한국초등수학교육학회지 20(4) 521-539. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 20(4) 521-539.
2016. 11. 30 November 30. 2016.

분수 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성

임재훈[1]

피제수와 제수가 분수인 나눗셈에서, 포함제는 공통분모 알고리즘과 등분제는 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 대응한다고 여겨져 왔다. 분수 나눗셈 학습 지도에서 이와 같은 이분법을 넘어서려는 시도가 있어 왔다. 이러한 시도에서 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 연결하는 방법으로는, 공통분모 알고리즘을 이용하는 방법, 1÷(제수)를 매개로 하는 방법, 제수 쪽의 양을 1이라고 가정하는 방법이 있다.
기존의 방법들에서 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 관련은 중간까지만 유지되거나 제수의 역수 곱하기 알고리즘이라는 최종 결과만 등분제와 공유한다. 이 논문에서는 기존 방법의 한계를 넘어, 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성을 새로운 관점에서 심층 논의한다. 포함제를 측정접근법과 동형접근법으로 해결하는 과정에서 등분제에서와 동일한 수식 변형 과정을 거쳐 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 유도될 수 있다. 이 연구의 결과는, 분수 나눗셈 계산법 학습 지도에 관한 이론적 논의의 장을 확장함과 더불어, 포함제와 등분제를 아우르는 분수 나눗셈의 통합 계산법 학습 지도 프로그램 개발에 국소 이론으로 사용될 수 있다.

주제어: 분수 나눗셈, 포함제, 등분제, 비례 추론, 제수의 역수 곱하기 알고리즘

Ⅰ. 서 론

동수누가 또는 배 맥락의 곱셈 a×b=c로부터 c÷a와 c÷b의 두 나눗셈을 얻는다. 전자는 피제수가 제수의 몇 배인지 구하는 나눗셈으로 포함제(포함나눗셈)라고 불린다. 후자는 제수 1에 대응하는 피제수 쪽의 양을 구하는 나눗셈으로 등분제(등분나눗셈)라고 불린다. 포함제는 같은 종류의 두 양의 나눗셈이고, 등분제는 다른 종류의 두 양의 나눗셈이다.

자연수 나눗셈에서 포함제와 등분제는 동수누감 조작이 바탕에 있다는 점에서 공통이다. 12÷3의 포함제는 사과를 3개씩 들어내어 한 묶음으로 놓아두는 조작으로, 등분제는 사과를 3개씩 들어내어 각 접시에 하나씩 놓는 조작으로 해결할 수 있다. 사과를 3개씩 들어내는 공통 조작은 포함제와 등분제를 동일한 나눗셈식 및 세로 계산 형식으로 통합하는 근거가 된다(강문봉, 2011, 임재훈, 2013).

자연수 나눗셈은 분수 나눗셈으로 확장된다. 분수 나눗셈은 초등 수학의 정점에 위치하

1) 경인교육대학교

는 내용으로, 인지적인 면과 교수학적인 면에서 그 어려움이 논의되어 왔다. 아동들은 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 같은 계산법들을 단순히 기계적인 절차로 흡수하는 경향이 있다(Okazaki and Koyama, 2005). 분수 나눗셈 계산법 학습이 기계적인 것이 되지 않게 하려면 나눗셈의 상황과 계산법의 연결이 중요하다(신준식, 2013).

자연수 나눗셈에서와 마찬가지로, 분수 나눗셈에서도 포함제와 등분제를 생각할 수 있다. 예를 들어 $\frac{7}{2}$m인 막대는 $\frac{4}{3}$m인 막대의 몇 배인가는 포함제($\frac{7}{2}$m$\div\frac{4}{3}$m) 상황이고, $\frac{4}{3}$m에 $\frac{7}{2}$kg인 파이프 1m의 무게는 몇 kg인가는 등분제($\frac{7}{2}$kg$\div\frac{4}{3}$m) 상황이다.[2] 포함제를 해결하는 과정에서 공통분모 알고리즘이 자연스럽게 출현한다(Perlwitz, 2004; Sharp & Adams, 2002; Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002; Tyminski & Dogbey, 2012; Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2009). 등분제는 제수의 역수를 곱하는 알고리즘과 자연스럽게 연결된다(조용진, 홍갑주, 2013; Gregg & Gregg, 2007; Siebert, 2002).

분수 나눗셈에 관한 선행 연구들을 보면, 포함제와 등분제에 대응하는 각각의 계산법 지도에 멈추지 않고, 포함제와 등분제를 아우르는 하나의 통합 계산 알고리즘을 지향하는 시도들이 있다. 여기서 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 어떻게 연결될 수 있는가가 중요한 이슈가 된다(교육부, 2015; 김흥회, 2014; 이지영, 2015).

이 연구의 목적은 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성에 관하여 기존 논의를 넘어서는 확장적 논의를 심층적으로 전개하는 것이다. 이 연구의 내용은 두 가지이다. 첫째, 분수 나눗셈에서 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결을 시도한 기존 방법의 특징과 한계를 분석한다. 둘째, 분수 포함제를 해결하는 서로 다른 두 접근법을 통해 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 어떻게 연결될 수 있는지 밝힌다. 이 연구는 포함제와 분수 나눗셈 계산 알고리즘에 대한 문헌 연구 및 개념적 분석으로 이루어진다. 연구 결과는 포함제와 제수의 역수 곱하기 계산법을 연결하려 한 기존 시도들의 한계와 포함제로부터 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 자연스럽게 유도될 수 있음을 보여준다.

Ⅱ. 포함제와 제수의 역수 곱하기 계산법을 연결하는 기존 시도 분석

포함제는 공통분모 알고리즘, 등분제는 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 자연스럽게 연결된다는 것에서 다음 두 가지를 생각할 수 있다. 하나는 각 상황에 대응하는 알고리즘을 각각 가르치는 것이다. 다른 하나는 (각 상황에 대응하는 알고리즘을 각각 가르치는 과정을 거쳐) 최종적으로 하나의 통합 알고리즘으로 마무리하는 것이다. 후자가 가능하려면 포함제와 등분제를 아우르는 알고리즘이 존재해야 한다. 이와 같은 알고리즘을 분수 나눗셈의 표준 알고리즘 또는 통합 알고리즘이라고 불러도 좋을 것이다. 포함제에서 유도되는 공통분모 알고리즘이 표준 알고리즘이 되려면, 등분제에서도 공통분모 알고리즘이 유도될 수 있어야 한다. 등분제로부터 유도되는 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 표준 알고리즘이 되려면, 포함제에서도 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 유도될 수 있어야 한다.

2) 포함제와 등분제는 여러 가지 방식으로 정의될 수 있다(강흥규, 2014). 제수가 자연수일 때는 등분이라는 말이 어울리지만 분수일 때는 어울리지 않는다고 보고, 1단위에 해당하는 양을 구하는 상황이라는 등분제의 구조적 특징에 주목하여 단위비율 결정 맥락이라고 부르기도 한다. 이 논문에서는 제수 1에 해당하는 양을 구하는 것을 등분제의 구조적 본질로 보고, 등분제와 단위비율 결정 맥락을 구분하지 않고 등분제로 통칭한다.

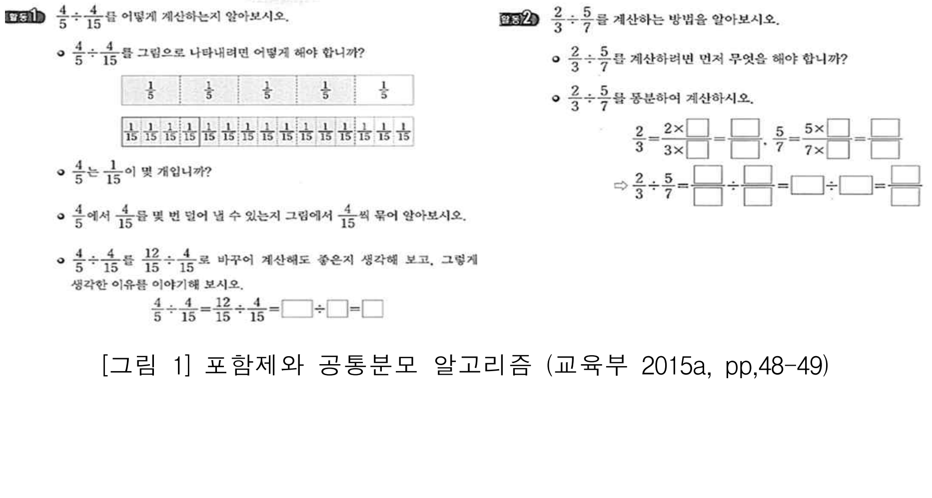
분수 나눗셈에 관한 선행 연구들을 보면, 두 알고리즘 중 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 표준 알고리즘으로 삼는다(김홍희, 2015; 박교식, 2014; 이지영, 2015). 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 표준 알고리즘으로 삼는 이유가 드러나게 서술되어 있지는 않지만, 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 지닌 계산의 효율성이 고려되었을 것이다. 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 사용하면 통분 절차가 생략되므로 공통분모 알고리즘보다 빨리 답을 구할 수 있다.

등분제에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘은 다음과 같이 유도된다. $\frac{4}{3}$m에 $\frac{7}{2}$kg인 파이프 1m의 무게를 구할 때, 길이가 $\frac{4}{3}$m에서 1m로 원래의 $\frac{3}{4}$이 되면 무게도 $\frac{7}{2}$kg의 $\frac{3}{4}$이 된다. 이로부터 $\frac{7}{2}\div\frac{4}{3}=(\frac{7}{2}\times\frac{3}{4})\div(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4})=(\frac{7}{2}\times\frac{3}{4})\div 1=\frac{7}{2}\times\frac{3}{4}$을 얻는다. 등분제 $\frac{7}{2}\div\frac{4}{3}$의 풀이 과정은 $\frac{7}{2}\div\frac{4}{3}$를 □÷1로 변환하는 과정이며, 이때 제수의 역수 $\frac{3}{4}$은 $\frac{4}{3}$를 1로 바꾸는 연산자이다(Siebert, 2002).

분수 나눗셈의 통합 알고리즘의 성립 가능성과 관련하여, 등분제에서 유도된 제수의 역수 곱하기 알고리즘 $\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$와 그 유도 과정 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1$이 포함제에서 어떤 의미를 지닐 수 있는가가 문제이다. 다음에서는 선행연구에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 포함제를 연결한 시도를 공통분모 알고리즘을 이용하는 방법, 1÷(제수)를 매개로 하는 방법, 제수 쪽의 양을 1이라고 가정하는 방법으로 나누어, 각 방법의 특징과 한계를 알고리즘 유도 과정에 초점을 맞추어 논한다.

1. 공통분모 알고리즘을 이용하는 방법

제수의 역수 곱하기 알고리즘은 공통분모 알고리즘에 곱셈의 교환법칙을 적용하여 유도될 수 있다. 이것은 우리나라 교과서에서 취해 온 방식이다(교육인적자원부, 2002; 교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015a). 2009 개정 교육과정에 따른 수학 6-1 교과서에서 이분모 분수의 나눗셈은 지팡이 한 개를 만들기 위해서는 참나무 $\frac{4}{15}m$가 필요할 때 참나무 $\frac{4}{5}m$로 만들 수 있는 지팡이의 개수를 알아보는 포함제 상황으로 시작된다. [그림 1]과 같이 $\frac{4}{5}$에서 $\frac{4}{15}$를 몇 번 덜어낼 수 있는지 알아보면서 공통분모 알고리즘이 등장한다.


활동1 $\frac{4}{5}\div\frac{4}{15}$를 어떻게 계산하는지 알아보시오.

- $\frac{4}{5}\div\frac{4}{15}$를 그림으로 나타내려면 어떻게 해야 합니까?

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

- $\frac{4}{5}$는 $\frac{1}{15}$이 몇 개입니까?
- $\frac{4}{5}$에서 $\frac{4}{15}$를 몇 번 덜어 낼 수 있는지 그림에서 $\frac{4}{15}$씩 묶어 알아보시오.
- $\frac{4}{5}\div\frac{4}{15}$를 $\frac{12}{15}\div\frac{4}{15}$로 바꾸어 계산해도 좋은지 생각해 보고, 그렇게 생각한 이유를 이야기해 보시오.

$\frac{4}{5}\div\frac{4}{15}=\frac{12}{15}\div\frac{4}{15}=\square\div\square=\square$

활동2 $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$를 계산하는 방법을 알아보시오.

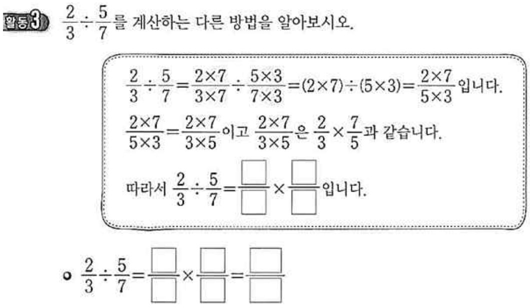
- $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$를 계산하려면 먼저 무엇을 해야 합니까?
- $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$를 통분하여 계산하시오.

$\frac{2}{3}=\frac{2\times\square}{3\times\square}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{5}{7}=\frac{5\times\square}{7\times\square}=\frac{\square}{\square}$

⇨ $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{\square}{\square}\div\frac{\square}{\square}=\square\div\square=\frac{\square}{\square}$

[그림 1] 포함제와 공통분모 알고리즘 (교육부 2015a, pp,48-49)

공통분모 알고리즘 도입까지는 포함제 상황과 관련이 유지된다. 피제수와 제수의 분모가 다르면 피제수에서 제수를 몇 번 덜어낼 수 있는지 알기 어려우므로, 통분이 필요하고 공통분모 알고리즘이 자연스럽게 등장한다. [그림 2]의 활동3에서 첫 줄의 $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$에서 $\frac{2\times 7}{5\times 3}$에 이르는 수식이 이 과정을 나타낸다. 여기서 바로 2×7, 5×3을 계산하여 $\frac{14}{15}$라는 답을 얻을 수 있고, 이것으로 공통분모 알고리즘의 적용은 완성된다.



활동3 $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$를 계산하는 다른 방법을 알아보시오.

$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}\div\frac{5\times3}{7\times3}=(2\times7)\div(5\times3)=\frac{2\times7}{5\times3}$입니다.

$\frac{2\times7}{5\times3}=\frac{2\times7}{3\times5}$이고 $\frac{2\times7}{3\times5}$은 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$과 같습니다.

따라서 $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}$입니다.

- $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

[그림 2] 수학 교과서의 제수의 역수 곱하기 알고리즘 (교육부 2015a, p.49)

교과서에서는 공통분모 알고리즘에서 멈추지 않고 제수의 역수 곱하기 알고리즘으로 나아가기 위해 $\frac{2\times 7}{5\times 3}$을 $\frac{14}{15}$로 계산하지 않고, 여기에 곱셈의 교환법칙을 적용하여 $\frac{2\times 7}{3\times 5}$로 고쳐 쓴다. 그리고 분수 곱셈법을 거꾸로 적용하여 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$이라는 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 얻는다([그림 2]).

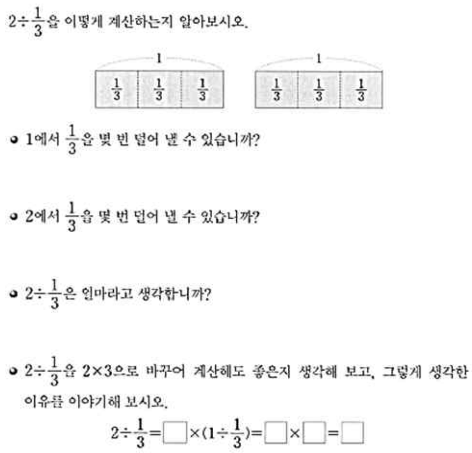
이와 같이 포함제 상황에서 공통분모 알고리즘을 도출하고 그것에 곱셈의 교환법칙을 적용하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 얻는 방법에서는 포함제에서 제수의 역수가 어떤 의미를 지니는지 전혀 드러나지 않는다. 이것은 포함제 상황과의 관련이 $\frac{2\times 7}{5\times 3}$에서 끝나기 때문이다. 이후에 곱셈의 교환법칙 적용 등의 수식 처리 과정에서 비로소 제수의 역수가 등장하는데, 이 과정은 포함제 상황과 관련 없이 이루어진다. 포함제 상황 자체에는 $\frac{2\times 7}{5\times 3}$을 굳이 $\frac{2\times 7}{3\times 5}$로 고쳐야 할 필연적 이유가 없다. 공통분모 알고리즘을 이용하는 방법에서 제수의 역수는 제수를 1로 바꾸는 과정에서 나온 것이 아니므로, 등분제에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 얻는 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1$의 수식 변형 과정은 여기서 의미를 지니지 않는다.

2. 1÷(제수)를 매개로 하는 방법

분수 나눗셈의 학습 경로에서 1÷(분수)는 중요한 역할을 할 수 있다(이지영, 2015). 예를 들어, (자연수)÷(분수)에서 $1\div\frac{2}{3}$를 해결한 후 피제수를 변화시키면서 제시된 양 사이의 관계를 파악할 수 있다([그림 3]). 우리나라 교과서에서도 1÷(제수)를 매개로 하여 (자연수)÷(분수)의 계산 방법을 유도하는 내용이 일부 있다. $2\div\frac{1}{3}$을, $1\div\frac{1}{3}$을 징검다리 삼아, $2\div\frac{1}{3}=2\times(1\div\frac{1}{3})=2\times 3=6$과 같이 해결한다([그림 4]).

[그림 3] $1 \div \frac{2}{3}$와 $2 \div \frac{2}{3}$

(이지영, 2015, p.232)



[그림 4] $2 \div \frac{1}{3}$과 $1 \div \frac{1}{3}$

(교육부 2015a, p.43)

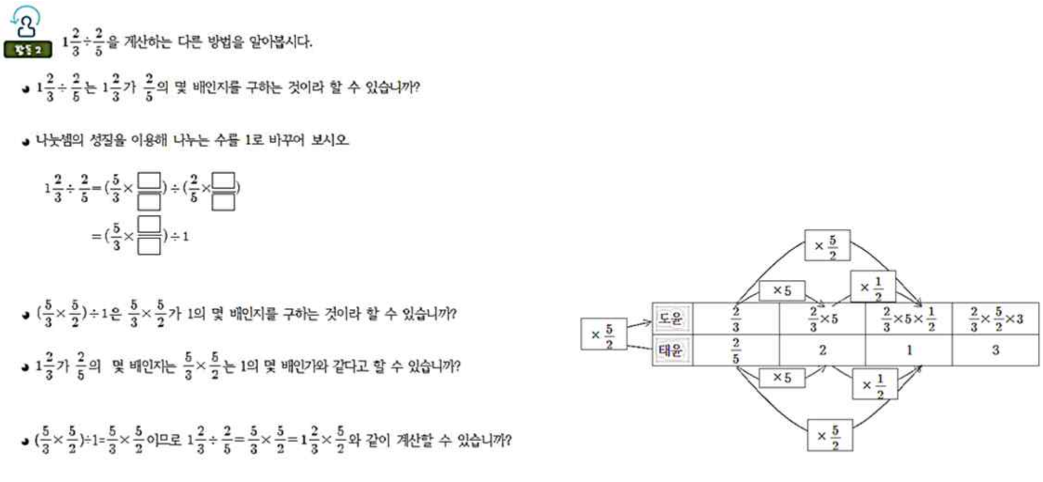
이지영(2015)의 분수 나눗셈 학습 경로와 우리나라 교과서에서 1÷(제수)의 역할은 (자연수)÷(분수)에서만 구체화되어 있지만, 1÷(제수)는 일반적인 (분수)÷(분수) 계산 알고리즘 유도에도 징검다리 역할을 할 수 있다. 예를 들어, 한 바퀴에 $\frac{2}{3}$km인 트랙을 $\frac{9}{5}$km 뛰었다면 트랙을 몇 바퀴 뛴 것인가라는 포함제 $\frac{9}{5} \div \frac{2}{3}$를 다음과 같이 해결할 수 있다. 1에는 $\frac{2}{3}$가 $\frac{3}{2}$번 들어가므로, 2에는 $\frac{2}{3}$가 1에 들어가는 횟수의 2배만큼 들어간다. 따라서 $2 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times 2$이다. 마찬가지로 $\frac{9}{5}$에는 $\frac{2}{3}$가 1에 들어가는 횟수의 $\frac{9}{5}$배만큼 들어가므로 $\frac{9}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{9}{5}$이다. 여기에 곱셈의 교환법칙을 적용하면 제수의 역수 곱하기 알고리즘 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$를 얻는다. 이 과정을 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다: $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (1 \div \frac{d}{c}) \times \frac{b}{a} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$.

이 방법은 길이가 1km에서 $\frac{9}{5}$km로 $\frac{9}{5}$배 늘어나면 횟수도 $\frac{9}{5}$배 늘어난다는 길이와 횟수 사이의 곱셈적 공변 관계에 바탕을 두고 있으며, $\frac{9}{5}$를 $\frac{2}{3}$로 한 번 두 번 반복 측정하여 몇 배인지 구하는 덧셈적인 방법에 비하여 효율적이다. 또 이 방법에서는 제수의 역수가 포함제 상황과 관련하여 지니고 있는 의미, 곧 제수의 역수가 1에 제수가 몇 번 들어가는지 또는 1이 제수의 몇 배인지를 뜻한다는 것이 잘 드러난다. 그러나 공통분모 알고리즘을 이용하는 방법과 마찬가지로, 제수의 역수 곱하기 알고리즘이라는 최종 결과만 등분제와 공유한다. 등분제에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘에 이르는 수식 변형 과정 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div (\frac{d}{c} \times \frac{c}{d}) = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div 1 = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$는 여전히 포함제와 무관한 상태로 있다.

3. 제수 쪽의 양을 1이라고 가정하는 방법

포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 연결하려는 세 번째 시도는 제수 쪽의 양을 1이라고 가정하는 방법이다. 김홍회(2014)는 등분제, 카테시안 곱의 역, 포함제 모두를 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 연결하여 지도하는 방안을 모색하였다. 카테시안 곱의 역은 직사각형의 넓이와 한 변의 길이가 주어졌을 때 다른 한 변의 길이를 구하는 상황으로, 등분제와 유사하게 상황 자체로부터 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 자연스럽게 출현한다(백수진, 2009). 그러므로 이러한 시도에서도 포함제를 어떻게 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 연결하는가가 주요 문제이다.

김홍회(2014)가 제안한 분수 나눗셈의 개념 이해를 위한 프로그램의 포함제 부분에서, 주스 $1\frac{2}{3}$L는 주스 $\frac{2}{5}$L의 몇 배인지 구하는 문제를 공통분모 알고리즘으로 해결한 후에, [그림 5](a)와 같이 나눗셈의 성질을 이용한 수식 계산에 의해 제수를 1로 변환한다. $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1$이라는 등분제와 동일한 수식 변형 과정을 거치므로, $\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$라는 최종 결과만 등분제와 공유하는 앞의 두 방법보다 높은 수준의 통합을 도모하고 있다. 그러나 [그림 5](a)의 공통분모 알고리즘에서 나눗셈의 성질을 이용하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘에 이르는 과정에서 포함제 상황과의 관련성이 드러나 있지 않다.



(a) (b)

[그림 5] (a) 나눗셈의 성질을 이용한 제수의 역수 곱하기 알고리즘 유도 (b) 나눗셈 비례표 (김홍회, 2014, pp.117, 21)

포함제에서 나눗셈의 성질을 이용하여 제수의 역수를 곱하는 수식 변형 과정은 비례 추론의 곱셈적 공변 관계 인식과 관련이 깊다. 예를 들어, '태윤이가 주스를 $\frac{2}{5}$L 가지고 있고 도윤이는 $\frac{2}{3}$L 가지고 있다. 도윤이가 가지고 있는 주스는 태윤이가 가지고 있는 주스

의 몇 배인가' 라는 문제를 식으로 표현하면 $\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\times\square \Leftrightarrow \square=\frac{2}{3}\div\frac{2}{5}$이다. 여기서 '태윤이가 가진 주스의 양을 1로 만들면 쉽겠다' 는 점에 착안하여 $\frac{2}{5}$를 1로 만들기 위해 [그림 5](b)와 같은 비례 추론을 하면 제수의 역수를 곱하게 된다.

이 방법은 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 전체 과정에서 포함제 상황과의 관련을 유지하려 한 점에서 의의가 있지만, 다음과 같은 점에서 한계가 있다. $\frac{2}{5}$m에 $\frac{2}{3}$kg인 파이프 1m의 무게는 몇 kg인가와 같은 등분제에서는 제수 쪽의 양이 실제로 1m인 상황을 생각하는 것이 필요하고 자연스럽다. 문제 자체에서 요구하는 것이 1m일 때의 무게이기 때문이다. 등분제 문장제에는 두 상황, 길이가 $\frac{2}{5}$m인 상황($\frac{2}{5}$m, $\frac{2}{3}$kg인 파이프)과 길이가 1m인 상황(1m, □kg인 파이프)이 모두 들어 있다. 그러나 위의 주스 문제에는 태윤이가 가진 주스의 양이 $\frac{2}{5}$L인 한 상황만 들어 있다. 태윤이가 실제로 가진 주스의 양이 $\frac{2}{5}$L인데, 태윤이가 가진 주스의 양이 1L라고 실제와 다른 가상의 상황을 가정하는 것은 자연스럽지 않다.

이상 세 가지 방법의 특징을 정리하면 <표 1>과 같다.

<표 1> 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 연결하는 기존 방법

방법	공통분모 알고리즘을 이용하는 방법	1÷(제수)를 매개로 하는 방법	제수 쪽의 양을 1이라고 가정하는 방법
수식	$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}$ $=\frac{b\times c}{a\times c}\div\frac{d\times a}{c\times a}$ $=(b\times c)\div(d\times a)$ $=\frac{b\times c}{d\times a}=\frac{b\times c}{a\times d}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$	$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}$ $=(1\div\frac{d}{c})\times\frac{b}{a}$ $=\frac{c}{d}\times\frac{b}{a}$ $=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$	$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}$ $=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})$ $=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1$ $=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$
특징	· 포함제 상황과 연결성이 중간에 단절됨. · 제수의 역수가 지닌 의미가 드러나지 않음. · 등분제에서의 알고리즘 유도 과정과 무관.	· 포함제 상황과 연결성이 유지됨 · 제수의 역수는 1이 제수의 몇 배인가를 뜻함. · 비례 추론 (곱셈적 공변 관계) · 등분제에서의 알고리즘 유도 과정과 무관.	· 포함제 상황과 연결성이 유지되나, 제수 쪽의 양이 실제와 달리 1이라고 가정하는 것은 자연스럽지 않음 · 제수의 역수는 제수 쪽의 양을 1로 만드는 연산자를 뜻함. · 비례 추론 (곱셈적 공변 관계) · 등분제에서와 동일한 수식 변형 과정을 거쳐 제수의 역수 곱하기 알고리즘 유도

Ⅲ. 측정접근법과 동형접근법을 통한 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결

다음 두 포함제 문장제를 비교하여 살펴 보자.

㈎ 둘레길을 A km만큼 걸었습니다. 한 바퀴가 B km라면 둘레길 몇 바퀴를 돌았습니까?

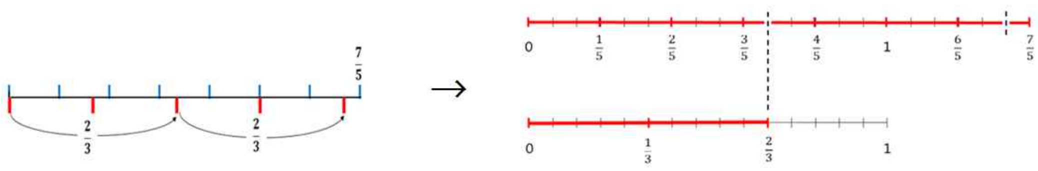
㈏ 빨강 막대의 길이는 A m이고 파랑 막대의 길이는 B m입니다. 빨강 막대의 길이는 파랑 막대의 길이의 몇 배입니까?

㈎와 ㈏는 몇 가지 점에서 다르다. 표면적으로 ㈎에는 한 바퀴와 같이 문제 상황 속에 1이 들어 있다. ㈎에는 A, B, 1이라는 세 개의 수가 표면에 나타나 있으나, ㈏에는 A, B라는 두 개의 수만 나타나 있다. ㈎의 바퀴는 자연수와 잘 어울리지만, ㈏의 배는 분수와도 잘 어울린다. ㈎가 횟수를 구하는 문제라면, ㈏는 배를 구하는 문제이다.

배 개념은 곱셈적 사고의 본질이며(강흥규, 2009), 분수 곱셈의 중요 의미이다(강미경, 2013). 포함제에서 측정한 횟수만 강조하면 다양한 문제 상황을 이끌어내지 못하며, 횟수를 구하는 상황보다 배를 구하는 상황이 아동들로 하여금 자연스럽게 곱셈적 관계에 주목할 수 있게 한다(김흥희, 2014; 신준식, 2013). 이와 같은 선행 연구의 견해에 의하면, 분수 나눗셈의 일반적인 알고리즘을 다루는 데에는 ㈎와 같은 횟수 문제보다 ㈏와 같은 배 문제가 장점이 있다. 이에 다음에서는 배 문제를 맥락으로 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성에 대하여 논의한다.

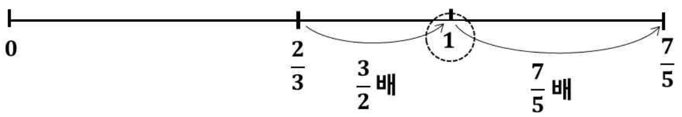
1. 측정접근법과 제수의 역수 곱하기 알고리즘

포함제 A÷B는 A가 B의 몇 배인지를 구하는 것인데, A가 B의 몇 배인지를 구하는 기본적인 방법은 B를 단위로 하여 A를 측정하는 것이다. 이것을 측정접근법이라고 부르겠다. $\frac{7}{5}$m는 $\frac{2}{3}$m의 몇 배인가라는 포함제를 측정접근법으로 해결할 때, 우선 [그림 6]의 왼쪽과 같이 $\frac{7}{5}$을 $\frac{2}{3}$로 직접 측정하여 $\frac{7}{5}$이 $\frac{2}{3}$의 몇 배인지 구하는 것을 생각할 수 있다. 이를 <측정 ①>이라고 하자. $\frac{2}{3}$ 단위를 단순 반복해서는 $\frac{7}{5}$이 $\frac{2}{3}$의 몇 배인지 알기 어렵다. 이 어려움을 해소하기 위한 방편으로 더 작은 공통단위가 필요하며, 여기서 공통분모 알고리즘이 출현한다. $\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{15}$을 공통단위로 하여 피제수와 제수를 다시 표현함으로써, 원래 문제 상황을 21을 10으로 측정하는 것으로 변환한다.



[그림 6] 측정①: 공통분모 알고리즘

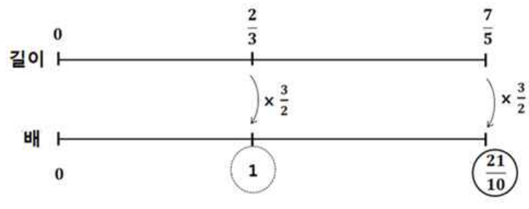
피제수 $\frac{7}{5}$ 대신에 먼저 1을 $\frac{2}{3}$로 측정하고, 길이와 배의 공변 관계를 이용하여 $\frac{7}{5}$을 간접적으로 측정하는 방법도 생각할 수 있다([그림 7]). 이를 <측정②>라고 하자. <측정①>에서는 피제수가 예를 들어 $\frac{7}{5}$에서 $\frac{13}{8}$으로 바뀌면 새로 측정을 해야 하지만, <측정②>에서는 피제수가 바뀌더라도 그대로 제수의 역수 $\frac{3}{2}$에 피제수를 곱하여 답을 구할 수 있다. 따라서 <측정②>가 일반성과 효율성 면에서 <측정①>보다 낫다.



[그림 7] 측정 ②: 제수 1을 징검다리로 사용하기

앞 장의 공통분모 알고리즘을 이용하는 방법은 <측정 ①>과, 1÷(제수)를 매개로 하는 방법은 <측정 ②>와 관련 있다. <측정 ①>과 <측정 ②>는 모두 길이와 횟수 사이의 공변 관계에 기반한다. <측정 ①>은 길이가 $\frac{2}{3}$씩 늘어날 때마다 횟수가 1씩 늘어난다는 것을 이용한다. <측정 ②>는 길이가 $\frac{7}{5}$배 늘어나면 횟수도 $\frac{7}{5}$배 늘어난다는 것을 이용한다. <측정 ①>에서는 길이와 횟수 사이에 덧셈적 공변 관계가, <측정 ②>에서는 길이와 횟수 사이의 곱셈적 공변 관계가 이용된다. 공변 관계와 더불어 비례 추론을 이루는 중요 요소는 불변성이다. <측정 ①>, <측정 ②>에서는 공변 관계는 드러나지만 불변성은 드러나지 않는다. 불변성에 주목하면 <측정 ①>, <측정 ②>를 넘어 나아갈 수 있다.

불변성은 두 측정 공간 사이에서 드러나는 것이므로, 먼저 두 측정 공간을 구성해야 한다. $\frac{7}{5}$m가 $\frac{2}{3}$m의 몇 배인지 구하는 문제에서 겉에 드러나 있는 수치는 길이를 나타내는 $\frac{7}{5}$, $\frac{2}{3}$이다. [그림 7]의 수직선은 m를 단위로 하는 길이의 측정 공간을 나타낸다. [그림 7]에서 배는 별도의 측정 공간으로 나타내어져 있지 않고, 길이를 나타내는 측정 공간 속에 붙박혀 있다.

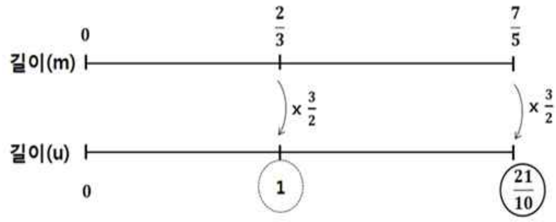


[그림 8] 측정③: 길이 공간과 배 공간

배를 m와 대등한 측정 단위로 보면, 배를 나타내는 별도의 측정 공간을 생각할 수 있다. [그림 8]의 두 수직선은 각각 m를 단위로 하는 측정 공간과 배를 단위로 하는 측정 공간을 나타낸다. 길이와 배라는 두 측정 공간을 이와 같이 이중수직선으로 표현하면, 두 측정 공간 사이에 존재하는 불변성이 부각된다. [그림 8]에서 제수의 역수 곱하기($\times\frac{3}{2}$)은 길이의 측정 공간과 배의 측정 공간 사이에 존재하는 불변적 관계를 나타낸다.

길이를 나타내는 측정 공간과 배를 나타내는 측정 공간 대신, [그림 9]와 같이 길이와

길이라는 두 측정 공간을 설정할 수도 있다. 2.54 cm를 1 in(인치)라는 새로운 단위로 나타내듯이, $\frac{2}{3}$m를 나타내는 새로운 가상의 단위 1u를 생각하자. u를 단위로 두 길이를 다시 나타내면, 우선 $\frac{2}{3}$m는 1u가 된다. $\frac{2}{3}$m=1u로부터 1m=$\frac{3}{2}$u이므로, m 공간의 측도를 u 공간의 측도로 바꾸기 위해서는 m로 측정한 값에 제수의 역수인 $\frac{3}{2}$을 곱하면 된다. 제수의 역수는 두 길이 공간 사이의 불변적 관계를 나타낸다. 그러므로 $\frac{7}{5}$m를 u를 단위로 나타내기 위해서는 $\frac{7}{5}$에 $\frac{3}{2}$을 곱해야 한다. 이렇게 얻은 수치인 $\frac{7}{5}\times\frac{3}{2}$은 $\frac{7}{5}$m가 $\frac{2}{3}$m의 몇 배인지를 나타낸다. 이로부터 $\frac{7}{5}(m)\div\frac{2}{3}(m)=(\frac{7}{5}\times\frac{3}{2})\div(\frac{2}{3}\times\frac{3}{2})=(\frac{7}{5}\times\frac{3}{2})(u)\div 1(u)=\frac{7}{5}\times\frac{3}{2}$과 같이 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 얻게 된다.



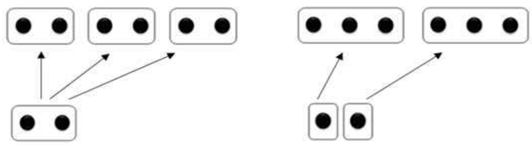
[그림 9] 측정 ③: 길이(m) 공간과 길이(u) 공간

제수를 기준화(norming)할 수 있는 능력은 나눗셈 해결에 중요한 역할을 한다(Lamon, 1994). 기준화는 어떤 정해진 양을 기준 단위로 하여 측정 공간을 재구성하는 개념적 활동이다. 포함제에서 제수의 기준화는 제수와 피제수가 속한 측정 공간이 아닌 제2의 측정 공간의 구성을 가능하게 한다. <측정 ③>은 제수를 기준 단위로 하여 새로운 측정 공간을 구성하고 두 측정 공간 사이의 관계를 이용하여, 포함제 상황과의 연결성을 유지하면서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$와 같이 유도할 수 있음을 보여준다.

2. 동형접근법과 제수의 역수 곱하기 알고리즘

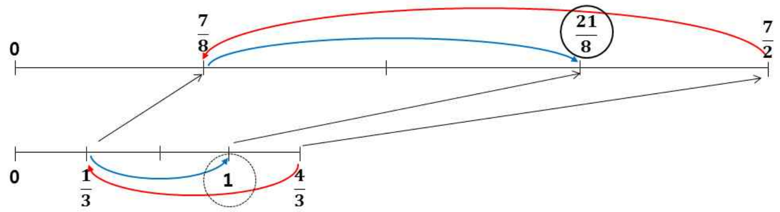
포함제의 영어 표현 중에 하나가 measurement division이다. 포함제를 우리말로 측정나눗셈이라고 부르기도 한다. measurement division이나 측정나눗셈이라는 표현은 이런 나눗셈은 제수를 단위로 삼아 피제수를 측정하여 해결하는 것이라는 관점을 함의하고 있다. 이것은 포함제를 해결하는 기본적인 방법이지만 유일한 방법은 아니다.

B의 C배인 양 A를 만들 때, [그림 10]의 왼쪽처럼 한 부분의 크기 B는 그대로 유지하면서 부분의 수를 변화시켜 A를 얻을 수 있다. 이것은 B를 새로운 단위 1로 보고 그것으로 A를 재는 측정접근법과 본질상 같다. 이와는 달리, 부분의 수 B는 그대로 유지하면서 한 부분의 크기를 C배하여 A를 얻을 수 있다. 예를 들어, [그림 10]의 오른쪽처럼 부분의 수 2는 그대로 유지하면서 한 부분의 크기를 1에서 3으로 변화시켜 6을 얻을 수 있다. 이 두 번째 방법에서 B와 A가 모두 두 부분으로 이루어진 구조적 동형이라는 점에 주목하여, 이 접근법을 동형접근법이라고 부르겠다.[3)]



[그림 10] 2의 3배인 양을 만드는 두 방법

동형접근법으로 포함제 $\frac{7}{2}(m) \div \frac{4}{3}(m)$를 해결해 보자. $\frac{4}{3}$를 몇 배 하면 $\frac{7}{2}$이 되는지 알려면, $\frac{4}{3}$가 $\frac{7}{2}$이 될 때 1은 얼마가 되는지 알면 된다. $\frac{4}{3}$m가 $\frac{7}{2}$m가 될 때, $\frac{1}{3}$m는 $\frac{7}{2} \div 4 = \frac{7}{8}$(m)가 되고, 1m는 $\frac{7}{8} \times 3$(m), 즉 $\frac{7}{2} \div 4 \times 3 = \frac{7}{2} \times \frac{3}{4}$(m)가 된다([그림 11]). 이때 제수 쪽과 피제수 쪽의 대응하는 각 수 사이에는 $\times \frac{21}{8}$의 불변적 관계가 성립한다($\frac{1}{3} \times \frac{21}{8} = \frac{7}{8}$, $1 \times \frac{21}{8} = \frac{21}{8}$, $\frac{4}{3} \times \frac{21}{8} = \frac{7}{2}$).

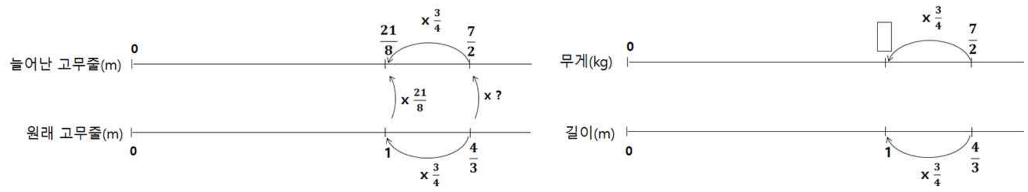


[그림 11] 동형접근법에 의한 $\frac{7}{2}m \div \frac{4}{3}m$의 해결

이 풀이의 핵심은 제수의 구조를 피제수에 투사하여 피제수의 구조를 제수의 구조와 동형으로 보는 것이다. 피제수 $\frac{7}{2}$은 $\frac{1}{2}$이 7부분, $\frac{4}{3}$는 $\frac{1}{3}$이 4부분으로 된 것으로 양쪽의 구조가 같지 않다. 동형접근법은 피제수가 나타내는 양을 제수가 나타내는 양과 마찬가지로 4부분으로 이루어진 것으로 보고, 부분을 부분에 대응시킨다.

포함제 $\frac{7}{2}m \div \frac{4}{3}m$의 동형접근법에 의한 풀이를 이중수직선을 사용하여 [그림 12(a)]와 같이 나타낼 수 있다. [그림 12(b)]는 등분제 $\frac{7}{2}kg \div \frac{4}{3}m$의 풀이를 이중수직선으로 나타낸 것이다. 두 그림의 구조적 유사성에 주목할 필요가 있다. 등분제에서는 1m일 때의 무게를 구하기 위하여 길이와 무게의 곱셈적 공변 관계를 이용하여 원래 무게 $\frac{7}{2}kg$에 제수의 역수 $\frac{3}{4}$을 곱한다. 포함제에서는 $\frac{7}{2}m$가 $\frac{4}{3}m$의 몇 배인지를 구해야 하는데, 전체나 부분이나 늘어난 배율은 같다는 불변성에 기초하여, 제수 쪽의 1m에 대응하는 피제수 쪽의 양을 구한다. 이와 같이 동형접근법으로 포함제를 해결하는 과정은, 등분제와 마찬가지로, $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div (\frac{d}{c} \times \frac{c}{d}) = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div 1 = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$로 나타낼 수 있다.

3) 이 논문에 제시한 분수 포함제의 <측정 ③>과 동형 접근법 풀이는, Beckmann과 Izsák(2015)의 비례 관계를 보는 두 관점을 바탕으로, 저자가 고안한 것이다.



(a) (b)

[그림 12] (a) $\frac{7}{2}m \div \frac{4}{3}m$의 이중수직선 표현 (b) $\frac{7}{2}kg \div \frac{4}{3}m$의 이중수직선 표현

이상 측정접근법과 동형접근법에 기반한 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성에 대한 논의를 정리하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 측정 및 동형접근법에 의한 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>수식</th><th>특징</th></tr>
<tr><td rowspan="3">측정접근법</td><td>측정 ①</td><td>$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}$
$= \frac{b \times c}{a \times c} \div \frac{d \times a}{c \times a}$
$= (b \times c) \div (d \times a)$</td><td>· 공통분모 알고리즘</td></tr>
<tr><td>측정 ②</td><td>$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (1 \div \frac{d}{c}) \times \frac{b}{a}$</td><td>· $1 \div$(제수)를 이용
· 제수의 역수는 1이 제수의 몇 배인지를 나타냄</td></tr>
<tr><td>측정 ③</td><td rowspan="2">$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}$
$= (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div (\frac{d}{c} \times \frac{c}{d})$
$= (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div 1$
$= \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$</td><td>· 제수의 역수는 길이의 측정 공간에서 배의 측정 공간으로의 불변적 관계를 나타냄
· 배의 측정 공간을 새로운 길이(u)의 측정 공간으로 대체할 수 있음
· 등분제의 알고리즘 유도 과정과 동일한 수식 변형 절차.</td></tr>
<tr><td colspan="2">동형접근법</td><td>· 제수의 구조를 피제수에 투사
· 제수의 역수는 제수에서 1로 가는 연산자.
· 등분제의 알고리즘 유도 과정과 동일한 수식 변형 절차.</td></tr>
</table>

Ⅳ. 논 의

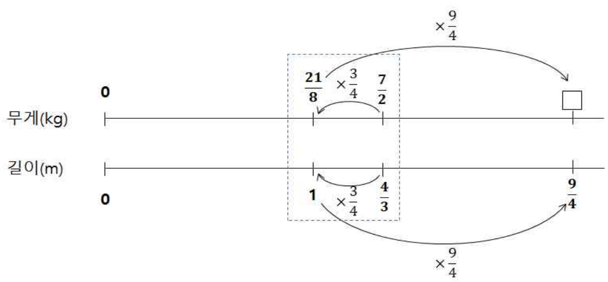
분수 나눗셈에서 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 연결하려 한 기존의 방법들에서는 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 포함제 상황 자체의 관련이 중간까지만 유지되거나, 등분제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘이라는 결과만 공유하였다. 이에 비하여 <측정

③>과 동형접근법에서는 포함제 상황과 관련성이 계속 유지되며 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1$라는 수식 변형 과정도 등분제와 공유한다. <측정 ③>과 동형접근법은 분수 나눗셈 계산법에서 포함제와 등분제를 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 중심으로 기존에 시도된 것보다 더 긴밀하게 통합할 수 있음을 시사한다.

<측정③>의 관점에서 볼 때, A÷B (B≠1)는 비 A : B에서 기준량 B를 새로운 단위로 보고 그때의 비교하는 양의 크기를 구하는 것이다. 포함제는 기준량 B를 새로운 1로 보는 것이고, 등분제는 실지로 제수 쪽의 양이 1일 때의 값을 구하는 것이다. 그러므로 포함제든 등분제든 제수 쪽을 1로 만드는 것이 핵심이다. 동형접근법에서는, 제수 B를 새로운 단위로 보는 것이 아니라, 등분제와 유사하게 실지로 제수 쪽의 양 1에 대응하는 값을 구한다. <측정③>과 동형접근법에 따르면, 제수 쪽을 1로 만드는 수식 변형 과정 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div(\frac{d}{c}\times\frac{c}{d})=(\frac{b}{a}\times\frac{c}{d})\div 1=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$는 포함제와 등분제 모두에 해당되는 분수 나눗셈 풀이의 공통 구조이다.

<측정③>과 동형접근법으로 포함제에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 과정에서 비례 추론이 중요한 역할을 한다. 비례 추론은 각 측정 공간 내에 있는 양들의 변화에 대한 곱셈적 공변 관계와 서로 다른 측정 공간에 있는 대응되는 두 양 사이의 관계의 불변성을 인식하는 것을 함의한다(Lamon, 2007). <측정 ③>에서 제수의 역수는 길이(m)의 측정 공간과 배 또는 길이(u)의 측정 공간 사이에 존재하는 불변적 관계를 나타낸다. 동형접근법에서 제수의 역수는 곱셈적 공변 관계로부터 출현하며, $\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$의 값은 두 측정 공간 사이의 불변적 관계를 나타낸다. 이 불변성에 의해, 제수 쪽의 1에 대응하는 피제수 쪽의 양을 나타내는 수는 동시에 피제수가 제수의 몇 배인지를 나타낸다.

비례 추론은 각각 두 양으로 이루어진 두 상황을 전제로 한다. 예를 들어, 3시간 5km라는 두 양으로 이루어진 첫째 상황과 6시간 10km라는 두 양으로 이루어진 둘째 상황이 주어졌을 때, 시간이 두 배가 되면 달린 거리도 두 배가 되고(곱셈적 공변 관계) 두 상황에서 속력은 변하지 않고 일정하다(불변성). 등분제는 그 자체로 일반적인 비례 문제의 특수한 경우임이 분명하다. "$\frac{4}{3}$m에 $\frac{7}{2}$kg인 파이프 □m의 무게는 몇 kg인지 구하여라" 와 같은 일반적인 비례 문제에서 □=1일 때가 등분제이다. 등분제 해결 과정은 일반적인 비례 문제 해결에 중요한 징검다리가 된다([그림 13]).



[그림 13] ($\frac{4}{3}$m, $\frac{7}{2}$kg), ($\frac{9}{4}$m, $x$kg) 비례 문제 해결

포함제 중에서 "둘레길을 $\frac{7}{2}$km만큼 걸었습니다. 한 바퀴가 $\frac{4}{3}$km라면 둘레길 몇 바퀴를 돌았습니까?" 와 같은 문제에는 $\frac{7}{2}$, $\frac{4}{3}$와 한 바퀴의 1이라는 세 수가

주어져 있다. 그러므로 ($\frac{4}{3}$km, 1바퀴), ($\frac{7}{2}$km, □ 바퀴)라는 두 상황이 문제에 주어진 것으로 볼 수 있다. 그러나 “$\frac{7}{2}$m는 $\frac{4}{3}$m의 몇 배인가?” 와 같은 배 문제에서는 $\frac{7}{2}$, $\frac{4}{3}$라는 두 수만이 문제에 주어져 있다. 그래서 언뜻 보기에 $\frac{7}{2}$m는 $\frac{4}{3}$m의 몇 배인가는 비례 문제의 특수한 경우로 보이지 않는다. 그러나 <측정 ③>에서와 같이, 배를 길이와 마찬가지의 양으로 보면, 이 포함제 상황은 ($\frac{4}{3}$m, 1배), ($\frac{7}{2}$m, □배)로 나타낼 수 있고, 따라서 일반적인 비례 문제의 특수한 경우로 볼 수 있다. 동형접근법의 관점에서도 배 문제를 일반적인 비례 문제의 특수한 경우로 볼 수 있다. 동형접근법에서 $\frac{7}{5}$m는 $\frac{2}{3}$m의 몇 배인가는 $\frac{2}{3}$m가 $\frac{7}{5}$m로 늘어났을 때 1m는 얼마로 늘어나는가로 재진술될 수 있다. 이 재진술된 문제는 $\frac{2}{3}$m가 $\frac{7}{5}$m로 늘어날 때, □m는 몇 m로 늘어나는가라는 일반적인 비례 문제의 특수한 경우이다.

포함제와 등분제 모두 특수한 비례 문제로 볼 수 있다는 것은 분수 나눗셈 및 비례 단원 학습 지도에서 둘 사이에 적절한 연결성이 주어지고 있는가라는 문제를 제기한다. 우리나라 교과서에서 피제수와 제수가 분수인 나눗셈은 6학년 1학기에, 비례는 6학년 2학기에 다루어진다. 공통분모 알고리즘을 이용하여 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 유도하는 우리나라 교과서의 분수 나눗셈 단원에서 두 측정 공간 사이의 곱셈적 공변 관계와 불변성에 기반한 비례 추론은 강조되지 않는다. 또 비례 단원에서는 $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$과 같이 분수로 나타낸 비를 비의 성질을 이용하여 간단한 자연수의 비로 바꾸는 내용을 제외하고는 분수 자체가 등장하지 않는다. 비례를 활용하는 실생활 문제에 등장하는 수치들은 모두 자연수이다(교육부, 2015b). 분수 나눗셈과 비례 단원에서, 분수 나눗셈 해결에 비례 추론이 중요한 역할을 한다는 것, 분수 나눗셈이 특수한 비례 문제라는 것, 분수 나눗셈이 일반적인 비례 문제 해결의 징검다리가 된다는 것을 이해할 명시적인 기회가 제공되지 않는다.

<측정 ③>과 동형접근법은 두 측정 공간의 구성 및 두 공간 사이의 관계에 주목하므로, 이중수직선과 같은 시각적 모델이나 비례 도식을 다양하게 사용하여 두 측정 공간 사이의 관계를 탐구할 필요가 있다. 수직선을 비롯한 다양한 모델을 통해 분수의 곱셈이나 나눗셈을 다루지 않으면 학생들은 단순한 계산 알고리즘만 익히며 학습에 어려움을 겪을 수 있다(홍진곤, 김양권, 2015). 이중수직선 모델은 비례 추론에 도움이 되는 모델로, 비례 추론이 내재된 곱셈이나 나눗셈에 광범위하게 활용될 수 있다(임재훈, 이형숙, 2015; Küchemann, Hodgen, & Brown, 2011; Noparit, & Saengpun, 2013).

<측정 ③>과 동형접근법, 그리고 그 이중수직선 표현은 예비교사 교육에도 활용될 수 있다. 측정접근법과 동형접근법의 아이디어를 이중수직선이라는 모델을 사용하여 표현하고 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 연결하는 이해는 분수 나눗셈에 관한 교사의 지식 꾸러미(Ma, 1999)를 풍부하게 할 수 있다. 이와 같은 풍부한 지식 꾸러미를 교사가 지니고 있으면 학습 지도 상황에서 관련된 아이디어를 적절히 풀어 펼쳐 놓아 학습을 지원할 수 있다(Ball, 2003).

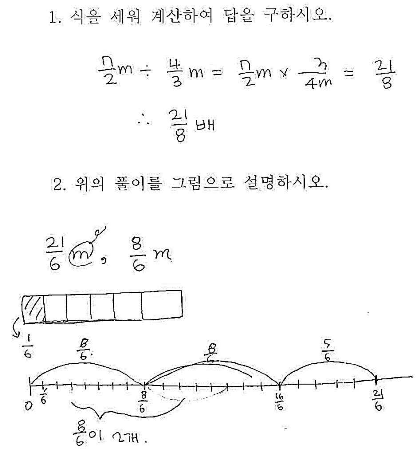
<표 3>은 2016년 2학기에 ◯◯교육대학교의 수학과교육II 강좌를 수강하는 예비교사 65

명에게, $\frac{7}{2}$m가 $\frac{4}{3}$m의 몇 배인가를 수식으로 풀고, 자신의 수식 풀이를 그림으로 설명하게 한 결과이다. 65명 중 56명(86%)의 예비교사들이 제수의 역수 곱하기 알고리즘으로 문제를 해결하였다. 공통분모 알고리즘을 사용하여 해결한 예비교사는, 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 공통분모 알고리즘의 두 가지 방법으로 푼 경우를 포함하여, 4명(6%)에 불과하였다.

자신의 풀이를 그림으로 설명하도록 하였을 때, 65명 중 45명(69%)의 학생들이 〈측정 ①〉에 해당하는 그림을 그렸다([그림 14]). 앞에서 논의한 바와 같이, 〈측정 ①〉은 공통분모 알고리즘과는 직접 연결되지만, 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 직접 연결되지 않는다. 수식으로 풀 때는 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 이용하여 풀고, 그 풀이를 설명하는 그림은 공통분모 알고리즘에 어울리는 그림을 그린 예비교사가 대부분이었다. 수식 풀이 과정과 그림 설명이 서로 연결되지 못하고 별개로 분리되어 있음을 볼 수 있다. 이것은 예비교사들이 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 포함제의 연결성에 대한 지식을 지니지 못한 채 도구적으로 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 이용하여 포함제를 계산하거나 그림이나 모델로 그 연결성을 표현하지 못함을 시사한다. 교육대학교의 예비교사 교육에서 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성에 대한 개념적 이해와 모델 표현 능력을 더 신장시킬 필요가 있다.

<표 3> 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 연결하는 기존 시도

수식 풀이	제수의 역수 곱하기 알고리즘으로 해결	56명 (86%)
	공통분모 알고리즘으로 해결	2명 (3%)
	제수의 역수 곱하기 알고리즘과 공통분모 알고리즘의 두 가지 방법으로 해결	2명 (3%)
	기타[4]	5명 (8%)
그림 풀이	측정①에 해당하는 그림을 그림	45명 (69%)
	그림 설명을 시도하였으나 실패함	15명 (23%)
	그림을 그리지 않음	5명 (8%)



[그림 14] 한 예비교사의 포함제 수식 풀이와 그림 설명

Ⅳ. 결 어

분수 나눗셈의 학습 지도에 관한 기존의 논의들은 포함제에서 공통분모 알고리즘, 등분제에서 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 지도하는 것과 포함제와 등분제를 아우르는 통합 알고리즘을 지도하는 것으로 나누어진다. 포함제와 등분제를 아우르는 통합 알고리즘 지

4) 나눗셈식에서 중간 풀이 과정 없이 바로 답을 쓴 경우 등

도와 관련하여 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 어떻게 연결하는가가 문제가 된다. 선행 연구에서 제시된 방법에는 공통분모 알고리즘을 이용하는 방법, 1÷(제수)를 매개로 하는 방법, 제수 쪽의 양을 1이라고 가정하는 방법이 있다. 이들 방법들은 제수의 역수 곱하기 알고리즘과 포함제 상황 자체의 관련이 중간까지만 유지되거나 등분제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘이라는 결과만 공유한다는 한계가 있다. 이 논문에서 제시한 <측정 ③>과 동형접근법은 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 상황과의 관련성을 계속 유지하면서 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div (\frac{d}{c} \times \frac{c}{d}) = (\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}) \div 1$이라는 등분제에서와 동일한 수식 변형 과정을 통해 연결될 수 있음을 보여준다.

이 논문의 결과는 분수 나눗셈의 계산 알고리즘을 상황과 밀접하게 연결하는 학습 지도가 이루어져야 함을 주장하는 것으로 해석될 수 있다. <측정 ①>과 같이, 분수 나눗셈의 계산 알고리즘과 상황의 연결성이 중간에서 끊어지는 방식으로 학습 지도가 이루어지면, 학생들은 계산 알고리즘을 상황과 관련하여 이해하지 못하고 기계적으로 적용하는 도구적 이해 수준에 머무르게 될 가능성이 매우 높다.

이 연구의 결과는 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 중심으로 분수 나눗셈의 통합적인 계산법 학습 지도 방안을 개발하는 데 국소 이론으로 사용될 수 있다. 후속 연구로, 포함제와 등분제를 제수의 역수 곱하기 알고리즘을 중심으로 통합적으로 다루는 분수 나눗셈 교재 개발, 분수 나눗셈 단원과 비례 단원을 유기적으로 연결 또는 통합하여 다루는 교재 개발이 필요하다. 이중수직선과 같은 모델의 사용에 관한 연구도 필요하다. 이중수직선은 나눗셈과 비례 학습에 상당한 유용성을 지니고 있는 모델이지만, 그것의 사용에는 단순하지 않은 문제들이 개재되어 있다. 이 모델을 분수 나눗셈 학습 지도에 적절히 사용하는 방안을 연구할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강문봉 (2011). 자연수의 나눗셈 지도에 대한 고찰 -2007 개정 교육과정의 초등수학 교과서와 지도서를 중심으로-. **수학교육학연구**, **21**(1), 1-16.

강미경 (2013). **분수 곱셈 알고리즘 형식화 프로그램 개발 및 적용 연구: 분배전략을 중심으로**. 경인교육대학교 석사학위논문.

강흥규 (2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안. **학교수학**, **11**(1), 17-37.

강흥규 (2014). 초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰. **한국초등수학교육학회지**, **18**(2), 319-339.

교육과학기술부 (2011). **수학 6-1**. 서울: 두산동아.

교육부 (2015a). **수학 6-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (2015b). **수학 6-2**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2002). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서 주식회사.

김흥회 (2014). **6학년 분수 나눗셈의 개념이해를 위한 프로그램 개발: 제수를 1로 만드는 방법을 중심으로**. 경인교육대학교 석사학위논문.

박교식 (2014). 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정 분석. **한국초등수학교육학회지**, **18**(1), 105-122.

백수진 (2009). **카테시안 곱의 역 맥락에서 나타난 학생들의 분수 나눗셈 알고리즘 구성 활동 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.

신준식 (2013). 문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안. **수학교육**, **52**(2), 217-230.

이지영 (2015). **초등학교 학생들의 단위 추론을 기반으로 한 분수 나눗셈의 학습경로 개발**. 한국교원대학교 박사학위논문.

임재훈 (2013). 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정 분석. **한국초등수학교육학회지**, **17**(3), 395-411.

임재훈, 이형숙 (2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구**, **25**(2), 189-206.

조용진, 홍갑주 (2013). 분수 나눗셈의 지도에서 단위비율 결정 맥락의 실제 적용을 위한 기초 연구. **초등수학교육**, **16**(2), 93-106.

홍진곤, 김양권 (2015). 초등학교 수학 교과서의 수직선 활용과 문제점. **수학교육논문집**, **29**(3), 353-372.

Ball, D. L. (2003). What mathematics knowledge is needed for teaching mathematics? Secretary’s Mathematics Summit. Washington, DC. Retrieved October 12, 2016 from www.ed.gov/rschstat/research/progs/mathscience/ball.html

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal* *for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 17-38.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teacher in the Middle School, 12*, 490-496.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2011). Using the double number line to model multiplication. Paper presented at Seventh Annual Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszów, Poland.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany: State University of New York press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte: Information Age Publishing.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Noparit, T., & Saengpun, J. (2013). How student teachers use proportional number line to teach multiplication and division of fraction: Professional learning in context of lesson study and open approach. *Creative Education, 4*(8), 19-24.

Okazaki, M. and Koyama, M. (2005). Characteristics of 5th graders' logical development through learning division with decimals. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 217-251.

Perlwitz, M. D. (2004). Two students' constructed strategies to divide fractions. *Mathematics Teacher in the Middle School, 10*, 122-126.

Sharp, J., & Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research, 95*, 333-347.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (pp. 153-161), Reston, VA: NCTM.

Tyminski, A. M., & Dogbey, J. K. (2012). Developing the common denominator fraction division algorithm. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(4), 248-253.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2009). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

<Abstract>

Quotitive Division and Invert and Multiply Algorithm for Fraction Division

Yim, Jaehoon[5)]

The structures of partitive and quotitive division of fractions are dealt with differently, and this led to using partitive division context for helping develop invert-multiply algorithm and quotitive division for common denominator algorithm. This approach is unlikely to provide children with an opportunity to develop an understanding of common structure involved in solving different types of division.

In this study, I propose two approaches, measurement approach and isomorphism approach, to develop a unifying understanding of fraction division. From each of two approaches of solving quotitive division based on proportional reasoning, I discuss an idea of constructing a measure space, unit of which is a quantity of divisor, and another idea of constructing an isomorphic relationship between the measure spaces of dividend and divisor. These ideas support invert-multiply algorithm for quotitive as well as partitive division and bring proportional reasoning into the context of fraction division. I also discuss some curriculum issues regarding fraction division and proportion in order to promote the proposed unifying understanding of partitive and quotitive division of fractions.

Key words: fraction division, proportional reasoning, quotitive division, partitive division, invert and multiply algorithm

논문접수: 2016. 10. 14
논문심사: 2016. 11. 23
게재확정: 2016. 11. 26

5) jhyim@ginue.ac.kr