

# 프리피스톤 스티어링 엔진의 동역학 모델 예측을 통한 비선형 부하 감쇠 특성에 관한 고찰

## Identification of Damping Characteristics of Free-piston Stirling Engines via Nonlinear Dynamic Model Predictions

심 규 호<sup>†</sup> · 김 동 준<sup>\*</sup>  
Kyuhoo Sim and Dong-Jun Kim

(Received January 14, 2016 ; Revised May 17, 2016 ; Accepted May 17, 2016)

**Key Words** : Free-piston Stirling Engine(프리 피스톤 스티어링 엔진), Dynamics(동역학), Nonlinear Damping(비선형 감쇠), Root Locus(근궤적 선도)

### ABSTRACT

Recently, researches on the free-piston Stirling engines(FPSEs) are actively investigated. FPSEs have merits in its light weight, simple structure, and little need for maintenance, thus becoming a promising solution for the power conversion of renewable energy and waste heat recycle. This paper presents the methodology that estimates damping coefficients using analytical models of linear and nonlinear dynamics for FPSEs, and validates the methodology by comparing with existing experimental results. The analysis model predicts an operable range of linear damping coefficients forming limit cycles by using the root locus, and time responses obtained by numerical integration determines nonlinear damping coefficients. The model predictions are compared with experimental results of the well-known FPSE B-10B. We also investigate the damping characteristics regarding heater temperatures and power piston motions.

### 기 호 설 명

$A_d$  : 디스플레이서 단면적  
 $A_p$  : 파워피스톤 단면적  
 $A_r$  : 디스플레이서 연결봉 단면적  
 $c_p$  : 파워피스톤 감쇠계수  
 $c_d$  : 디스플레이서 감쇠계수  
 $F_{load}$  : 외부 부하  
 $f_C$  : 외부 부하 비선형 감쇠계수  
 $f_L$  : 외부 부하 선형 감쇠계수

$k_p$  : 파워피스톤 스프링 강성계수  
 $k_d$  : 디스플레이서 스프링 강성계수  
 $m_{gas}$  : 작동기체 질량  
 $m_p$  : 파워피스톤 질량  
 $m_d$  : 디스플레이서 질량  
 $P$  : 엔진 내부 압력  
 $P_0$  : 대기압  
 $R$  : 기체상수  
 $V_E$  : 팽창공간 부피  
 $V_R$  : 재생공간 부피  
 $V_C$  : 압축공간 부피

<sup>†</sup> Corresponding Author; Member, Seoul Nat'l Univ. of Sci. and Tech.  
E-mail: khsim@seoultech.ac.kr  
<sup>\*</sup> Dept. of Mechanical System Design Engr., Seoul Nat'l Univ. of Sci. and Tech.

<sup>‡</sup> Recommended by Editor Gi-Woo Kim  
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

## 1. 서 론

최근 심화된 지구온난화와 화석연료의 고갈로 인해 신재생 에너지(renewable energy)의 도입 및 폐 에너지(waste energy)의 재활용에 대한 요구가 증가하고 있다. 최근 스텔링 엔진(stirling engine)은 다양한 열원 활용, 높은 에너지 변환 효율, 구조의 단순성, 그리고 저진동·저소음 등의 장점으로 인하여 소형 열병합발전의 핵심 전력변환장치로 채택되고 있으며, 더 나아가 우주항공, 군수/민수용으로 활발히 연구개발이 진행되고 있다<sup>(1,2)</sup>.

특히 경제적 부가가치가 높은 가정용 열병합발전은 가정에서 필수적인 보일러의 고온 배열을 난방·온수 가열 이전에 전기 생산에 활용함으로써 에너지 비용 절감 효과가 매우 크다. 이미 미국, 유럽 등은 가정용 열병합발전 스텔링 엔진을 상용화하여 보급이 활발히 진행되고 있다<sup>(2)</sup>. 국내에서도 최근 한 보일러 업체가 가정용 1kW급 초소형 스텔링 열병합발전 시스템(m-CHP)을 개발하였다<sup>(3)</sup>. 하지만, 스텔링 엔진은 국내 상용화 기술 부족으로 전량 수입함으로써, 높은 가격으로 시장 확산이 제한되고 있다<sup>(4)</sup>.

스텔링 엔진은 가열/냉각에 의해 온도차를 가지는 밀폐공간 내부의 작동기체가 팽창/압축함으로써 기계 출력을 발생하는 외연기관이다. 일반적으로 가열기(heater), 냉각기(cooler), 열교환기(heat exchanger), 실린더 내부의 디스플레이서 피스톤(displacer piston, DP)과 파워 피스톤(power piston, PP), 두 피스톤을 연결하는 기구부(mechanical linkage)로 구성된다. 가열기의 고온부와 냉각기의 저온부 사이의 온도차가 유지되는 상태에서, DP는 고온부에 위치한 팽창공간(expansion space)과 저온부에 위치한 압축공간(compression space) 사이에 작동기체를 왕래시키고, PP는 외부 부하장치에 연결되어 기계 출력을 발생시킨다. 작동기체는 열전도도가 높고, 낮은 점도를 가지는 헬륨이 주로 사용되고, 높은 출력을 위하여 고압 충전 조건에서 운전된다. 특히 기구부는 PP와 DP의 진폭/위상각을 구속하고, 무게/크기를 크게 증가시키며, 마찰 손실과 유지보수 비용이 크다.

프리 피스톤 스텔링 엔진(free-piston stirling engine, FPSE)은 1971년 Beale이 제안한 엔진으로서<sup>(5)</sup>, 기존 스텔링 엔진의 단점인 기구부를 제거하고, 각

각의 피스톤에 스프링을 연결하여 진동시스템으로 구성된다. 두 진동시스템은 각각 독립적인 진동시스템으로 밀폐된 작동기체의 내부 압력에 의해 연성되어 작동한다. 특히, FPSE는 수렴도 발산도 하지 않는 일정 진폭의 한계궤도(limit cycle)를 형성하며 작동함으로써 작동 조건이 비교적 제한적이다. 따라서, 안정적인 작동 조건 탐색과 동적 성능 예측을 위하여 동역학 해석이 중요하다. 특히 피스톤에 작용하는 감쇠 요소는 한계궤도 형성 및 형태에 직접적인 영향을 미치므로 엔진의 작동 안정성과 출력 성능에 큰 영향을 미친다. 특히, FPSE와 유사한 자력(self-excited) 진동을 가지는 2자유도 진동 시스템에 대하여, 마찰 감쇠에 따른 한계궤도의 형성과 크기에 관한 동역학 해석 연구<sup>(7)</sup>는 양쪽의 감쇠가 동시에 증가할 때 한계궤도의 크기가 감소하고, 한쪽의 감쇠만 증가하면 다른 쪽의 한계궤도가 증가하는 연성된 효과를 보였다. 따라서, 감쇠 요소는 자력 진동에 의한 한계궤도를 가지는 진동시스템의 핵심 인자임을 보여준다.

FPSE 동적 거동 예측에 관련하여 감쇠 요소를 선형 또는 비선형으로 정의하여 많은 해석 연구가 진행되었다.

Bevenuto et al<sup>(8)</sup>는 공기스프링의 히스테리시스 손실과 열교환기 내의 압력강하를 선형 감쇠요소로 가정하여, 안정적인 엔진 거동과 효율 최적화를 위한 PP-DP간의 위상각을 도출하였다. 하지만, 선형 동역학 해석은 정상상태의 엔진 작동주파수 예측은 가능하지만, 작동 진폭 및 출력을 예측하기 어려울을 보여준다.

Ulusoy<sup>(9)</sup>는 FPSE 외부 부하, 압력 강하, 공기 스프링의 감쇠요소를 선형 및 비선형항의 합으로 모델링하여 동역학 해석을 수행하였다. 외부 부하의 비선형 감쇠계수는 변위제곱에 비례하는 형태로 가정하였다. 선형 해석을 통하여 FPSE 주기해(한계궤도)가 발생하는 외부 부하의 선형 감쇠계수를 예측하였고, 주기해의 진폭 예측을 위해서는 외부 부하와 압력 강하에 대한 비선형 감쇠계수 정의가 필요함을 보여주었다. 또한 스프링 강성계수의 비선형성은 한계궤도의 불안정성을 이끈다고 밝혔다.

이와 같이 감쇠 요소는 FPSE의 작동 안정성과 출력 성능에 큰 영향을 미치는 인자이다. Gordon<sup>(6)</sup>은 FPSE 내부에서 발생하는 손실을 열적 손실(thermal

loss)과 동적 손실(dynamic loss)로 구분하여 정리하였다. 열적 손실은 효율에는 영향을 미치지 않지만, 동적 거동에는 큰 영향이 없다고 보고하였다. 반면, 동적 손실은 점성 소산(viscous dissipation), 작동기체 누출(working fluid leakage), 기계적 마찰(mechanical friction) 등에 의해 발생하며, 엔진의 작동 성능에 큰 영향을 미친다. 특히, 작동주파수, 피스톤 변위/속도, 내부압력, 온도 등에 의해 복합적으로 결정되어 예측이 어렵고, 비선형 효과가 존재한다고 보고하였다. 따라서, 감쇠 요소의 정의를 위한 동적 손실의 추정에는 엔진 또는 구성요소의 해석적/실험적 연구를 필요로 한다. 즉, 동적 계수 추정을 위한 전용(dedicated) 실험장치 또는 엔진의 온도 분포, 작동 기체의 유동/압력, 작동 기체의 누출 유량 등을 예측하는 열유동 해석을 요구한다.

현재까지 FPSE 동역학 해석 연구는 주로 감쇠를 가정하거나<sup>(10,11)</sup>, 기존 실험데이터의 감쇠값<sup>(8,9)</sup>을 이용함으로써, 실제 작동 상태에서의 감쇠계수를 추정하고 동역학 거동에 미치는 영향을 분석함에 제한이 있다. 따라서, 이 연구에서는 FPSE 비선형 동역학 해석 모델 예측과 공개된 FPSE B-10B의 성능 실험데이터<sup>(10)</sup>를 이용하여 선형/비선형 감쇠 추정 방법론을 제시하고 FPSE 감쇠 특성에 관하여 고찰하였다.

### 2. FPSE 해석 모델

Fig. 1은 베타형( $\beta$ ) FPSE 개념도를 보여준다. 동일선 상에 두 개의 피스톤(DP, PP)과 가열기, 냉각기, 그리고 재생기로 구성된다. DP는 실린더 내부 공간을 팽창공간과 압축공간으로 분리하고 작동기체를 왕래시킨다. PP는 외부 부하장치와 연결되어 동력을 발생한다. 외부 열에너지는 가열부에 공급되고 냉각부로 방출되어 온도차를 발생시킨다. 재생기는 작동기체의 유로 상에 위치하여 냉각 시 방출열을 일부 저장한 후 가열 시 공급함으로써 열효율을 높인다. 이 연구에서는 동역학 모델의 단순화를 위하여 재생기에 의한 압력 강하를 무시하고, 균일한 내부 압력을 가정한다. 재생기 온도는 팽창공간과 압축공간의 평균온도로 가정한다. 즉, 전체적인 해석 모델은 참고문헌<sup>(9,11-13)</sup>을 따른다.

FPSE는 2자유도 진동 시스템으로서 두 개의 피스톤 질량에 각각 강성/감쇠 요소를 가지고, 내부

압력에 의해 동역학적으로 연성된다. 지배 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_p \ddot{x}_p &= -(A_p - A_r)(P - P_0) - c_p \dot{x}_p - k_p x_p - F_{load} \\ m_d \ddot{x}_d &= -A_r(P - P_0) - c_d \dot{x}_d - k_d x_d \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x_p, x_d$ 는 각각 PP, DP 변위이고,  $A_p, A_d, A_r$ 은 각각 PP, DP, DP rod의 단면적이다.  $P$ 는 엔진 내부 압력이고,  $P_0$ 는 대기압(또는 PP 외부 압력)이다.  $k_p, k_d$ 는 각각 PP, DP강성계수이고,  $c_p, c_d$ 는 각각 PP, DP감쇠계수이다. 피스톤 사이의 상대운동에 의한 연성 감쇠(coupled damping)는 접촉 면적이 작으므로 무시한다<sup>(12)</sup>.

FPSE에 작용하는 댐퍼 또는 선형발전기와 같은 외부 부하 장치는 비선형 감쇠로 고려한다. 즉, 비선형 감쇠계수에 변위의 제곱을 취하여 식 (2)와 같이 모델링하고 비선형 감쇠계수의 최대/최소 한계값은 무차원수를 이용하여 추정한다<sup>(9)</sup>. 무차원 비선형 감쇠계수는 식 (3)과 같다.

$$F_{load} = (f_L + f_c x_p^2) \dot{x}_p \quad (2)$$

$$\tilde{f}_c = \frac{f_c \omega (l_p / 2)^3}{P_m A_p} \quad (3)$$

여기서  $\omega, l_p$ 는 각각 FPSE의 작동주파수, PP의 최대 변위를 나타내고,  $P_m$ 은 엔진내부의 평균압력을 나타낸다<sup>(9)</sup>.

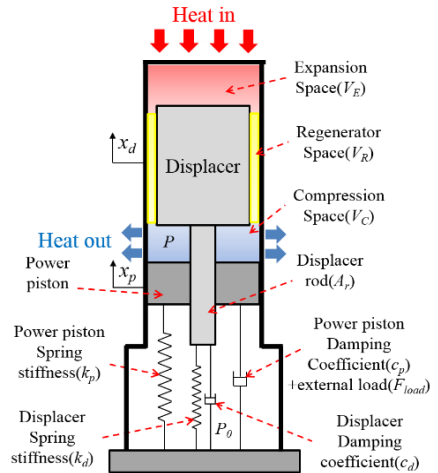


Fig. 1 Schematic of  $\beta$ -type FPSE

FPSE 운동방정식의 압력은 이상기체 상태방정식을 이용하여 다음과 같이 정의된다. 작동기체는 공기이다.

$$P = m_{gas} R \left( \frac{V_E}{T_E} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_C}{T_C} \right)^{-1} \quad (4)$$

여기서,

$$V_E = V_{E0} - A_d x_d, \quad V_C = V_{C0} + (A_d - A_r) x_d - (A_p - A_r) x_p$$

이다.  $m_{gas}$ ,  $R$ 은 각각 엔진 내 전체 작동기체질량, 기체상수이다.  $T_E$ ,  $T_C$ 는 각각 팽창공간 온도, 압축공간 온도이다.  $V_E$ ,  $V_C$ ,  $V_R$ 은 팽창공간, 압축공간, 재생기 공간 부피이다. 재생기 공간은 일정하다.  $V_{E0}$ 와  $V_{C0}$ 는 피스톤 평형 위치에서 각각 팽창 및 압축 공간 부피이다.

엔진 작동 압력은 식 (4)의 편미분 및 선형화를 통하여 부피에 대한 압력 변화율을 구함으로써 식 (5)와 같이 정의된다.

$$(P - P_0) = C_E(V_E - V_{E0}) + C_C(V_C - V_{C0}) \quad (5)$$

여기서,

$$\frac{\partial P}{\partial V_E} = -\frac{m_{gas} R}{T_E} \left( \frac{V_{E0}}{T_E} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_{C0}}{T_C} \right)^{-2} \equiv C_E$$

$$\frac{\partial P}{\partial V_C} = -\frac{m_{gas} R}{T_C} \left( \frac{V_{E0}}{T_E} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_{C0}}{T_C} \right)^{-2} \equiv C_C$$

FPSE 상태방정식은 식 (5)의 좌변을 식 (1)에 대입하여 정리하여 변수를 상태변수로 정의해 다음과 같이 얻을 수 있다<sup>(14)</sup>.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A}{m_p} & \frac{B}{m_p} & -\frac{c_p + f_L}{m_p} & 0 \\ \frac{C}{m_d} & \frac{D}{m_d} & 0 & -\frac{c_d}{m_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_c}{m_p} x_p^2 \dot{x}_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$z_1 = x_p, z_2 = x_d, z_3 = \dot{z}_1, z_4 = \dot{z}_2$$

$$\begin{aligned} A &= k_p - C_C(A_p - A_r)^2 \\ B &= -C_E A_d(A_p - A_r) + C_C(A_d - A_r)(A_p - A_r) \\ C &= -C_C A_r(A_p - A_r) \\ D &= k_d - C_E A_d A_r + C_C A_r(A_d - A_r) \end{aligned}$$

### 3. FPSE 감쇠 추정

FPSE 동역학 거동 예측은 엔진 출력부인 PP에 작용하는 부하 감쇠의 추정을 필요로 한다. 이 연구에서는 기존 실험데이터<sup>(10)</sup>를 기반으로 고유치 해석과 과도응답해석을 통하여 부하 감쇠를 추정한다. 부하 감쇠는 선형 감쇠계수( $c_p$ ,  $c_d$ )와 비선형 감쇠계수( $f_c$ )로 모델링하고, 선형 감쇠계수는 고유치 해석에서, 비선형 감쇠계수는 과도응답해석에서 고려된다.

FPSE 고유치 해석은 상태 운동방정식 식 (6)의 시스템 행렬에서 PP 감쇠계수( $c_p$ )를 변화시키며 근궤적 선도(root locus)를 예측함으로써, 주기적 한계궤도를 형성하는 엔진 작동점을 탐색하고 피스톤 감쇠계수( $c_p$ ,  $c_d$ )와 작동주파수를 예측한다. 여기서 고유치가 순허수, 즉 실수부가 '0'인 지점에 놓일 때 진동 시스템은 발산도 수렴도 하지 않는 한계궤도(limit cycle)를 형성하는 엔진의 작동점이 된다<sup>(14)</sup>. 여기서, PP 감쇠계수( $c_p$ )는 부하감쇠 선형항( $f_L$ )을 포함한다. 반면, 과도응답 해석은 운동방정식의 수치적분을 이용한 피스톤의 시간 응답으로서 한계궤도 진폭을 예측한다. 하지만 비선형 부하 감쇠를 도입하지 않으면 피스톤의 응답이 초기조건(피스톤 초기 위치 및 속도)에 따라 값이 바뀌기 때문에 초기조건에 관계없이 일정한 변위를 예측하기 위해서는 비선형 부하 감쇠가 필요하다

FPSE 선형 및 비선형 동역학 해석을 통한 감쇠의 추정과정은 다음과 같이 3단계로 이루어진다.

- 1단계: (고유치 해석) 온도에 따른 FPSE의 작동 가능한 선형 감쇠계수의 범위 예측.
- 2단계: (과도응답 해석) 피스톤 진폭비 예측 및 엔진 형상 한계를 기준으로 선형 감쇠계수의 범위 축소.
- 3단계: (과도응답 해석) 감쇠계수  $c_p$ ,  $c_d$ ,  $f_c$  변화에 대한 PP 변위 예측 및 실험 비교를 통하여 선형 및 비선형 감쇠계수 결정.

FPSE 감쇠는 내부감쇠와 외부감쇠로 구분한다. 내부 감쇠는 PP, DP 감쇠계수( $c_p, c_d$ )로 선형감쇠이며 피스톤과 실린더 사이의 상대속도에 의한 전단유동에 의한 손실을 묘사한다. 또한 내부감쇠는 재생기 압력 강하에 의한 감쇠도 존재하지만, 참고엔진<sup>(10)</sup>은 재생기가 존재하지 않아 무시하였다. 외부감쇠는 발전기, 댐퍼 등과 같은 외부 부하장치의 부하감쇠를 나타내는데 식 (2)와 같이 선형감쇠계수( $f_l$ )와 비선형감쇠계수( $f_c$ )의 합으로 표현하였다<sup>(9)</sup>. 하지만 B-10B FPSE는 외부 부하장치가 없으므로,  $f_c$ 는 PP와 실린더 간의 매우 작은 간격에 의해 발생하는 유동 마찰 및 일부 건마찰로 인한 비선형 감쇠계수를 의미한다.

Table 1은 감쇠 추정에 사용된 FPSE B-10B의 실험 결과이고, Table 2는 해석 모델에 사용된 FPSE B-10B의 설계 파라미터이다<sup>(10)</sup>. 참고로 DP변위는 참고문헌에서 제시되지 않았다.

감쇠추정 1단계는 FPSE 고유치 해석을 통하여 온도에 따른 FPSE의 작동 가능한 PP와 DP의 선형 감쇠계수 범위를 예측하는 것이다.

**Table 1** Experimental results of FPSE B-10B<sup>(10)</sup>

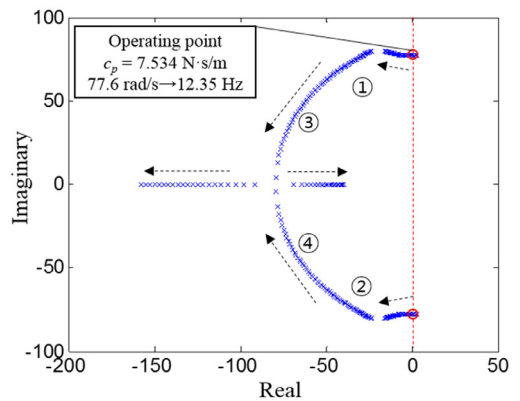
| Heater temp.(°C) | PP stroke(mm) | Operating freq.(Hz) |
|------------------|---------------|---------------------|
| 130              | 21.8          | 13                  |
| 134              | 24.2          | 13                  |
| 137              | 25.2          | 12.7                |
| 138              | 28.2          | 12.7                |
| 162              | 32.6          | 12.45               |

**Table 2** Physical parameters of FPSE B-10B<sup>(10)</sup>

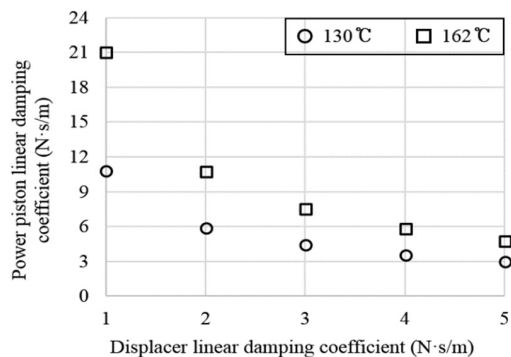
| Parameter                             | Value                 | Unit           |
|---------------------------------------|-----------------------|----------------|
| Mass of PP( $m_p$ )                   | 0.5295                | kg             |
| Mass of DP( $m_d$ )                   | 0.0867                | kg             |
| Stiffness of PP system( $k_p$ )       | 600                   | N/m            |
| Stiffness of DP system( $k_d$ )       | 650                   | N/m            |
| Area of PP( $A_p$ )                   | $1.01 \times 10^{-3}$ | m <sup>2</sup> |
| Area of DP( $A_d$ )                   | $9.08 \times 10^{-4}$ | m <sup>2</sup> |
| Area of DP rod( $A_r$ )               | $1.27 \times 10^{-4}$ | m <sup>2</sup> |
| Initial expansion space( $V_{E0}$ )   | $1.71 \times 10^{-6}$ | m <sup>3</sup> |
| Initial compression space( $V_{C0}$ ) | $16.6 \times 10^{-6}$ | m <sup>3</sup> |
| Max. DP stroke(mm)                    | 34.5                  | mm             |
| Charge pressure( $P_0$ )              | 101 325               | Pa             |
| Working gas constant( $R$ )           | 286.9                 | J/kg·k         |

일례로 Fig.2는 고유치 해석을 통한 작동점 탐색과정을 보여주는데, FPSE B-10B의 가열부 온도 162 °C,  $c_d = 3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 에서 PP 감쇠 증가( $c_p = 0 - 100 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ )에 대한 근궤적 선도이다. 4차 특성방정식은 4개의 극(pole)을 형성하고, 근궤적은  $c_p$ 가 증가함에 따라 근의 실수부의 값이 대체로 감소한다. 즉, 발산하는 우반면에서 수렴조건을 가진 좌측으로 이동한다. 엔진 작동점은 한계궤도 형성 조건인 근궤적이 허수축에 일치할 때, 즉 실수부가 '0'이고, 허수부는 작동주파수이다. 이때 PP 감쇠계수  $c_p = 7.53 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 이고, 작동주파수는 12.35 Hz이다. 작동주파수 예측은 실험과 매우 일치한다.

Fig. 3은 위와 같은 고유치 해석을 통하여, FPSE



**Fig. 2** Root locus with PP linear damping  $c_p$  increasing from 0 to 100 N·s/m at heater temperature of 162 °C. DP linear damping coefficient  $c_d = 3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$

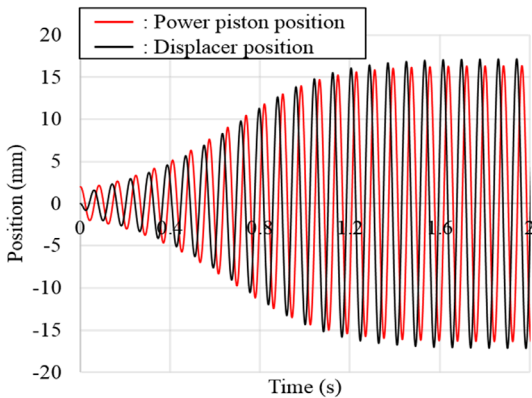


**Fig. 3** Predicted PP linear damping  $c_p$  at operating point from root locus versus increasing  $c_d$  at heater temperatures of 130 °C and 162 °C

B-10B 가열부 최소/최대 온도 130 °C, 162 °C에서 DP 감쇠계수 변화( $c_d = 1 \text{ N}\cdot\text{s/m} - 5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ )에 대한 엔진 작동점의 PP 감쇠계수( $c_p$ ) 예측을 보여준다. 해석 결과, DP 감쇠계수의 증가는 작동 가능한 PP 감쇠계수의 감소를 유발하고, 가열부 온도증가로 인한 공급 열에너지의 증가는 PP 감쇠계수를 증가하는 것을 알 수 있다. 실험 엔진의 감쇠 범위는 최저 가열부 온도 130 °C를 기준으로  $c_d < 5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $c_p < 10 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 이다.

감쇠주정 2단계는 FPSE 과도응답 해석, 즉 상태 운동방정식의 수치적분을 이용한 피스톤 변위 예측을 통하여 엔진 형상 한계를 기준으로 선형감쇠 계수의 범위를 축소한다. 즉, DP의 진폭이 과도하게 증가하면 실린더와 충돌이 발생하기 때문에 엔진 형상에 의해 DP진폭이 제한된다. 실린더와 DP간에 충돌이 발생되지 않는  $c_p$ ,  $c_d$ 의 값의 범위는 PP와 DP에 대한 진폭비(PP stroke/DP stroke)예측을 통하여 세밀하게 추정된다.

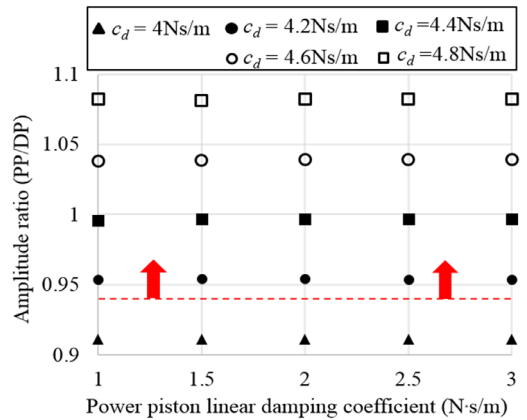
일례로 Fig. 4는 과도응답 해석을 통한 피스톤 변위예측을 보여주는데, FPSE B-10B의 가열부 온도 162 °C에 대하여 초기 피스톤 위치(PP: 2 mm, DP: 0 mm)에서 작동시간 1.5초까지 PP, DP의 예측된 과도응답이다. 감쇠조건은  $c_p = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $f_c = 54\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3$  ( $\tilde{f}_c = 0.2$ )이다. 엔진은 작동시간 약 1.5초 후 정상상태에 도달하며, 작동주파수 12.21 Hz, PP 및 DP 스트로크는 각각 32.76 mm, 34.33 mm, 진



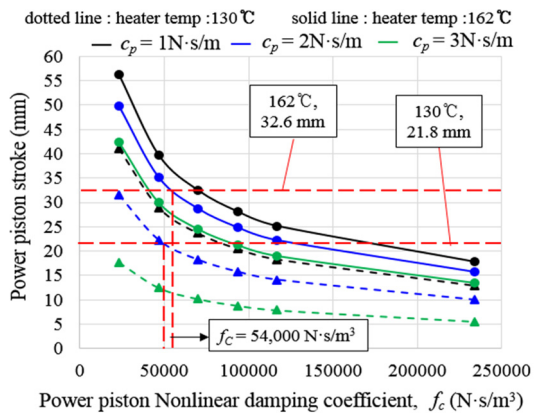
**Fig. 4** Predicted time response of PP and DP positions from nonlinear analysis at heater temperature of 162 °C.  $c_p = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , and  $f_c = 54\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3$  ( $\tilde{f}_c = 0.2$ )

폭비(PP/DP)는 0.96, 위상차는 68°이다.

Fig. 5는 위와 같은 과도응답 해석을 통하여, 다양한 DP 감쇠계수  $c_d$ 에서 PP 감쇠계수  $c_p$  증가에 대한 진폭비( $x_p/x_d$ )를 보여준다. DP 감쇠 증가는 주로 DP의 운동을 억제하여 진폭비를 증가시킨다. DP 변위는 엔진 형상에 의해 최대 34.5 mm(Table 1)로 제한되고, 최대 변위를 가진 가열부 온도 162 °C에서 실험 PP 변위는 32.6 mm(Table 2)이므로, 작동 가능한 최소 진폭비는 0.94이다. 따라서, DP 감쇠계수  $c_d \geq 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 로 범위를 좁힌다. 반면,  $c_p$ 의 변화



**Fig. 5** Predicted stroke ratio of PP to DP from nonlinear analyses for increasing PP and DP linear damping  $\tilde{f}_c = 0.2$ , and heater temperature = 162 °C



**Fig. 6** Predicted stroke of power piston versus nonlinear damping coefficient  $f_c$  ( $\tilde{f}_c : 0.1 - 1$ ) for increasing  $c_p$ . Heater temperatures: 130 °C and 162 °C.  $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$

는 진폭비에 영향을 주지 않으며,  $f_c$ 는 또한 진폭비에 대한 영향이 없다(Appendix 참조). 결과적으로, PP에 가해지는 감쇠는 선형항, 비선형항을 포함하여 진폭비에 영향을 미치지 않음을 알 수 있다. Fig. 3을 통하여  $c_d \geq 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 에서  $c_p \leq 3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 이므로,  $1 \text{ N}\cdot\text{s/m} \leq c_p \leq 3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 로 범위를 결정한다.

감쇠추정 3단계는 PP 선형/비선형 감쇠계수를 결정하기 위하여  $c_p$ 와  $f_c$ 를 변화하면서 PP 변위를 예측하고 실험 결과와 비교한다( $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $c_p = 1, 2, 3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $f_c = 0.1 - 1$ ). 비교 실험 조건은 최소, 최대 가열부 온도  $130 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $162 \text{ }^\circ\text{C}$ 이다.

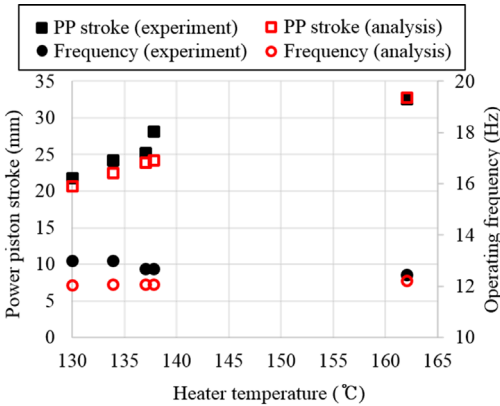
Fig. 6은 비선형 감쇠계수  $f_c = 20\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3 - 230\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3$  ( $f_c = 0.1 - 1$ )에 대한 PP의 진폭 예측이다. 점선과 실선은 각각 가열부 온도  $130 \text{ }^\circ\text{C}$ ,

$162 \text{ }^\circ\text{C}$ 에 해당한다. 해석 결과, 모든 가열부 온도에서 PP 선형 및 비선형 감쇠계수 증가는 PP 진폭의 감소를 유발한다. 가열부 온도 증가는 실험결과와 동일하게 PP 진폭을 증가시킨다. 두 가지 가열부 온도에서 실험 PP 진폭( $21.8 \text{ mm}$  @  $130 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $32.6 \text{ mm}$  @  $162 \text{ }^\circ\text{C}$ )과 가장 근사한 감쇠 조건은  $c_p = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $f_c = 54\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3$ 로 나타났다. 참고로  $c_d = 4.4, 4.6, 4.8 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 에서 해석결과는  $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 에 비해 PP 진폭 예측 오차가 크다(결과 생략).

Fig. 7은 위에서 추정된 감쇠계수( $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $c_p = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $f_c = 54\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3$ )를 이용하여 예측한 PP 진폭과 작동주파수를 모든 온도의 실험결과와 비교한 것이다. PP 진폭 예측은 온도 증가에 따른 실험 진폭의 증가를 잘 표현하고 있다. 작동주파수 예측은 낮은 가열부 온도에서 약간의 오차가 있지만, 실험 결과와 동일하게 온도 증가에 대해 큰 변화가 없다. 결과적으로 PP 진폭의 최대 오차는 15% 미만이고, 작동주파수는 8% 미만이다. Table 3은 해석 예측과 실험 측정의 비교를 보여준다.

#### 4. FPSE 감쇠 특성 고찰

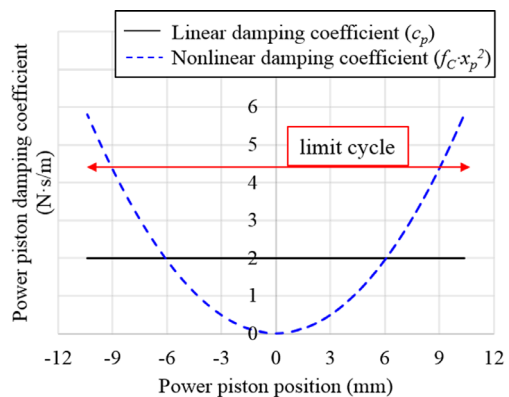
Fig. 8은 가열부 온도  $132 \text{ }^\circ\text{C}$ 에서 PP 변위에 대한 PP 선형 및 비선형 감쇠를 나타낸다. 비선형 감쇠계수는 비선형 감쇠상수  $f_c$ 에 변위의 제곱을 곱한 것이다. 선형 감쇠  $c_p$ 는 변위와 관계없이 일정한 반면,



**Fig. 7** Predicted PP stroke and operating frequency versus heater temperatures of  $130 \text{ }^\circ\text{C} - 162 \text{ }^\circ\text{C}$ , and comparison to measurements of B-10B FPSE.  $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $c_p = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , and  $f_c = 54\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3$

**Table 3** Comparison of model predictions to the test results for B-10B FPSE

| Heater temp. ( $^\circ\text{C}$ ) | PP stroke(mm) |            |           | Operating freq.(Hz) |            |           |
|-----------------------------------|---------------|------------|-----------|---------------------|------------|-----------|
|                                   | Experiment    | Prediction | Error (%) | Experiment          | Prediction | Error (%) |
| 130                               | 21.8          | 20.74      | 4.82      | 13                  | 12.05      | 7.34      |
| 134                               | 24.2          | 22.6       | 6.78      | 13                  | 12.06      | 7.16      |
| 137                               | 25.2          | 23.89      | 5.17      | 12.7                | 12.08      | 4.71      |
| 138                               | 28.2          | 24.23      | 14.07     | 12.7                | 12.09      | 4.67      |
| 162                               | 32.6          | 32.76      | 0.49      | 12.45               | 12.21      | 1.79      |



**Fig. 8** PP linear damping  $c_p$  and nonlinear damping  $f_c x_p^2$  versus PP position at heater temperature of  $130 \text{ }^\circ\text{C}$ . PP position is predicted from non-linear analysis with  $c_d = 4.2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $c_p = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , and  $f_c = 54\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3$

비선형 감쇠는 진동의 평형점 근방에서 ‘0’이고 변위의 증가에 대해 2차 함수로 급격히 증가한다. 해석 결과, 선형 해석은 비선형 감쇠의 영향이 작은 평형점 근처의 미소변위에 대해서만 성립함을 알 수 있다. 하지만, 대변위로 인한 비선형성으로 인하여 큰 진폭의 한계궤도를 가진 진동시스템의 거동 예측은 부정확해지고 불확정해(undetermined solution)를 가질 수 있음을 보여준다. 반면, 비선형 해석의 경우, 엔진 작동주파수(공진주파수)에서 평형점으로부터 발산하려는 피스톤 진동은 변위의 제공에 비례하여 증가하는 비선형 감쇠에 의해 제한되고, 일정한 진폭을 갖는 한계궤도를 형성하게 된다. 이 경우, 초기 조건과 상관없는 일정한 유일해(unique solution)를 갖는다<sup>(14)</sup>.

다음은 FPSE 진동시스템의 에너지 관점의 고찰이다. 감쇠에너지는 FPSE 운동방정식(식(1))에 각각 PP와 DP 속도를 곱한 후 피스톤 속도에 대하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & (c_p + f_L + f_C x_p^2) \dot{x}_p^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{m_p x_p^2}{2} + \frac{k_p x_p^2}{2} \right) \\
 & = (A_p - A_r)(P - P_0) \dot{x}_p \tag{7} \\
 & c_d \dot{x}_d^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{m_d x_d^2}{2} + \frac{k_d x_d^2}{2} \right) = A_r (P - P_0) \dot{x}_d
 \end{aligned}$$

오른쪽 항의 작동압력의 의한 입력에너지는 감쇠에 의해 소산되는 에너지와 FPSE 내부 역학적 보존에너지(피스톤 운동에너지 + 스프링 위치에너지)의 시간에 대한 변화율로 나뉜다. 정상상태에서, 역학적 보존에너지는 일정하므로 입력에너지는 PP 및 DP의

총 감쇠에너지로 변환된다. 이 때 PP 감쇠에너지는 엔진 내부 감쇠에너지를 제외하고 엔진 출력이 된다.

Fig. 9는 가열부 온도 변화에 대하여 PP와 DP 감쇠에 의한 출력을 보여준다. 감쇠출력은 시스템에 존재하는 감쇠에 의한 시간당 소산 에너지를 의미한다. 가열부 온도가 증가할수록, 모든 감쇠출력은 피스톤 진폭 및 속도의 증가와 함께 증가한다. PP 비선형 감쇠출력의 전체 감쇠출력에서 차지하는 비율은 32%에서 52%까지 증가하고, PP 선형 감쇠출력의 두 배이다. 따라서, 부하장치 설치 시 가열부 온도 증가로 인한 엔진 출력 증가를 예상할 수 있다. 반면, DP 감쇠출력은 가열부 온도 증가 및 피스톤 진폭 증가와 함께 증가하는데, 작동기체의 팽창공간과 압축공간 사이의 순환에 따른 유동저항을 극복하고 엔진을 작동시키는 내부에너지로 사용된다.

### 5. 결론

이 연구에서는 프리 피스톤 스텔링 엔진의 비선형 동역학 해석모델을 통해 감쇠계수를 추정하는 방법론을 제시하고 감쇠 특성에 대해 고찰하였다. FPSE B-10B의 실험결과를 바탕으로 고유치 해석, 과도응답 해석을 통해 선형 및 비선형 감쇠계수를 추정하는 방법론을 제시하였다. 즉, 고유치 해석을 통하여 온도에 따른 FPSE의 작동 가능한 선형 감쇠계수의 범위 예측하고, 과도응답 해석을 통하여 피스톤 진폭비 예측 및 엔진 형상 한계를 기준으로 선형 감쇠계수의 범위 축소한 후, 감쇠계수  $c_p$ ,  $c_d$ ,  $f_C$  변화에 대한 PP 변위 예측 및 실험 비교를 통하여 선형 및 비선형 감쇠계수 결정하였다. 결과적으로, 추정한 감쇠를 이용한 PP 진폭 및 작동주파수 예측결과는 실험결과와 최대 15% 미만의 오차율을 보였다. 또한, 감쇠 특성 고찰을 통하여 PP 비선형 감쇠는 대변위 한계궤도를 가진 FPSE 진동시스템의 거동 특성과 출력 성능 예측에 필수적임을 보였다. 또한, 감쇠출력에 대한 고찰을 통하여 PP 감쇠출력의 증가는 부하장치 연결 시 엔진 출력을 증가시키고, DP 감쇠출력의 증가는 엔진 내부 작동에너지로 이용됨을 알 수 있다. 향후 FPSE 엔진 내부에 존재하는 열교환기, 재생기 등의 감쇠요소와 선형 발전기 등의 외부 부하 장치를 포함하는 다양한 감쇠요소에 대한 연구를 지속할 계획이다.

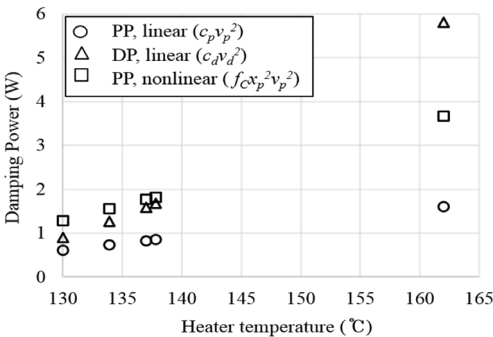


Fig. 9 Predicted damping power of PP(linear and nonlinear) and DP(linear) versus heater temperatures of 130 °C - 162 °C



## 후 기

이 연구는 서울과학기술대학교 교내 학술연구비 (일부)지원으로 수행되었습니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## References

(1) Jang, S. J., Sim, K. H. and Lee, Y. P., 2013, Analyses on Working Frequency of A  $\gamma$ -type Free-piston Stirling Engine, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 23, No. 7, pp. 654~661.

(2) Entchev, E., Gusdorf, J., Swinton, M., Bell, M., Szadkowski, F., Kalbfleisch, W. and Marchand, R., 2004, Micro-generation Technology Assessment for Housing Technology, Energy and Buildings, Vol. 36, No. 9, pp. 925~931

(3) [http://www.kdnaviem.co.kr/HeaderData/2013\\_Naviem\\_promo\\_brochure.pdf](http://www.kdnaviem.co.kr/HeaderData/2013_Naviem_promo_brochure.pdf), accessed on 2016. 01. 10.

(4) Hong, Y. J., Ko, J. S., Kim, H. B. and Park, S. J., 2011, Design and Fabrication of 1 kW Class Stirling Engine, Proceedings of the KSME Annual Spring Conference, pp. 334~346.

(5) Beale, W. T., 1969, Free-piston Stirling Engines - Some Model Tests and Simulations, SAE Paper No. 690230.

(6) Gordon, L. B., 1992, Loss Terms in Free-piston Stirling Engine Models, NASA Lewis Research Center.

(7) Joe, Y. G., Shin, K. S., LEE, Y. Y. and Oh, J. U., 2002, The Effects of Damping on the Limit Cycle of a 2-dof Friction Induced Self-oscillation System, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 12, No. 7, pp. 502~509.

(8) Benvenuto, G., Monte, D. F. and Farina, F., 1990, Dynamic Behaviour Prediction of Free-piston Stirling Engines, Proceedings of 25th IECEC, Vol. 5, pp. 346~351.

(9) Ulusoy, N., 1994, Dynamic Analysis of Free Piston Stirling Engines, PhD's Thesis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Case Western Reserve University.

(10) Saturno, M. G. J., 1994, Some Mathematical

Models to Describe the Dynamic Behavior of the B-10 Free-piston Stirling Engine, Master's Thesis, Russ College of Engineering and Technology, Ohio University.

(11) Karabulut, H., 2011, Dynamic Analysis of a Free Piston Stirling Engine Working with Closed and Open Thermodynamic Cycles, Renewable Energy, Vol. 36, pp. 1704~1709.

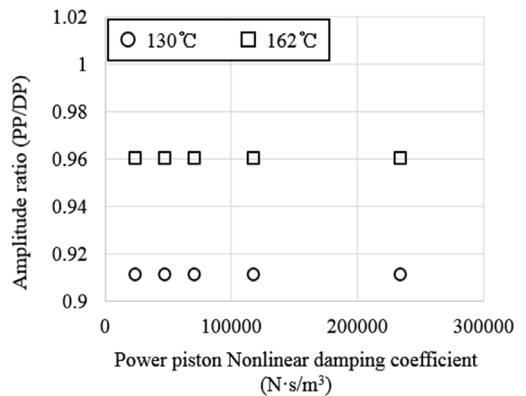
(12) Urieli, I. and Berchowitz, D. M., 1984, Stirling Cycle Engine Analysis, Adam Hilger Ltd.

(13) Riofrio, J. A., Al-Dakkan, K., Hofacker, M. K. and Barth, E. J., 2008, Control-based Design of Free-piston Stirling Engine, Proceedings of 2008 American Control Conference, WeC09.4, pp. 1533~1538.

(14) Sim, K. H. and Kim, D. J., 2015, Dynamic Model Prediction and Validation for Free-piston Stirling Engines Considering Nonlinear Load Damping, Trans. Korean Soc. of Mech. Eng. A, Vol. 39, No. 10, pp. 985~993.

## 부 록

Fig. A1은 가열부 온도 130 °C, 162 °C에서  $f_c$ 의 증가에 대한 진폭비 변화를 나타낸 것이다. 가열부 온도가 증가하면 진폭비는 작아지는 반면 비선형 감쇠계수는 진폭비와 무관하였다. 그러므로 진폭비는 Figs. 4, 7에 근거해 가열부 온도, DP 감쇠와는 관련이 있지만, PP의 선형 및 비선형 감쇠와는 무관하다는 것을 알 수 있다.



**Fig. A1** Predicted stroke ratio of PP to DP versus nonlinear damping coefficient  $f_c$  ( $f_c : 0.1 - 1$ ) at heater temperatures of 130 °C and 162 °C



**Kyuhoo Sim** received the Bachelor degree from Yonsei University, Seoul, Korea, in 2000, the M.S. degree from Korea Advanced Institute of Science and Technology (KAIST), Daejeon, Korea, in 2002 and Ph.D. degree in mechanical

engineering from Texas A&M University, College Station, TX, in 2007. He worked for Samsung Advanced Institute of Technology, Suwon, Korea, for 2009~2010, and for Korea Institute of Science and Technology, Seoul, Korea, for 2010~2012. Currently, he is working as an assistant professor at Seoul National University of Science and Technology. His

major research topics include development of oil-free rotating systems for turbo and electrical machines, such as micro gas turbines, turbo compressors/blowers, high speed permanent magnet motor/generator. In addition, he is also actively studying on free-piston Stirling engines for waste heat recovery and renewable heat energy.



**Dong-Jun Kim** received a B.S. degree in Dept. of Mechanical System Design Engineering of Seoul National University of Science and Technology. His researches are mainly focused on the free-piston Stirling engine.