8문항으로 조정하였다. <표 3>에서 보는 바와 같이, 1번은 곱셈적 비교로서의 속성을 가진 비의 양적 비교 문항이고, 2번은 동일한 비의 속성이나 질적 비교 문항이다. 3번과 4번은 두 양의 합성으로의 속성을 가진 비의 미지값과 비교 문항이고, 5번은 질적 비교 문항이다. 6번과 7번은 확대축소 속성으로 각각 미지값과 비교 문항이다. 마지막 8번은 非비례 상황에 대한 판단을 확인하고자 한 문항이다.

실제로 학생들에게 제공된 검사도구는 <표 3>의 과제 번호를 임의로 변경하여 제시하였다. 이는 분류기준에 따른 체계적인 문항배치 순서가 예비교사들의 문항에 대한 집중도와 결과에 영향을 미치는 현상을 최소화하기 위한 장치였다.

<표 3> 검사도구의 구성

분류 기준			과제	출처
비의 속성	구체적 수치	비교		
곱셈적 비교	양적	비교	1. 가은이는 오렌지 주스 2컵과 물 3컵을 섞었고, 하림이는 오렌지 주스 3컵과 물 4컵을 섞어 새로운 주스를 만들었다. 누가 만든 주스가 더 진하다고 할 수 있는가? 그 이유를 설명하시오	Cramer & Post(1993) 수정
	질적	비교	2. 서진이는 어제보다 레모네이드 주스의 양은 적게 하고 물을 더 많이 넣었다. 서진이가 만든 레모네이드 맛의 정도가 어제보다 진해졌는지, 약해졌는지의 여부를 다음에서 고르고, 그렇게 생각한 이유를 쓰시오. ①더 진하다 ②약하다 ③어제와 같다 ④충분한 정보가 없다	Cramer & Post(1993) 수정
두 양의 합성	양적	미지값	3. ‘4개의 텐트에 12명의 스카우트 대원이 있을 때, 40개의 텐트에는 몇 명의 학생들이 있는가’ 라는 문제를 다양한 방법으로 해결해 보시오.	Cramer & Post(1993) Lamon(1993)
		비교	4. 2판의 피자를 7명의 여학생이 먹고 한 판의 피자를 3명의 남학생이 먹는다. 여학생과 남학생 중 누가 피자를 더 많이 먹었다고 할 수 있는가?	Lamon(1993)
	질적	비교	5. 오전 시간에 A, B는 같은 속도로 걸었다. 이 때, A는 더 많은 시간을 걸어서 더 많이 걸었다. 오후에 A는 오전에 간 거리보다 두 배를 갔지만 시간은 오전과 같다. B는 오전과 같은 거리를 갔지만 시간은 오전 시간의 절반이다. 오후에 A는 B보다 더 빨리 걸었는가, 더 늦게 걸었는가 아니면 같은 빠르기로 걸었는가? 그 이유를 쓰시오.	Lobato & Ellis(2010)
확대 축소	양적	미지값	6. 신영이는 한 남자와 나무, 그리고 그림자가 있는 사진을 찍었다. 남자의 실제 키는 1.75m 이고, 사진 속의 남자 키는 3cm, 사진 속 남자 그림자와 나무의 그림자는 각각 1.2cm, 4.5cm 이다. 사진 속에 나무 전체의 모습을 담았다고 할 때, 실제 나무의 높이와 사진 속의 나무 길이는 얼마인가?.	Hull(2000)
		비교	7. 어떤 손님이 5×7 인치 사진을 가져와서 8×10 인치 사진으로 확대하기를 원한다. 원본 사진의 어떤 부분도 잘리거나 왜곡됨이 없이 이 작업이 가능한가? 그 이유를 쓰시오.	Hull(2000)
非비례			8. A와 B는 같은 빠르기로 운동장을 달리고 있다. A가 먼저 출발하여 9바퀴를 도는 동안에 B는 3바퀴를 돌았다. 두 사람이 계속 일정한 빠르기로 달린다고 할 때, B가 15바퀴를 돌았을 때 A는 몇 바퀴를 돌았겠는가? 그 이유를 쓰시오.	Van de Walle (2008)

3. 분석방법

분석항목은 예비교사들의 과제 유형에 따른 이해 정도, 사용 전략에 따른 과제의 적합도, 과제에 따른 전략의 특징이다. 첫째, 과제 유형에 따른 이해 정도 항목은 문항별 정답률을 바탕으로 양적으로 분석한 후 과제 유형에 따라 예비교사들의 이해의 정도에 차이가 있는지와 사례를 통해 그 원인을 분석한다. 둘째, 사용 전략에 따른 과제의 적합도 항목은 비례추론 수준 및 전략을 기준으로 이를 사용한 과제들의 특징을 분석한다. 전략별로 특정 과제에 대한 적합도를 살펴볼 것이다. 셋째, 과제에 따른 전략의 특징 항목은 비례추론 과제의 세 가지 분류기준인 비의 속성, 구체적 수치, 비교 기준을 변수로 하여 과제 유형에 따라 사용한 전략의 특징을 분석한다. 비의 속성 기준은 〈과제1〉과 〈과제4〉, 〈과제7〉, 〈과제2〉와 〈과제5〉, 〈과제3〉과 〈과제6〉의 상호 비교를 바탕으로, 비교 기준은 〈과제3〉과 〈과제4〉, 〈과제6〉과 〈과제7〉의 상호 비교를 바탕으로, 구체적 수치 기준은 〈과제1〉과 〈과제2〉, 〈과제4〉와 〈과제5〉의 상호 비교를 바탕으로, 나머지 두 기준이 동일하고 특정 분류

기준에 차이를 둔 과제에서 예비교사들이 사용하는 전략에 집중과 간과 현상이 나타나는지를 분석한다. 검사지의 분석은 수학교육을 전공한 박사 1인과 연구자가 공동으로 분석하였으며 충분한 논의를 통해 합의에 이르렀다. 결과분석에서 예비교사들은 S1부터 S72까지로 표기하였다.

Ⅳ. 결과분석

1. 비례추론 과제 유형에 따른 이해 정도

초등예비교사의 비례추론 과제 유형에 따른 이해 정도를 알아보고자 과제별로 반응 비율을 살펴보았다. 다음 <표 4>는 총 8개의 과제에 대한 정답률, 오답률, 무응답 비율이다.

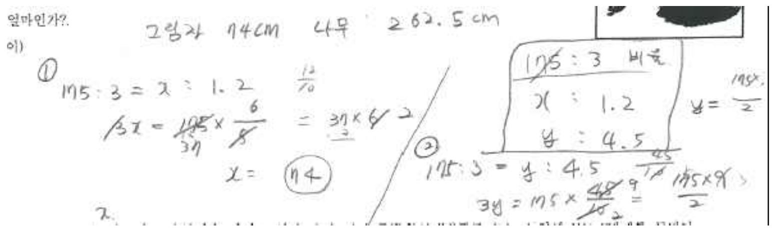
<표 4> 검사 문항에 대한 반응 유형별 비율(단위:%)

과제 / 반응 유형	과제1	과제2	과제3	과제4	과제5	과제6	과제7	과제8
	곱셈-양적-비교	곱셈-질적-비교	합성-양적-미지값	합성-양적-비교	합성-질적-비교	확대-양적-미지값	확대-양적-비교	非비례
정답	97.4	86.3	99.3	93.0	59.7	33.4	68.1	26.4
오답	2.6	13.7	0.7	7.0	37.5	62.4	29.1	68.0
무응답	0	0	0	0	2.8	4.2	2.8	5.6

정답률이 높았던 유형은 <과제1>부터 <과제4>였으며, <과제5>부터 <과제8>은 정답률이 상당한 수준으로 떨어지고 있음을 확인할 수 있다. 실제로 예비교사들에게 제공된 검사도구는 과제번호를 임의로 변경하여 제시하였으므로, <표 4>의 과제번호 순서와 정답률의 상관관계는 상당히 배제되었다고 본다. 이를 각 과제의 분류기준으로 나누어 생각해보면, 비의 속성 기준에서는 서로 같은 속성의 양의 곱셈적 관계를 추론하는 과제(과제1, 과제2)의 평균정답률이 가장 높았고, 서로 다른 속성의 두 양을 관계적으로 합성하는 과제(과제3, 과제4, 과제5)가 그 다음을 차지했으며, 기하적 맥락에서의 확대·축소 속성의 과제(과제6, 과제7)의 평균 정답률이 가장 낮은 것으로 나타났다. 구체적 수치 기준에서는 정확한 수치가 제시된 양적 과제(과제1, 과제3, 과제4, 과제7)가 그렇지 못한 질적 과제(과제2, 과제5)보다 정답률이 높았으며, 비교 기준에서는 미지값 과제(과제3)가 비교 과제(과제1, 과제2, 과제4, 과제5, 과제7)보다 정답률이 높았다.

이와 같은 결과는 대수 과제, 양적 과제, 미지값 과제에서의 정답률이 높았던 안숙현・방정숙(2008), 정유경・정영옥(2015) 등의 선행연구 결과와 대체적으로 일치한다고 볼 수 있지만, 그 의미는 조금 다르게 해석될 수 있다. 정유경・정영옥(2015)이 조사한 6학년 학생들의 경우는 질적, 미지값, 비교상황의 동일한 유형의 과제 내에서도 정답률의 편차가 70%에 육박하는 상황들이 나타나 평균정답률의 대표성이 다소 떨어진다고 볼 수 있다. 반면에 예비교사들의 경우에는 <과제6>을 제외하면 비의 속성, 양적・질적, 미지값・ 비교의 동일한 유형 내에서의 정답률 편차가 최대 40%를 넘지 않고 있다. 이로부터 예비교사들이 비례추론 과제 유형 변수에 영향을 받는 것은 사실이나 초등학교 학생들에 비하면 상대적으로 안정적인 모습을 보인다고 해석할 수 있다.

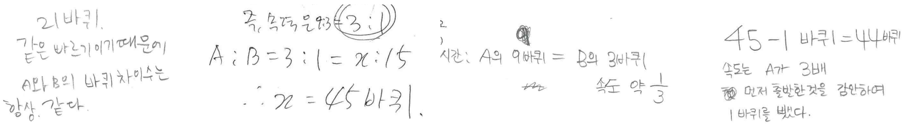
그런데 위와 같은 전반적인 분석이 들어맞지 않은 예외가 있다. 바로 확대·축소 속성의 양적, 미지값 유형인 <과제6>이다. 정답률이 33.4%로 비례상황 7문항 중에서 정답률이 가장 낮은 것으로 조사된 문항이다. 실제 사람의 키와 사진 속 사람의 키, 사람의 그림자 길이, 사진 속 나무의 그림자 길이를 수치로 제시하고, 실제 나무의 높이와 사진 속 나무의 길이를 구하는 과제로, 여섯 개의 양 사이에 일정한 비율이 유지되는 세 개의 비를 파악하고 이 비들의 상등을 이용해야 하는 문제이다. 이 문항에서 전체 72명 중에 무응답 3명을 포함하여 총 48명(66.6%)이 잘못된 추론 과정을 보여주었다. 이는 양의 속성만 외적비로 다른 <과제 3>의 정답률이 99.3%인 것과 대조가 된다. [그림1]은 $175:3$이라는 실제 사람의 키와 사진 속 사람의 키의 비가 사진 속 나무 길이(x)와 사진 속 사람 그림자 길이(1.2)의 비, 실제 나무 길이(y)와 나무 그림자(4.5)의 비와 동일하다는 추론하고 있는 대표적인 오류 유형이다. 이는 세 개 이상의 비를 다루어야 하는 복잡한 상황에서 비례관계가 성립하는 양을 찾아내어, 이들 양 사이에 성립하는 일정한 곱셈적 관계를 파악하는 과제에 대해서 예비교사들의 이해 정도가 부족하다는 사실을 말해준다. 이외에도 비례식은 옳게 세웠으나 계산상의 오류를 발생시킨 경우(9.7%)와 부주의하게 단위를 사용한 경우도 적지 않게 관찰되었다. 예비교사들의 경우에도 학생들과 마찬가지로 주어진 수치가 간단한 자연수가 아닌 소수 또는 큰 수로 주어지는 과제에서는 계산의 정확도가 떨어진다는 것을 알 수 있다.



[그림 1] 곱셈적 관계가 성립하는 양을 잘못 파악한 사례(S66)

이번 검사에서 가장 정답률이 낮았던 문항은 非비례상황으로 구성된 <과제8>로, 정답률은 26.4%(19명)에 불과했다. 非비례상황과 비례상황을 구분하는 6문항 중에서 4문항 이상을 맞춘 예비교사 비율이 53.9%였던 Ekawati et al.(2015)의 연구결과에도 못 미친다고 할 수 있으며, 특히 5,6,7학년 학생 570명 중 非비례상황을 비례관계로 오인한 비율이 약 34%였던 안숙현·방정숙(2008)의 연구와 비교하면 상당히 의외의 결과이다. 이번 조사에 참여한 초등예비교사 72명 중 무응답 4명을 제외한 49명(68.0%)의 학생들이 주어진 상황을 비례상황으로 오인하였다. 초등예비교사가 학생들에 비해 약 2배의 오답률을 보인 원인을 검사도구의 맥락의 차이로 추측할 수 있다. 안숙현·방정숙(2008)이 사용한 非비례상황은 나이 차이, 책의 전체 쪽수 등 일정한 합(차)으로 인식하기에 익숙한 맥락이었던 반면에, Van de Walle이 예시한 문항이기도 한 <과제8>은 시간과 거리의 비인 속력 맥락이었다. A와 B가 같은 속력으로 달리고 있다는 조건에 집중하면, 먼저 출발한 A가 달린 바퀴수와 나중에 출발한 B가 달린 바퀴수의 관계가 $9:3$(3배)이라는 곱셈적 관계가 아니라 $9-3$(6)이라는 덧셈적 관계임을 발견할 수 있다. 두 사람이 계속 일정한 속력으로 달린다고 했으므로, 이 차는 일정성을 갖게 된다. 그럼에도 불구하고 많은 예비교사들은 이 문제 속에 내포된 양 사이의 관계의 일정성을 차가 아닌 비로 간주하는 성급한 오류를 나타낸 것이

다. [그림 2]의 S61은 문제 속의 ‘일정한 속력’이라는 표현에 주목하여 A와 B의 바퀴수의 차의 일정성을 제대로 파악한 반면에, S46과 S53은 9바퀴와 3바퀴라는 배수관계가 성립하는 수치에 현혹되어 속력의 비를 9:3으로 착각하고 있다. 심지어 S53은 A가 먼저 출발한 것을 감안하여 임의로 1바퀴를 뺀다는 비논리적인 진술을 하고 있다.



[그림 2] 차의 일정성을 파악한 사례(좌, S61)와 비의 일정성으로 오인한 사례(중, S46; 우, S53)

Van de Walle(2008)가 비례상황과 非비례상황을 인식하고 이를 구별하는 것을 강조한 것은 이러한 경험이 학생들의 비례적 사고 발달에 중요한 요소라고 보았기 때문이다. 상당수의 초등예비교사들이 여러 양 사이의 관계가 곱셈적 관계인지 덧셈적 관계인지를 양적으로 따져보는 단계를 생략한 채 비례관계일 것이라는 성급한 결론에 이르는 것으로 보인다. 이는 예비교사들이 비례식이라는 형식적 절차에 지나치게 익숙해진 개인적 경험들과 무관하지 않다. 초등학생들보다도 오히려 예비교사들이 더 높은 오답률을 보였다는 사실은 예비교사들이 형식적 전략에 대한 자동화가 진행되었기 때문이며, 기계적인 알고리즘의 적용이 오히려 양 사이의 비례적 관계를 따져보는 교사들의 비례적 사고를 방해한다는 것을 의미한다. 비례추론에 대한 통찰의 근원을 막히지 않게 하기 위해서는 양적 관계에 대한 의식적인 분석을 행하는 경험과 의도적으로 형식적 전략이 아닌 다양한 비형식적 전략들을 사용하는 경험을 충분히 제공할 필요가 있다.

2. 비례추론 수준과 전략에 따른 과제의 적합도

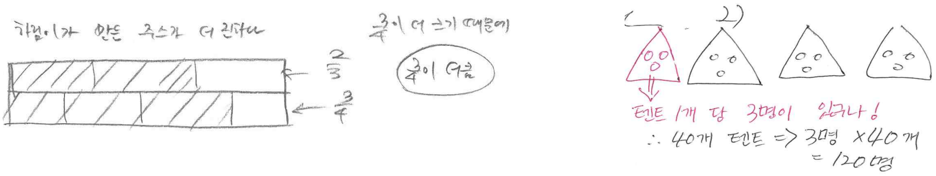
Ⅱ장 2절에서 살펴본 비례추론 발달 수준에 따른 전략 유형을 정리한 <표 2>의 틀에 총 8개의 과제를 해결하는 과정에서 예비교사들이 사용한 전략의 비율을 정리하여 <표 5>를 구성하였다.

<표 5>에서 알 수 있듯이, 전체 문항에서 예비교사들이 사용한 전략은 비형식적 수준에서의 세기 전략, 모델링 전략, 질적 비교 전략과 양적 추론 수준에서의 합성 단위 전략, 구성 전략, 단위비율 전략, 조정 전략, 전체-부분 전략, 인수 전략, 그리고 형식적 수준에서의 비례식 전략과 분수 비의 조작 전략 등 총 11개에 이르렀다. 물론 과제에 따라서 특정 전략에 집중되거나 양적 추론을 포함한 비형식적 전략을 사용한 사례가 소수에 그치고 있지만, 이미 형식적 수준의 전략이 자동화된 예비교사들이 다양한 비형식적 전략을 생각할 수 있다는 점에 의미를 부여할 수 있다. 단 한 건의 사례도 찾아볼 수 없었던 전략은 시행착오 조작과 단위화 조작이었다. 형식적 수준의 비례추론 발달 단계의 예비교사들에게 여러 번에 걸쳐 직접 나누어 주면서 남은 양을 조절하는 방법은 지나치게 수준이 낮아 오히려 떠올리기 어려운 전략이었을 것이다. 그러나 단위화 조작은 <과제1>과 <과제4>, <과제7> 등의 양적 비교과제에서 충분히 활용가능한 전략임을 감안할 때 아쉬운 측면이 있다. 이를 비례추론 수준을 기준으로 살펴보면 다음과 같다.

<표 5> 검사 문항에서 사용된 비례추론 전략의 비율(단위:%)

비례 추론 수준	과제 / 전략유형	과제1 곱셈-양적 -비교	과제2 곱셈-질적 -비교	과제3 합성-양적 -미지값	과제4 합성-양적 -비교	과제5 합성-질적 -비교	과제6 확대-양적 -미지값	과제7 확대-양적 -비교
비형식적 수준	시행착오 전략	0	0	0	0	0	0	0
	세기 전략	0	0	0.7	0	0	0	0
	모델링 전략	9.1	2.7	6.5	0	0	0	0
	질적비교 전략	0	54.8	0	0	12.5	0	0
양적 추론 수준	단위화 전략	0	0	0	0	0	0	0
	합성단위 전략	0	0	2.2	0	0	0	0
	구성전략	0	0	1.4	0	0	0	0
	단위비율 전략	5.2	0	27.3	12.5	0	2.8	1.4
	조정 전략	6.5	0	0	12.5	0	0	7.0
	전체-부분전략	39.0	0	0	0	0	0	0
	인수전략	0	0	20.1	0	0	1.4	12.5
형식적 수준	비례식	0	0	33.8	0	4.2	26.4	13.9
	분수 비의 조작	37.7	27.4	7.2	68.1	43.0	1.4	33.4
합계(정답률)		97.4	86.3	99.3	93.0	59.7	33.4	68.1

먼저 비형식적 추론 수준에서는 그림을 이용하는 모델링 전략이 <과제1>, <과제2>, <과제3>에서 사용되었다. [그림 3]의 S11은 영역모델을 사용하여 물에 대한 레몬레이드 주스의 양을 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$로 표현하여 직사각형 영역의 크기를 비교하는 전략을 사용하였다.



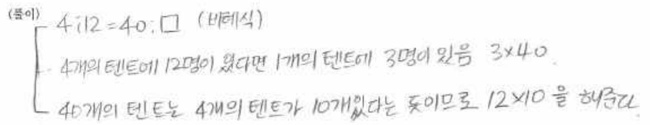
[그림 3] 모델링 전략을 <과제2>에서 사용한 S11과 <과제3>에서 사용한 S10 사례

반면에 S10은 텐트와 대원을 나타내는 그림을 직접 그려서 ‘텐트 1개당 3명’이라는 사실을 발견한 다음 120명을 계산하고 있는데, 이는 모델링 전략이 단위비율 전략과 혼합하여 사용되는 사례이다. 대부분의 모델링 전략 사례는 단위비율 전략과 조정 전략 등의 다른 전략들을 혼합하여 사용되고 있었다.

<표 5>를 살펴보면, 비형식적 수준의 질적 비교 전략이 <과제2>에서 집중적으로 사용되었음을 알 수 있다. <과제2> 자체가 질적 과제이기 때문에 당연한 결과로 보이지만, 질적 과제라고 해서 반드시 질적 비교 전략이 가장 많이 사용되는 것은 아니었다. 동일한 질적 과제인 <과제5>에서는 정확한 수치를 사용하지 않고 대략 어림하는 질적 비교 전략을 사용한 사례는 12.5%에 불과했으며, 대부분의 정답 사례들은 오히려 분수 비의 조작을 이용한 형식적 전략을 이용하였다. 이러한 원인으로 <과제5>가 공식이 자동화된 속력 맥락인 점을 생각할 수 있다.

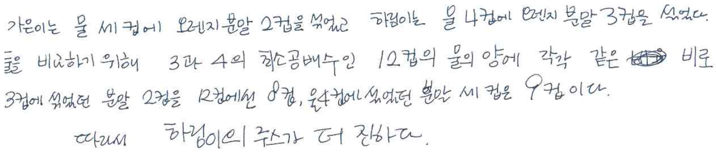
양적 추론 수준의 전략 중에서 가장 광범위하게 사용된 전략은 단위비율 전략이었다. 질적 과제 2개를 제외한 모든 양적 과제에서 단위비율 전략을 관찰할 수 있었다([그림 4]

참조). 그 다음으로 많이 관찰된 최소공배수를 이용하는 조정 전략은 양적 비교 과제인 <과제1>, <과제4>, <과제7>에서, 한 양이 다른 양의 몇 배인지를 이용하는 인수전략은 양적 과제인 <과제3>, <과제6>, <과제7>에서 많이 나타났다. 반면에 합성단위 전략과 구성전략은 <과제3>에서만 극소수의 사례로 나타났다.

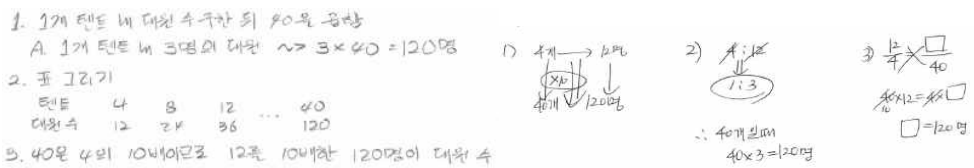


[그림 4] S5 가 <과제3>에서 사용한 비례식전략,
단위비율 전략, 합성단위전략

[그림 4]의 S5는 비례식 전략과 단위비율 전략뿐 아니라, 4개의 텐트를 하나의 합성단위로 설정하여 40개의 텐트에 합성단위 4개의 텐트가 몇 개 들어가는지를 측정하는 전략을 사용하고 있다. 반면에 [그림 5]의 S9는 3과 4의 최소공배수인 12를 이용하여 두 비를 비교하는 조정 전략을 사용하고 있다.



[그림 5] S9가 <과제1>에 사용한 조정 전략



[그림 6] <과제3>에서 단위비율전략, 구성 전략, 인수 전략을 사용한 S40,
인수전략, 단위비율전략, 분수 비의 조작 전략을 사용한 S18의 사례

[그림 6]의 S40의 경우에는 표 그리기를 이용하여 텐트 수 4와 대원 수 12를 계속 더해가는 구성 전략을 사용하고 있으며, 40은 4의 10배라는 인수 전략을 이용하기도 한다. 반면에 S18이 사용하는 전략은 왼쪽부터 인수 전략과 단위비율 전략이며, 마지막은 분수로 표현한 두 비의 대각선의 곱의 상등을 이용하는 형식적 전략이다. S40과 S18 모두 단위비율 전략과 인수 전략을 공통적으로 사용하고 있으나, S40은 구성 전략을, S18은 분수 비의 조작 전략을 추가적으로 선택하고 있다.

형식적 수준의 비례식 전략은 미지값을 구하는 유형인 <과제3>과 <과제 6>에서 집중적으로 나타났으나, 비교 유형인 <과제7>에서도 정답자 중 약 20%의 학생들이 비례식 전략을 사용하였다. 대부분 '$5:7 \neq 8:10$, $50 \neq 56$이므로 확대가 불가능하다' 형태의 답안을 제시하였다. 반면에 분수 비의 조작 전략은 비교 유형인 5개 과제에서 압도적인 비율로 조사되었다. 두 비의 대각선 곱의 상등을 이용하는 전략이므로 특히 비교 유형에서 효과적으로 사용될 수 있는 전략으로 보인다.

정유경・정영옥(2015)의 연구에서는 6학년 학생들이 사용한 비례추론전략이 양적 추론 수준이 66.2%, 형식적 추론 수준이 16.8%, 비형식적 추론 수준이 15.6%로 조사된 바 있다. 이로부터 연구자들은 6학년 학생들이 비례식을 학습했음에도 불구하고 형식적 전략보다는 비형식적 전략을 선호한다는 결론을 제시한 바 있다. 그러나 예비교사를 대상으로 한 본 연구의 결과는 다소 다르게 해석된다. 전체 과제에 대한 정답 반응 총 748건에 대해서 각 전략의 상대적 비율을 계산한 결과, 형식적 추론 수준이 53.9%, 양적 추론 수준이 28.4%, 비형식적 추론 수준이 17.7%로 조사되었다. 비례식을 학습하기는 했으나 아직 내면화하지 못했을 가능성이 높은 6학년의 경우에는 오히려 다양한 양적 추론 전략과 비형식적 전략의 사용이 자연스러워 보인다. 반면에 이미 비례식과 분수 비의 대각선 곱이라는 알고리즘화가 진행된 예비교사에게서는 다른 비례추론 전략을 선택하지 못하는 경직된 모습이 관찰되었다. 따라서 예비교사 교육 프로그램을 통해 다양한 비례추론 전략에 대한 의식적인 분석을 바탕으로 비례추론 전략에 대한 유연성을 증진시킬 필요가 있다.

또한 각 전략의 사용 빈도에서도 차이를 확인할 수 있었다. 정유경・정영옥은 6학년 학생들의 사용 전략에 대한 선호도가 인수 전략, 단위비율 전략, 비례식 전략, 질적 비교 전략 순이라고 보고하고 있다. 반면에 예비교사들을 대상으로 한 본 연구에서는 분수 비의 대각선 곱 전략(39.2%), 비례식 전략(14.6%), 질적 비교 전략(12.6%), 단위비율 전략(9.2%), 전체-부분 전략(7.3%), 인수 전략(6.4%), 모델링 전략(5.0%), 조정 전략(4.9%) 순으로 조사되었다. 물론 검사 대상자의 특수성에 따라 이상의 선호 전략의 순서와 비율이 일반적이지 않을 수 있다. 어떤 유형의 과제를 더 많이 제시하느냐에 따라 사용 전략의 비중은 달라질 수 있기 때문이다. 위의 결과에서 질적 비교 전략의 비중이 높은 이유는 질적 과제를 제시했기 때문이며, 분수 비의 조작 전략 비율이 비례식 전략 비율보다 높은 것은 미지값 과제보다 비교 과제가 더 많이 제시되었기 때문일 가능성이 높다. 이에 대한 좀 더 상세한 분석이 다음 절에서 이어진다.

3. 비례추론 과제에 따른 전략의 특징

비례추론 과제에 따라 사용되는 비례추론 전략에 집중과 간과 현상이 있는지를 살펴보기 위하여 각 과제에서 사용한 전략을 정답 반응을 기준으로 백분율로 환산하여 비교하였다. 비례추론 과제의 세 가지 분류기준인 비의 속성, 구체적 수치, 비교 기준을 변수로 하여 사용 전략의 경향성 및 특징을 살펴보면 다음과 같다.

가. 비의 속성 변수

먼저 구체적 수치 기준과 비교 기준이 동일한 양적, 비교 유형인 〈과제1〉, 〈과제4〉, 〈과제7〉에서 사용한 전략의 비율은 〈표 6〉과 같다. 서로 같은 양의 곱셈적 비교 속성의 〈과제1〉에서는 전체-부분전략(40.0%)과 분수 비의 조작 전략(38.7%)이 가장 선호된 반면에 서로 다른 양의 합성 속성의 〈과제4〉에서는 분수비의 조작 전략(73.1%)이 압도적으로 사용되었으며, 단위비율 전략(13.4%)과 조정 전략(13.4%)이 그 뒤를 따랐다. 반

<표 6> 양적-비교 과제의 전략(단위:%)

과제 / 전략유형	과제1 곱셈-양적-비교	과제4 합성-양적-비교	과제7 확대-양적-비교
모델링 전략	9.3		
단위비율 전략	5.3	13.4	2.1
조정 전략	6.7	13.4	10.3
전체-부분 전략	40.0		
인수전략			18.3
비례식			20.4
분수 비의 조작	38.7	73.1	49.0

면에 기하 맥락의 확대·축소 속성의 <과제7>에서는 분수 비의 조작 전략(49.0%), 비례식(20.4%), 인수전략(18.3%), 조정 전략(10.3%) 순으로 사용되었다.

구체적 수치 기준과 비교 기준을 고정하고 비의 속성을 변수로 하여 비례추론 전략을 살펴본 결과, 내적비 과제와 확대·축소 과제가 외적비 과제에 비해 좀 더 다양한 전략이 사용가능하다는 것을 관찰할 수 있었다. 특히 동일한 속성의 양에 대해 곱셈적 관계를 다루는 유형에서 모델링 전략, 전체-부분전략을 포함한 비형식적, 양적 추론 전략들이 사용되었다. 인수 전략 또한 충분히 사용가능한 전략임에도 <과제1>에서 사례가 없었던 것은 주어진 수치 2와 3, 3과 4가 정수배의 관계가 아니었기 때문으로 짐작할 수 있다. 반면에 <과제 7>에서 또한 정수배 관계가 아니었음에도 인수 전략이 사용된 것은 문제 속의 '확대' 라는 용어가 '~는 ~의 몇 배' 라는 관계를 쉽게 연상하도록 작용한 것으로 볼 수 있다. '확대' 라는 용어는 최소공배수를 떠올리게 한 조정 전략과 두 비의 상등이 성립하지 않음을 비례식으로 설명한 비례식 전략에도 영향을 미친 것으로 보인다. <표 6>의 세 과제에서 모두 사용된 전략은 분수 비의 조작 전략과 단위비율 전략, 조정 전략이다. 이 세 가지 전략은 비의 속성에 관계없이 양적, 비교 과제에서 선호되는 전략이라고 말할 수 있다.

다음 <표 7>은 질적, 비교 유형인 <과제2>와 <과제5>에서 사용한 전략을, <표 8>은 양적, 미지값 유형인 <과제3>과 <과제6>에서 사용한 전략을 백분율로 정리한 것이다.

<표 7> 질적-비교 과제의 전략(단위:%)

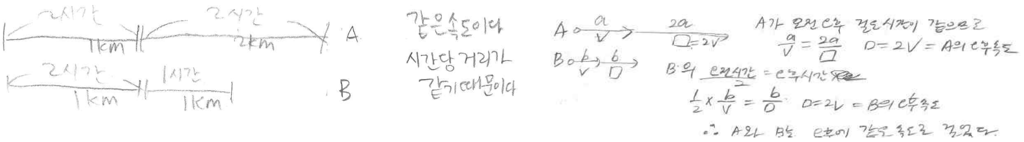
과제 / 전략유형	과제2 곱셈-질적-비교	과제5 합성-질적-비교
모델링 전략	3.2	
질적비교 전략	64.5	20.9
비례식		7.0
분수 비의 조작	32.3	72.2

<표 8> 양적-미지값 과제의 전략(단위:%)

과제 / 전략유형	과제3 합성-양적-미지값	과제6 확대-양적-미지값
세기 전략	0.7	
모델링 전략	6.6	
합성단위 전략	2.2	
구성전략	1.4	
단위비율 전략	27.5	8.8
인수전략	20.3	4.4
비례식	34.1	82.5
분수 비의 조작	7.3	4.4

구체적 수치 기준을 질적 상황으로, 비교 기준을 비교 상황으로 고정하고 비의 속성을 변수로 하여 비례추론 전략을 살펴보면, 같은 양을 곱셈적으로 비교하는 <과제2>에서는 질적 비교 전략이 64.5%), 분수 비의 조작 전략이 32.3%로 나타난 반면에, 서로 다른 양의 합성 속성의 <과제5>에서는 선호도의 순서가 바뀌어 분수비의 조작 전략이 58.1%, 질적 비교 전략이 20.9%로 조사되었다. 동일한 질적 과제임에도 선호 전략에 차이를 보이는 것은 비의 속성과도 관련이 있다. 두 양의 곱셈적 비교가 가능한 <과제2>에서는 '레모네이드 주스의 양은 줄고, 물의 양이 늘었으므로 전체적인 진하기는 약해진다' 라는 질적 전략이 보다 자연스러운 반면에 시간과 거리라는 서로 다른 양을 합성해야 하는 <과제5>에서는 보다 형식적 수준의 전략을 필요로 하는 듯하다. 더군다나 <과제5>의 맥락이 속력이라는 사실은 이러한 경향을 심화시킨 듯하다. 질적 과제임에도 불구하고 [그림 7]의 S2와 같이 주어진 거리와 시간을 a, v, s, t 등의 문자로 나타내거나, [그림 7]의 S62와 같이 구

체적 수치로 가정한 다음 '속력$=\frac{거리}{시간}$' 공식을 이용하여 양적으로 추론하였다. 예비교사들은 '단위 시간당 거리'로서의 속력 개념보다는 '속력$=\frac{거리}{시간}$'라는 형식화된 공식에 고착된 모습을 보였다고 할 수 있으며, 이로 인해 다양한 비형식적 전략을 발견할 기회를 갖지 못한 것이다.



[그림 7] 질적 과제에서 양적으로 추론하는 S62와 S2의 사례

구체적 수치 기준을 양적 상황으로, 비교 기준을 미지값 상황으로 고정하고 비의 속성을 변수로 하여 비례추론 전략을 살펴보면, 서로 다른 양을 합성하는 속성인 〈과제3〉에서는 비례식 전략(34.1%), 단위비율 전략(27.5%), 인수 전략(20.3%)이 주로 사용되었다는 것과 확대·축소 속성의 〈과제6〉에서는 비례식 전략이 압도적으로 사용되고 그 외에 단위비율 전략과 인수 전략이 소수 사례로 사용되었음을 알 수 있다. 이미 1절에서 언급한 바와 같이, 〈과제6〉은 양의 속성만 다른 〈과제 3〉의 정답률과도 큰 차이를 보였다. 이로부터 세 개 이상의 비, 주어진 수치가 간단한 자연수가 아닌 소수 또는 큰 수인 조건은 예비교사들의 과제성공률에 영향을 미친다는 것을 다시 한번 확인할 수 있다. 마찬가지로 〈과제3〉과 〈과제6〉의 사용 전략의 차이는 비의 속성보다는 문제의 복잡성 요인에 기인한다고 판단하였다.

나. 구체적 수치 변수

구체적 수치 기준을 변수로 예비교사들이 비례추론 전략의 집중과 간과 현상을 살펴보기 위하여 비의 속성 기준과 비교 기준을 고정한 〈과제1〉과 〈과제2〉, 〈과제4〉와 〈과제5〉를 상호 비교하였다. 내적비에 대한 비교 유형으로, 양적 과제인 〈과제1〉과 질적 과제인 〈과제2〉에 대한 사용 전략은 〈표 9〉에, 외적비에 대한 비교 유형으로, 양적 과제인 〈과제4〉와 질적 과제인 〈과제5〉에 대한 사용 전략은 〈표 10〉에 나타내었다.

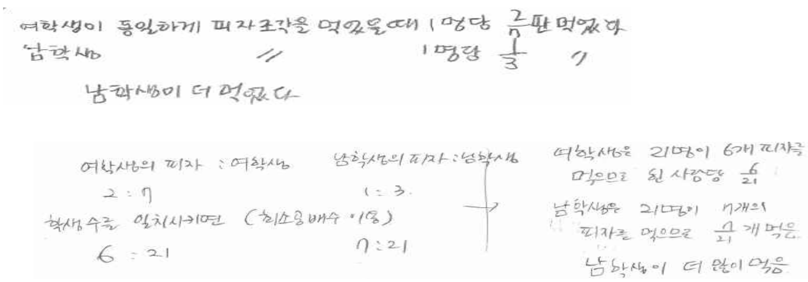
<표 9> 곱셈적 비교 속성의 비교 과제의 전략(단위:%)

과제 / 전략유형	과제1 곱셈-양적-비교	과제2 곱셈-질적-비교
모델링 전략	9.3	3.2
질적비교 전략		64.5
단위비율 전략	5.3	
조정 전략	6.7	
전체-부분전략	40.0	
분수 비의 조작	38.7	32.3

<표 10> 두 양의 합성 속성의 비교 과제의 전략(단위:%)

과제 / 전략유형	과제4 합성-양적-비교	과제5 합성-질적-비교
질적비교 전략		20.9
단위비율 전략	13.4	
조정 전략	13.4	
비례식		7.0
분수 비의 조작	73.1	72.2

<표 9>와 <표 10>을 종합하면, 내적비를 비교하는 과제와 외적비를 비교하는 과제에서 양적, 질적 요소는 사용전략을 선택하는데 영향을 미치고 있음을 확인할 수 있다. <과제1>과 <과제2>은 대체적으로 분수비의 조작 전략이 선호되고 있다는 공통점이 있으나, 양적 유형인 <과제1>에서는 양적 추론 전략인 전체-부분 전략(40.0%)을 비롯한 단위비율 전략과 조정 전략을 찾아볼 수 있다. 반면에 질적 유형인 <과제2>에서는 이러한 양적 추론 전략을 찾아보기 힘들며, 정확한 수치 없이 주어진 양의 변화의 방향을 어림으로 짐작하는 질적 비교 전략에 집중되어 있다. 분수비의 조작 전략의 경우에도 농도의 공식을 적용하여 용질과 용액의 비를 분수로 표현하고 변화의 방향을 추론했다는 점에서 형식적 전략으로 분류하였지만, 부분적으로는 질적 추론이 반영되어 있다고 볼 수 있다. 외적비를 다루는 <과제4>와 <과제5>의 관계도 이와 유사하다. 양적 유형인 <과제4>에서는 형식적 전략인 분수 비 조작 전략(73.1%)이 가장 비율이 높긴 하지만, 양적 추론 전략인 단위 비율 조작과 조정 전략도 찾아볼 수 있다. 반면에 질적 유형인 <과제5>에서는 단위비율 전략을 비롯한 다른 양적 추론 전략들이 나타나지 않는다. 따라서 양적, 질적 과제로 분류하는 기준인 구체적 수치 변수는 비의 속성에 관계없이 예비교사들이 사용하는 비례추론 전략을 영향을 미친다고 볼 수 있다.



[그림 8] <과제4>에서 단위비율 전략 사례(S68)와 조정 전략 사례(S9)

다. 비교 변수

비교 기준을 변수로 예비교사들이 비례추론 전략의 특징을 살펴보기 위하여 비의 속성 기준과 구체적 수치 기준을 고정한 <과제3>과 <과제4>, <과제6>과 <과제7>의 사용 전략을 비교하였다. <표 11>은 외적비 속성의 양적 유형으로, 미지값 과제인 <과제3>과 비교 과제인 <과제4>에서 사용한 전략을 비교한 것이고, <표 12>는 확대·축소 속성의 양적 유형으로, 미지값 과제인 <과제6>과 비교 과제인 <과제7>에서 사용한 전략을 비교한 것이다.

<표 11> 두 양의 합성 속성의 양적 과제의 전략(단위:%)

과제 / 전략유형	과제3 합성-양적-미지값	과제4 합성-양적-비교
세기 전략	0.7	
모델링 전략	6.6	
합성단위 전략	2.2	
구성전략	1.4	
단위비율 전략	27.5	13.4
조정 전략		13.4
인수전략	20.3	
비례식	34.1	
분수 비의 조작	7.3	73.1

<표 12> 확대・축소 속성의 양적 과제의 전략(단위:%)

과제 / 전략유형	과제6 확대-양적-미지값	과제7 확대-양적-비교
단위비율 전략	8.8	2.1
조정 전략		10.3
인수전략	4.4	18.3
비례식	82.5	20.4
분수 비의 조작	4.4	49.0

〈표 11〉을 보면, 비교 기준은 예비교사들이 비례추론과정에서 사용하는 전략에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 두 과제 모두 외적비의 양적 관계를 파악한다는 공통점을 지녔지만, 과제 해결과정에서 나타난 전략에서는 큰 차이가 있었다. 미지값 유형인 〈과제3〉에서는 비례식 전략(34.1%)에 못지않게 단위 비율 전략(27.5%)과 인수전략(20.3%)이 사용되었으나 비교 유형인 〈과제4〉에서는 형식적 수준의 분수 비 조작 전략에 집중되는 현상이 나타났다. 특이한 점은 미지값 유형에서의 집중 전략인 비례식 전략과 인수 전략을 찾아볼 수 없었다는 것이다. 이는 미지값을 구하는 상황에서 유용한 전략인 비례식을 사용하기에는 비교 상황이 다소 자연스럽지 못하다는 것을 의미한다. 기하적 맥락에서 미지값을 구하는 〈과제6〉에서는 비의 속성만 다른 〈과제3〉에 비해 비례식 전략에 집중되는 현상이 심하게 나타났다(〈표 12〉 참조). 이는 비의 속성에 따른 차이라기보다는 〈과제6〉의 문제구성요소의 복잡성에 기인한 것으로 보인다. 이미 언급한 바 있지만, 동시에 세 개의 비를 따져야 하는 복잡한 상황에서 예비교사들은 좀 더 익숙하고 성공률이 높은 형식적 전략을 선택했을 가능성이 있다. 같은 확대·축소 속성의 비교 유형인 〈과제7〉에서는 〈과제6〉과 비교하여 비례식 전략의 비율이 확연히 줄고 비교 유형에 보다 적합한 분수비의 조작 전략을 사용하고 있다. 또한 양적 추론 전략으로 인수 전략과 조정 전략이 사용되고 있는데, 이는 같은 양적 비교 유형인 〈과제4〉에서 인수 전략이 사용되지 않았던 것과 대조가 된다. 이 또한 이미 지적한 바와 같이, 인수 전략에는 두 양이 서로 정수배 관계라는 것이 사용 조건으로 작용하며, 비록 정수배 조건이 성립하지 않더라도 문제에 포함된 '확대' 라는 용어가 유리수배를 연상토록 하는 장치가 된다. 〈과제7〉에서 단위비율 전략의 비중이 줄어든 것도 제시된 수치의 복잡성과 무관하지 않다.

요컨대 미지값, 비교 과제로 분류하는 기준인 비교 변수는 예비교사들이 사용하는 비례추론 전략에 영향을 미친다고 볼 수 있다. 미지값 과제에서는 주로 비례식 전략 뿐 아니라 단위비율 전략과 인수 전략 등의 다양한 양적 추론이 가능한 반면에, 비교 과제에서는 비례식 보다는 분수 비의 대각선 곱이라는 형식적 전략이 더 자연스럽고, 조정 전략이 보조적으로 사용될 수 있다. 그러나 인수 전략과 단위비율 전략은 제시된 수치에 영향을 받으

며, 확대·축소 속성은 특정 언어의 연상 작용으로 인하여 인수 전략의 사용 빈도를 높이는 역할을 한다고 말할 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 연구는 비례추론 과제에 대한 초등예비교사들의 반응을 분석함으로써 예비교사들의 비례추론 과제에 대한 이해 정도를 살펴보고, 비례추론 전략에 따른 비례추론 과제의 적합도와 비례추론 과제에 따른 전략의 특징을 살펴보았다. 지금까지의 연구 결과를 종합하여 예비교사교육에서의 비례추론 지도에 대해서 다음과 같은 시사점을 도출할 수 있다.

첫째, 예비교사 교육에서 실제적이고 다양한 비례추론 과제들을 접할 수 기회를 제공할 필요가 있다. Ben-Chaim et al.(2007)과 Lobato & Ellis(2010)는 다양한 비례추론 과제 수행이 학생들의 비례추론 능력을 신장시킨다고 주장한 바 있다. 본 연구에서는 선행연구 분석을 바탕으로 비례추론 과제의 분류기준을 설정하고, 이에 따라 과제 유형을 제시하였다. 분류 기준으로 정영옥(2015)의 구체적 수치 기준과 비교 기준을 수용하였으며, Freudenthal(1983)의 비 개념과 Lobato & Ellis(2010)의 비에 대한 필수적 이해를 수용하여 비의 속성 기준을 추가하여 설정하였다. 이로써 비례추론 과제 유형은 비의 속성 기준에 의해 곱셈적 비교 속성, 두 양의 합성 속성, 확대·축소 속성 유형으로, 구체적 수치 기준에 의해 양적, 질적 유형으로, 비교 기준에 의해 미지값, 비교 유형으로 구분 가능하였다. 정영옥(2015)은 우리나라 교육과정에서의 비례추론 과제 유형이 양적 추론만을 다루고 있으며, 대수 과제가 대부분이고 비교 과제보다는 미지값 과제의 비중이 크다는 것을 지적한다. 예비교사 프로그램에서 다양한 유형의 비례추론 과제를 다루는 경험은 학생들에게 다양한 유형의 비례추론 과제를 지도할 수 있는 교사지식을 제공할 것이라고 기대할 수 있다.

둘째, 예비교사들이 양적 관계에 대한 의식적인 분석을 행할 수 있는 경험을 제공해야 한다. 이번 조사에서 가장 정답률이 낮았던 문항은 非비례상황으로 구성된 과제였다. 예비교사들의 정답률은 26.4%에 불과했으며, 非비례상황을 비례관계로 오인한 학생들의 비율이 약 34%였던 안숙현·방정숙(2008)의 연구와 비교하면 약 2배의 오답률을 보인 셈이다. 검사도구의 맥락이 대표적인 외적비 사례인 속력이었던 원인도 작용했지만, 상당수의 예비교사들이 양 사이의 관계를 양적으로 따져보는 단계를 간과한 채 당연히 비례관계라는 성급한 결론에 이르고 있다는 것이 관찰되었다. 예비교사들의 비례적 추론을 방해하는 요소가 오히려 자동화된 형식적 비례식에 있다는 것을 경계하여, 덧셈적 관계와 곱셈적 관계 등 다양한 양적 관계가 내포된 문제 상황을 제시하는 것도 좋은 방안일 것이라고 본다.

셋째, 예비교사들이 미흡한 이해를 보이는 특정 과제 유형들이 존재한다는 것을 확인한 바, 향후 효과적인 비례추론 지도를 위해서는 이에 대한 보완이 필요하다. 본 연구 결과에 의하면, 비의 속성 기준에서는 내적비의 곱셈적 관계 유형에 대한 평균정답률이 가장 높았으며, 외적비의 두 양의 합성 유형, 기하 맥락의 확대·축소 유형 순으로 조사되었다. 구체적 수치 기준에서는 양적 과제가 질적 과제보다, 비교 기준에서는 미지값 과제가 비교 과제보다 정답률이 높았다. 뿐만 아니라 예비교사들은 세 개 이상의 비의 상등을 추론하는 과제에서 양 사이에 성립하는 일정한 곱셈적 관계를 파악하는 것에 이해 정도가 부족하고, 주어진 수치가 간단한 자연수가 아닌 소수 또는 큰 수로 주어지는 과제에서 계산

의 정확도가 떨어지는 것으로 조사되었다. 따라서 외적비와 기하 맥락의 비, 질적 과제, 비교 과제, 복합적 양을 포함한 과제, 복잡한 수치가 제시된 과제에 대한 비례추론 능력을 보완할 수 있는 학습경험이 요청된다.

넷째, 예비교사들이 다양한 비례추론 전략들을 분류하고 탐구하도록 해야 하며, 비례추론 문제해결과정에서 의도적으로 형식적 전략이 아닌 다양한 비형식적 전략들을 사용하도록 권장할 필요가 있다. 분석 결과, 예비교사들이 사용한 전략은 비형식적 수준에서의 세기 전략, 모델링 전략, 질적 비교 전략과 양적 추론 수준에서의 합성 단위 전략, 구성 전략, 단위비율 전략, 조정 전략, 전체-부분 전략, 인수 전략, 그리고 형식적 수준에서의 비례식 전략과 분수 비의 조작 전략 등 총 11개에 이르렀지만, 과제에 따라 특정 전략에 집중되었으며, 양적 추론과 비형식적 전략을 사용한 사례가 한두 건에 불과한 과제도 다수 존재하였다. 이미 비례식과 분수 비의 대각선 곱이라는 알고리즘이 내면화되고 자동화된 예비교사들이 다른 비례추론 전략을 선택하지 못하는 경직된 모습이 이번 조사에서 관찰된 것이다. Lobato & Ellis(2010)도 지적했듯이, 비례식과 같은 형식적 전략의 사용은 비례적 추론의 충분한 증거가 되지 못한다. 자동화된 기계적 알고리즘에는 양 사이의 관계에 대한 의식적인 분석이 결여될 확률이 높기 때문이다. 비례추론 능력의 발달은 오히려 비형식적 추론 전략을 포함한 다양한 비례추론 전략의 유연성에 있으므로, 예비교사 교육프로그램을 통해 다양한 비례추론 전략에 대한 의식적인 분석을 바탕으로 비례추론에 대한 유연성을 증진시킬 필요가 있다.

다섯째, 예비교사들이 각각의 비례추론 전략에 적합한 과제 유형을 파악하도록 하는 교육프로그램이 요청된다. 전략별로 과제에 대한 적합도를 살펴본 결과, 양적 추론 수준의 전략 중에서 가장 광범위하게 사용된 전략은 단위비율 전략이었으며, 조정 전략은 양적 비교 과제에서, 인수 전략은 양적 과제에서 유용하게 사용되고 있었다. 특히, 인수 전략은 주어진 수치가 정수배의 관계인 경우에 사용빈도가 높았으며, ‘확대’라는 용어가 포함된 확대·축소 과제에서는 정수배 여부에 관계없이 쉽게 연상되고 있었다. 또한 분수 비의 조작 전략과 단위비율 전략, 조정 전략은 비의 속성에 관계없이 양적, 비교 과제에서 선호되는 전략이었다. 이와 같이 양적 추론 전략을 포함한 다양한 비례추론 전략이 효율적으로 작동할 수 있는 과제 유형을 연결시키는 학습경험은 예비교사들의 비례추론 지도를 위한 교사지식을 보다 풍부하게 할 것으로 본다.

여섯째, 예비교사들이 각각의 비례추론 과제에 보다 유용하고 사용가능한 비례추론 전략을 파악하도록 하는 학습경험을 제공할 필요가 있다. 과제에 따른 사용 전략의 특징을 분석한 결과, 내적비 과제와 확대·축소 과제가 외적비 과제에 비해 좀 더 다양한 전략이 사용되고 있었지만, 특정 과제에 특정 전략이 선호되는 경향을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 동일한 속성의 양에 대해 곱셈적 관계를 다루는 양적 비교 과제에서는 모델링 전략, 전체-부분전략을 포함한 비형식적, 양적 추론 전략들이 사용되었으며, 외적비의 양적 비교 과제에서는 형식적 전략인 분수 비 조작 전략에 집중 현상이 관찰되었고, 기타 전략으로 양적 추론 전략인 단위 비율 조작과 조정 전략도 찾아볼 수 있었다. 반면에 질적 과제에서는 단위비율 전략을 비롯한 다른 양적 추론 전략들을 찾아보기 어려웠다. 또한 양적, 질적 과제로 분류하는 기준인 구체적 수치 변수는 비의 속성에 관계없이 예비교사들이 사용하는 비례추론 전략을 영향을 미쳤으며, 미지값, 비교 과제로 분류하는 기준인 비교 변수 또한 비례추론 전략에 영향을 미치는 것으로 조사되었다. 예를 들어, 미지값 과제에서는 주로 비례식 전략 뿐 아니라 단위비율 전략과 인수 전략 등의 다양한 양적 추론이 가능한 반면에, 비교 과제에서는 비례식 보다는 분수 비의 대각선 곱이라는 형식적 전략이 더 자

연스럽게 사용될 수 있다. 이와 같이 비례추론 과제의 분류 기준에 따라 보다 효율적인 비례추론 전략을 판단하고 사용가능한 모든 전략들을 탐색하는 과정은 예비교사들의 비례추론 능력을 신장시키고 이에 감각을 증진시키는데 기여할 것으로 생각된다.

이상은 본 연구 결과로부터 도출한 예비교사교육에의 시사점이라고 할 수 있다. 그런데 비례추론과 관련한 교사지식의 범주에는 중요한 측면이 남아있다. 바로 초등학생들의 비례적 사고의 특징, 사용하는 비례추론 전략, 비례추론과정에서의 오개념과 오류 등 비례추론에 대한 학생들의 이해에 대한 지식이다. 이미 살펴본 바와 같이, 예비교사를 대상으로 한 본 연구 결과가 초등학생들을 대상으로 한 기존의 선행연구 결과와 차이를 보이는 항목이 있음을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 정유경· 정영옥(2015)의 연구에서는 6학년 학생들이 사용한 비례추론전략이 양적 추론 수준이 66.2%, 형식적 추론 수준이 16.8%, 비형식적 추론 수준이 15.6%로 조사되었지만, 본 연구에서는 형식적 추론 수준이 53.9%, 양적 추론 수준이 28.4%, 비형식적 추론 수준이 17.7%로 조사되었다. 또한 정유경·정영옥은 6학년 학생들의 사용 전략에 대한 선호도가 인수 전략, 단위비율 전략, 비례식 전략, 질적 비교 전략 순이라고 하였지만, 본 연구에서는 분수 비의 대각선 곱 전략, 비례식 전략, 질적 비교 전략, 단위비율 전략, 전체-부분 전략, 인수 전략, 모델링 전략, 조정 전략 순으로 조사되었다. 이와 같이 초등학생들과 예비교사들의 비례추론 방식이 차이가 있을 가능성이 높으므로, 학생들의 비례추론능력은 어떤 단계를 거쳐 발달되는지, 양적 관계를 어떤 전략으로 파악하는지, 선호하는 비례추론 전략은 무엇인지, 비례추론과정에서 어떤 오개념을 가지고 어떤 오류를 발생시키는지 등 비례추론에 대한 학생들의 이해에 대한 지식을 추가적으로 강화하는 것이 필요할 것이다.

본 연구는 비례추론 과제에 대한 초등예비교사들의 반응 중에서 정답 유형에 한하여 분석을 수행했다는 제한점을 가진다. 앞으로 교사지식 차원에서 비례추론에 대한 오류와 어려움을 살펴보는 연구가 이루어질 필요가 있으며, 학생들의 비례추론에 대한 학습의 어려움을 개선하는 다양한 연구가 이루어질 기대한다.

참 고 문 헌

권미숙, 김남균 (2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 211-229.

고은성, 이경화 (2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구, 17**(4), 359-380.

박지연, 김성준 (2016). 초등학교 6학년 학생들의 비례 추론 능력 분석 - '비교' 상황을 중심으로. **한국초등수학교육학회지, 20**(1), 105-129.

안숙현, 방정숙 (2008). 5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구, 18**(1), 103-121.

정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. **수학교육학연구, 25**(1), 21-58.

정유경, 정영옥 (2015). 초등학생들의 비례추론 전략 분석 - 6학년을 중심으로. **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 457-484.

정은실 (2013). 초등학교 수학교과서에서의 비례추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 333-340.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). NY: Macmillan.

Ekawati, R., Lin, F. & Yang, K. (2015). Primary teachers' knowledge for teaching ratio and proportion in Mathematics: The case of Indonesia. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(3), 513-533.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hull, L.S.H. (2000). *Teachers' mathematical understanding of proportionality: Links to curriculum, professional development, and support*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas at Austin, Austin, TX.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg(Eds.), *Rational Numbers An Integration of Research* (pp. 131-156). New Jersey, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 254-261.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning. In R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential understandings*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Lobato, J., Orrill, C., Druken, B., & Jacobson, E. (2011). Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching. In Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), ew Orleans, LA. Abstract retrieved from http://www. kaputcenter. umassd. edu/ downloads products/workshops/AERA2011/Lobato_Orrill_Druk en_Erikson_AERA_2011. pdf.

Nabors, W. K. (2003). From fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 133-179.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The Idea of Algebra K-12* (1988 Yearbook, pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 472-494.

Van de Walle, J. A. (2008). **수학을 어떻게 가르칠 것인가.** (남승인 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2004년 출판).

<Abstract>

Proportional Reasoning Strategy of Pre-service Elementary Teachers

Choi, Eunah[2)]

In this study, I hoped to reveal the understanding of pre-service elementary teachers about proportional reasoning and the traits of proportional reasoning strategy used by pre-service elementary teachers. The results of this study are as follows. Pre-service elementary teachers should deal with various proportional reasoning tasks and make a conscious effort to analyze proportional reasoning task and investigate various proportional reasoning strategies through teacher education program. It is necessary that pre-service elementary teachers supplement the lacking tasks such as qualitative reasoning and distinction between proportional situation and non-proportional situation. Finally, It is suggested to preform the future research on teachers' errors and mis-conceptions of proportional reasoning.

Key Words: proportional reasoning, proportional reasoning task, proportional reasoning strategy, attribute of ratio, quantitative reasoning, qualitative reasoning, pre-service teacher education

논문접수: 2016. 10. 15
논문심사: 2016. 11. 16
게재확정: 2016. 11. 25

2) eunachoi@woosuk.ac.kr