

# 구매종속성이 존재하는 상황에서 주문충족율을 계산하는 근사법에 관한 연구\*

박창규<sup>†</sup> · 서준용  
울산대학교 경영대학

## Approximate Approach to Calculating the Order Fill Rate under Purchase Dependence

Changkyu Park · Junyong Seo  
College of Business, University of Ulsan

### ■ Abstract ■

This paper proposes a new approximate approach to calculate the order fill rate and the probability of filling an entire customer order immediately from the shelf in a business environment under purchase dependence characterized by customer purchase patterns observed in such areas as marketing, manufacturing systems, and distribution systems. The new approximate approach divides customer orders into item orders and calculates fill rates of all order types to approximate the order fill rate. We develop a greed iterative search algorithm (GISA) based on the Gauss-Seidel method to avoid dimensionality and prevent the solution divergence for larger instances. Through the computational analysis that compares the GISA with the simulation, we demonstrate that the GISA is a dependable algorithm for deriving the stationary joint distribution of on-hand inventories in the type- $K$  pure system. We also present some managerial insights.

Keywords : Order Fill Rate, Purchase Dependence, Iterative Approach, Quasi-Birth-and-Death Process

논문접수일 : 2015년 11월 18일    논문게재확정일 : 2015년 12월 27일

논문수정일(1차 : 2015년 12월 11일)

\* 이 논문은 2014년 울산대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

† 교신저자, ckparkuou@ulsan.ac.kr

## 1. 서 론

한 주문에서 고객이 여러 개의 품목을 요구하고, 그 모든 품목이 동시에 즉시 조달 가능한 경우에만 고객이 만족하는 상황에서 본 논문은 고객 서비스 수준을 평가해 보고자 한다. 최근의 시장환경에서 고객만족을 측정하는 척도로서 서비스 수준은 고객의 요구에 빠르게 대응하도록 심하게 압박을 받는 기업에게 점점 중요해지고 있다. 이러한 환경에서 많이 사용되는 서비스 수준 척도 중에 하나는 고객주문에 포함된 모든 품목을 보유재고로 즉시 충족시킬 확률인 주문충족율(order fill rate)이다.

이러한 주문충족율을 Song[22]은 주문에 기반한 성과척도(order-based performance measure)라고 불렀다. 그러나 주문에 기반한 접근과는 대조적으로 대부분의 표준 재고모형은 품목간의 연관성을 고려하지 않고, 각 품목에 대한 수요가 다른 수요와 독립이라는 가정을 하고 있다. 따라서 Song[22]은 이러한 모형을 품목에 기반한 접근(item-based approach)이라고 칭하였다. 주문에 기반한 접근에서 각 고객주문은 여러 품목의 동시 가용성을 요구하기 때문에 주문충족율은 각 품목의 주어진 안전재고 수준에서 고객주문이 즉시 만족될 확률은 얼마나 되는지를 측정한다.

Park and Seo[21]가 조선 엔진 및 발전기에 쓰이는 부품을 유통시키는 업자의 재고운영 실태를 분석할 때 이러한 주문충족율에 대한 질문이 제기되었다. 그들은 과거 구매주문서 자료를 분석한 결과, 품질이 된 약간의 부품 때문에 주문의 상당한 부분이 취소되었다는 사실을 알게 되었다. 다시 말해서, 고객주문이 품질된 부품을 하나라도 포함하면 다른 부품이 재고로 얼마나 있던지 상관없이 그 주문은 취소되었다. 과거 구매주문서 자료에 의하면 품질이 된 부품 때문에 취소된 주문의 비율이 30%를 넘었다. 선주사는 모든 부품을 함께 구매하기를 원하기 때문에 많은 주문에서 모든 부품이 재고로 있을 때에만 부품을 구입한다. 이러한 구매형태에서는 하나의 부품이라도 품질이 발생하면 다른 모든 부

품이 재고로 있어도 모든 부품이 품질인 상황과 같다. Park and Seo[21]는 이러한 형태의 종속성을 ‘구매종속성(purchase dependence)’이라 칭하였다.

구매종속성은 수요종속성(demand dependence)과는 다르다. 수요종속성은 품목간, 지역간, 또는 시간에 따른 수요의 상관관계를 다루는 반면, 구매종속성은 고객의 구매행태를 다룬다[1-3]. 구매종속성은 마케팅, 생산 시스템, 그리고 유통 시스템과 같은 영역에서 목격된다. 마케팅 관점에서는 구매거래 자료로부터 품목간의 연관성을 추출하는 시장 바구니 분석(market basket analysis)을 통하여 고객의 구매행태를 발견한다. 연구문헌상에 시장 바구니 분석을 적용한 사례가 많이 발표되어 있다. 시장 바구니 분석을 통하여 얻은 정보는 매장관리자가 진열대 할당 및 배열, 그리고 제품관측 등과 같은 의사결정을 보다 잘 할 수 있도록 활용될 수 있다. 보다 자세한 내용을 원하는 독자는 Athappilly et al.[4], Yang et al.[29], 그리고 이들 논문에 수록된 참고문헌을 참조하기 바란다.

조립생산(ATO, assemble-to-order) 시스템과 같은 다부품 생산-재고 시스템에서 다양한 부품에 대한 구매종속성은 자재명세서나 제품옵션에 의해 발생할 수 있다. 이 ATO 시스템에는 다수의 부품과 다수의 제품이 존재한다. 재고는 오직 부품 수준에서 유지되고, 최종 제품은 고객주문에 따라 조립된다. 최종제품에 대한 대부분의 고객주문은 다양한 부품을 요구한다. 요구되는 모든 부품이 가용할 때에만 주문이 충족되고, 그렇지 않을 경우에는 판매손실이 발생하거나 미납주문으로 처리된다. 온라인 소매업과 우편주문업과 같이, 고객주문이 여러 품목을 요구하는 다품목 유통 시스템에서도 유사한 문제가 발생한다.

본 논문은 구매종속성이 존재할 때 주문충족율을 계산하는 새로운 근사적 접근법을 제안한다. 본 논문에서 제안하는 근사적 접근법은 Iravani et al.[12]이 제안한 분해 근사법(decomposition approach)에서 영감을 받았다. Iravani et al.[12]이 취한 근사법과 같이, 본 논문은 고객주문을 품목수요로 분해한

다. 즉, 주문프로세스와 동일한 주변분포를 갖는 새로운 품목수요 프로세스를 구성하는 것이다. 그러나 주문충족율의 근사치를 계산하는 구체적인 방법에서 본 논문은 Iravani et al.[12]보다 쉬운 접근법을 취하였다. 다시 말해서, Iravani et al.[12]은 주문충족율의 근사치를 구하기 위하여 각 품목의 부품충족율을 사용하였지만, 본 논문은 모든 주문형태의 충족율을 계산하여 주문충족율의 근사치를 구한다. 각 품목의 부품충족율을 이용하여 주문충족율의 근사치를 계산하는 Iravani et al.[12]의 접근법은 연쇄조건부 확률의 개념(concept of chaining conditional probabilities)을 활용한 복잡한 계산과정을 거쳐야 한다.

구매종속성이 존재할 때 주문충족율을 한 주문에 포함된 각 품목별로 발생하는 품질율의 곱의 형태로 간단히 계산할 수 있을 것 같지만 문제상황이 그렇게 간단하지 않다. 각 주문마다 요구하는 품목의 종류가 다르고, 그 주문이 만족되기 위해서는 요구되는 품목이 동시에 가용해야 하는 등 품목간의 새로운 형태의 종속성이 발생하게 된다. 이러한 구매종속성을 고려하여 주문충족율을 계산하기 위해서는 보유재고의 결합분포를 구하여야 한다.

본 논문은 QBD 프로세스(quasi-birth-and-death process)로 구현된 보유재고의 안정된 결합분포(stationary joint distribution of on-hand inventories)로부터 모든 주문형태의 충족율을 구한다. 이 안정된 결합분포는 균형방정식(balance equations)과 정규화 방정식(normalization equation)으로 형성된 연립방정식의 해이다. 그러나 이 연립방정식을 푸는 전통적인 계산방법은 방정식 및 미지변수의 수가 큰 경우에 차원의 저주(the curse of dimensionality)에 시달린다. 비록 Song et al.[24], Iravani et al.[11], 그리고 Gao et al.[7]가 matrix-geometric 기법을 활용하였지만, 여전히 차원의 저주는 해결되지 않고 남아있다. 따라서 본 논문은 Gauss-Seidel 방법과 같은 반복적 방법(iterative method)을 활용하려 한다.

Gauss-Seidel 방법은 선형연립 방정식을 푸는데 활용되는 잘 알려진 방법이고, Jacobi 방법을 수정한

것으로 Jacobi 방법 보다 적은 반복수로 같은 정확도를 낼 수 있다. Gauss-Seidel 방법의 수렴율을 향상시키기 위해서 다양한 사전조절 반복적 방법(pre-conditioned iterative method)이 발표되었다. 그러나 불행하게도 Gauss-Seidel 방법과 사전조절 반복적 방법을 본 논문에서 다루는 선형연립 방정식을 푸는데 사용할 수가 없다. 이들 방법은 본 논문의 문제에서 수렴하지 않는다. 따라서 본 논문은 차원의 저주를 피하면서 해가 수렴하도록 Gauss-Seidel 방법에 기초하여 GISA(greedy iterative search algorithm) 알고리즘을 개발한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. 다음 장은 관련된 참고문헌을 고찰한다. 제 3장에서는 QBD 프로세스로 구현된 보유재고의 안정된 결합분포를 이용하여 구매종속성 하에서의 주문충족율을 계산하는 모형이 설명된다. 제 4장은 보유재고의 안정된 결합분포를 구하는 GISA 알고리즘의 절차를 기술한다. 제 5장에서는 GISA 알고리즘의 정확성을 확인하고, 초기해의 영향을 검사하며, 경영상의 통찰을 얻기 위해서 수치분석 및 모의실험이 수행된다. 마지막으로 제 6장은 결론을 제시한다.

## 2. 문헌고찰

본 장에서는 우선 GISA 알고리즘의 기초가 되는 Gauss-Seidel 방법에 대해 간단히 문헌고찰을 한 후, 주문충족율의 연구에 기여한 문헌을 살펴보기로 한다. Gauss-Seidel 방법은 다음과 같이 표현되는 선형연립방정식을 푸는데 활용되는 잘 알려진 방법이다 :  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Gauss-Seidel 방법의 수렴율을 향상시키기 위해 다양한 사전조절 반복적 방법이 발표되었으며, <표 1>은 이러한 연구를 정리하여 보여준다.

다음으로 주문충족율의 연구에 기여한 문헌을 살펴보면, 대부분이 ATO 시스템에 대한 성과를 평가하는 연구에 집중되어 있다는 것을 알 수 있다. 본 절은 이러한 ATO 시스템의 성과평가(즉, 주문충족율)에 기여한 연구에 초점을 맞추므로, ATO 시스

〈표 1〉 사전조절 반복적 방법의 요약

연구	사전조절자	비고
Milaszewicz[14]	$I+C$	$C$ 는 $A$ 의 대각선 아래에 있는 첫 열의 원소를 제거
Gunawardena et al.[5]	$I+S$	$S$ 는 대각선 위의 첫 대각 원소를 0으로 변환
Usui et al.[24]	$I+U$	$U$ 는 $-A$ 의 대각선 위 부분.
Kotakemori et al.[12]	$I+\beta U$	$\beta \geq 1$
Kohno et al.[10]	$I+aS$	$a > 1$
Kotakemori et al.[11]	$I+S_{\max}$	$S_{\max}$ 는 $A$ 의 대각선 위 부분에 있는 각 행의 최대 원소로 구성
Hadjidimos et al.[6]	$I+aC$	
Morimoto et al.[15]	$I+S+S_{\max}$	
Noutsos and Tzoumas[17]	Generalized preconditioner	각 행에서 대각선 밖에 있는 원소를 2개 이상 제거
Niki et al.[16]	$I+S+R$	$R$ 은 $n$ 번째 사전조절자로 언급됨
Zheng and Miao[28]	$I+S_{\max}+R$	
	$I+S_{\max}+R_{\max}$	$R_{\max}$ 은 $R$ 의 최대 원소로 구성

템을 모형화하고 분석하는 연구에 대한 고찰에 관심 있는 독자는 Song and Zipkin[26]과 Benjaafar and El Hafsi[5]을 참고하기 바란다.

성과평가에 대한 대부분의 연구는 기준재고정책(base stock policy)과 선착순 서비스 규율을 따랐지만, 모형에 대한 가정과 해를 구하는 접근방식에 차이가 있었다. 이들 연구는 정확한 접근방식과 근사적 접근방식과 같이 두 그룹으로 나눌 수 있다. <표 2>는 성과평가에 초점을 둔 연구를 두 그룹으로 나누어 요약 정리하여 보여준다.

정확한 접근방식으로 Song[22]이 주문에 기반한 접근을 이용한 연구에 첫 발을 내디뎠다. 그녀는 미납주문이 허용되고, 상수 조달기간을 갖는 다품목, 다제품 ATO 시스템의 주문충족율에 대한 정확한 평가를 제시하였다. 고객주문은 다양한 양을 요구하는 여러 품목으로 구성되었고, 주문충족율에 대한 계산은 일 차원을 갖는 분포의 연속적인 합성곱(convolution)을 통해 이루어졌다. 한편, 정확한 접근방식을 취한 다른 연구는 연속 시간 마코프 체인을 이용하여 시스템을 모형화하였다. 여기서 성과 척도는 QBD 프로세스로 묘사되는 진행 중인 품목 주문의 안정된 결합분포로부터 유도하였다. 그리고 정확한 성과분석은 matrix-geometric 기법을 이용

해 수행되었다.

Song et al.[24]은 다부품, 다제품을 갖는 ATO 시스템을 고려하였다. 여기서 부품은 계획생산형태로 만들어지고, 지수분포의 공정시간을 갖는 기계에 의해 보충된다. 그들은 미납주문 및 판매손실을 고려한 일반모형을 설계하였다. 또한 TOS(total order service, 고객주문이 완전히 충족되거나 전체적으로 기각됨)와 POS(partial order service, 부분 충족이 허용됨)를 구분하였다. Iravani et al.[11]과 Gao et al.[7]은 유사한 상황을 분석하였으나, 다소 다른 관점을 취하였다. Iravani et al.[11]은 ATO 시스템에 고객유연성을 통합시켰다. 그들의 모형에서 고객은 품질이 발생한 부품을 다른 부품으로 대체할 용의가 있다. 반면에 Gao et al.[7]의 모형에서는 각 부품이 신뢰성이 떨어지는(unreliable) 기계에 의해 보충된다.

Iravani et al.[12]이 언급했듯이, 주문충족율에 대한 정확한 접근방식이 갖고 있는 제약은 규모가 큰 ATO 시스템을 다룰 수 없다는 점이다. 현재의 정확한 접근방식은 다양한 품목을 요구하는 주문간의 상호관계를 통합해야 하는 절차로 인하여 계산과정에 부하가 너무 많이 걸린다. <표 2>의 하단부는 근사적 접근방식에 근거한 연구를 보여준다.

<표 2> 성과평가에 집중한 연구에 대한 요약 정리

연구	모형화				해법
	주문 프로세스	배송 & 미납	재고정책	공급시스템	
Song[19]	다부품, 다제품 다변량 복합포아송 과정	미납주문	기준 재고정책	상수 조달기간	안정된 결합분포 분포 합성곱
Song et al.[21]	다부품, 다제품 다변량 포아송 과정	미납주문/판매손실 TOS/POS	기준 재고정책	부품당 단일서버 지수분포 조달기간	안정된 결합분포 QBD 프로세스
Iravani et al.[8]	다부품, 다제품 key 및 non-key 부품 혼합 다변량 포아송 과정	대체/판매손실	기준 재고정책	부품당 단일서버 지수분포 조달기간	안정된 결합분포 QBD 프로세스 matrix-geometric 해
Gao et al.[4]	다부품, 다제품 다변량 포아송 과정	미납주문/판매손실 TOS/POS	기준 재고정책	부품당 단일 불신 서버 지수분포 조달기간	안정된 결합분포 QBD 프로세스
Vliegen and van Houtum[25]	다부품, 다제품 다변량 포아송 과정	판매손실 (POS) 긴급배송	기준 재고정책	상수 조달기간	coupling factor에 의한 근사
Hoen et al.[7]	다부품, 다제품 다변량 포아송 과정	판매손실 (POS) 긴급배송	기준 재고정책	상수 조달기간	demand coupling factor에 의한 근사
Dayanik et al.[3]	다부품, 다제품 다변량 포아송 과정	미납주문/판매손실 POS	기준 재고정책	부품당 단일서버 지수분포 조달기간	성과 하한 및 상한에 대한 근사
Iravani et al.[9]	다부품, 다제품 다변량 포아송 과정	미납주문/판매손실	기준 재고정책	단일서버/부품 (묶음서비스) 지수분포 조달기간	분해근사법
Song and Yao[22]	다부품, 단일제품 포아송 과정	미납주문	기준 재고정책	확률적 조달기간	성과 하한 및 상한을 이용한 탐욕형 알고리즘
Lu et al.[13]	다부품, 다제품 다변량 복합 포아송 과정	미납주문	기준 재고정책	확률적 조달기간	결합분포와 첫 두 적률 (모멘트)에 기초한 근사
Zhou and Chao[29]	다부품, 다제품 다변량 포아송 과정	미납주문	기준 재고정책	확률적 조달기간	Stein-Chen 근사

Vliegen and van Houtum[28]과 Hoen et al.[10]은 상수의 조달기간을 가정하였다. Vliegen and van Houtum[28]에 의해 수행된 서비스 도구에 대한 연구에서 서비스 도구에 대한 요구와 반환은 서로 짝을 이루었다. Vliegen and van Houtum[28]은 최소 및 최대의 짝이 된 반환을 갖는 두 시스템을 정의하고, 두 시스템을 coupling factor로 결합하였다. 그러나 Hoen et al.[10]은 ATO 시스템에 대해 최소 및 최대의 짝이 된 수요를 갖는 두 시스템을 결합하였다.

Dayanik et al.[6]은 미납주문과 판매손실, 그리고 POS 정책을 갖고, 부품생산에 지수분포의 공정시간과 단일서버를 갖는 ATO 시스템을 고려하였다. 반면에 Iravani et al.[12]은 묶음 재고보충 정책을 고려하였다. Dayanik et al.[6]은 마코프 분포를 갖는 ATO 시스템에 대해 다양한 성과의 하한 및 상한을

형성하고 분석하였다. Iravani et al.[12]은 분해 근사법을 소개하였다. 분해 근사법은 종속적인 평행 대기행렬로 구성된 큰 시스템을 독립적인 개별 대기행렬로 분해하여 개별 대기행렬의 성과를 계산한다. 그리고 연쇄조건부 확률의 개념을 이용하여 개별 대기행렬의 성과측정치로 전체 시스템의 성과를 근사적으로 계산한다.

Song and Yao[25]은 단일제품을 고려하였다. 따라서 분석을 아주 단순화시킬 수 있었고, 주문충족율을 쉽게 평가할 수 있었다. 그들은 쉽게 계산할 수 있는 성과한계를 유도하고, 재고와 고객 서비스 간에 최적의 절충을 찾는 최적화 문제에서 성과척도의 대체용으로 사용하였다. 이러한 최적화 문제를 풀기 위해 그들은 탐욕적 알고리즘을 개발하였다. Lu et al.[16]는 Song and Yao[25]에 의해 연구된 단일

제품 ATO 시스템을 확장하였다. 결합분포와 첫 두 적률(moment)에 근거하여 그들은 주문충족률에 대한 근사와 한계를 유도하였다. Zhou and Chao[32]은 ATO 시스템의 주문충족율에 대한 아주 간단한 Stein-Chen 근사와 오차한계를 개발하였다. 이들 근사는 품목충족율을 이용하여 주문충족율을 표현하였다.

### 3. 모형 형성

#### 3.1 모형 설명

구매충족성이 존재하는 상황에서 본 논문은  $J$ 개의 품목을 파는 소매자 시스템을 고려한다.  $\Omega = \{1, 2, \dots, J\}$ 는 모든 품목의 집합으로 구성된 집합이라 하고, 임의의  $K \subseteq \Omega$ 에 대해서  $|K|$ 는  $K$ 에 있는 원소의 수라 하자. 전반적인 주문 프로세스는 안정적이고, 포아송 과정을 따른다. 각 고객은 각 품목에 대해 최대한 단위를 요구한다. 그러나 여러 품목을 동시에 요구할 수 있다. 임의의  $K \subseteq \Omega$ 에 대해서 주문이  $K$ 에 있는 각 품목을 한 단위씩 요구하고,  $\Omega - K$ 에 있는 품목은 한 단위도 요구하지 않는다면 그 주문을 형태  $K$ 라 한다.  $T = \{1, 2, \dots, |T|\}$ 를 주문 형태의 집합이라 하자. 여기서  $1 \leq |T| \leq 2^J - 1$ . 주문이 형태  $K$ 일 확률은 고정되어 있고, 각 주문형태는 서로 독립이라고 가정한다. 이것은 각 품목에 대한 수요 프로세스 또한 포아송 과정을 따른다는 것을 암시한다. 본 논문은 기본적으로 Song et al.[24]이 취한 가정과 기호를 사용한다.

주문은 선착순으로 충족된다. 주문이 도착하고, 소매업자가 전부는 아니지만 일부분의 품목을 재고로 보유하고 있지 않을 경우, 구매충족성으로 인해 주문은 전체적으로 취소된다. Song et al.[24]의 연구에서는 이런 상황을 TOS로 칭하고 있다. 각 품목은 독립적인 기준재고정책에 따라 관리되고 있다.  $s_i$ 를 품목  $i$ 의 기준재고 수준이라 하자. 즉, 각 수요시점에서 품목  $i$ 의 재고 수준(즉, 보유재고+주문 중인 재고)이  $s_i$ 보다 작으면  $s_i$ 까지 주문한다. 일반적으로 본

논문은 시점 0에서 모든 품목  $i$ 가  $s_i$  수준의 재고를 보유하고 있다고 가정한다. 그러면 품목  $i$ 에 대한 각 수요는 품목  $i$ 가 고객에게 배달되면 그 품목에 대한 주문을 야기한다. 따라서 품목  $i$ 에 대해 주문 증인은 많아야  $s_i$ 이다. 품목  $i$ 에 대한 주문은 설비  $i$ 가 담당하고, 조달기간은 서비스율이  $\mu_i$ 인 지수분포를 따른다. 각 설비는 주문을 선착순으로 처리한다.

#### 3.2 주문충족율

본 절은 구매충족성이 존재하는 상황에서 주문충족율을 계산하기 위해 본 논문이 새롭게 제안하는 근사법에 대해 설명한다. 제 1장에서 언급하였듯이, 본 논문의 근사법은 분해 근사법의 아이디어를 활용한다. 본 근사법은 Song[23]의 연구결과와도 상응한다. 그녀는 주문충족율을 계산하는데 걸리는 시간에 지대한 영향을 주는 요소는 주문에 포함된 품목이 얼마나 많은가가 아니고, 그 보다는 다양한 품목으로 구성된 주문형태의 수라는 결과를 제시하였다. 따라서 가장 쉬운 경우는 오직 한 주문형태만 갖는 순수 시스템이다. 본 근사법은 고객주문을 품목수요로 분해한다. 즉, 주문 프로세스와 동일한 주변분포를 갖는 새로운 품목수요 프로세스를 구성한다. 그리고 오직 한 주문형태  $K$ 를 갖는 순수 시스템의 충족율을 계산한다. 여기서 이 시스템을 형태  $K$  순수 시스템이라 하자. 전체 시스템의 주문충족율은 모든 형태  $K$  순수 시스템의 충족율을 통합하여 근사적으로 구한다.

임의의  $i \in \Omega$ 과  $K \in T$ 에 대해서  $\lambda$ 를 전반적인 주문율이라 하고,  $q^K$ 를 주문이 형태  $K$ 일 확률,  $q_i$ 를 주문이 품목  $i$ 를 요구할 확률(즉,  $q_i = \sum_{K:i \in K} q^K$ ), 그리고  $\lambda_i$ 를 품목  $i$ 의 총괄 수요율(즉,  $\lambda_i = q_i \lambda$ )이라 하자. 그러면 형태  $K$  순수 시스템에 대한 전반적인 주문율은 주문형태  $K$ 에 있는 품목의 수요율을 평균하여 근사적으로 구한다.  $\lambda^{pK}$ 를 형태  $K$  순수 시스템에 대한 전반적인 주문율이라 하면

$$\lambda^{pK} = \frac{1}{|K|} \sum_{i \in K} \lambda_i \quad (1)$$

$I_i$ 를 안정된 상태에서 품목  $i$ 의 보유재고라 하면 (여기서  $0 \leq I_i \leq s_i$ ), 형태  $K$  순수 시스템의 충족율  $F^{pK}$ 는 형태  $K$  순수 시스템에 있는 모든 품목이 즉시 충족될 결합확률로 정의된다. 즉,

$$F^{pK} = P(I_i > 0 : i \in K) \quad (2)$$

이제 전체 시스템의 주문충족률  $F$ 는 다음과 같이 근사적으로 계산된다.

$$F = \sum_{K \in T} q^K F^{pK} \quad (3)$$

### 3.3 안정된 결합분포

본 절은 오직 한 주문형태  $K$ 를 갖는 순수 시스템을 고려한다. 주문이 도착했을 때 적어도 하나의 품목  $i (i \in K)$ 에 품절이 발생되면 구매충족성으로 인해 형태  $K$ 의 주문은 전체가 취소된다. 형태  $K$  순수 시스템의 충족율은 이 시스템에 있는 모든 품목이 즉시 충족될 결합확률로 정의되므로 이 형태  $K$  순수 시스템의 충족율은 품목  $i$ 의 보유재고( $I_i : i \in K$ )의 결합분포에 의해 결정된다. 본 절은 품목  $i$ 의 보유재고( $I_i : i \in K$ )의 결합분포를 유도하는 절차를 보여준다.

확률과정  $\{(I_i(t) : i \in K), t \geq 0\}$ 는 유한의 상태 공간  $\{\mathbf{n} = (n_i : i \in K) | 0 \leq n_i \leq s_i, i \in K\}$ 를 갖는 연속 시간 마코프 체인이다. 여기서  $I_i(t)$ 는 시간  $t$ 에 품목  $i$ 의 보유재고이다. 상태공간의 크기는  $\prod_{i \in K} (s_i + 1)$ 이다. 상태전이는 오직 품목에 대한 수요나 주문한 품목이 도착했을 때만 발생한다. 다시 말해서, 상태  $\mathbf{n}$ 은 전이율  $\lambda^{pK}$ 를 갖고 상태  $\mathbf{n}' = (n'_i : i \in K)$ 으로 전이된다. 여기서

$$n'_j = \begin{cases} n_j - 1 & j \in K \text{이고 } 0 < n_j \text{ for all } i \in K \\ n_j & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

그리고 상태  $\mathbf{n}$ 은 전이율  $\mu(i \in K)$ 를 갖고 상태  $\mathbf{n}'' = (n''_i : i \in K)$ 으로 전이된다. 여기서

$$n''_j = \begin{cases} n_j - 1 & j = i \text{ 그리고 } n_i < s_i \\ n_j & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

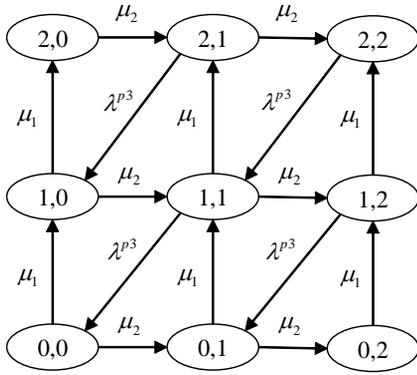
이 마코프 체인은 기약(irreducible)하므로 안정된 결합분포는 유일하게 존재한다는 것을 알 수 있다 [24]. 식 (4)와 식 (5)를 이용하여 각 상태에 대한 균형방정식을 유도할 수 있다. 예를 들어, [그림 1]은 형태 3 순수 시스템에 대한 상태 전이도와 균형방정식을 보여준다. 여기서 주문형태 3은 품목 1과 품목 2, 모두를 요구한다. 평형상태에서 임의의 마디를 떠나는 전이율은 그 마디로 들어가는 전이율과 같아야 한다. 이러한 'rate in = rate out' 원리에 따라 다음과 같은 일반화가 가능하다.

$\mathbf{I}$ 를 보유재고 ( $I_i : i \in K$ )의 벡터라 하고,  $p_I$ 를 평형상태의 확률이라 하면

$$\left( \sum_{i \in K} \delta_i \mu_i + \xi \lambda^{pK} \right) p_I = \sum_{i \in K} \mu_i p_{I - \mathbf{e}_i} + \lambda^{pK} p_{I+1}$$

여기서  $\delta_i = 1$  for  $I_i < s_i$  or  $0$  otherwise,  $\xi = 1$  for  $\forall (I_i > 0)$  or  $0$  otherwise,  $\mathbf{e}_i$ 는  $I_i$ 의 위치에 1을 갖는 단위벡터,  $\mathbf{1}$ 은 모든 원소가 1인 벡터, 그리고  $p_I = 0$  for any  $I_i \notin [0, s_i]$ .

이제 안정된 결합분포는 균형방정식과 정규화 방정식으로 구성된 연립방정식의 해이다. 이 연립방정식을 풀기 위하여 가우스 소거법(Gaussian elimination)과 같은 전통적인 계산기법을 활용할 수 있다. 그러나 이러한 직접적인 방법은 방정식 및 미지 변수의 수가 아주 큰 경우에 심각한 계산 및 공간 복잡성(computation and space complexities)에 시달릴 수 있다. 계산 및 공간 복잡성을 줄이기 위하여 Song et al.[24], Irvani et al.[11], 그리고 Gao et al.[7]은 안정된 결합분포의 matrix-geometric 해를 얻을 수 있는 QBD 프로세스의 특수구조를 활용하였다(Ye and Li[30]는 유한의 QBD 프로세스의 안정된 상태를 분석하기 위하여 새로운 계산기법으로 'folding 알고리즘'을 제안하였다). 그러나 여전히 차원의 저주는 해결되지 않고 남아있다. 본 논문은 식 (6)으로 표현되는 QBD 프로세스의 특수 구조를



[그림 1] 상태 전이도와 균형방정식

이용하여 자원의 저주를 피하고, Gauss-Seidel 방법에 새로 고안한 절차를 추가하여 해가 수렴하도록 하는 GISA 알고리즘을 개발한다.

#### 4. GISA 알고리즘

식 (6)에 의해 생성된 균형방정식과 정규화 방정식은 다음과 같은 선형 연립방정식을 형성한다.  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .  $\mathbf{A}$ 는 계수행렬이고,  $\mathbf{b}$ 는 우변 벡터,  $\mathbf{x}$ 는 미지 변수의 벡터(즉,  $\mu_i$ , 평형상태의 확률), 그리고 차수  $m = \prod_{i \in K} (s_i + 1)$ . 이 선형연립방정식은 규모가 클 수 있고, 많은 수의 방정식 및 미지변수는 컴퓨터를 이용한 계산과정에 심각한 저장공간의 문제를 야기할 수 있다. 가우스 소거법은 적용이 가능하면 매우 경제적이고, 정확하고, 유용한 알고리즘이다. 그러나 차수  $m$ 이 너무 커서 가우스 소거법 과정의 결과를 저장할 수 없을 때에는 행렬  $\mathbf{A}$ 를 변경하지 않고 크기가  $m$ 인 벡터를 몇 개만 요구하는 방법을 이용하여 선형연립방정식을 푸는 것이 바람직하다. 반복적 방법이 특별히 이 목적에 적합하다.

본 절에서는 GISA 알고리즘의 절차를 설명한다. GISA 알고리즘은 초기해 벡터  $\mathbf{x}^{(0)}$ 를 갖고 시작하

$$(\mu_1 + \mu_2)p_{0,0} = \lambda^{p^3} p_{1,1}$$

$$(\mu_1 + \mu_2)p_{0,1} = \mu_2 p_{0,0} + \lambda^{p^3} p_{1,2}$$

$$\mu_1 p_{0,2} = \mu_2 p_{0,1}$$

$$(\mu_1 + \mu_2)p_{1,0} = \mu_1 p_{0,0} + \lambda^{p^3} p_{2,1}$$

$$(\mu_1 + \mu_2 + \lambda^{p^3})p_{1,1} = \mu_1 p_{0,1} + \mu_2 p_{1,0} + \lambda^{p^3} p_{2,2}$$

$$(\mu_1 + \lambda^{p^3})p_{1,2} = \mu_1 p_{0,2} + \mu_2 p_{1,1}$$

$$\mu_2 p_{2,0} = \mu_1 p_{1,0}$$

$$(\mu_2 + \lambda^{p^3})p_{2,1} = \mu_1 p_{1,1} + \mu_2 p_{2,0}$$

$$\lambda^{p^3} p_{2,2} = \mu_1 p_{1,2} + \mu_2 p_{2,1}$$

여 반복 절차에 따라 연속적인 벡터 해  $\mathbf{x}^{(1)} \rightarrow \mathbf{x}^{(2)} \rightarrow \dots$ 를 생성한다. 이때, 우리는  $k \rightarrow \infty$ 함에 따라  $\mathbf{x}^{(k)}$ 가 정확한 해로 수렴하기를 바란다. [그림 2]는 GISA 알고리즘의 의사코드(pseudo-code)를 보여준다. 초기 단계에 GISA 알고리즘은 초기해  $\mathbf{x}^{(0)}$ 를 설정하고, 초기해  $\mathbf{x}^{(0)}$ 에 따른 최대절대잔차  $r_{max}$  (maximum absolute residual)를 계산한다. 최대절대잔차를 계산하는 과정에서  $[y]_i$ 는 벡터  $\mathbf{y}$ 의  $i$ 번째 원소를 의미한다.

다음으로 GISA 알고리즘은 다음과 같은 절차에 따라 연속적인 벡터 해  $\mathbf{x}^{(k)}$ 를 생성한다.  $x_i^{(k)}$ 를  $k$ 번째 반복에서 생성된 벡터 해  $\mathbf{x}^{(k)}$ 의  $i$ 번째 원소라 하고(즉,  $[\mathbf{x}^{(k)}]_i$ ),  $b_i$ 를 우변 벡터  $\mathbf{b}$ 의  $i$ 번째 원소라 하자(즉,  $[\mathbf{b}]_i$ ). GISA 알고리즘은  $i = 1, 2, \dots, m$  순서대로 잔차의  $i$ 번째 원소를 제거하도록 현재 해의  $i$ 번째 원소를 교정한다. 이때 새롭게 계산된 원소  $x_i^{(k)}$ 가 음수가 아니면서 새롭게 계산된 최대절대잔차가 증가하지 않으면 교정된 해는 즉시 갱신된다. 본 논문에서 새롭게 고안한 이 절차는 해가 발산하는 것을 방지한다. 각각의 반복 마지막에 GISA 알고리즘은 절대잔차의 합  $r_{sum}$ 를 계산한다.

GISA 알고리즘이 Gauss-Seidel 방법과 차이가 나는 부분은 다음과 같이 해가 수렴하도록 새롭게

고안한 절차를 추가한 것이다.

```

if ( $x_i^{(k)} \geq 0$  and  $r_{\max}^{new} \leq r_{\max}$ ) then
  update  $r_{\max} = r_{\max}^{new}$ 
else
  restore  $x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)}$ 
end if

```

이 절차가 없으면 본 논문에서 다루는 문제의 해는 발산한다.

GISA 알고리즘은 수렴조건이 만족될 때까지 연속적인 벡터 해  $\mathbf{x}^{(k)}$ 를 계속 생성한다. GISA 알고리즘은 다음의 조건이 하나라도 만족하면 수렴조건이 만족한 것으로 간주하고 알고리즘을 중단한다: (i) 반복 수가 최대치에 도달함; (ii) 최대절대잔차  $r_{\max}$ 가 허용치 보다 작음; 또는 (iii) 연속적인 벡터 해  $\mathbf{x}^{(k)}$ 에 변화가 없음. 차수  $m$ 이 아주 커짐에 따라 연속적인 벡터 해  $\mathbf{x}^{(k)}$ 는 초기해  $\mathbf{x}^{(0)}$ 에 영향을 받을 가능성이 있다. 초기 해의 영향을 제 5.2절에서 자세히 검토한다.

---

```

Initial step
  set k = 0
  initialize  $\mathbf{x}^{(0)}$ 
   $r_{\max}^{new} = \max_i [b - Ax^{(0)}]_i$ 
repeat until convergence
  k = k+1
  for i from 1 until m do
     $x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1} a_{ij}x_j^{(k-1)} \right)$ 
     $r_{\max}^{new} = \max_i [b - Ax^{(k)}]_i$ 
    if ( $x_i^{(k)} \geq 0$  and  $r_{\max}^{new} \leq r_{\max}$ ) then
      update  $r_{\max} = r_{\max}^{new}$ 
    else
      restore  $x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)}$ 
    end if
  end (i-loop)
   $r_{sum} = \sum_i [b - Ax^{(k)}]_i$ 
  check if convergence is reached
end (repeat)

```

---

[그림 2] GISA 알고리즘의 유사코드

## 5. 수치적 분석

본 장에서는 GISA 알고리즘에 대한 정확성의 확인 및 초기 해의 영향을 점검하고, 해법절차 및 주문충족율의 분석을 통하여 경영상의 통찰을 얻기 위하여 수행한 수치적 분석과 모의실험에 대해 기술한다.

### 5.1 GISA 알고리즘의 정확성

본 논문은 형태  $K$  순수 시스템에 있는 보유재고의 안정된 결합분포를 계산하기 위하여, 결국은 형태  $K$  순수 시스템의 충족율을 계산하기 위하여, GISA 알고리즘을 이용한다. 형태  $K$  순수 시스템의 충족율은 이 시스템에 있는 모든 품목이 즉시 충족될 결합확률로 정의되었다. 여기서 본 논문은 GISA 알고리즘의 정확성을 형태  $K$  순수 시스템의 충족율로 측정한다.

GISA 알고리즘의 정확성을 시험하기 위하여 다음과 같이 테스트 베드(test bed)를 설계하였다. 본 절에서는 두 개의 순수 시스템(즉,  $|K| = 3$  또는 5)을 고려하였다. 두 순수 시스템 모두에서 기준재고 수준은 모두 같도록 설정하였고, 즉,  $s_1 = s_2 = \dots = s_{|K|}$ , 기준재고수준에 대한 값으로 5, 10, 15를 선택하였다. 품목 재보충율  $\mu(i \in K)$ 를 모두 1.0으로 설정하고, 형태  $K$  순수 시스템의 전반적인 주문율에 대해 다음과 같이 세 가지 값을 선택하였다. 첫 번째 값은 형태  $K$  순수 시스템의 충족율이 낮은 수준이 되도록 선택되었고(대략 70~85%), 두 번째 값은 중간 수준의 충족율(대략 90%), 세 번째 값은 높은 수준의 충족율(대략 95%)이 되도록 선택되었다.

비교를 위해 가우스 소거법을 이용하여 정확한 충족율을 계산하였다. 그러나 큰 크기의 행렬을 다루어야 하는 경우에 가우스 소거법은 실용적이지 못하였다. 따라서 본 논문은 큰 규모의 시스템에 대한 충족율을 얻기 위해서 모의실험 프로그램을 개발하였다. 비교 목적을 위하여 각 상황에 대해 모의실험을 5회 실시하였다. 각 회마다 모의실험은 10,000개의

고객주문을 다루었고, 첫 1,000개의 고객주문은 준비기간(warm-up)으로 취급하였다. 최종 순수 시스템의 충족율은 5개의 모의실험 충족율을 평균하여 구하였다.

<표 3>은 비교결과를 보여준다. 가우스 소거법에 의한 계산시간은 Intel Core2 Quad CPU@ 2.83 GHz, 4.00GB RAM 컴퓨터에서 실행한 결과이고, 빈 공간은 메모리부족 때문에 결과치를 얻을 수 없었다. 작은 규모의 시스템 경우에 GISA 알고리즘으로 구한 형태  $K$  순수 시스템의 충족율은 가우스 소거법으로 구한 값과 거의 동일하다. 이것으로 GISA 알고리즘의 정확성을 확인할 수 있다. 또한  $r_{max}$ 와  $r_{sum}$ 가 0에 근접함을 확인함으로써 GISA 알고리즘의 정확성을 재확인할 수 있다. 큰 규모의 시스템 경우에  $r_{max}$ 와  $r_{sum}$ 가 GISA 알고리즘의 정확성을 확인시켜 주지만, <표 3>은 마지막 열에 GISA 알고리즘과 모의실험을 비교한 결과를 보여준다. 절대차의 평균값이 0.0028이다. <표 3>에 있는 결과에 근거할 때, GISA 알고리즘은 형태  $K$  순수 시스템에 있는 보유재고의 안정된 결합분포를 유도하는

데 믿을만한 기법이라고 결론 내릴 수 있다.

## 5.2 초기 해의 영향

제 4장에서 언급했듯이, GISA 알고리즘에 의해 생성되는 연속적인 벡터 해는 초기 해에 의해 영향을 받을 수 있다. 본 절에서는 초기해가 연속적인 벡터 해에 어떤 영향을 미치는지에 대해 검사하고자 한다.

본 절에서는 초기 해에 있는 원소 중에 양수를 갖는 원소의 수를 관리함으로써 초기 해를 구별하였다. 다시 말해서, 초기 해에 있는 원소 중에 관리되는 일부분에만 양수를 할당하고, 나머지 원소에는 0을 할당하였다. 여기서 할당된 양수는  $1.0/(\text{양수를 갖는 원소의 수})$ 로 계산되었다. 그리고 양수를 갖는 원소의 위치는 무작위로 할당하였다.

GISA 알고리즘의 수렴속도에 미치는 초기 해의 영향을 검사하기 위해서 본 절은 초기 해에서 양수를 갖는 원소의 수를 증가시키며 형태  $K$  순수 시스템(여기서  $|K| = 5$ )의 충족율을 계산하였다(여기

<표 3> GISA 알고리즘의 가우스 소거법 및 모의실험과의 비교결과

$ K $	$s_i$	$\lambda^{pK}$	가우스 소거법		GISA			모의실험	절대차
			$F^{pK}$	시간	$F^{pK}$	$r_{max}$	$r_{sum}$	$F^{pK}$	
5	10	1.0	0.746		0.746	5.22E-07	1.16E-06	0.746	0.000
		0.7	0.891	0:00:01	0.891	7.10E-07	1.67E-06	0.888	0.003
		0.5	0.964		0.964	7.17E-07	1.07E-06	0.963	0.001
	15	1.0	0.856		0.856	5.96E-08	3.22E-06	0.854	0.003
		0.9	0.909	0:04:44	0.909	3.78E-07	1.83E-06	0.910	0.001
		0.8	0.952		0.952	3.19E-07	1.62E-06	0.951	0.001
	5	1.1	0.839		0.839	1.09E-06	1.99E-06	0.836	0.003
		1.0	0.900	2:16:31	0.900	1.48E-07	2.16E-06	0.899	0.001
		0.9	0.952		0.952	8.44E-07	1.78E-06	0.952	0.000
5	10	1.0	0.708		0.708	2.80E-09	7.51E-08	0.711	0.003
		0.7	0.864	16:55:12	0.864	5.60E-09	1.13E-05	0.863	0.001
		0.5	0.951		0.951	1.08E-07	1.77E-06	0.951	0.000
	15	1.0	-	메모리부족	0.823	3.46E-08	6.21E-07	0.831	0.008
		0.9	-		0.889	2.48E-08	6.39E-05	0.888	0.001
		0.8	-		0.944	2.84E-08	3.53E-05	0.938	0.006
	15	1.1	-		0.825	2.91E-05	7.96E-06	0.824	0.002
		1.0	-	메모리부족	0.872	1.66E-07	4.44E-06	0.880	0.007
		0.9	-		0.948	4.79E-05	4.04E-06	0.939	0.009

서 양수를 갖는 원소의 수를 1, 10, 그리고 50으로 증가시켰다.  $s_i = 5$ 와  $s_i = 10$ 인 두 경우에 대한 수렴속도를 [그림 3]에서 보여주고 있다(여기서  $\lambda^{pK} = 1.0$ 과  $\mu_i = 1.0(i \in K)$ 으로 설정하였다). [그림 3]으로부터 양수를 갖는 원소의 수에 따른 수렴속도의 차이를 관찰하기 힘들다. 그러나 기준재고 수준이 증가함에 따라 수렴하는 데까지 요구되는 반복수가 더 많아진다는 것은 관찰할 수 있다.

한편 GISA 알고리즘은 해가 발산하는 것을 방지하기 위한 절차를 갖고 있기 때문에 연속적인 벡터 해는 어떤 해로든지 수렴할 것이라는 것을 알 수 있다. 그러나 <표 4>에서 보여주듯이, 규모가 큰 경우에 초기해에 따라 GISA 알고리즘은 약간의 다른 해로 수렴할 수 있다는 것을 알 수 있다. <표 4>은 5개의 초기 해를 이용하여 GISA 알고리즘이 계산한 형태  $K$  순수 시스템(여기서  $|K| = 5$ )의 충족율을 보여준다(여기서  $s_i = 10$ ,  $\lambda^{pK} = 1.0$  그리고  $\mu_i = 1.0(i \in K)$ 으로 설정하였다). 다섯 개의 시행 중에 시행 1의 결과가 가장 높은 정확도(즉, 최소의  $r_{sum}$ )를 보이므로 그것을 취하는 것이 현명한 선택일 것이다.

[그림 3]으로부터 알 수 있듯이, 양수를 갖는 원소의 수에 따라 수렴속도에 차이가 많이 나지 않으므로 <표 4>에 이용한 5개의 초기 해에는 양수를

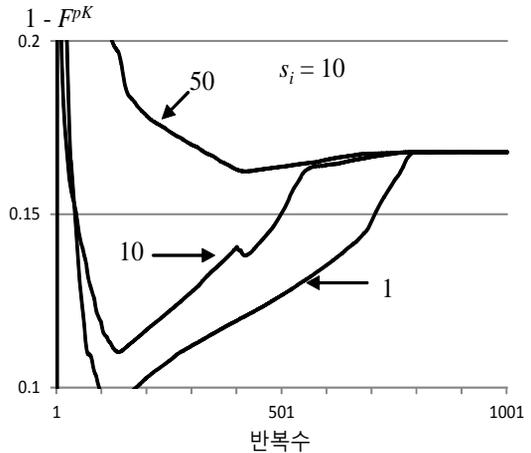
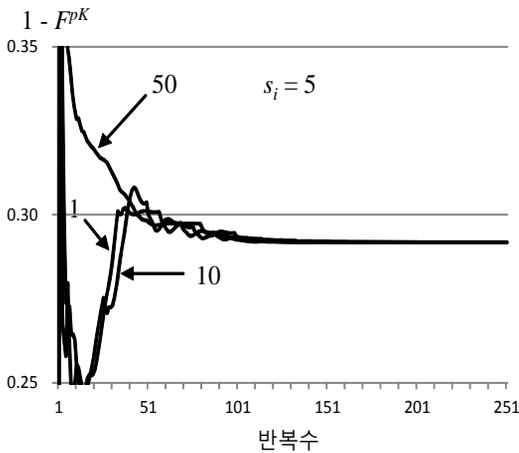
갖는 원소의 수를 모두 1로 설정하였다. 그러나 양수를 갖는 원소의 위치를 서로 다르게 함으로서 차이가 나게 했다.

<표 4> 다른 초기 해에 따른 충족율

시행	$F^{pK}$	$r_{max}$	$r_{sum}$
1	0.8321	3.00E-10	1.98E-05
2	0.8321	1.20E-09	2.03E-05
3	0.8346	5.91E-05	4.38E-03
4	0.8319	1.96E-05	6.06E-05
5	0.8321	4.02E-08	2.01E-05

다음으로 GISA 알고리즘의 효율성을 개선하기 위한 초기해 설정방안이 있는지 알아보기 위해 양수를 갖는 원소의 위치를 다양하게 바꾸어가며 많은 실험을 실시하였다. 실험결과, 한가지 공통으로 나타나는 현상은 양수를 갖는 원소의 위치를 유한 상태공간( $\mathbf{n} = (n_i : i \in K) | 0 \leq n_i \leq s_i, i \in K$ )에서  $n_i = 0$ 를 갖는 상태에 할당하면 GISA 알고리즘은 의미 없는 결과값으로 수렴하였다. 따라서 이 점을 유념해서 초기 해를 설정하면 보다 효율적으로 GISA 알고리즘을 활용할 수 있다.

결론적으로 GISA 알고리즘에 영향을 주는 초기해의 특성은 양수를 갖는 원소의 수 보다는 양수를 갖는 원소의 위치가 더 중요함을 알 수 있다.



[그림 3] 수렴속도

### 5.3 주문충족율에 대한 분석

본 논문은 구매종속성이 존재하는 상황에서 모든 형태  $K$  순수 시스템의 충족율을 통합하여 전체 시스템의 주문충족율을 구한다. 본 절에서는 해법절차와 주문충족율에 대해 살펴보고 경영상의 통찰을 얻고자 한다.

제 5.1절처럼 테스트 베드를 다음과 같이 설계하였다. 품목 수와 주문형태 수의 조합으로 다음과 같은 4가지 경우를 고려하였다. 경우 1 :  $J = 3 \& |T| = 7$ , 경우 2 :  $J = 3 \& |T| = 7$  (비대칭), 경우 3 :  $J = 3 \& |T| = 4$ , 그리고 경우 4 :  $J = 5 \& |T| = 6$ . 경우 1과 2에서는 가능한 주문형태를 모두 포함하였으므로  $|T| = 7$ 이다. 경우 3과 4에서는 각 품목에 대한 주문형태와 모든 품목을 포함하는 하나의 주문형태를 고려하여  $|T| = J+1$ 이다. 주문형태 2만 제외하고, 모든 주문형태는 주문율에 대해 균형을 유지하였다. 모든 소매자 시스템에서 동일한 기준재고 수준을 택하였고, 즉,  $s_1 = s_2 = \dots = s_J$ , 동일한 기준재고 수

준으로 5를 설정하였다. 품목 재보충율  $\mu(i \in K)$ 를 모두 1.0으로 설정하고, 소매자 시스템의 전반적인 주문율에 대해 세 가지 값을 선택하였다. 즉,  $\lambda = 1.0, 1.25$ , 그리고 1.50.

본 논문은 구매종속성의 정도(degree of purchase dependence,  $dp$ )를 다음과 같이 정의하였다.

$$dp = \sum_{K \in T} \frac{|K|-1}{J-1} q^K$$

구매종속성의 정도가 의미하는 바를 살펴보면, 모든 주문이 모든 품목을 포함하는 하나의 주문형태이면  $dp = 1$ 이고, 모든 주문이 각 품목에 대해 한 품목만을 포함하는 주문형태이면  $dp = 0$ 이다. 구매종속성의 정도는 품목에 대한 수요가 고객주문에 의해 어느 정도 서로 결합되었는가를 측정한다. <표 5>와 <표 6>은 경우 1&2와 경우 3&4, 각각에 대한  $dp$ 와 그에 대응한  $q^K$ 의 값을 보여준다.

각 경우에 대하여 고객주문을 품목수요로 분해한

<표 5> 경우 1&2 :  $dp$ 와 그에 대응한  $q^K$ 의 값

K	품목			$q^K$					
	1	2	3	균형			비균형		
1	1	0	0	0.05	0.10	0.10	0.04	0.15	0.10
2	0	1	0	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05	0.07
3	0	0	1	0.05	0.10	0.10	0.06	0.10	0.13
4	1	1	0	0.07	0.10	0.15	0.08	0.10	0.10
5	1	0	1	0.07	0.10	0.15	0.06	0.08	0.20
6	0	1	1	0.07	0.10	0.15	0.07	0.12	0.15
7	1	1	1	0.64	0.40	0.25	0.64	0.40	0.25
	$dp$			0.745	0.55	0.475	0.745	0.55	0.475

<표 6> 경우 3&4 :  $dp$ 와 그에 대응한  $q^K$ 의 값

J	T	$dp$	$q^K$	
			균형	비균형
3	4	0.85	$q^1 = q^2 = q^3 = 0.05, q^4 = 0.85$	
		0.70	$q^1 = q^2 = q^3 = 0.10, q^4 = 0.70$	
		0.40	$q^1 = q^2 = q^3 = 0.20, q^4 = 0.40$	
5	6	0.75	$q^1 = q^2 = q^3 = q^4 = q^5 = 0.05, q^6 = 0.75$	
		0.50	$q^1 = q^2 = q^3 = q^4 = q^5 = 0.10, q^6 = 0.50$	
		0.25	$q^1 = q^2 = q^3 = q^4 = q^5 = 0.15, q^6 = 0.25$	

후, GISA 알고리즘을 이용하여 형태  $K$  순수 시스템의 충족율을 계산하였다. 그리고 소매자 시스템의 주문충족율은 모든 형태  $K$  순수 시스템의 충족율을 통합하여 구하였다. 제 5.1절처럼 비교목적으로 각 상황에 대해 모의실험을 5회 실시하였다. 각 회마다 모의실험은 10,000개의 고객주문을 다루었고, 첫 1,000개의 고객주문은 준비기간(warm-up)으로 취급하였다. 소매자 시스템의 주문충족율은 5개의 모의실험 주문충족율을 평균하여 구하였다. 이번에 고객주문은 각 경우에 대해  $q^K$ 의 비율로 집합  $T$ 에 있는 모든 주문형태를 포함하도록 구성되었다.

<표 7>부터 <표 10>까지는 각 경우에 대해서 GISA 알고리즘과 모의실험으로 구한 형태  $K$  순수 시스템의 충족율과 소매자 시스템의 주문충족율을 보여준다. 이 결과로부터 다음과 같은 경영상의 통찰을 얻을 수 있다. 첫째로 모의실험으로 구한 주문충족율이 모든 부품으로 구성된 순수 시스템의 충

족율과 오직 한 부품으로 구성된 순수 시스템의 충족율 사이에 위치하는 것을 관측할 수 있다. 다시 말해서, 이 두 순수 시스템의 충족율이 소매자 시스템의 주문충족율에 대한 하한과 상한을 제공한다고 볼 수 있다. 주문충족율의 하한은 모든 부품으로 구성된 순수 시스템의 충족율로 구할 수 있고, 주문충족율의 상한은 오직 한 부품으로 구성된 순수 시스템의 충족율로 구할 수 있다.

두 번째로 구매종속성의 정도가 감소함에 따라 (다른 모든 조건은 동일함), (i) 충족율의 하한과 상한의 간격이 줄어들고, (ii) 주문충족율이 증가하고, 그리고 (iii) 주문충족율은 충족율의 상한에 접근하는 것을 관측할 수 있다. 이러한 관측은 구매종속성이 존재할 때 품목의 수요를 독립적으로 다루면 어떤 품목의 불필요한 과잉재고나 주문 수준에서의 불만족스런 서비스를 야기할 수 있다는 것을 암시한다. 따라서 보다 나은 수익과 낮은 재고비용을 실현

<표 7> 경우 1의 충족율

$\lambda$	$dp$	$F^{n7}$	$F^{n4} = F^{n5} = F^{n6}$	$F^{n1} = F^{n2} = F^{n3}$	$F$	모의실험	절대차
1.5	0.745	0.637	0.669	0.731	0.658	0.668	0.010
	0.550	0.722	0.754	0.812	0.759	0.771	0.012
	0.475	0.758	0.789	0.844	0.798	0.821	0.023
1.25	0.745	0.728	0.760	0.818	0.748	0.760	0.011
	0.550	0.807	0.836	0.884	0.839	0.861	0.022
	0.475	0.838	0.865	0.907	0.871	0.890	0.020
1	0.745	0.830	0.857	0.901	0.846	0.864	0.018
	0.550	0.891	0.912	0.943	0.913	0.939	0.026
	0.475	0.913	0.931	0.956	0.934	0.954	0.020

<표 8> 경우 2의 충족율

$\lambda$	$dp$	$F^{n7}$	$F^{n6}$	$F^{n5}$	$F^{n4}$	$F^{n3}$	$F^{n2}$	$F^{n1}$	$F$	모의실험	절대차
1.5	0.745	0.637	0.666	0.672	0.669	0.731	0.725	0.737	0.658	0.670	0.012
	0.550	0.721	0.765	0.744	0.754	0.812	0.831	0.793	0.757	0.778	0.021
	0.475	0.758	0.789	0.761	0.818	0.793	0.891	0.844	0.792	0.796	0.004
1.25	0.745	0.728	0.757	0.763	0.760	0.818	0.812	0.823	0.748	0.758	0.009
	0.550	0.807	0.845	0.827	0.836	0.884	0.898	0.869	0.838	0.855	0.017
	0.475	0.838	0.865	0.842	0.887	0.869	0.939	0.907	0.866	0.886	0.020
1	0.745	0.830	0.855	0.859	0.857	0.901	0.897	0.904	0.846	0.859	0.013
	0.550	0.891	0.918	0.906	0.912	0.943	0.951	0.934	0.912	0.933	0.020
	0.475	0.913	0.931	0.916	0.944	0.934	0.973	0.956	0.931	0.948	0.018

〈표 9〉 경우 3의 총족율

$\lambda$	$dp$	$F^{p4}$	$F^{p1} = F^p = F^{p3}$	$F$	모의실험	절대차
1.5	0.850	0.596	0.689	0.610	0.621	0.012
	0.700	0.655	0.749	0.684	0.702	0.019
	0.400	0.795	0.874	0.842	0.867	0.025
1.25	0.850	0.688	0.781	0.702	0.715	0.013
	0.700	0.746	0.833	0.772	0.790	0.018
	0.400	0.868	0.928	0.904	0.922	0.018
1	0.850	0.795	0.874	0.807	0.819	0.012
	0.700	0.844	0.911	0.864	0.889	0.025
	0.400	0.933	0.967	0.953	0.966	0.012

〈표 10〉 경우 4의 총족율

$\lambda$	$dp$	$F^{p6}$	$F^{p1} = F^{p2} = F^{p4} = F^{p5} = F^{p6}$	$F$	모의실험	절대차
1.5	0.750	0.617	0.749	0.650	0.674	0.023
	0.500	0.758	0.874	0.816	0.838	0.022
	0.250	0.912	0.967	0.953	0.965	0.012
1.25	0.750	0.708	0.833	0.739	0.765	0.025
	0.500	0.838	0.928	0.883	0.904	0.021
	0.250	0.951	0.984	0.976	0.981	0.005
1	0.750	0.811	0.911	0.836	0.859	0.022
	0.500	0.912	0.967	0.940	0.951	0.012
	0.250	0.979	0.994	0.990	0.993	0.003

하기 위하여 재고보충 정책을 설계할 때 구매충족성에 대한 지식을 고려하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다. 그러나 구매충족성의 정도에 따라 언제쯤 품목의 수요를 독립적으로 다루어도 허용될만한지에 대한 결론을 도출하기 위해서는 보다 심도 있는 연구가 요구된다.

마지막으로 식 (3)과 모의실험으로 구한 주문충족율에 대한 비교를 마지막 열에서 볼 수 있다. 절대차의 평균이 0.017이다. 이러한 결과에 근거할 때, 규모가 큰 경우에 식 (3)으로 계산한 주문충족율을 근사치로 사용할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 식 (3)은 형태  $K$  순수 시스템의 총족율을  $q^K$ , 주문이 형태  $K$ 일 확률로 가중-평균함으로써 주문충족율을 단순 근사하기 때문에 주문충족율의 정확도를 향상시킬 필요가 있다. 따라서 보다 정확한 주문충족율을 유도할 수 있도록 형태  $K$  순수 시스템의 총족율을 정교하게 통합할 방법을 개발할 심도 있는 연구

가 요구된다.

## 6. 결 론

구매형태가 구매충족성으로 특징지어지는 소매자 시스템에 대해서 본 논문은 고객주문에 포함된 모든 품목을 보유재고로 즉시 충족시킬 확률인 주문충족율을 계산하는 새로운 근사적 접근법을 제안하였다. 이 새로운 근사적 접근법은 고객주문을 품목수요로 분해하고, 모든 주문형태의 총족율을 계산하여 최종 전체 시스템의 주문충족율에 대한 근사치를 구한다. 모든 주문형태의 총족율을 계산하기 위하여 사용되는 안정된 결합분포를 유도하는 과정에서 전통적인 계산방법은 방정식 및 미지변수의 수가 아주 큰 경우에 차원의 저주에 시달린다.

차원의 저주를 피하면서 해가 수렴하도록 본 논문은 Gauss-Seidel 방법에 기초하여 GISA 알고리

음을 개발하였다. GIAS 알고리즘을 모의실험과 비교하는 수치적 분석을 통하여 본 논문은 GISA 알고리즘이 형태  $K$  순수 시스템에 있는 보유재고의 안정된 결합분포를 유도하는데 믿을만한 기법이라는 것을 입증하였다. 또한 본 논문은 다음과 같은 경영상의 통찰을 얻을 수 있었다. (1) 주문충족율의 하한은 모든 부품으로 구성된 순수 시스템의 충족율로 구할 수 있고, 주문충족율의 상한은 오직 한 부품으로 구성된 순수 시스템의 충족율로 구할 수 있다. (2) 구매종속성의 정도가 감소함에 따라(다른 모든 조건은 동일함), (i) 충족율의 하한과 상한의 간격이 줄어들고, (ii) 주문충족율이 증가하고, 그리고 (iii) 주문충족율은 충족율의 상한에 접근한다. (3) 식 (3)과 모의실험으로 구한 주문충족율에 대한 비교에 근거할 때, 규모가 큰 경우에 식 (3)으로 계산한 주문충족율을 근사치로 사용할 수 있다.

미래연구로 본 논문은 두 가지 테마를 남긴다. 첫째로 본 논문은 구매종속성의 정도가 감소함에 따라 주문충족율은 순수 시스템의 충족율로 구한 상한선에 근접한다는 것을 관측하였다. 따라서 구매종속성의 정도에 따라 언제쯤 품목의 수요를 독립적으로 다루어도 허용될만한지에 대한 결론을 도출하기 위해서는 보다 심도 있는 연구가 요구된다. 다음으로 식 (3)이 계산한 주문충족율은 형태  $K$  순수 시스템의 충족율을 주문이 형태  $K$ 일 확률로 가중-평균하는 단순한 근사치이다. 주문충족율의 정확도를 향상시키기 위하여 형태  $K$  순수 시스템의 충족율을 정교하게 통합하는 방법을 개발할 심도 있는 연구가 요구된다.

## 참 고 문 헌

- [1] 박창규, 서준용, “구매종속성이 재고관리에 미치는 영향”, 『경영과학』, 제30권, 제3호(2013), pp. 17-31.
- [2] 박창규, “구매종속성을 고려한 부분 부재고 재고 모형”, 『한국경영과학회지』, 제39권, 제1호(2014), pp.83-100.
- [3] 박창규, “구매종속성이 존재하는 상황에서 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 고찰”, 『경영과학』, 제32권, 제1호(2015), pp.65-82.
- [4] Athappilly, K., M.A. Razi, and J.M. Tarn, “A multi-technique data mining approach to exploring consumer behaviors,” *Human Systems Management*, Vol.29, No.3(2010), pp.153-163.
- [5] Benjaafar, S. and M. El Hafsi, “Production and inventory control of a single product assemble-to-order system with multiple customer classes,” *Management Science*, Vol.52, No.12(2006), pp.1896-1912.
- [6] Dayanik, S., J.S. Song, and S.H. Xu, “The effectiveness of several performance bounds for capacitated production, partial-order-service, assemble-to-order systems,” *Manufacturing and Service Operations Management*, Vol.5, No.3(2003), pp.230-251.
- [7] Gao, C., H. Shen, and T.C.E. Cheng, “Order-fulfillment performance analysis of an assemble-to-order system with unreliable machines,” *International Journal of Production Economics*, Vol.126, No.2(2010), pp.341-349.
- [8] Gunawardena, A.D., S.K. Jain, and L. Snyder, “Modified iterative methods for consistent linear systems,” *Linear Algebra and its Applications*, Vol.154~156(1991), pp.123-143.
- [9] Hadjidimos, A., D. Noutsos, and M. Tzoumas, “More on modifications and improvements of classical iterative schemes for M-matrices,” *Linear Algebra and its Applications*, Vol.364 (2003), pp.253-279.
- [10] Hoen, K.M.R., R. Gullu, G.J. van Houtum, and I.M.H. Vliegen, “A simple and accurate approximation for the order fill rates in lost-sales assemble-to-order systems,” *International Journal of Production Economics*, Vol. 133, No.1(2011), pp.95-104.

- [11] Irvani, S., L. Luangkesorn, and D. Simchi-Levi, "On assemble-to-order systems with flexible customers," *IIE Transactions*, Vol.35, No.5(2003), pp.389-403.
- [12] Irvani, S., L. Luangkesorn, and D. Simchi-Levi, "A general decomposition algorithm for parallel queues with correlated arrivals," *Queueing Systems*, Vol.47, No.4(2004), pp.313-344.
- [13] Kohno, T., H. Kotakemori, and H. Niki, "Improving the modified Gauss-Seidel method for Z-matrices," *Linear Algebra and its Application*, Vol.267(1997), pp.113-123.
- [14] Kotakemori, H., K. Harada, M. Morimoto, and H. Niki, "A comparison theorem for the iterative method with the preconditioner(I+Smax)," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.145, No.2(2002), pp.373-378.
- [15] Kotakemori, H., H. Niki, and N. Okamoto, "Accelerated iterative method for Z-matrices," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.75, No.1(1996), pp.87-97.
- [16] Lu, Y., J.S. Song, and D.D. Yao, "Order fill rate, lead time variability, and advance demand information in an assemble-to-order system," *Operations Research*, Vol.51, No.2(2003), pp.292-308.
- [17] Milaszewicz, J.P., "Improving Jacobi and Gauss-Seidel iterations," *Linear Algebra and its Applications*, Vol.93(1987), pp.161-170.
- [18] Morimoto, M., K. Harada, M. Sakakihara, and H. Sawami, "The Gauss-Seidel iterative method with the preconditioning matrix(I+S+Sm)," *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol.21, No.1(2004), pp.25-34.
- [19] Niki, H., T. Kohno, and M. Morimoto, "The preconditioned Gauss-Seidel method faster than the SOR method," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.219, No.1(2008), pp.59-71.
- [20] Noutsos, D. and M. Tzoumas, "On optimal improvements of classical iterative schemes for Z-matrices," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.188, No.1(2006), pp.89-106.
- [21] Park, C. and J. Seo, "Consideration of purchase dependence in inventory management," *Computers and Industrial Engineering*, Vol.66, No.2(2013), pp.274-285.
- [22] Song, J.S., "On the order fill rate in a multi-item, base-stock inventory system," *Operations Research*, Vol.46, No.6(1998), pp.831-845.
- [23] Song, J.S., "Order-based backorders and their implications in multi-item inventory systems," *Management Science*, Vol.48, No.4(2002), pp.499-516.
- [24] Song, J.S., S. Xu, and B. Liu, "Order-fulfillment performance measures in an assemble-to-order system with stochastic lead times," *Operations Research*, Vol.47, No.1(1999), pp.131-149.
- [25] Song, J.S. and D.D. Yao, "Performance analysis and optimization of assemble-to-order systems with random lead times," *Operations Research*, Vol.50, No.5(2002), pp.889-903.
- [26] Song, J.S. and P. Zipkin, "Supply chain operations : assemble-to-order system," In : de Kok, T. and S. Graves, (Eds.) *Handbooks in Operations Research and Management Science*, North-Holland, Amsterdam, (2003), pp.561-596.
- [27] Usui, M., H. Niki, and T. Kohno, "Adaptive Gauss-Seidel method for linear systems," *International Journal of Computer Mathematics*, Vol.51, No.1/2(1994), pp.119-125.
- [28] Vliegen, I.M.H. and G.J. van Houtum, "Appro-

- ximate evaluation of order fill rates for an inventory system of service tools," *International Journal of Production Economics*, Vol. 118, No.1(2009), pp.339-351.
- [29] Yang, Y., H. Liu, and Y. Cai, "Discovery of online shopping patterns across websites," *INFORMS Journal on Computing*, Vol.25, No.1(2013), pp.161-176.
- [30] Ye, J. and S. Li, "Folding algorithm : a computational method for finite QBD processes with level-dependent transitions," *IEEE Transactions on Communications*, Vol.42, No.234 (1994), pp.625-639.
- [31] Zheng, B. and S.X. Miao, "Two new modified Gauss-Seidel methods for linear system with M-matrices," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.233, No.4(2009), pp.922-930.
- [32] Zhou, W. and X. Chai, "Stein-Chen approximation and error bounds for order fill rates in assemble-to-order systems," *Naval Research Logistics*, Vol.59, No.8(2012), pp.643-655.