The Korean Journal of Applied Statistics (2016) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2016.29.7.1165
29(7), 1165–1172

An optimal management policy for the surplus process with investments

Se-Jin Lim[a] · Seungkyoung Choi[a] · Eui-Yong Lee[a,1]

[a]Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received April 27, 2016; Revised May 31, 2016; Accepted July 19, 2016)

Abstract

In this paper, a surplus process with investments is introduced. Whenever the level of the surplus reaches a target value $V > 0$, amount $S(0 \leq S \leq V)$ is invested into other business. After assigning three costs to the surplus process, a reward per unit amount of the investment, a penalty of the surplus being empty and the keeping (opportunity) cost per unit amount of the surplus per unit time, we obtain the long-run average cost per unit time to manage the surplus. We prove that there exists a unique value of S minimizing the long-run average cost per unit time for a given value of V, and also that there exists a unique value of V minimizing the long-run average cost per unit time for a given value of S. These two facts show that an optimal investment policy of the surplus exists when we manage the surplus in the long-run.

Keywords: surplus process, martingale, optional sampling theorem, renewal reward process, optimal investment policy

1. 서론

일반적인 잉여금 과정(surplus process)은 다음과 같다. 보험 상품의 잉여금은 초기치 $u > 0$에서 시작하여 일정한 보험료율(premium rate) $c > 0$로 들어오고 고객의 보험금 청구가 발생할 때마다 감소한다. 여기서, 보험금 청구는 발생률 $\lambda > 0$인 포아송 과정 $\{N(t), t \geq 0\}$을 따라 발생하며, 지급되는 보험금의 크기는 서로 독립이고 평균 $\mu > 0$인 일반적인 분포 G를 따른다. 본 논문에서는 G가 지수분포인 경우가 다루어진다. 시간 $t > 0$에서 잉여금을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0,$$

여기서 Y_i는 i번째 보험 청구액이고, $c = (1 + \eta)\lambda\mu$이다. $\eta > 0$는 상대적인 보완 부가급(relative security loading, premium loading factor)으로 이로 인해 보험료율 c가 단위 시간당 기대되는 보험 청구액 $\lambda\mu$보다 커진다. 이와 같은 보험 상품의 잉여금 과정에서 $U(t)$의 값이 0보다 작아지면 보험 상품이 파산한다고 말한다.

This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2014.

[1]Corresponding author: Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Cheongpa-ro 47-gil 100, Yongsan-Gu, Seoul 04310, Korea. E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr

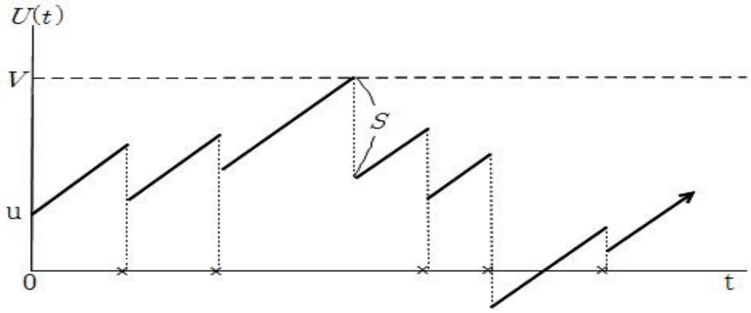


Figure 2.1. Sample path of $U(t)$.

잉여금 과정의 모형화와 파산확률을 구하는 기존의 연구는 Klugman 등 (2004)에 잘 요약되어 있다. Oh 등 (2007)은 마팅게일 이론을 이용하여 잉여금이 주어진 범위를 벗어나는데 걸리는 시간과 이 시간 동안의 총 잉여금의 기대값을 구하였고, Jeong 등 (2009)은 기존의 리스크 모형에 잉여금이 충분할 때 투자(investment)와 잉여금이 부족할 때 재충전(injection)의 개념을 도입하여 잉여금의 최적 투자 정책을 연구하였다. Cho 등 (2013)은 보험 상품의 잉여금이 충분할 때 투자와 잉여금이 음수가 되어도 모자란 만큼 차용을 하여 파산이 일어나지 않는다는 가정하고 리스크 모형의 특성함수(characteristic function)와 리스크 모형의 1차 및 2차 적률을 제시하였다.

보험 회사에서는 보험 상품을 운용하면서 손실을 보지 않고 어떻게 관리해야 이익을 창출할 수 있는지 생각하게 된다. 그래서 본 논문에서는 Cho 등 (2013)과 같이 잉여금이 음수가 되었다고 하더라도, 시간이 흐름에 따라 지속적인 프리미엄(premium)의 유입을 기대할 수 있기 때문에 보험 상품의 잉여금이 음수가 되어도 파산하지 않는다고 가정하고, 더 나아가 잉여금이 일정 수준(sufficient level) V에 도달하면 $S > 0$만큼을 재투자하여 이익을 창출하는 잉여금 과정에서 발생하는 여러 비용을 고려하여 최적운용정책을 알아보고자 한다.

2장에서는 본 논문에서 고려한 잉여금 과정을 운용하는데 필요한 여러 특성값들을 구한다. 잉여금이 V에 도달하거나 잉여금이 0이하가 되는 확률과 재투자가 발생하는데 걸리는 시간 또는 장시간에 걸친 잉여금 과정에 대한 기대값 등이다. 3장에서는 2장에서 구한 값들을 이용하여 보험 상품의 운용과정에서 발생하는 다양한 종류의 비용을 고려하여 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 구하고, 이를 최소화하는 목표 잉여금 수준과 재투자 수준을 결정한다. 마지막으로 4장에서는 수치적인 예를 보인다.

2. 잉여금과정의 특성값들

본 논문에서 고려하는 잉여금 과정은 일반적인 잉여금 과정에 다음과 같은 가정을 한다. 하나는 초기 잉여금 u에서 시작해서 보험료 수입에 의해 단위시간당 c만큼 증가하고 고객이 보험금을 청구하면 감소하는 과정에서 잉여금이 목표 잉여금 V에 도달하면 $S > 0$만큼 재투자가 이루어지는 것이고, 두번 째는 잉여금이 0이하가 되어도 파산이 일어나지 않는 것이다. 마지막으로 보험 청구금 Y_i는 평균이 μ인 지수분포를 따른다고 가정한다. 본 논문에서 고려한 잉여금 과정 $\{U(t), t \geq 0\}$의 표본 경로는 Figure 2.1과 같다. 이 장에서는 이러한 잉여금 과정을 최적운용하는데 꼭 필요한 특성 값들을 구한다.

2.1. 0 또는 V에 도착할 확률

본 논문에서 고려하는 잉여금 과정에서 잉여금은 목표 잉여금 V에 도달하거나 0이하가 될 수 있다. 그

래서 잉여금이 V 또는 0에 도착하는 확률을 구한다. 이 확률을 구하기 위해 마팅게일(martingale) 성질을 만족하는 확률과정을 정의하고, optional sampling theorem (Karlin과 Taylor, 1975, pp. 257–262)을 이용한다.

초기 잉여금 u에서 시작한 잉여금이 0이하가 되는 확률을 P_0^u로, 초기 잉여금 u에서 시작한 잉여금이 V에 도달하는 확률을 P_V^u로 놓는다. 위에서 정의한 두 확률을 구하기 위한 마팅게일 성질을 만족하는 확률과정 $W(t)$는 다음과 같다.

$$W(t) = \frac{e^{\theta U(t)}}{E[e^{\theta V(t)}]},$$

여기서 $V(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, $t \geq 0$으로 초기 잉여금이 0인 잉여금 과정이다. $W(t)$는 $U(t)$의 적률생성함수를 통해 만들며 기댓값이 $e^{\theta u}$인 마팅게일이다. 특히 $\theta = (\lambda\mu - c)/(c\mu)$이면 $W(t) = e^{\theta U(t)}$가 된다 (Oh 등, 2007, p.231).

초기 잉여금 u에서 시작한 잉여금 과정이 재투자를 위한 목표 잉여금 V에 도달하거나 0이하가 되는 최초의 시간을 T라 하면, $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) \notin (0, V)\}$이다. $P_0^u = P\{U(T) \leq 0 | U(0) = u\}$이고, $P_V^u = P\{U(T) = V | U(0) = u\}$이다. 확률변수 T는 $\{W(t), t \geq 0\}$의 stopping time이므로, $W(t)$에 optional sampling theorem을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
e^{\theta u} &= E[W(0)|U(0) = u] = E[W(T)|U(0) = u] \\
&= P[U(T) \leq 0|U(0) = u]E[W(T)|U(T) \leq 0] + P[U(T) = V|U(0) = u]E[W(T)|U(T) = V] \\
&= P_0^u \int_{-\infty}^{0} e^{\theta y} \frac{1}{\mu} e^{\frac{y}{\mu}} dy + P_V^u e^{\theta V} = P_0^u \frac{c}{\mu\lambda} + P_V^u e^{\theta V}.
\end{aligned}$$

위 식과 $P_0^u + P_V^u = 1$임을 이용하여 P_0^u와 P_V^u를 구하면 아래와 같다.

$$P_0^u = \frac{\lambda\mu e^{\theta V} - \lambda\mu e^{\theta u}}{\lambda\mu e^{\theta V} - c} \qquad \text{and} \qquad P_V^u = \frac{\lambda\mu e^{\theta u} - c}{\lambda\mu e^{\theta V} - c}.$$

2.2. T_c와 U의 기댓값

본 논문의 잉여금 과정 $U(t)$는 잉여금이 V를 넘게 되면 S만큼 재투자된 후 잉여금은 $V - S$가 된다. 재투자 후 $V - S$에서 시작한 잉여금이 V를 다시 넘게되는 시간을 T_c로 정의하면 $T_c = \inf\{t \geq 0 | U(t) = V\}$이다. T_c에 대한 기댓값은 다음과 같이 계산된다.

잉여금은 단위시간당 c만큼 유입되고, 단위시간당 $\lambda\mu$만큼 유출된다. 따라서 단위시간당 $c - \lambda\mu$만큼 잉여금이 증가한다. 따라서 T_c의 기댓값은 다음과 같다.

$$E[T_c] = \frac{S}{c - \lambda\mu}.$$

$U(t)$의 정상분포(stationary distribution)를 $F(x)$라 정의하고, $\phi(r)$을 $F(x)$의 특성함수라 하면, 특성함수는 다음과 같다 (Cho 등, 2013, pp. 477–479).

$$\phi(r) = \int_{-\infty}^{V} e^{irx} dF(x) = \frac{\frac{c - \lambda\mu}{S} \left\{ e^{rV} - e^{r(V-S)} \right\}}{irc - \lambda + \lambda\bar{\phi}_Y(r)},$$

여기서 $\bar{\phi}_Y(r) = \int_0^\infty e^{-iry} dG(y)$이다. 그리고 U에 대한 기댓값은 다음과 같다.

$$E[U] = \frac{2V - S}{2} - \frac{\lambda\mu_2}{2(c - \lambda\mu)},$$

여기서 $\mu = E[Y]$, $\mu_2 = E[Y^2]$이다.

3. 최적운용정책

3.1. 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용

재투자가 있는 잉여금 과정에서 다음과 같은 세가지 비용이 발생하는 것을 고려할 수 있다.

(i) 잉여금이 V이상이 되었을 때 투자에 따른 단위금액당 이익: r.

(ii) 잉여금이 0이하가 되었을 때 패널티: R.

(iii) 누적잉여금의 단위시간당 단위금액에 대한 기회비용: h.

여기서 기회비용은 잉여금이 재투자되지 못하고 쌓여있음으로 인해 생기는 기회손실을 의미한다. 또 R은 매번 잉여금이 음수가 되었을 때, 잉여금의 차용에 따라 발생하는 기대손실을 의미한다. 재투자 이후 $V-S$에서 시작한 보험 상품의 잉여금이 재투자를 위한 목표 잉여금 V를 다시 넘게 되는 기간을 한 주기 T_c로 정의하고, 이 주기 동안 잉여금이 0미만이 되는 횟수를 N으로 정의하면 재생보상정리에 의해 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용은 아래와 같다 (Ross, 1996, pp. 133–135).

$$\begin{aligned} C(V,S) &= \frac{RE[N] - rS + E[\text{한 주기의 기회비용}]}{E[T_c]} = \frac{RE[N] - rS}{E[T_c]} + hE[U] \\ &= \frac{R\lambda\mu e^{\theta V}(e^{-\theta S} - 1)}{S} - r(c - \lambda\mu) + h\left[\frac{2V - S}{2} - \frac{\lambda\mu_2}{2(c - \lambda\mu)}\right], \end{aligned}$$

여기서 $hE[U]$는 장시간에 걸쳐 기대되는 단위시간당 기회비용이 된다. $E[T_c]$와 $E[U]$는 2.2절에서 구했고, $E[N]$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_0^{V-S}(P_0^0)^{n-1}P_V^0 \\ &= \frac{P_0^{V-S}}{1 - P_0^0} = \frac{\lambda\mu e^{\theta V}(1 - e^{-\theta S})}{\lambda\mu - c}, \end{aligned}$$

여기서 두 번째 식은 N이 기하확률변수가 됨을 이용하였다. $P_0^{V-S} = \{\lambda\mu e^{\theta V}(1 - e^{-\theta S})\}/(\lambda\mu e^{\theta V} - c)$이고, $P_0^0 = \{\lambda\mu(e^{\theta V} - 1)\}/(\lambda\mu e^{\theta V} - c) = 1 - P_V^0$이다.

다음 절에서는 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용 $C(V,S)$를 가지고 보험회사의 비용을 최소화하는 잉여금의 수준 V와 재투자 수준 S을 결정한다.

3.2. V가 주어졌을 때 비용을 최소로 하는 S

이 절에서는 재투자가 이루어지는 목표 잉여금 V가 주어졌을 때 비용을 최소로 하는 $S(0 \le S \le V)$를 알아보고자 한다. V가 주어졌으므로 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용 $C(V,S)$를 S의 함수 $C(S)$로 정의한다. $C(S)$를 최소화하는 S를 찾기 위해 $C(S)$를 S에 관하여 미분하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} C'(S) &= \frac{R\lambda\mu e^{\theta V}\{1 - e^{-\theta S}(\theta S + 1)\}}{S^2} - \frac{1}{2}h \\ &= R\lambda\mu e^{\theta V}a(S) - \frac{1}{2}h, \end{aligned}$$

여기서 $a(S) = \{1 - e^{-\theta S}(\theta S + 1)\}/S^2$이다. 아래 정리 3.1에 의하면 $a(S)$가 S에 대하여 아래로 볼록한 증가함수이다. 따라서 V가 주어져 있을 때 $C(S)$를 최소로 하는 S가 유일하게 존재한다.

정리 3.1 $a(S)$가 $0 \le S \le V$에서 아래로 볼록한 증가함수이다.

증명: $a(S)$의 1차 도함수와 2차 도함수는 각각 다음과 같다.

$$a'(S) = \frac{e^{-\theta S}(\theta S + 1)^2 + e^{-\theta S} - 2}{S^3} = \frac{b_1(S)}{S^3},$$

$$a''(S) = \frac{e^{-\theta S}(-\theta^3 S^3 - 3\theta^2 S^2 - 6\theta S - 6) + 6}{S^4} = \frac{b_2(S)}{S^4}$$

이다. $b_1(0) = 0$, $b_2(0) = 0$이고, $b_1(S)$와 $b_2(S)$를 S에 관하여 미분하면 $b_1'(S) = -\theta^3 S^2 e^{-\theta S} > 0$, $b_2'(S) = \theta^4 S^3 e^{-\theta S} > 0$이다. 여기서 $\theta = (\lambda\mu - c)/(c\mu) < 0$이므로 $b_1(S) \ge 0$, $b_2(S) \ge 0$ $(0 \le S \le V)$이다. 따라서 $a(S)$는 아래로 볼록한 증가함수이다. 여기서 $a'(0) = -\theta^3/3$, $a''(0) = \theta^4/4$이 된다. □

최소비용을 갖게 하는 S는 다음과 같이 주어진다.

(i) $R\lambda\mu e^{\theta V} a(0) \ge (1/2)h$인 경우.
로피탈 정리를 두번 이용하면 $a(0) = \theta^2/2$임을 알 수 있다. 이 경우 $C'(S) \ge 0$이 된다. 따라서 $S = 0$일 때 최소비용이다.

(ii) $R\lambda\mu e^{\theta V} a(0) < (1/2)h, R\lambda\mu e^{\theta V} a(V) > (1/2)h$인 경우.
$C'(S) = 0$이 되는 $S = S^*$가 유일하게 존재하고, $C(S^*)$가 최소비용이다. 이때 S^*는 $R\lambda\mu e^{\theta V} a(S^*)$ $= (1/2)h$를 만족하는 유일한 값이다.

(iii) $R\lambda\mu e^{\theta V} a(V) \le (1/2)h$인 경우.
이 경우 $C'(S) \le 0$이 된다. 따라서 $C(S)$는 $S = V$일 때 최소비용이다.

3.3. S가 주어졌을 때 비용을 최소로 하는 V

이 절에서는 재투자 수준 S가 정해져 있을 때 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용 $C(V)$를 최소로 하는 $V (S \le V < \infty)$를 구한다. 이를 위해 $C(V)$를 V에 관하여 미분하면 아래와 같다.

$$C'(V) = \frac{R\lambda\mu\theta e^{\theta V}(e^{-\theta S} - 1)}{S} + h,$$

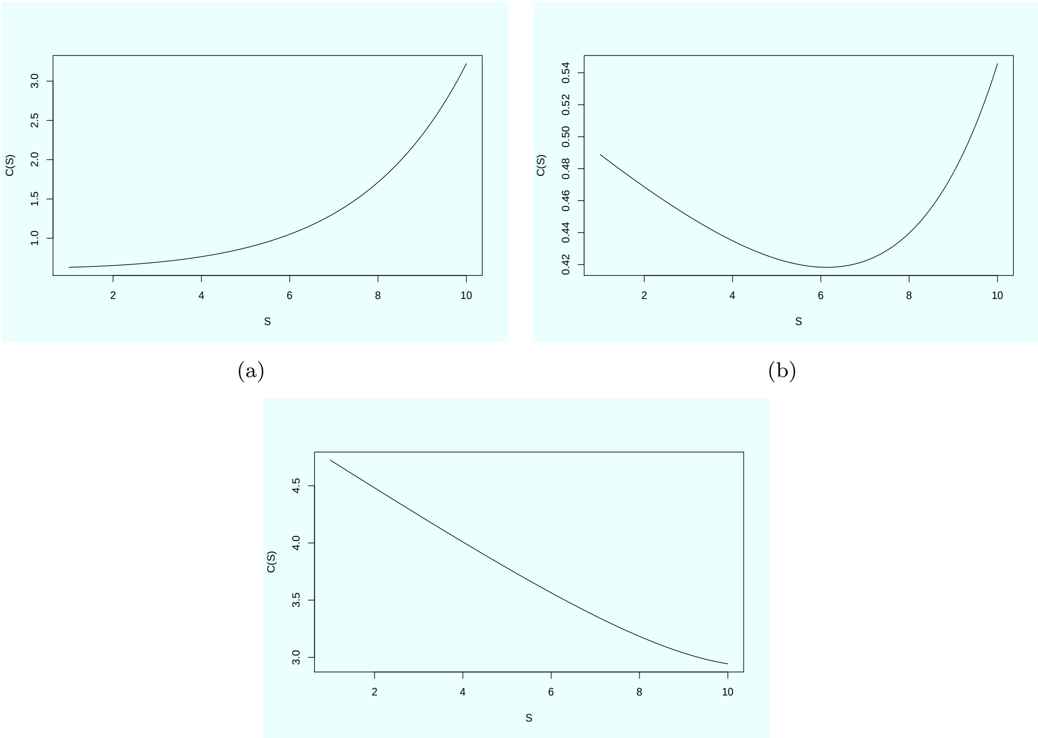
여기서 $\theta < 0$이므로, $C'(V)$는 $S \le V < \infty$에서 증가함수이고, $\lim_{V\to\infty} C'(V) = h > 0$이다. 따라서 S가 주어졌을 때 $C(V)$를 최소화하는 V는 다음과 같다.

(i) $C'(V)|_{V=S} \ge 0$인 경우.
장시간에 걸친 단위시간당 평균비용 $C(V)$는 $V = S$일 때 최소비용이다.

(ii) $C'(V)|_{V=S} < 0$인 경우.
$C(V)$는 $C'(V) = 0$이 되는 $V = V^*$일 때 최소비용을 갖는다. 이 때 V^*는 아래와 같다.

$$V^* = \frac{1}{\theta} \ln\left[\frac{-Sh}{\theta\lambda\mu R\,(e^{-\theta S} - 1)}\right].$$

다음 장에서는 조건에 따라 최소비용을 갖는 목표 잉여금 수준 V와 재투자 수준 S를 수치적으로 구해본다.



(a) (b)

(c)

Figure 4.1. $C(S)$, $0 \leq S \leq 10$, in 3 cases((a)$R\lambda\mu e^{\theta V}a(0) \geq \frac{1}{2}h$ $(R = 30, r = 0.03, h = 0.05)$; (b)$R\lambda\mu e^{\theta V}a(0) < \frac{1}{2}h$, $R\lambda\mu e^{\theta V}a(V) > \frac{1}{2}h$ $(R = 3,\ r = 0.03,\ h = 0.05)$; (c)$R\lambda\mu e^{\theta V}a(V) \leq \frac{1}{2}h$ $(R = 5, r = 1, h = 0.5)$).

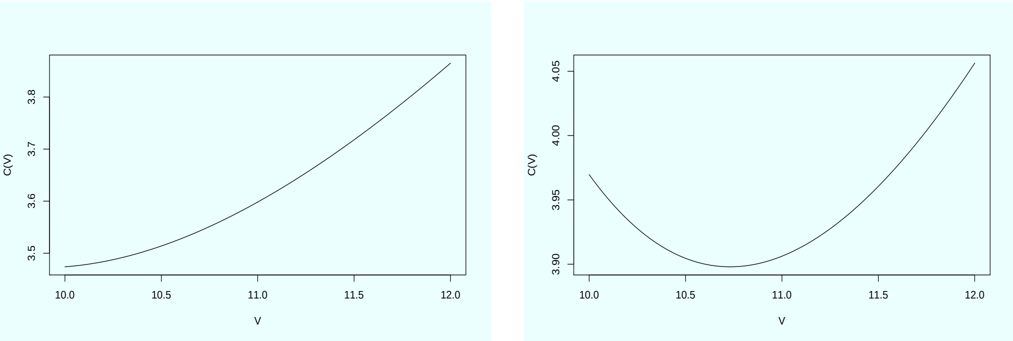
4. Numerical example

이 장에서는 V가 주어졌을 때 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 최소화하는 S와 S가 주어졌을 때 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 최소화 하는 V를 수치적으로 구한다. 보험금 청구는 발생률 $\lambda = 10$인 포아송 과정을 따라 발생하며, 지급되는 보험금의 크기 Y_i는 서로 독립이고 평균 $\mu = 0.1$인 지수분포를 따른다고 가정한다. 그리고 단위시간당 보험료율 $c = 1.05$이다. 먼저 $V = 10$으로 주어졌을 때 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용 $C(S)$를 3.3절에서 구한 3가지 경우로 나누어 그려보면 Figure 4.1과 같다.

마지막으로 $S = 10$으로 주어졌을 때 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용 $C(V)$를 3.3절에서 구한 경우로 나누어 그려보면 Figure 4.2와 같다.

5. 결론

본 논문에서는 보험상품 잉여금의 최적운용정책이 논의되었다. 잉여금이 목표치 V에 이르면 $S(0 \leq S \leq V)$만큼 다른 사업으로의 투자가 이루어진다는 가정과, 잉여금이 음수가 되어도 보험상품을 파산을 시키지 않고 필요한 만큼 차용을 해서 계속 운영해나간다는 가정을 추가하여, 장시간에 걸친 단위시간당 평균운용비용 $C(V, S)$를 구하고, 이를 최소화하는 S와 V의 값이 유일하게 존재함을 보였다. 즉,



(a) $C'(V)|_{V=S} \geq 0$ $(R = 10, r = 0.3, h = 0.5)$ (b) $C'(V)|_{V=S} < 0$ $(R = 15, r = 0.3, h = 0.5)$

Figure 4.2. $C(V)$, $V \geq 10$, in 2 cases.

목표치 V가 주어졌을 때, $C(V,S)$를 최소화하는 투자량 S를 구하고, 반대로, 투자량 S가 주어졌을 때, $C(V,S)$를 최소화하는 목표치 V를 구하는 방법을 제시하였다. $C(V,S)$를 최소화하는 목표치 V와 투자량 S를 동시에 구할 필요가 있을 때에는, 일반적으로 잉여금의 목표치는 과거 경험이나 주변 상황에 의해 어느 정도 범위가 주어지므로, 이 범위에서 주어진 V에 해당하는 최적 투자량 S와 평균운용비용 $C(V,S)$를 구하고, V의 값을 주어진 범위에서 변화시키며, 최소 평균운용비용 $C(V,S)$가 얻어지는 V와 S의 값을 수치적으로 찾으면 되리라본다.

References

Cho, E. Y., Choi, S. K., and Lee, E. Y. (2013). Transient and stationary analyses of the surplus in a risk model, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **20**, 475–480.

Jeong, M. O., Lim, K. E., and Lee, E. Y. (2009). An optimization of a continuous time risk process, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 4062–4068.

Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes* (2nd ed), Academic Press, New York.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2004). *Loss Model: From Data to Decisions*, John Wiley & Sons, New Jersey.

Oh, S. M., Jeong, M., and Lee, E. Y. (2007). A martingale approach to a ruin model with surplus following a compound Poisson process. *The Journal of the Korean Statistical Society*, **36**, 229–235.

Ross, S. M. (1996). *Stochastic Processes* (2nd ed), John Wiley & Sons, New York.

재투자가 있는 잉여금 과정의 최적 운용정책

임세진[a] · 최승경[a] · 이의용[a,1]

[a]숙명여자대학교 통계학과

(2016년 4월 27일 접수, 2016년 5월 31일 수정, 2016년 7월 19일 채택)

요 약

보험 상품의 잉여금은 보험료 수입에 의해 증가하며 고객이 보험료를 청구할 때 감소한다. 보험회사는 잉여금이 충분히 많아지면 잉여금의 일부를 재투자하는 것을 통해 이익을 창출한다. 본 연구에서는 보험료 수입과 청구를 고려하여 잉여금의 수준을 나타낸 기존의 잉여금 모형을 소개하고 기존의 모형에 재투자의 개념과 운용비용을 도입하여 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용을 구하고, 이를 최소화하는 재투자 수준과 목표 잉여금을 구한다.

주요용어: 잉여금 과정, 마팅게일, 선택적표집정리, 재생보상과정, 최적투자정책

[1]교신저자: (04310) 서울특별시 용산구 청파로 47길 100, 숙명여자대학교 통계학과.
E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr