

# 4-자유도 배관 관절의 설계 및 동적 거동 예측

## Design and Dynamic Behavior Prediction of a 4-DOF Piping Joint

이 윤 용\* · 강 환 국\* · 이 종 림\*\* · 임 승 철†  
Yunyong Lee, Hwankook Kang, Jong Rim Lee and Seungchul Lim

(Received March 29, 2016 ; Revised May 2, 2016 ; Accepted May 2, 2016)

**Key Words** : FPSO(부유식 원유 생산-저장-하역 설비), Flexible Joint(유연 관절), Kinetic Coupling(동적 연성), Durability Test(내구성 시험), Position Feedback Control(위치 귀환 제어)

### ABSTRACT

In the building process of FPSOs(floating production, storage and offloading units) is the increasing demand of high performance piping joints that can be installed on its turret system and maintain smooth and long-term flow of ultra-high pressure crude oil, being subjected to external excitations such as wind and wave on the sea. Following such a trend, in this paper, a new-type piping joint of four effective degrees of freedom has been designed, and its dynamic characteristics predicted through mathematical modeling and computer simulations. Moreover, via an example it was shown how the yaw motion in particular can be independently controlled for future durability test despite strong kinetic couplings.

### 1. 서 론

이 논문은 심해에서 부유하며 원유를 생산, 저장, 하역하는 대표적 설비인 FPSO(floating production, storage and offloading unit)<sup>(1,2)</sup>를 위한 부품으로서 향후 그 유용성이 크게 기대되는 새로운 배관 관절에 관한 것이다. 전형적인 FPSO는 Fig. 1에서와 같이 크게 선체, 상부생산설비(topside process), 터릿(turret) 시스템, 라이저(riser) 시스템 등으로 구성된다<sup>(3)</sup>. 한편, 상부생산설비의 각종 배관은 계류 상태인 터릿에 탑재된 스윙블(swivel)과 라이저를 거쳐 원유뿐만 아니라, 원유 생산에 필요한 고압수, 화학물질 등을 이송하는데, 이때 선체는 해양의 파도, 바람, 해류 등에 의하여 지속적으로 롤, 피치, 요

(yaw)를 포함하는 6자유도 운동을 하게 된다. 그러나 기존 스윙블 방식의 배관 관절은 단지 요 방향의 회전만을 허용하므로, 고정부와 운동부사이의 나머지 상대 운동들이 억제되면서 종종 스윙블 자체 혹은 라이저와 연결된 부위의 피로 파괴가 진행되곤 한다.

이에 FPSO의 터릿 시스템과 연결된 각종 배관에 최대한 유연성을 부여함으로써 피로 파괴 현상을 근본적으로 예방할 수 있는 배관 관절이 절실히 요구된다. 이러한 관절은 간결하면서도 다자유도를 갖는 기구와 함께, 그 내부를 통과하는 초고압 유체의 누설은 방지하면서도 접촉 부위간의 원활한 운동과 충분히 긴 수명을 보장하는 것이 바람직하다.

그러나 현재 배관 관절 부문을 선도하는 ATS, Star Pipe Products, EBAA Iron과 같은 기업들조차

† Corresponding Author; Member, Dept. of Mechanical Engineering, Myongji University  
E-mail: slim@mju.ac.kr

\* Dong Eun ATS Inc.

\*\* Powerentech Inc.

‡ Recommended by Editor Hyung Jo Jung

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

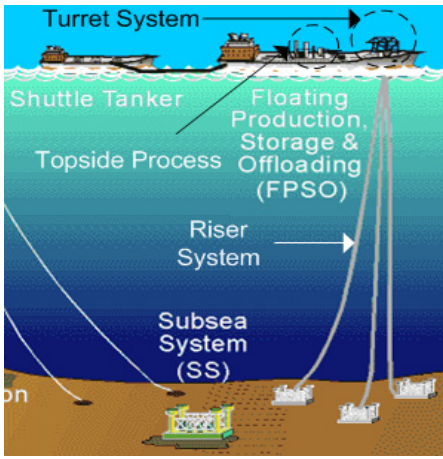


Fig. 1 Typical FPSO and its subsystems

그러한 요구에는 부응하지 못하고 있다<sup>(4-6)</sup>. 왜냐하면, ATS사는 사용 압력은 최대 206.7 bar이지만 볼 관절과 팽창(expansion) 관절을 별개로 개발해 왔기에 각 제품의 자유도가 불충분하고, 나머지 두 기업은 위의 볼과 팽창 관절이 직렬로 연결된 구조라서 간결하지 못할 뿐만 아니라 사용 압력도 24.1 bar인 저압용 관절만을 공급하고 있기 때문이다.

이에 이 논문에서는 보다 간결한 구조이면서도 초고압에서 충분한 범위와 개수의 운동 자유도를 갖는 새로운 배관 관절(이하 리플렉션 관절이라 칭함)을 제안하고, 그의 기본 설계 데이터와 수학적 모델에 근거하여 동특성을 예측하고자 한다. 또한 그러한 관절의 향후 내구성 시험에 대비하여 각 자유도별 독립적인 운동 구현 방안에도 고찰한다.

## 2. 관절의 설계 목표 및 개념

관절의 설계 목표는 FPSO의 터릿 시스템과 연결된 각종 배관에 4개의 주요 자유도 즉, 피치, 요, 롤 회전 그리고 팽창/수축에 해당하는 병진 운동을 부여하며, 초고압으로 그 내부를 통과하는 유체의 누설을 방지하는 것이다. 보다 더 구체적인 목표 사양은 Table 1에 제시되어 있다.

이러한 목표를 달성하기 위하여, 이 논문에서는 적절한 형상과 크기를 갖되 Fig. 2에 보인 개략도와 같이 하우징 내부에서 볼이 회전하고, 그 볼 내부에서 다시 중공 원통형 슬라이더가 병진 운동하는 형태로 관절의 기구를 설계한다. 또한 하우징 내면에

Table 1 Design specifications

Item	Design target
Max. pressure	200 bar
Max. yaw angle stroke	20 deg (peak-to-peak)
Max. pitch angle stroke	20 deg (peak-to-peak)
Max. roll angle stroke	Unlimited
Max. linear stroke	75 mm (peak-to-peak)

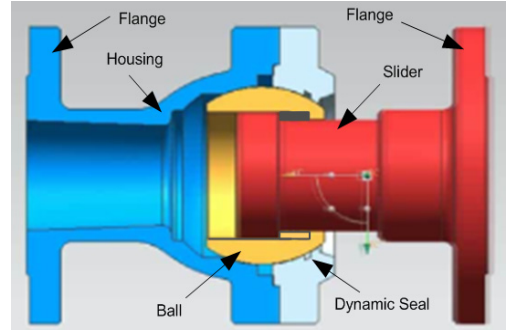


Fig. 2 Schematic of the reflexion joint

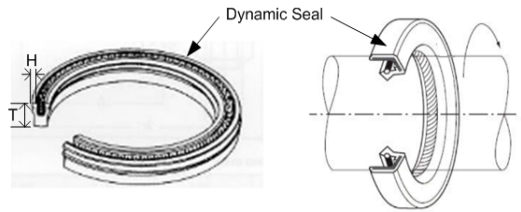


Fig. 3 Dynamic seal and its assembly example

설치된 동적 실(seal)들에는 배압을 가하여 실 양단의 압력 차를 줄임으로써 그들의 수명을 최대한 연장하고, 내부 유체의 누설은 막으면서도 접촉 부위 간의 원활한 운동을 보장할 수 있도록 적절한 여유 틈새를 주어 설계한다. 그러한 동적 실의 형상과 조립의 일례는 Fig. 3에 보인 바와 같다.

한편, 목표 행정의 크기를 최대한으로 활용하기 위하여는 외부 힘/모멘트가 작용하지 않을 때는 관절이 가급적 정적 평형위치 즉, 원점으로 자동 복귀하는 특성을 갖는 것이 바람직하다. 4절에서 다시 정량적으로 다루겠지만, 다행히 볼의 경우에는 복원력과 복원 모멘트가 각각 하우징 내면에서 볼을 감싸고 있는 실의 탄성, 관절 내부에 존재하는 유체의 내압과 배압에 의하여 생성될 수 있다. 그러나 슬라이더의 경우에는 구조상으로 복원력을

얻기 어렵기에, 최소한 내부 유체의 압력에 의한 축방향 힘은 균형을 이루도록 양 단면의 크기를 잘 조정하는 것이 필요하다.

### 3. 수학적 모델링

Fig. 2의 리플렉션 관절은, 하우징이 고정되었다고 간주할 때 크게 좌편의 고정부와 볼과 슬라이더를 포함하는 우편의 가동부로 구성된다. Fig. 4는 그 중 가동부만을, 슬라이더 외면 좌/우측에 존재하는 단과 그와 접촉 시 슬라이더의 병진을 정지시키기 위해 볼 내면 우측에 설치된 돌출부 등을 무시한 채, 간략히 재도시한 것으로서 모델링에 사용된 다음과 같은 좌표계와 변위 등을 포함하고 있다.

먼저, 고정부에 설치되는 직교 관성 좌표계와 볼에 설치된 좌표계를 각각  $\{OXYZ\}$ 와  $\{oxyz\}$ , 볼 좌표계  $\{oxyz\}$ 에서 측정되는 슬라이더의 상대 병진 변위를  $x_G$ 로 나타내었다. 동시에, 관절 하우징과의 사이에 존재하는 여유 틈새 공간 내에서 볼에 발생하는 3차원 병진 변위를  $X, Y, Z$  그리고 오일러 각<sup>(7)</sup>으로 3차원 방위를 표현하기 위한 요, 피치, 롤 각을 각각  $\phi, \theta, \psi$ 로 나타내었다.

위와 같은 총 7개의 운동 자유도로 구성된 형태(configuration) 벡터를 일반화 좌표 벡터  $\mathbf{x} = [X \ Y \ Z \ x_G \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ 로 정의할 때, 계의 운동 에너지, 위치 에너지, 그리고 비보존 가상일에 기여하는 일반화 힘을 구하여 라그랑지(Lagrange) 방정식<sup>(8)</sup>에 대입하여 연산하면, 식 (1)과 같은 가동부의 비선형 운동방정식을 얻을 수 있다.

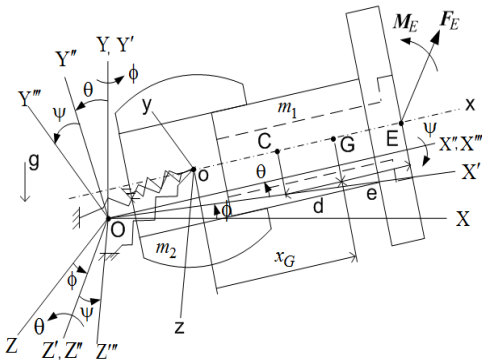


Fig. 4 Movable parts of the reflexion joint

$$M(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

여기서 계수 행렬  $M(\mathbf{x})$ ,  $C$ ,  $K$ 은 각각 질량, 감쇠, 강성 행렬을 나타내며,  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  항은 각각 코리올리 및 원심력, 중력, 유체의 내압 및 배압에 의한 힘, 볼과 슬라이더간의 접촉력, 슬라이더의 E점에 작용하는 외부 가진력 관련 벡터를 나타낸다. 이들 계수 행렬과 벡터의 요소는 부록에 수록된 바와 같다.

### 4. 동적 거동 모사

#### 4.1 내압과 배압의 영향

관절 내부 유체의 압력은 관절의 응력을 증가시키지만, 비선형적 굽힘 강성을 발생시켜 관절을 평형 위치로 복귀시키는 순기능도 하게 된다. 예를 들어 볼의 중립 상태(즉, 슬라이더의 변위  $x_G=d$ , 롤 각  $\psi=0$ )에서, 요 및 피치 각과 내압/배압에 의한 볼 중심에 대한 해당 방향 모멘트의 관계를 부록에 제시한  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  식에 근거하여 3차원 곡면과 그의 2차원 투영도로 도시하면 각각 Figs. 5, 6과 같으므로 위의 사실을 확인할 수 있다.

#### 4.2 가동부의 시간 응답

연철 재질의 가동부의 밀도( $=7.8 \text{ g/cm}^3$ )와 볼과 슬라이더의 기하학적 형상 등으로부터 각각의 질량과 이너서(inertia)를 구하고, 폴리우레탄을 탄소 섬유로 보강한 실 재질의 영계수와 손실계수<sup>(9)</sup>를 각각  $E$ 와  $\gamma$ 라고 할 때 실의 단위 길이 당 등가 스프링 상수와 등가 감쇠 계수를 각각  $k_{eq} = c_e E H^3 / 4 T^3$ ,  $c_{eq} = \gamma k_{eq} / \omega$ 로 가정할 수 있다. 이때  $c_e$ 는  $k_{eq}$ 의 보정 계수,  $H$ 와  $T$ 는 Fig. 3에 표시된 실 단면의 치수,  $\omega$ 는 주파수이다. 이들을 포함한 모델의 매개변수 값들은 Table 2와 같다.

식 (1)을 수치 적분하면 입력 조건에 따라 다양한 상황에서의 관절의 동적 거동을 예측할 수 있다. 이에 항상 유체의 내압/배압이 고려되고, 슬라이더의 초기 위치  $x_G(0) = d$ 를 제외한 모든 형태 변수의 초기 변위 및 속도가 영인 조건하에서 먼저 자유 응답을 구해보면 Fig. 7과 같다. 그로부터

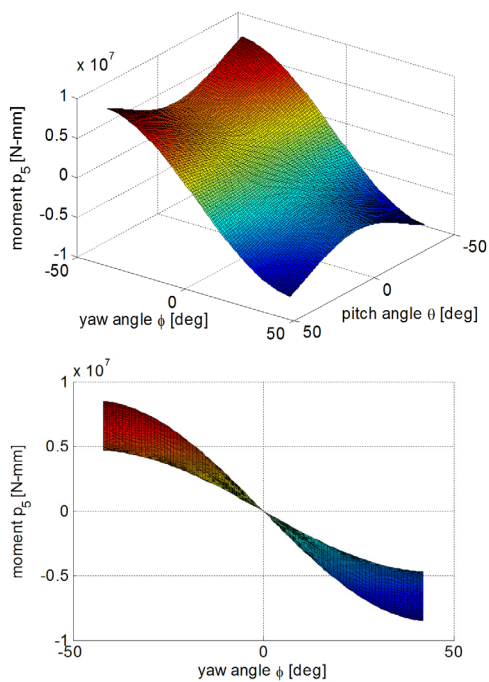


Fig. 5 Restoring moment in yaw direction

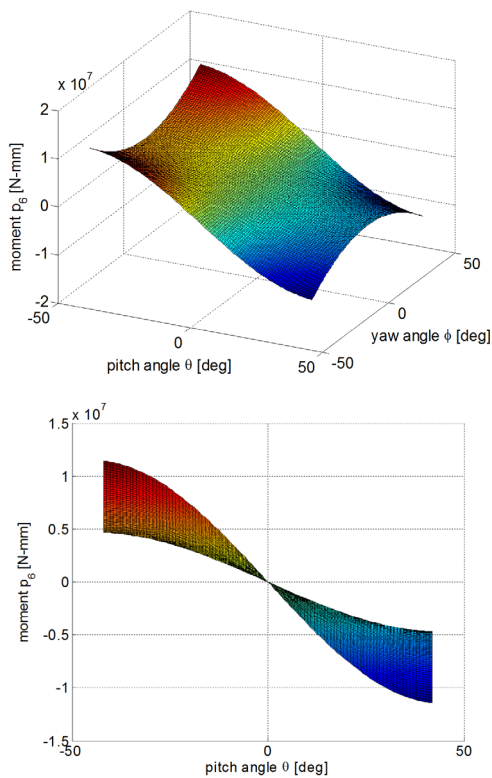


Fig. 6 Restoring moment in pitch direction

Table 2 Parameters of the reflexion joint

$m_1$ (kg)	189.6	$m_2$ (kg)	102.1
$I_{Sx}$ (Kg-mm <sup>2</sup> )	4.87e+6	$I_{Bx}$ (Kg-mm <sup>2</sup> )	1.47e+6
$I_{Sy}$ (Kg-mm <sup>2</sup> )	6.42e+6	$I_{By}$ (Kg-mm <sup>2</sup> )	6.78e+5
$d_1$ (mm)	174.7	$d_2$ (mm)	236.5
$R$ (mm)	180	$d_3$ (mm)	236.5
$\theta_1$ (deg)	42	$\theta_2, \phi_2$ (deg)	65
$\gamma$	0.01	$P_1$ (bar)	100
$P_2$ (bar)	200	$P_3$ (bar)	200
$e$ (mm)	137	$d$ (mm)	220
$x_{BND1}$ (mm)	-73	$x_{BND2}$ (mm)	1
$k_w$ (kg/s <sup>2</sup> )	3.8e+11	$c_w$ (kg/s)	1.7e+7
$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	2e+5	$c_e$	1.1
$H$ (mm)	2.2	$T$ (mm)	5

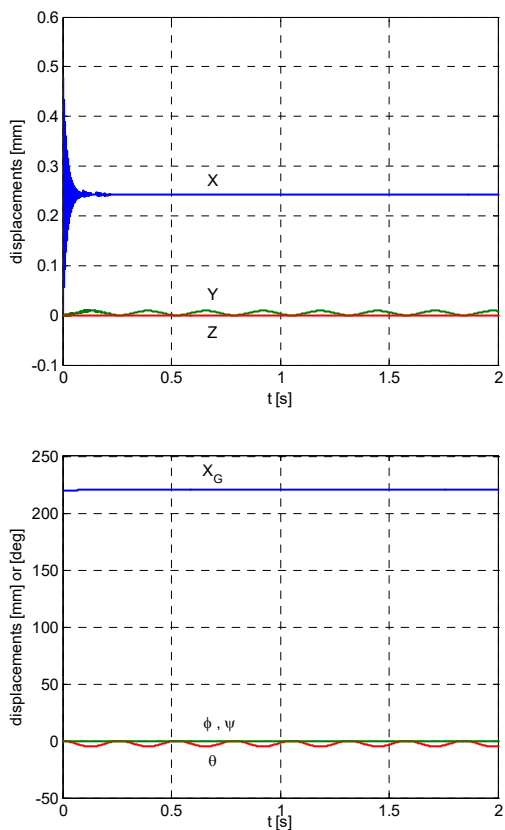
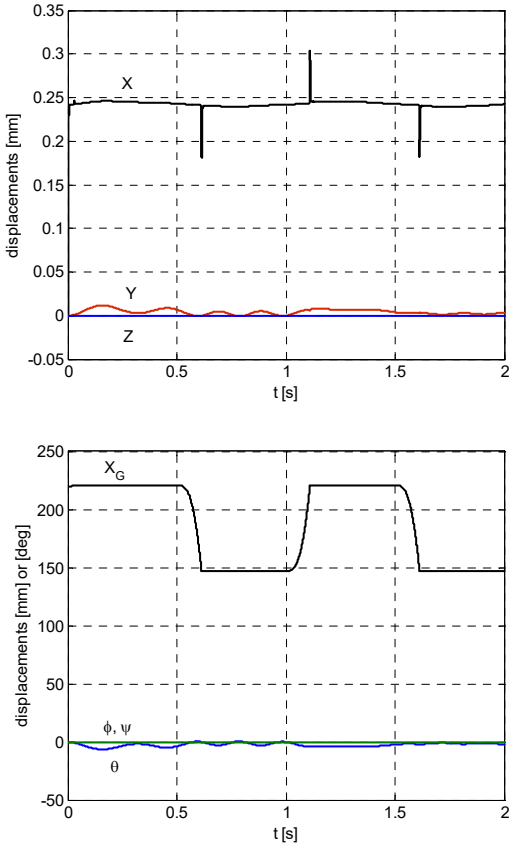


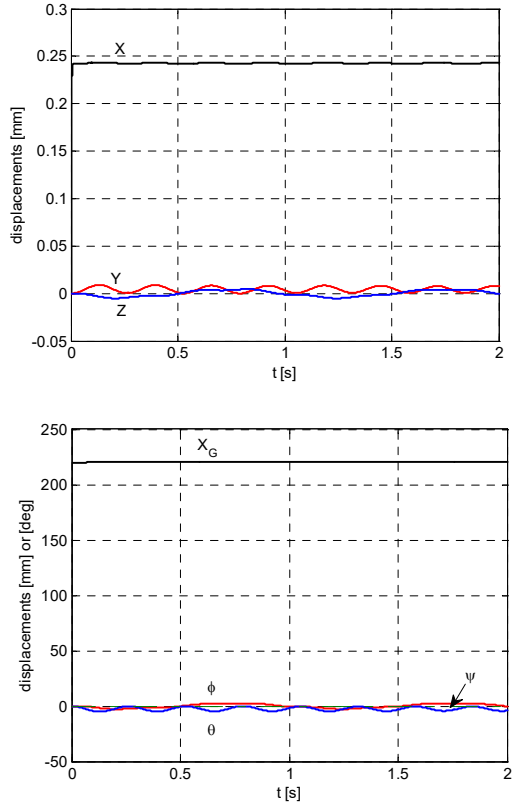
Fig. 7 Free response: (top) ball's translation (bottom) ball's rotation and slider's translation



**Fig. 8** Forced response to a single force  $F_x$ : (top) ball's translation (bottom) ball's rotation and slider's translation

볼의 약 975 Hz 성분인 X방향 진동과, 3.8 Hz 성분인 상하 및 피치 방향으로 연성된 모드의 고유 진동이 존재함을 알 수 있다. 그 중 전자는 실의 감쇠력에 의하여 초기에 사라져 볼이 X방향의 평형위치 0.24 mm에 접근하나, 가동부의 이너셔와 유체 압력의 회전 강성 효과에 주로 기인하는 후자는 거의 감쇠되지 않고 평형 위치 주변에서 상당 기간 지속된다. 이는 수 Hz이하의 주파수 대역을 갖는 해상 풍랑<sup>(1,2)</sup>에 의하여 위의 평형점 근처에서, 비록 그 진폭은 제한적일지라도 위의 연성 모드가 공진할 가능성이 있으므로 향후 이너셔를 감소시키거나 피치방향의 감쇠를 증가시키는 것이 바람직함을 의미한다.

한편,  $w=2\pi\text{rad/s}$ 일 때 좌표계  $\{OXYZ\}$  관점에서 단일 방향 조화 가진력  $F_x=10^4\sin\omega t$  [N]이 가



**Fig. 9** Forced response to a single force  $F_z$ : (top) ball's translation (bottom) ball's rotation and slider's translation

해진 경우, Fig. 8에서와 같이 볼의 X방향 병진과 슬라이더의 병진 운동이 주로 발생함을 알 수 있다. 이때 X방향 볼의 병진 중에는 직선 행정 양단에서 볼과 슬라이더가 접촉하고 그때마다 충격에 의하여 펄스 형태로 진동이 발생했다가 소멸됨을 알 수 있다. 또한  $F_z=10^3\sin\omega t$  [N]인 단일 방향 가진력이 작용한 경우에는 Fig. 9에서 보는 바와 같이, 비선형계의 특징인 불규칙성을 다소간 띠며 볼의 Z방향 병진과 요 운동은 물론이고 볼의 X방향 병진과 전술한 볼의 상하 및 피치 방향 연성 운동도 동시에 야기됨을 알 수 있다. 이러한 관절 운동의 연성 특성은 개별 자유도의 독립적 내구성 시험을 어렵게 한다.

### 5. 내구성 시험 장치

관절의 수명은 실제 현장 적용 시 매우 중요한 요

소이기에 내구성 시험이 필수적이다. 이에 적절한 전용 시험장치의 설계가 요구되는 바, 다음과 같은 3가지 기본 기능을 확보하는 것이 바람직하다.

- i) 한 점(예: 점 E)에 지속적인 힘/모멘트 인가
- ii) 편의상, 좌표계 {OXYZ}에서 운용
- iii) 각 개별 자유도의 독립적 운동 제어

그러나 앞에서 언급한 자유도간의 강한 연성으로 인하여 1축 시험 장치는 위의 3번째 조건을 만족시키기에 부적당하다. 그 뿐만 아니라 부족구동 (underactuation) 즉, 최대 작동기의 수(=6개)가 총 자유도의 수(=7개)보다 작기 때문에 역동력학적 방법에 의하여 원하는 관절 운동을 발생시키는 작동기의 값을 정확히 구하는 것 역시 불가능하다. 따라서 다축 방식을 채용하되, 목표 운동과 측정된 실제 운동과의 오차가 최소화되도록 위치 귀환 제어하는 것이 권장된다.

다음은 그 일례로서 식 (2)와 같은 반복적 요 운동만을 발생시키기 위한 XY-테이블 형태의 2축 시험 장치를 개발하는 경우이다.

$$\phi_d = \frac{\pi}{18} \sin \pi t \tag{2}$$

한편, 좌표계 {OXYZ}에 기준한 E점의 위치는 해당 단위 벡터 세트를  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 라고 할 때 식 (3)과 같으므로  $\phi_d$ 이외의 나머지 변수들의 목표 값을 식 (4)와 같이 설정하는 경우 ( $\bar{X}=0.24 \text{ mm}, \bar{x}_G=221 \text{ mm}$ ), E점의 목표 궤적은 식 (5)로 귀결되며 Fig. 10에 도시된 XZ 평면내 원주상의 구간  $\widehat{AB}$ 에 해당한다.

$$\mathbf{r}_E = \{X+(x_G+e)c\theta c\phi\} \mathbf{i} + \{Y+(x_G+e)s\theta\} \mathbf{j} + \{Z-(x_G+e)c\theta s\phi\} \mathbf{k} \tag{3}$$

$$X_d = \bar{X}, Y_d = 0, Z_d = 0, x_{Gd} = \bar{x}_G, \theta_d = 0 \tag{4}$$

$$\mathbf{r}_{E1} = X_{E1} \mathbf{i} + Z_{E1} \mathbf{k} \tag{5a}$$

$$X_{E1} = \bar{X} + (\bar{x}_G + e) c \phi_d \tag{5b}$$

$$Z_{E1} = -(\bar{x}_G + e) s \phi_d \tag{5c}$$

이에 다음 식 (6)과 같이 관절의 운동을 구속하는 시험 장치에서,  $X_{E1}$ 와  $Z_{E1}$ 가 각각 E점의 X축과 Z축

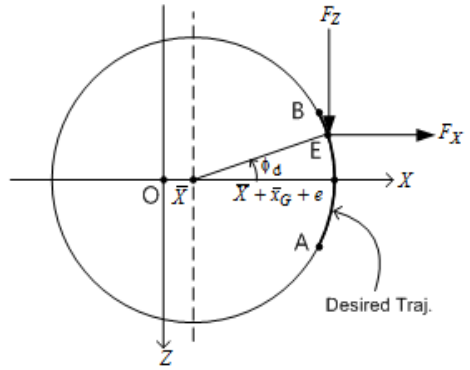


Fig. 10 Desired trajectory of point E under dual actuator forces

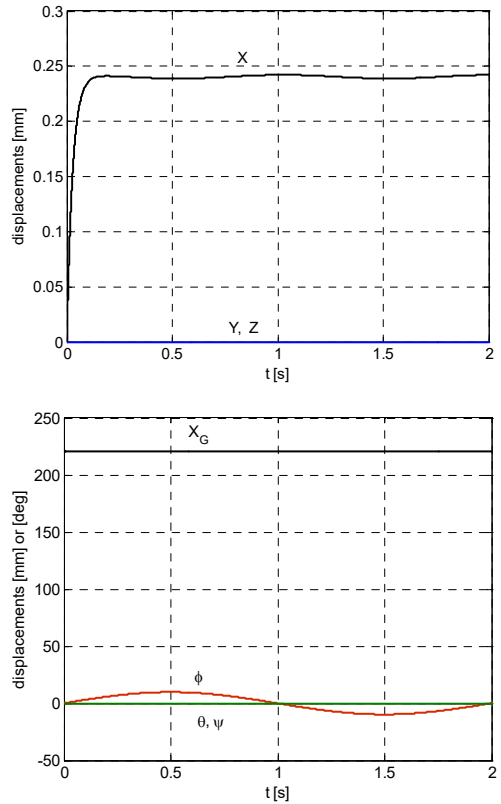


Fig. 11 Joint's motion during yawing test: (top) ball's translation (bottom) ball's rotation and slider's translation

방향 실제 위치일 때 이득  $k_p$ 와  $k_D$ 가 각각  $10^5 \text{ N/mm}$ ,  $10 \text{ Ns/mm}$ 인 비례-미분 위치 제어에 기반하여 식 (7)과 같이 작동기 힘을 인가하는 경우 Figs. 11 ~ 13과



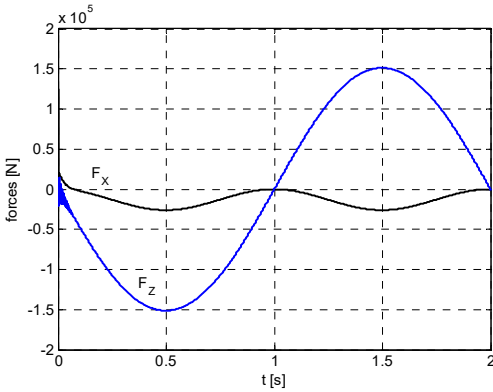


Fig. 12 Actuator forces during yawing test

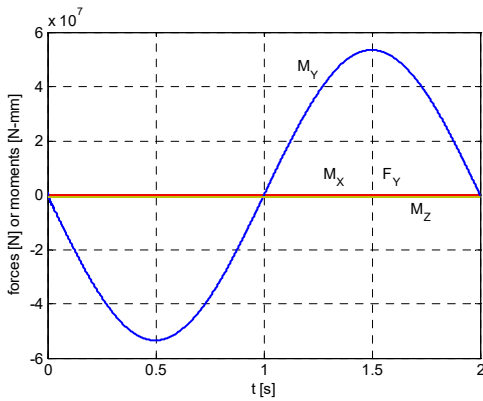


Fig. 13 Reaction forces during yawing test

같은 일련의 결과를 얻을 수 있다. 그 중 Fig. 11로부터는 목표대로 식 (2)와 같은 요 운동이 발생하며 정상 상태 진입 후 나머지 자유도는 그에 맞게 목표 위치 근처에서 미세하게 요동 혹은 정지하는 것과, Fig. 12로부터는 요구되는 작동기 힘의 크기를 알 수 있다.

$$Y=0, Z=0, \theta=0, \psi=0 \tag{6}$$

$$F_X = k_P(X_{Eil} - X_{Ei}) + k_D(\dot{X}_{Eil} - \dot{X}_{Ei}) \tag{7a}$$

$$F_Z = k_P(Z_{Eil} - Z_{Ei}) + k_D(\dot{Z}_{Eil} - \dot{Z}_{Ei}) \tag{7b}$$

한편, Fig. 13에 제시된 4개의 반력(혹은 구속력)은 부분적인 역동력학 방법 즉, 식 (6)과 식 (7) 그리고 그 조건하에서 동력학적으로 구해지는 비구속 운동 ( $X, x_C, \phi$ )의 시간 이력을 원래의 전체 운동방정식 (1)에 대입하여 구할 수 있었다. 이러

한 반력은 결국 시험 장치에 작용하게 될 것이며, 따라서 시험 장치는 이들 힘을 고려하여 강도 설계되어야 한다.

## 6. 결 론

이 논문에서는 컴팩트한 구조이면서 굴절 및 팽창/수축이 가능하고 고압에서 작동하여 향후 FPSO와 같은 해양 플랫폼 등에 적용이 기대되는 신형 4자유도 배관 관절을 설계하고 그의 동특성을 예측하였다. 이를 위하여 미세 병진운동을 포함한 총 7자유도의 운동방정식을 유도하고 제시하였으며 기본설계 데이터와 그 수학적 모델에 기반하여 일련의 컴퓨터 모사를 수행하였다.

그 결과 해상의 풍랑에 의하여 특정 평형점 근처에서 그 진폭은 제한적이지만 볼의 상하 및 피치 방향 연성 모드가 공진할 가능성이 있음과 샘플 조화 가진에 의한 강제응답의 크기와 경향 그리고 자유도 간의 연성 특성 등을 파악할 수 있었다. 또한 제안한 위치 귀환 제어 기능을 갖는 XY-테이블 형태의 장치가 관절의 목표 요 운동을 매우 정밀하게 구현해 내는 일례를 통하여, 강한 동적 연성에도 불구하고 굴절 자유도의 독립적 내구성 시험이 가능함을 보였으며 그때 요구되는 작동기의 힘과 반력도 구하였다.

## References

- (1) Kwak, H. U., Choi, H. S. and Shin, H. S., 2005, A Motion Analysis of FPSO in Irregular Wave Including Swells, *J. of Ship & Ocean Technology*, Vol. 9, No. 2, pp. 21~28.
- (2) Lim, C. G. and Lee, H. Y., 2003, Nonlinear Motion Analysis of FPSO with Turret Mooring System, *J. of the Society of Naval Architects of Korea*, Vol. 40, No. 1, pp. 20~27.
- (3) Naciri, M., Jamet, C., Daran, R., Vedde, S., Drijver, P. and Visser, V., 2011, The Skarv FPSO Turret Mooring System: A 5000-Ton Challenge, *Offshore Magazine*, Pennwell Petroleum, <http://www.offshore-mag.com/articles/print/volume-71/issue-1/drilling-completion/the-skarv-fpso-turret-mooring-system-a-5000-ton-challenge.html>
- (4) <http://www.advancedthermal.net/products.html>

(5) [http://www.starpipelineproducts.com/pdf/joint%20resrain/catalog/starflex\\_14-01-1.pdf](http://www.starpipelineproducts.com/pdf/joint%20resrain/catalog/starflex_14-01-1.pdf)

(6) <http://www.ebaa.com/products/flex/flexible-expansion-joint>

(7) Craig, J. J., 2004, Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 3rd Ed., Prentice Hall, New Jersey, pp. 43~46.

(8) Meirovitch, L., 2001, Fundamentals of Vibrations, McGraw-Hill, New York, pp. 273~276.

(9) Jeon, B. S., Jung, S. S. and Lee, J. K., 2014, Measurement of Loss Factor and Young's Modulus of ABS and PP Specimens by Using a Speaker, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 24, No. 9, pp. 724~730.

**부 록**

$$M(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 & m_1 c \theta c \phi & -m_1 s \phi c \theta x_G & -m_1 s \theta c \phi x_G & 0 \\ m_T & 0 & m_1 s \theta & 0 & m_1 c \theta x_G & 0 & 0 \\ m_T & -m_1 c \theta s \phi & -m_1 c \phi c \theta x_G & m_1 s \theta s \phi x_G & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_{55} & 0 & 0 & I_{Tx} s \theta & 0 \\ & \text{symm.} & & m_1 x_G^2 + I_{Ty} & 0 & 0 & I_{Tx} \end{bmatrix}$$

여기서,

$$m_T = m_1 + m_2, \\ m_{55} = m_1 x_G^2 c^2 \theta + I_{Tx} s^2 \theta + I_{Ty} c^2 \theta, I_{Tx} = I_{Sx} + I_{Bx}, \\ I_{Ty} = I_{Sy} + I_{By}.$$

$$C = \text{diag}([c_X, c_Y, c_Z, 0, 0, 0, 0])$$

여기서,

$$c_X = 4\pi c_{eq} R s \theta_2 c \theta_2, \\ c_Y = c_Z = 4c_{eq} R (2s^2 \theta_2 + 1).$$

$$K = \text{diag}([k_X, k_Y, k_Z, 0, 0, 0, 0])$$

여기서,

$$k_X = 4\pi k_{eq} R s \theta_2 c \theta_2, \\ k_Y = k_Z = 4k_{eq} R (2s^2 \theta_2 + 1).$$

$$V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7]^T$$

여기서,

$$v_1 = -m_1 x_G c \theta c \phi (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2m_1 x_G s \theta s \phi \dot{\theta} \dot{\phi} - 2m_1 (s \theta c \phi \dot{\theta} + s \phi c \theta \dot{\phi}) x_G \\ v_2 = -m_1 x_G s \theta \dot{\theta}^2 + 2m_1 c \theta x_G \dot{\theta} \\ v_3 = m_1 x_G c \theta s \phi (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2m_1 x_G s \theta c \phi \dot{\theta} \dot{\phi} + 2m_1 (s \theta s \phi \dot{\theta} - c \phi c \theta \dot{\phi}) x_G \\ v_4 = -m_1 x_G (\dot{\theta}^2 + c^2 \theta \dot{\phi}^2) \\ v_5 = 2m_1 x_G c^2 \theta x_G \dot{\phi} + 2(-m_1 x_G^2 + I_{Tx} - I_{Ty}) c \theta s \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + I_{Tx} c \theta \dot{\psi} \dot{\theta} \\ v_6 = (m_1 x_G^2 + I_{Ty} - I_{Tx}) c \theta s \theta \dot{\phi}^2 - I_{Tx} c \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + 2m_1 x_G x_G \dot{\theta} \\ v_7 = I_{Tx} c \theta \dot{\phi} \dot{\theta}.$$

$$G(\mathbf{x}) = [0, m_T g, 0, m_1 g s \theta, 0, m_1 g x_G c \theta, 0]^T.$$

$$P(\mathbf{x}) = -[p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7]^T$$

여기서,

$$p_1 = P_{Bx} c \theta c \phi + P_{By} (-s \theta c \phi c \psi + s \psi s \phi) + P_{Bz} (s \psi s \theta c \phi + c \psi s \phi) + P_3 A_S c \theta c \phi \\ p_2 = P_{Bx} s \theta + P_{By} c \psi c \theta - P_{Bz} s \psi c \theta + P_3 A_S s \theta \\ p_3 = -P_{Bx} c \theta s \phi + P_{By} (s \theta s \phi c \psi + s \psi c \phi) + P_{Bz} (-s \psi s \theta s \phi + c \psi c \phi) - P_3 A_S c \theta s \phi \\ p_4 = P_3 A_S \\ p_5 = P_{Bx} (-c \theta s \phi X - c \theta c \phi Z + z_{px} c \psi c \theta + y_{px} s \psi c \theta) + P_{By} \left\{ \begin{matrix} (s \theta s \phi c \psi + c \theta s \psi) X \\ + (c \psi s \theta c \phi - s \psi s \phi) Z \\ - x_{py} s \psi c \theta \end{matrix} \right\} + P_{Bz} \left\{ \begin{matrix} (-s \theta s \phi s \psi + c \phi c \psi) X \\ - (s \psi s \theta c \phi + c \psi s \phi) Z \\ - x_{pz} c \psi c \theta \end{matrix} \right\} \\ p_6 = P_{Bx} (-s \theta c \phi X + c \theta Y + s \theta s \phi Z + z_{px} s \psi - y_{px} c \psi) + P_{By} (-c \theta c \phi c \psi X - s \theta c \psi Y + c \theta s \phi c \psi Z + x_{py} c \psi) + P_{Bz} (s \psi c \theta c \phi X + s \psi s \theta Y - s \psi c \theta s \phi Z - x_{pz} s \psi) \\ p_7 = P_{By} \left\{ \begin{matrix} (s \theta c \phi s \psi + c \psi s \phi) X - s \psi c \theta Y \\ + (-s \psi s \theta s \phi + c \psi c \phi) Z \end{matrix} \right\} + P_{Bz} \left\{ \begin{matrix} (s \theta c \phi c \psi - s \psi s \phi) X - c \psi c \theta Y \\ - (c \psi s \theta s \phi + s \psi c \phi) Z \end{matrix} \right\} \\ P_{Bx} = P_1 (A_{51} - A_{61}) + P_2 (A_{52} - A_{62}) + P_3 A_{53} \\ P_{By} = \{ (P_1 - P_2) c^2 \theta_2 - P_3 s^2 \theta_2 \} \pi R^2 s \theta$$



$$\begin{aligned}
 P_{Bz} &= \{(P_2 - P_1)c^2\phi_2 + P_3s^2\phi_2\}\pi R^2s\phi \\
 A_S &= \pi(d_2^2 - d_3^2) \\
 A_{51} &= -\frac{R^2}{2}\left\{c\phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \frac{s2\alpha_1}{2}\right) + c\theta\left(\beta_1 + \frac{s\beta_1}{2}\right)\right\} \\
 &\quad + \frac{\pi R^2}{4}(3 - c\phi - c\theta) \\
 A_{52} &= \pi R^2c^2\theta_1 - A_{51} - A_{53}, \\
 A_{53} &= \pi R^2(s^2\theta_2c\theta c\phi - s^2\theta_1), \\
 A_{61} &= \pi R^2(1 - s^2\theta_2c\theta c\phi) - A_{51}, \quad A_{62} = A_{51} \\
 \alpha_1 &= s^{-1}\left(\frac{s\theta}{\sqrt{1 - c^2\theta c^2\phi}}\right), \\
 \beta_1 &= s^{-1}\left(\frac{c\phi s\theta}{\sqrt{1 - c^2\theta c^2\phi}}\right) \\
 y_{px} &= \frac{P_1\hat{y}_1 + P_2\hat{y}_2 + P_3\hat{y}_3 - P_1\hat{y}'_1 - P_2\hat{y}'_2}{P_{Bx}} \\
 \hat{y}_1 &= -\frac{R^3}{3}s^2\theta - \frac{c\phi}{3}\sqrt{(R^2 - y_c^2)^3} \\
 &\quad + \frac{1}{3c\theta}\sqrt{(R^2c^2\theta - y_c^2)^3} \\
 y_c &= -\frac{Rc\theta s\phi}{\sqrt{1 - c^2\theta c^2\phi}}, \\
 \hat{y}_2 &= -(\hat{y}_1 + \hat{y}_3), \quad \hat{y}_3 = 8R^3s^2\theta_2c\theta_2s\theta c\theta c\phi/3, \\
 \hat{y}'_1 &= \frac{8}{3}R^3s^2\theta_2c\theta_2s\theta c\theta c\phi - \hat{y}'_2, \quad \hat{y}'_2 = -\hat{y}_1 \\
 z_{px} &= \frac{P_1\hat{z}_1 + P_2\hat{z}_2 + P_3\hat{z}_3 - P_1\hat{z}'_1 - P_2\hat{z}'_2}{P_{Bx}} \\
 \hat{z}_1 &= -\frac{R^3}{3}s^2\phi - \frac{c\theta}{3}\sqrt{(R^2 - z_c^2)^3} + \frac{1}{3c\phi}\sqrt{(R^2c^2\phi - z_c^2)^3} \\
 z_c &= -\frac{Rc\phi s\theta}{\sqrt{1 - c^2\theta c^2\phi}} \\
 \hat{z}_2 &= -(\hat{z}_1 + \hat{z}_3), \quad \hat{z}_3 = 8R^3s^2\theta_2c\theta_2s\phi c\phi c\theta/3, \\
 \hat{z}'_1 &= -\frac{8}{3}R^3s^2\theta_2c\theta_2s\phi c\phi c\theta - \hat{z}'_2, \quad \hat{z}'_2 = -\hat{z}_1 \\
 x_{py} &= \frac{P_1\hat{x}_1 + P_2\hat{x}_2 + P_3\hat{x}_3 - P_1\hat{x}'_1 - P_2\hat{x}'_2 - P_3\hat{x}'_3}{P_{By}} \\
 \hat{x}_1 &= \hat{S} + \frac{2R^3}{3}(c^2\theta - s^3\alpha - \frac{3}{2}\pi s^2\theta_2c\theta_2s\theta c\theta) \\
 \hat{x}_2 &= -\hat{S} + \frac{2R^3}{3}(s^3\alpha - c^2\theta) \\
 \hat{x}_3 &= \hat{S} + \frac{2R^3}{3}(-s^3\alpha + s^3\theta_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}'_1 &= \hat{S} + \frac{2R^3}{3}(-s^3\alpha + c^2\theta), \quad \hat{x}'_2 = -\hat{x}_1 \\
 \hat{x}'_3 &= \hat{S} + \frac{2R^3}{3}(s^3\theta_1 - s^3\alpha - \frac{3}{2}\pi s^2\theta_2c\theta_2s\theta c\theta) \\
 \hat{S} &= \frac{2R^3}{3}[s^3\theta_2s^2\theta c^3\gamma_1 \\
 &\quad + \frac{3}{4}s\theta_2c\theta_2\{s\theta_2s\theta c\theta(2\beta + s2\beta) - 4c\theta_2s^2\theta s\beta\}] \\
 \alpha &= c^{-1}\left(\frac{c\theta_2}{c\theta}\right), \quad \beta = s^{-1}\sqrt{1 - s\gamma_1}, \\
 \gamma_1 &= s^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{\tan\theta_2}\right)
 \end{aligned}$$

$x_{pz} = x_{py}$ 의  $P_{By}$ 와  $\theta$ 를 각각  $-P_{Bz}$ 와  $\phi$ 로 대체한 식.

$$S(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [0 \ 0 \ 0 \ s_4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

여기서,

$$s_4 = \begin{cases} 0 & \text{for } d + x_{BND1} < x_G < d + x_{BND2} \\ k_w\eta + c_w\dot{\eta} & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$F(\mathbf{x}, t) = B\mathbf{u}$$

여기서,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta c\phi & s\theta & -c\theta s\phi & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & 0 & b_{53} & 0 & 1 & 0 \\ b_{61} & (x_G + e)c\theta & b_{63} & s\phi & 0 & c\phi \\ 0 & 0 & 0 & c\theta c\phi & s\theta & -c\theta s\phi \end{bmatrix},$$

$$b_{51} = -(x_G + e)c\theta s\phi, \quad b_{61} = -(x_G + e)s\theta c\phi,$$

$$b_{53} = -(x_G + e)c\theta c\phi, \quad b_{63} = (x_G + e)s\theta s\phi,$$

$$\mathbf{u} = [F_E^T \ M_E^T]^T = [F_X \ F_Y \ F_Z \ M_X \ M_Y \ M_Z]^T.$$

또한 기호  $m_1$ 과  $m_2$ 는 각각 슬라이더와 볼의 질량,  $I_{sx}$ 와  $I_{sy}$ 는 슬라이더의  $x$  및  $y$ 축에 대한 이너서,  $I_{Bx}$ 와  $I_{By}$ 는 볼의  $x$  및  $y$ 축에 대한 이너서,  $c_{eq}$ 와  $k_{eq}$ 는 실의 단위 길이당 등가 감쇠 및 강성 계수,  $R$ 은 볼의 반경,  $g$ 는 중력 가속도,  $d_1$ 과  $d_2$  그리고  $d_3$ 는 각각 슬라이더의 볼 축 내경과 외경 그리고 플랜지 축 내경,  $\theta_1$ 은 볼의 전/후방 평면부의 피

치 각,  $\theta_2$ 와  $\phi_2$ 는 볼에 설치된 전/후방 실의 피치 및 요 각,  $P_1$ 과  $P_2$ 는 실에 작용하는 유체의 배압,  $P_3$ 는 유체의 내압,  $d$ 와  $e$ 는 각각 Fig. 4에 표시된 슬라이더의 C점 (즉,  $x_G=d$ 일 때 O점에 위치하는 점)과 G점 (무게중심) 및 G점과 E점간의 거리,  $x_{BND1}$ 와  $x_{BND2}$ 는 G점의 위치가  $d$ 일 때 행정 양단의 위치와의 차이,  $k_w$ 와  $c_w$ 는 슬라이더가 행정 양단에서 볼 내면의 돌출부와 충돌할 때의 반발을 스프링-댐퍼로 모델링할 때 적용된 접촉점의 스프링 계수 및 감쇠 계수,  $\eta$ 는 그 때의 침투 깊이를 의미한다. 또한 's' 와 'c'은 각각 사인 및 코사인 함수를 나타낸다.



**Seungchul Lim** received a B.S. degree of mechanical engineering from Seoul National University in 1981, M.S. degree from KAIST in 1983, and Ph.D. from Virginia Tech in 1992. He is currently with M.E. department of Myongji University. His research interests include design of advanced dynamic systems, vibration control, and robotics.