韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.2.193
2016. 5. 제 55권, 제 2호, 193-208.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
2016, Vol. 55, No. 2, 193-208.

우도원리에 대한 분석과 그에 따른 교육적 시사점에 대한 연구

박선용(영남대학교)
윤형석(영남대학교 대학원)

Ⅰ. 서론

우도원리(likelihood principle)[1]가 통계학의 기본 원리라는 주장에 기초해, 학교수학에서의 확률 및 통계 교육과 관련해 이 원리에 대한 관심이 지속적으로 이어져 왔고, 국내에서도 그 원리에 기초해 교육과정에 대한 분석과 몇몇 교육적 제안이 제기되어 왔다(김혜랑, 2004;허지영, 2010;신수영, 2011).

하지만 이러한 교육적 관심과 제안에서 '우도원리가 어떤 점에서 통계학의 기본원리인지?'에 대한 면밀한 고찰을 기반으로 하여 그 원리를 어떤 방식으로 학교수학에 반영하여 가르쳐야 한다고 주장했다고 보기는 어렵다. 즉, 우도원리의 본질에 대한 분석을 바탕으로 한 교육적 제안을 했다고 볼 수는 없다.

기존의 국내 수학교육학 선행연구에서, 우도원리는 실제 자료와 빈도를 강조하는 것으로 해석되어 빈도주의자의 통계적 사고방법이라고 주장된다(이영하, 허지영, 2010, p.165). 그런데 이와 반대로 일반적으로 빈도주의자는 우도원리를 거부하고 오히려 베이지주의자가 그 원리를 수용한다는 주장도 제기되는 상황이다(김달호, 2013, p.96).

이러한 모습은 학교수학에서 '우도원리'를 반영하고자 하는 것이 그 기초가 확고하게 마련되지 않은 채 섣부르게 이루어질 위험이 있음을 보여준다. 이에, 이 연구는 우도원리에 대한 교수학적 분석을 수행하고 그 결과를 바탕으로 그 원리를 반영하는 교육의 방향에 대해 논의하고자 하였다.

우도원리는, 국내 수학교육학 선행연구에서 일반적으로, '임의 표본에 의해 관측된 결과는 그와 같은 관측결과를 얻을 만한 충분한 확률적 이유가 있다고 생각하는 원리(이영하 외, 2010, p.165)'로 정의된다. 사실, 대부분의 통계학을 전공하지 않은 수학교육학 연구자의 경우에는 이 의미를 정확히 이해하지 못한다. 특히, 일종의 중간언어로 표현된 '충분한 확률적 이유가 있다.'의 의미가 무엇인지를 파악하기가 다소 힘들다[2]. 물론, 통계학 비전공자에게 있어 우도원리에 대한 일상어 표현이나 전문용어 표현은 그 의미를 파악하는 데에 오히려 어려움을 가중시킬 수 있으므로, 기존 선행연구에서 그 중간의 표현을 택해 우도원리를 소개했던 것은 불가피한 선택이었을 것이다.

하지만 우도원리가 어느 정도 수학교육학계에서 소개된 현재의 상황에서 이 원리와 관련된 교육적 논의를 더욱 진척시켜 나가기 위해서는 그 원리에 대한 명확한 이해가 이루어져야 할 필요가 있다. 이런 점을 고려해, 이 연구에서는 우도와 우도원리의 의미를 보다 명확하게 드러내는 것을 이 연구의 기본적인 목적으로 설정하였다.

다음으로, 이 연구에서는 이러한 분석결과를 토대로

* 접수일(2016년 3월 15일), 수정일(2016년 4월 19일), 게재확정일(2016년 5월 11일)
* ZDM 분류 : K74
* M2000 분류 : 62A01
* 주제어 : 우도, 우도원리, 통계교육, 비판적 안목

1) 국내 수학교육학 연구에서 '우도원리'는 흔히 '가능성의 원리'로 부르지만, 일반적으로 통계학계에서는 likelihood를 우도로 번역한다. 용어상의 혼란을 피하기 위해, 이하의 논의에서는 '우도원리'로 부르기로 한다.

2) 우도원리에 대한 국내 수학교육학연구의 대부분은 이영하 교수와 공동연구자(학위논문작성자)에 의해 수행되었다. 이에, 연구자는 그들이 제시한 우도원리의 의미를 이해하기 위해 이영하(2016)와의 개인적인 면담 및 의사교환을 진행한 바 있다. 여기서, 그는 빈도주의의 관점에서 '약한 우도의 원리'를 수용한다는 점을 밝혔는데, 이 원리에 대한 자신의 표현이 학문적 용어와 일상적 언어로 이루어진 것이 아니라고 말하며, 그 중간 정도의 표현을 택한 이유는 수학교육학계에 쉽게 소개하기 위해서였다고 말하였다. 이와 관련해, 이 연구가 그러한 표현에 대한 비판과 재해석에 목적을 두고 있지 않는다는 것과 이영하와의 면담을 통해 '빈도주의와 베이지주의의 화해와 절충'이라는 아이디어를 얻었다는 것을 말해두고자 한다.

하여 우도원리를 학교수학에 어떻게 반영하는 것이 바람직한 것인지에 대해 다루고자 하였다. 물론, 이러한 작업은 학문적 관점이 아니라 교육적 관점을 토대로 하여 진행하였다. 다시 말해, 우도원리가 통계학의 중요한 원리이기 때문에 그 원리를 학교수학의 확률 및 통계 단원에 반영해야 한다고 주장하는 방식을 택하지 않고, 학교수학에서의 통계교육의 목적에 비추어 우도원리를 어떻게 반영하는 것이 적절한지에 대해 논의하였다.

그런데 앞서 언급했듯이 통계학의 큰 두 학파인 빈도주의와 베이지주의에서는 우도원리에 대한 입장이 다르다. 학교수학은 공공의 성격을 지니고 있기 때문에, 우도원리를 학교수학의 확률 및 통계 단원에 반영한다 하더라도, 어느 특정학파의 의견을 그대로 따르기는 힘들다. 이에, 이 연구에서는 우도원리와 관련된 두 학파 사이의 논쟁에 대한 분석을 통해 우도원리를 학교수학에 반영할 때의 절충적 방향이 무엇인지에 대해서도 탐색하고자 하였다.

요약하면, 이 연구는 빈도주의와 베이지주의 사이의 중립적 입장을 견지하면서, 우도원리에 대한 교수학적 분석 연구를 수행한 것이다[3].

Ⅱ. 이론적 배경

일반적으로 교수학적 분석 연구는 본질주의(essentialism)을 그 배경으로 하는데, 우도원리에 대한 교수학적 분석을 수행하는 이 연구도 본질주의[4]를 수용한다. 기본적으로, 본질주의 교육사조에서는 지식의 본질을 중요시하고 문화적 유산의 가치가 교육에 의해 전수되어야 한다고 보는 데 이 때 교육의 목적은 지식 자체를 위해서라기보다는 현재의 문제를 해결하기 위해서라는 입장을 취한다(서울대학교 교육연구소, 2000).

물론, 이 연구에서 우도와 우도원리의 의미를 분석하고 그에 기초해 교육적 시사점을 추출하는 작업은 지식의 본질을 중요시하는 측면을 드러낸다. 그런데 이 연구에서는 통계교육의 중요한 목적 중 한 가지가 ‘비판적 민주시민의 양성’이라고 본다. 즉, 통계교육의 목적은 통계지식 자체의 습득이 아니라 학습자로 하여금 현재의 삶의 문제를 능동적이고 적극적으로 해결하는 통계적 안목을 갖추도록 하는 데에 있다고 간주한다. 통계교육은 통계지식 자체의 전수가 아니라 학습자가 그들의 삶의 문제를 해결하도록 돕기 위해 이루어져야 한다고 본다. 이러한 가정은, 이 연구가 항존주의(perennialism), 주지주의(intellectualism)에 가까운 본질주의가 아니라 진보주의(progressivism)의 장점을 일부 포괄하는 본질주의를 기반으로 하고 있음을 나타낸다.

요컨대, 이 연구에서 우도원리에 대해 분석하고 그 교육적 시사점을 도출하는 일련의 작업은 ‘보는 지식’인 이론적 지식과 ‘하는 지식’인 실제적 지식을 결합시키기 위한 기초 작업이다.

Ⅲ. 연구 방법

교수학적 분석의 많은 부분은 문헌 연구의 방법으로 이루어진다(우정호 외, 2007; 송상헌 외, 2013). 문헌 연구를 활용해, 이 연구에서도 어떤 역사적인 맥락 속에서 우도와 우도원리가 등장했는지를 분석하였고, 우도원리가 다양한 형태로 사용되는 과정과 그 특징을 통계학적으로 정리하였고, 우도와 우도원리의 특징에 대해 역-확률과 관련해 인식론적인 해석을 시도하였고, 우도원리의 적용과 해석과 관련한 철학적 논의를 전개하였다. 그리고 그러한 분석에 기초해 교육적 시사점을 도출하는 작업을 하였다.

한편, 수학교육학자로서 통계학의 전문적 내용을 다루는 한계와 관련해, 이 연구에서는 전문 통계학자와의 지속적 면담을 통해 연구 내용의 타당성과 정확성을 제고하려고 하였다. 특히, 국내 통계학계의 다수를 이루는 빈도주의자에게 뿐만 아니라 소수인 베이지주의자에게서도 끈임 없이 자문과 도움을 받았다. 물론, 이러한 시도는 우도원리에 대한 분석과 그 교육적 시사점 도출과 관련해 두 통계학파 사이에서 중립적 입장을 취하기 위한

3) 우리나라의 확률 및 통계교육 연구 분야에서 교수학적 분석 연구는 거의 이루어지지 않은 상황이다(이은희, 김원경, 2015; 이영하, 심효정, 2003).

4) 이 연구에서의 교육과 교육연구에 대한 입장이며, 통계학의 학문적 성격에 대한 입장이 아니다. 주의할 것은, 이러한 본질주의에 대한 표방이 ‘결정론적 세계관’에 대한 수용을 의미하는 것이 아니라는 점이다. 오히려, 통계학은 ‘우연성’, ‘불확실성’을 본질로 하는 학문이며, 이런 점에서 통계학의 이면에는 ‘비결정론적 세계관’이 자리한다고 하겠다.

방책이기도 하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 우도와 우도원리의 등장 배경

Fisher는 1921년에 우도함수(likelihood function)의 정의를 제시하고, 1922년에 일명 최대우도법(method of maximum likelihood)을 제안하고, 1934년에 '우도함수가 자료 안에 포함된 모든 정보를 담는 것으로 간주되어야 한다.'는 형태로 우도원리를 처음으로 제안하였다(Edwards, 1992, pp.221-235). 그렇다면, 그는 어떤 배경하에 우도함수, 우도원리 등을 고안했던 것일까?

물론, 그 발생은 통계학사의 큰 흐름 속에서 이루어졌다. 우리는 흔히 경쟁하는 가설 또는 다른 가능한 모수 값(parameter values)의 고과(merits)를 비교하려고 한다. 이러한 목적을 위해 믿음을 측정해야 할 필요성이 제기되어왔는데, 그 측정을 하기 위해 Bayes와 Laplace는 18세기 중후반에 원인이나 가설의 확률을 사건의 빈도로부터 연역해내는 역-확률 이론(theory of inverse probability)을 만들어냈다. Laplace의 권위[5]에 의해 가설에 대한 믿음의 측정치로서 역-확률을 사용하는 관행은 상당 기간 지속되었다(Hacking, 1999).

그런데 Laplace는 1811년 무렵부터 주관성이 개입될 수밖에 없는 '원인의 확률'을 사용하지 않고 빈도기반(frequency-based) 접근법을 사용하기 시작한다. 이것은 일명 빈도주의(frequentism)의 시작을 알리는 것이었고, 19세기 중반의 Cournat, Boole, Venn 등은 빈도주의의 입장에서 역-확률을 사용하는 관행에 본격적으로 제동을 걸게 된다. 그들은, 어떤 가설이 참일 확률인 사전확률(prior probability)과 그 분포를 다루는 것이 불합리하다[6]고 간주하고서, 사전확률 분포에 기초해서 베이지 정리를 이용하여 사후확률(posterior probability), 즉 역-확률을 계산하는 이론을 수용하지 않았다. 확률의 정리로서의 베이지 정리는 인정하지만, 가설들의 모집단에서 그것의 일정 비율은 참이고 특정 가설은 그 모집단으로부터 무작위로 추출한 것이라 볼 수 없기에, 가설에 베이지 정리를 적용하는 것을 거부했던 것이다(Edwards, 1978; Dale, 1991; Stigler, 1986; 1999; 2010).

이러한 역-확률 이론에 대한 거부는 대안적인 통계적 추론 방법인 유의성 검정과 추정 이론을 낳게 된다. 그리고 유의성 검정에 대한 대중적 보급은 가설에 대한 지지(support)를 표현하는 척도를 찾는 시도를 잠정적으로 멈추게 하였다. 하지만 유의성 검정은 "내가 이러한 관찰결과를 알 때, 무엇을 해야만 하는가?"에 대해, 즉 어떤 가설을 기각할 지의 여부에 대해서 관심을 기울일 뿐[7]이기 때문에, Fisher는 가설에 대한 지지를 표현하는 척도를 마련하여 "이러한 관찰결과가 가설 A 대 가설 B에 대해 무엇을 말해주는가?"와 같은 문제에 답하고자 하였다(Royall, 1999). 그리고 이런 통계사적 배경 속에서 나오게 된 것이 바로 우도와 우도원리이다. 기본적으로, 우도는 빈도를 중요시하는 맥락 속에서 등장했던 것이다.

우도함수는 확률모델, 통계적 가설의 집합, 자료 등의 세 가지를 기반으로 만들어진다. θ 와 x 가 각각 모수와 관측된 자료일 때, θ 를 인덱스로 하여 관측된 자료 x 에 대한 확률모델을 $\mathrm{P}(x|\theta)$ 라 하자[8]. 이 때, $\mathrm{P}(x|\theta)$ 를 고정된 x 에 대한 θ 의 함수로 간주하여 이 함수에 비례하는 모든 함수를 우도함수라 하고 $\mathrm{L}(\theta)$ 또는 $\mathrm{L}(\theta|x)$ 로 표기한다.

이러한 우도함수에 대한 형식적 정의를 그 구성과정에 초점을 맞추어 직관적으로 설명하면 다음과 같다. 어떤 확률모델에서 주어진 가설 H에 대해 자료 R을 얻을 수 있는 확률을 P(R|H)라 하자. 가설 H는 일반적으로 사건이 아닐 수도 있으므로, 그 확률은

5) Laplace의 학문적 권위와 비교해, 그의 삶에 대한 비판이 학계에 만연해 있었다. 하지만 최근 그에 대한 역사적 재평가가 지속적으로 이루어지고 있다(Gillispie 외, 1997).

6) 다만, 빈도주의자는 일반적으로 가설에 대해 빈도적으로 다루는 확률의 주제가 아니라고 간주한다. 하지만 이미 그 발생빈도에 대한 정보가 알려진 경우이거나 수학적 확률을 적용할 수 있는 경우에는 가설이 참일 확률인 사전확률과 그 분포의 도입을 인정한다(Royall, 1999, p.6).

7) 우도이론은 Neyman과 Pearson의 유의성 검정이론의 부족함을 채우기 위해 등장했다고도 할 수 있다. 그들은 제1종의 오류의 확률에 대해 제2종의 오류의 확률을 최소화하는 방식을 취했는데, 우도이론에서는 두 종류의 오류의 확률의 합을 최소화하는 방식을 채택하여 우도의 비가 1보다 큰 관찰결과로 기각역(critical region)을 구성하고 관찰결과가 가장 잘 지지되는 가설을 선택하도록 한다(Cornfield, 1966).

8) $p(x|\theta)$ 또는 $p_\theta(x)$ 으로 표현하기도 한다.

$P(R|H)=\frac{P(R\cap H)}{P(H)}$ 와 같은 방식이 아니라 빈도적으로 구하는데, 우도 $L(H|R)$ 은 이 확률 $P(R|H)$ 에 비례하는 함수로 정의하여, 서로 비례하는 우도함수는 같은 것으로 취급한다[9].

예를 들어, 가설 H가 '어떤 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$ 인 것'이라 하자. 즉, 모수 θ 가 어떤 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률이라 할 때 $H:\theta=\frac{2}{3}$ 라고 하자. 그리고 이항모델에서 자료 R은 이 동전을 3번 던질 때 앞면이 1번 나오는 사건인데, 앞면이 나오는 횟수에 의한 관측값을 $x=1$ 로 표시하자. 여기서, $P(H)$ 을 사용하지 않으면서도 확률 $P(R|H)$ 을 빈도적 관점에서 구해보자. $\theta=\frac{2}{3}$ 이므로 동전을 한 번 던졌을 때 나올 수 있는 경우는 $\{H_1, H_2, T\}$ 와 같이 3 가지이다. (여기서, H는 동전의 앞면을 뜻하고, T는 동전의 뒷면을 뜻한다.) 동전을 세 번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times3\times3=27$ 이고 앞면이 한 번 나오는 경우는 $\{(H_1,T,T),(H_2,T,T),(T,H_1,T),(T,H_2,T),(T,T,H_1),(T,T,H_2)\}$ 와 같이 6가지이므로 $P(R|H)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ 와 같이 구할 수 있다. 그리고 이와 동일한 방식으로, 자료 R을 고정시킨 상황(관측된 자료 x 가 1인 상황)에서 가설을 $H:\theta=\frac{1}{2}$ 과 같이 변화시키면서 각 θ 에 따라 $P(R|H)$의 값을 구한다. 이항모델에서, $P(x|\theta)=P(x=1|\theta)=\binom{3}{1}\theta^1(1-\theta)^2$ 임을 알 수 있고 우도함수 $L(\theta|x=1)$ 은 $\binom{3}{1}\theta^1(1-\theta)^2$ (단, $0<\theta<1$)에 비례하는 함수이다.

2. 우도원리의 분화

우도함수에 기초해, 우도원리는 그 발생 초기에 '비례적인 우도함수를 산출하는 두 개의 자료 집합은 동일한 결론을 유도해야 한다.'는 형태로 표현되었는데, 이 원리는 충분통계량(sufficient statistics)[10]과 충분성의 원리(sufficiency principle)[11]를 이용해 다른 형태로도 분화하게 된다. 여기서, 이러한 분화 이전의 우도원리를 오늘날 흔히 '강한 우도원리'(strong likelihood principle)[12]'라 부르게 된다(Pawitan, 2001).

충분성의 원리는 직관적으로 '주어진 모델 $p_\theta(x)$ 에 대해서 자료 x 에 기초한 모든 충분통계량은 동일한 결론을 이끌어야 한다.'라는 의미를 나타내는데, 모수 θ 에 대한 모든 정보를 충분통계량이 가지고 있기 때문에 그 충분통계량들은 서로 동일한 정보를 가지고 있고 결국엔 그 동일한 정보로부터 동일한 결론에 도달해야 한다는 아이디어를 담고 있다. 그런데 모수 θ 에 대한 충분통계량들은 서로 동일한 우도함수를 유도한다는 사실이 알려져 있다. 이러한 일련의 사항에 기초해, 충분성의 원리와 동치인 일명 '약한 우도원리(weak likelihood principle)'를 도입하게 되는데, 이 원리는 '어떤 하나의 주어진 모델 $p_\theta(x)$ 로부터 동일한 우도를 유도하는 어떠한 관찰들도 동일한 결론을 유도해야 한다.'는 아이디어를 표현한다.

여기서, '강한 우도원리'와 '약한 우도원리' 사이의 근본적 차이는, 전자와 후자가 각각 '두 실험으로부터 얻은 두 자료에 기초하였을 때의 동일한 두 우도함수'와 '한 실험으로부터 나온 두 자료에 기초하였을 때의 동일한

9) 이하의 논의에서, '동일한 우도함수'와 '비례적인 우도함수'는 같은 의미를 나타낸다.

10) 직관적으로, 통계적인 추론을 함에 있어 자료 자체를 대신할 수 있는 통계량을 의미한다. 예를 들어, 어떤 실험에서 표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 대신에 표본평균 $\overline{X}$ 을 사용해도 모평균의 추정에 있어 동일하다.

11) 증거(evidence)의 관점에서, 다음과 같이 형식적으로 기술할 수 있다 : 확률변수 X, 모수 θ, 모델 $p_\theta(x)$ 를 수반하는 실험 E 를 수행할 때, 모수 θ 에 대한 X 의 충분통계량을 $T(X)$ 라고 하자. 그리고 실험 E 로부터 얻은 모수 θ 에 대한 증거함수를 실험 E, 관찰자료 z 에 대한 함수인 $Ev(E,z)$ 로 정의하자. 실험 E 로부터 나온 자료 x, y 에 대해 $T(x)=T(y)$ 이면 $Ev(E,x)=Ev(E,y)$ 가 성립한다.

12) 실험 E_1의 자료 x_1 에 대한 우도함수 $L(\theta|x_1)$ 과 실험 E_2의 자료 x_2 에 대한 우도함수 $L(\theta|x_2)$ 에 대해 $L(\theta|x_1)=L(\theta|x_2)$ 이면 $Ev(E_1,x_1)=Ev(E_2,x_2)$ 가 성립한다.

두 우도함수'를 비교한다는 데에 있다. 사실, 이러한 분화는 빈도주의자가 전자의 원리에 대해 의심하고 거부를 한 것이 그 원인이었다고 할 수 있다. '강한 우도원리'에 따르면, '만약 우도함수가 모수 θ 에 대한 모든 정보를 가지고 있다면 그 함수를 얻은 후에는 모델 $p_\theta(x)$ 을 버릴 수 있는 것일까?'라는 물음에 대해 '그렇다'고 답하게 된다. 이것은 '모수에 대한 증거가 표집계획(sampling scheme)에 의존하지 않는다.'는 것을 의미하게 되어, 빈도주의자의 반발을 야기했다고 할 수 있다.

이와 관련해, '강한 우도원리'에 의해 유도되는 것 중 빈도주의자가 꺼려하는 대표적 예로 ' p 값을 사용하는 유의성검정의 일관성 결여의 문제'를 들 수 있다. 구체적으로, 모수 θ 가 어떤 동전의 앞면이 나올 확률일 때, '귀무가설 $\mathrm{H}_0 : \theta = \frac{1}{2}$ 대 대립가설 $\mathrm{H}_1 : \theta > \frac{1}{2}$ '의 유의성검정을 한다고 하자. 동전 12번을 던졌을 때 앞면이 9번, 뒷면이 3번 관측되었다고 하자. 이항모델을 사용하게 되면 우도함수 $\mathrm{L}_1(\theta|x=3) = \binom{12}{9}\theta^9(1-\theta)^3$ 을 얻고, 음이항모델[13]을 사용하게 되면 우도함수 $\mathrm{L}_2(\theta|x=3) = \binom{11}{9}\theta^9(1-\theta)^3$ 을 얻게 된다. 이항 우도함수를 사용했을 때의 유의확률은 $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(y \geq 9|\theta = \frac{1}{2})$ $= \sum_{j=9}^{12}\binom{12}{j}\theta^j(1-\theta)^{12-j} = 0.0730$ 이며, 음이항 우도함수를 사용했을 때의 유의확률은 $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}(y \geq 9|\theta = \frac{1}{2})$ $= \sum_{j=9}^{\infty}\binom{2+j}{j}\theta^j(1-\theta)^3 = 0.0327$ 이다. 따라서 전자와 후자에 대해서 ' 5% 유의수준에서 H_0 를 기각할 충분한 증거가 없다.', '5% 유의수준에서 H_0 를 기각할 충분한 증거가 있다.'고 각기 다른 결론에 이르게 된다. 하지만 '강한 우도원리'에 의하면 $\mathrm{L}_1(\theta|x=3) \propto \mathrm{L}_2(\theta|x=3)$ 이므로 같은 결론에 도달해야 한다. '강한 우도원리'와 표준적인 유의성검정이 충돌하게 되는 것이다(김달호, 2013; Berger 외, 1988; Berger 외, 1988; Steel, 2003).

사실, 빈도주의자는 '강한 우도원리'와 ' p 값을 사용한 유의성검정'의 충돌의 문제에 대해 큰 걱정을 하지 않았고 '약한 우도원리'의 채택으로 회피할 수 있다고 생각하였다. 그런데 Birnbaum(1962)에 의해 '충분성의 원리'와 '조건성의 원리'(conditionality principles)로부터 '강한 우도원리'를 증명했다는 주장이 제기되면서부터, 빈도주의자는 적잖이 당황하고 적극적으로 그 증명에 대응해야 할 필요성을 느끼게 되었다. 왜냐하면 빈도주의에서도 '충분성의 원리'와 '조건성의 원리'는 수용할 만한 합리적인 원리로 간주되었기 때문이다(Pawitan, 2001).

Birnbaum의 증명에 대한 두 통계학파의 반응은 극과 극이었다. 베이지주의자 Savage(1962)는 '통계학 역사에서 기념비적인 사건'이라 칭송했고, 빈도주의자 Bross는 '통계학의 역사를 후퇴시키는 사건'이라 폄하하였다(McGrayne, 2013). 이후, 양대 학파는 현재에 이르기까지 이 증명의 타당성에 대한 논쟁을 멈추지 않고 있다(Gandenberger, 2015; Martin, 2014; Mayo, 2014).

여기서, 다음과 같은 두 가지 의문이 제기된다. 한 가지는 베이지주의가가 '강한 우도원리'를 고수하려는 이유에 대한 것이고, 다른 한 가지는 이러한 논란의 미해결 상태에서 빈도주의자가 사용하는 우도원리에 대한 것이다.

우선, 베이지주의자가 '강한 우도원리'를 내세우려는 이유에 대해 살펴보자. 그 이유를 한마디로 말하면 사후확률을 자료가 가설을 뒷받침하는 척도로 여기는 관점과 '강한 우도원리'가 서로 조화를 이루기 때문이다. 예를 들어, 베이지주의자는 그 관점과 베이지 정리를 통해 '강한 우도원리'를 다음과 같이 정당화할 수 있다(Steel, 2007).

두 실험을 통해 각각 자료 R 과 R* 을 얻었는데, 우도함수 $\mathrm{L}(\mathrm{H}|\mathrm{R})$와 $\mathrm{L}(\mathrm{H}|\mathrm{R}^*)$가 비례적이라고 하자. 그러면, 임의의 가설 H에 대해 $\mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{H}) = c\,\mathrm{P}(\mathrm{R}^*|\mathrm{H})$ (단, c는 상수)이 성립한다. 그렇다면, 임의로 선택된 가설 H_k 에 대해,

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_k|\mathrm{R}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_k)\,\mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{H}_k)}{\sum_i \mathrm{P}(\mathrm{H}_i)\,\mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{H}_i)}$$

13) 이 경우에는, 동전을 던지는 실험이 그 동전의 뒷면이 3번 나타날 때까지만 계속되는 실험계획에 의해 이루어진다.

$$= \frac{P(H_k)\,cP(R^*|H_k)}{\sum_i P(H_i)\,cP(R^*|H_i)}$$

$$= \frac{P(H_k)\,P(R^*|H_k)}{\sum_i P(H_i)\,P(R^*|H_i)} = P(H_k|R^*)$$ 이 성립한다. 즉, 임의의 가설 H_k에 대해, $P(H_k|R) = P(H_k|R^*)$이 성립한다. 사후확률 $P(H_k|R)$와 $P(H_k|R^*)$은 각각 자료 R과 R^*이 가설 H_k를 지지하는 정도를 나타내기 때문에, 두 자료 R과 R^*에 기초해 통계적으로 같은 결론을 내려야 한다.

두 번째, 빈도주의자가 Birnbaum 증명의 등장과 그에 따른 논란 이후부터 어떤 우도원리를 사용했는지에 대해 살펴보자. 물론, 그들은 '약한 우도원리'를 비롯해 다양한 형태로 표현되는 '우도원리'를 사용하였는데, 때로는 그 사이의 구분이 모호할 때도 있었다. 그 중에서, Edwards(1992)가 제안한 다음의 원리가 빈도주의자가 선호하는 우도원리라 할 수 있다.

> 통계적 모델의 틀 안에서, 자료가 두 가설의 상대적 고과(merits)에 대해 제공하는 모든 정보는 그 자료에 기초한 그 가설들의 우도의 비(likelihood ratio)에 포함된다(Ibid, p.30).

'강한 우도원리'와 '약한 우도원리'가 각각 '두 실험의 자료와 그에 대응하는 두 우도함수'와 '한 실험의 두 자료와 그에 대응하는 두 우도함수'를 다루는 반면에, 이 우도원리는 '한 실험의 자료와 그에 대응하는 두 우도함숫값'을 다룬다. 빈도주의자가 이 원리를 선호하는 이유는 무엇일까? 그것은, 그들은 이 원리가 통계적 추론에 있어 사전확률 사용의 부적절성을 보여준다고 생각하기 때문이다.

이 원리에 따르면, 자료 R과 두 가설 H, H^*에 대해 우도의 비 $\frac{P(R|H)}{P(R|H^*)}$가 자료의 '가설 H^*에 대비한 가설 H'의 상대적인 지지 정도를 나타낸다. 만약 우도의 비가 $\frac{P(R|H)}{P(R|H^*)} = 1$일 경우, 자료 R의 증거로서의 지지는 두 가설 H, H^*에 대해 동일하다고 할 수 있다. 다시 말해, $P(R|H) = P(R|H^*)$이면 자료 R이 두 가설 H, H^*을 같은 정도로 지지한다고 할 수 있다. 베이지 정리에 의해 $P(H|R) = \frac{P(H)P(R|H)}{P(R)}$, $P(H^*|R) = \frac{P(H^*)P(R|H^*)}{P(R)}$이 성립하는데, 이 공식을 통해 $P(R|H) = P(R|H^*)$인 상황에서 $P(H|R)$와 $P(H^*|R)$이 다른 경우는 $P(H)$와 $P(H^*)$이 다른 경우임을 알 수 있다. 그런데 $P(H)$와 $P(H^*)$의 차이는 자료 R 때문에 발생하는 것이 아니라 어떤 사전 정보 때문에 발생하는 것이다. 따라서 $P(H)$와 $P(H^*)$의 차이가, 자료 R이 가설 H보다 가설 H^*을 더 지지하는지의 여부의 문제와 상관없다고 보는 것이 자연스럽다. 이러한 설명은 사전확률이 새로운 자료의 증거적 측면에 무관함을 보여준다는 점에서, 빈도주의자가 왜 Edwards가 제안한 우도원리를 선호하는지를 잘 드러내고 있다(Milne, 1996).

이에, 이 연구에서는 Edwards(1992)의 우도원리를 '빈도주의자의 우도원리'라 부르고 '강한 우도원리'를 '베이지주의자의 우도원리'라 부르기로 하겠다. 이제, 이러한 일련의 논의를 정리해 우도와 우도원리의 특징에 대해 분석해보도록 하자.

3. 우도 및 우도원리와 역-확률의 관계에 대한 고찰

앞서 보았듯이, 우도함수는 함수들의 모임인 함수족을 이룬다. 모수 θ와 어떤 자료 D에 대해, $P(D|\theta)$의 0이 아닌 상수배가 되는 θ에 대한 함수는 서로 같은 우도함수로 취급한다. 이와 관련해, 다음과 같은 의문이 제기된다. 우도함수가 의미하는 바는 무엇이고, 왜 우도함수라 명명했던 것일까? 왜 $P(D|\theta)$의 0이 아닌 상수배가 되는 함수끼리는 같은 것으로 취급하는 것일까?

직관적으로, 함수 $P(D|\theta)$는 원인으로서의 가설 θ로부터[14] 결과로서의 자료 D로의 연결성의 강도를 나타낸다. 다시 말해, 가설 θ(원인)로부터 자료 D(결과)가 나오는 규칙의 개연성 또는 그럴듯함(plausibility)의 정도를 나타내는 것이다. 이처럼 $P(D|\theta)$는 어떤 원인으로부터 결과가 나오는 규칙성의 강도를 나타내는 함수라는 의미에서 우도함수라고 부르는 것이 적절하다고 할

14) 모수 θ에 관한 어떤 특정한 진술 H가 가설이지만, 일관성과 설명의 편의를 위해, 여기서는 '가설 H'란 표현 대신에 '가설 θ'라는 표현을 쓰기로 한다.

수 있다.

다음으로, 함수 $P(D|\theta)$ 와 비례적인 함수들을 모두 동일한 것으로 취급하는 이유가 무엇인지에 대해 생각해 보자. 모수 θ 를 추정하기 위해, 다른 실험계획으로 어떤 새로운 자료 D' 과 그에 따른 함수 $P(D'|\theta)$ 를 구했는데 모든 θ 에 대해 $P(D'|\theta) = cP(D|\theta)$ (단, c 는 0이 아닌 상수)인 관계를 만족한다고 하자. 통계적 추론의 목적은 자료를 이용해 모수를 추정하는 것에 있기 때문에 각 실험결과가 모수 θ 에 대한 어떤 가설을 어느 정도로 지지하는지에 대해 관심을 기울이기 마련이다.

일반적으로, $P(D|\theta)$ 는 원인 θ 의 결과로서 D 가 관측될 확률을 그리고 역-확률 $P(\theta|D)$ 는 결과 D 가 관측된 후에 원인 θ 의 가능성으로의 사후확률을 의미하는 것으로 간주된다(김우철 외, 2001). 그런데 수식의 방향적인 형태에 비추어 생각하면, 어떤 결과가 있을 때 어떤 원인이 참일 확률인 역-확률 $P(\theta|D)$ 는 각 실험결과가 어떤 가설을 지지하는 정도와 관련이 있다고 생각할 수 있다. 사고방향의 관점에서 바라볼 때, $P(D|\theta)$ 는 원인 θ 로부터 결과 D 가 나오는 인과적 규칙성의 정도를 나타내는 반면에 역-확률 $P(\theta|D)$ 는 결과 D 로부터 원인 θ 로 향하는 확률을 구한다는 점에서, 실험결과가 가설을 지지하는 정도는 역-확률에 의해 측정하는 것이 자연스럽다.

앞서 베이지주의자의 우도원리에 대한 정당화에서 살펴보았듯이, $P(D'|\theta) = cP(D|\theta)$ 일 때 $P(\theta|D) = P(\theta|D')$ 이 성립한다. 즉, 두 실험의 자료로부터 유도된 우도함수가 서로 상수배가 되면 '모든 θ 에 대해 $P(\theta|D) = P(\theta|D')$ 이다.'가 성립하게 되어 동일한 사후확률분포를 얻게 된다. 역-확률(사후확률)을 자료가 가설을 지지하는 정도를 측정하는 도구로 간주한다면, 서로 비례적인 우도함수를 통해 동일하게 추론할 수밖에 없음을 알 수 있다. 이러한 특징은 비례적인 우도함수를 고안할 때 사후확률을 이미 염두에 두고 있었음을 보여준다.

이러한 비례적인 우도함수와 역-확률 사이의 관련성에서 알 수 있듯이, Fisher는 우도이론을 개발할 때 그가 역-확률을 이용하고 있다는 거센 비판에 직면해야 했다[15]. 그리고 그의 의도는 빈도적인 관점에서 자료가 가설을 지지하는 정도를 상대적으로 나타내는 척도로 우도를 도입하려는 것이었지만, 우도와 우도원리는 역-확률을 통해 추론하는 베이지주의자에게 오히려 더 넓고 깊게 영향을 미쳤다고 할 수 있다(Howie, 2002; Salsburg, 2003). 우도와 우도원리는 '빈도'를 표방하면서 등장하긴 했지만 역-확률(또는 사후확률)과 불가분의 관계 속에서 잉태되었기 때문에 오늘날의 우도원리는 각기 다른 해석의 색깔을 띤 채 빈도주의자와 베이지주의자 모두의 것이 되었다고 할 수 있다.

4. 우도원리의 적용과 해석에 관련된 논쟁

앞에서, 우리는 빈도주의자와 베이지주의자가 우도원리를 다르게 정의내리고 있음을 확인할 수 있었다. 사실, 각 통계학파는 학문적 경쟁 과정에서 우도원리에 대한 정의를 새롭게 내리려는 시도를 지속해오고 있다(Gandenberger, 2015; Mayo, 2014). 왜 이런 일이 벌어지고 있는 것일까?

우선, 이러한 현상의 이면에는 가설에 대한 확률인 사전확률에 대한 수용의 문제가 들어 있다. 예를 들어, Edwards(1992)는 이 수용의 여부가 빈도주의자의 관점에서 우도와 우도원리를 다루려는 이유와 관련되었다고 밝히며, '불확실한 명제들의 모집단으로부터 어떤 명제를 임의 추출하는 것을 상상할 수 없다.'라고 생각하기에 사전확률을 수용할 수 없음을 밝힌다. 이어서, 그는 "내가 유일하게 받아들이는 확률 개념은 어떤 정해진 모집단으로부터 임의 추출 과정을 수반하는 빈도주의자의 것이다(xix)."라고 주장하면서, 경우의 수의 비와 상대도수를 도출하는 빈도적인 상황(chance set up)에서 나오지 않는 사전확률에 베이지 정리를 적용해 우도원리를 해석하고 정당화하는 베이지주의자의 방식을 거부하였다.

사실, 빈도적인 성격을 지니지 않은 사전확률을 수용하는지의 여부는 빈도주의자와 베이지주의자를 나누는 중요한 기준이 된다. 그런데 그러한 사전확률의 수용에 있어서의 차이는 각 통계학파가 모수의 성격에 대해 다른 입장을 취한다는 것을 함의하는 것이기도 하다. 기본적으로, 빈도주의자에 있어서 모수는 알려지지 않았지만 어떤 고정된 것이라 할 수 있다. 이에 비해, 베이지주의

15) 우도원리가 처음 등장했을 때, 빈도주의자의 초기 반응은 그 원리를 의심하고 거부하는 것이었다(Pawitan, 2001, p.196)

자는 모수를 확률변수(random variable)로, 정확히 확률분포(probability distribution)에 종속되는 확률변수의 실현(realization)으로 간주한다(Chatterjee, 2003 p.194).

그렇다면, 빈도주의자가 빈도적인 상황에서 나오지 않은 사전확률과 그 분포를 거부하는 이유는 무엇일까? 그것은 빈도적 상황에서 나오지 않은 확률은 기본적으로 주관성을 가질 수밖에 없다고 생각하기 때문이다(Salmon, 1994). 이러한 주관성과 관련해, 빈도주의자는 베이지주의자의 이론을 다음과 같이 비판한다.

> (주관적 확률이) 확률의 법칙을 만족한다는 점이 명확하게 증명되었다고 하더라도, 그러한 증명이 믿음에 대한 절대적 측정치의 존재에 대한 논거가 되지 않는다. 나는 그 (베이지주의자의) 현대적 이론도 그들의 선조(역-확률 이론)처럼 거부되어야 한다고 믿는다. (중략) 믿음에 대한 어떤 절대적 측정치에 대한 진술을 일반적으로 할 수 있다는 가식을 버리고 우리의 관심을 상대적 지지에 둠으로써, 우리는 많은 것을 이룰 수 있다(Edwards, 1992, p.3).

개인의 주관적 의견에 기초해 사전확률을 설정하는 대신에, 만약 이미 알려진 빈도적인 정보에 기초해서 가설에 사전확률을 부여한다면 빈도주의자는 이에 대해 어떻게 생각할까? 이럴 경우에는, 빈도주의자도 사전확률을 인정하고 이를 이용해 사후확률을 구하는 것의 타당성에 대해 의문을 제기하지 않는다. 하지만 사후확률을 구한 이후에 통계적으로 추론하는 방식에 있어서는 베이지주의자와 여전히 차별화된다. 간단히 말해, 사전확률에 기초해 사후확률을 구한 상황에서도 빈도주의자는 우도의 비를 가지고 추론하고 베이지주의자는 사후확률을 가지고 추론한다.

그렇다면, 이러한 두 통계학파의 추론방식의 차이는 무엇 때문에 발생하는 것일까? 결론적으로 말해, 이것은 우도함수의 역할을 각기 달리보고 있기 때문이다. 그리고 이러한 우도함수의 역할에 대한 인식 차이는 두 학파가 우도원리를 다르게 해석하는 원인으로 작용한다고 할 수 있다.

기본적으로, 우도함수는 반복 샘플링에 기초한 이론을 사용하는 빈도주의자에게나 일명 주관적 확률을 사용하는 베이지주의자에게 모두 기초가 되는 개념이다. Fisher가 우도이론을 진척시키는 상황에서, Jeffreys가 우도함수의 연구에 대해 전혀 반대하지 않는다고 밝힌 것은 이러한 특징을 단적으로 보여준다. 하지만 우도함수에 대한 연구가 진척됨에 따라 우도함수에 대한 입장에 있어서 서서히 차이가 나타나기 시작했다(Howie, 2002). Fisher 이후의 빈도주의자는 우도함수 자체를 자료가 가설을 뒷받침하는 정도로 여기며 우도의 비를 가지고 추론하는 것이 타당하다고 본다. 이에 비해, Jeffreys 이후의 베이지주의자는 우도함수를 조정(updating)의 가장 중요한 수단으로 간주한다. 즉, 사전확률(분포)와 자료로부터 우도함수에 의해 사후확률(분포)을 이끌어내는 작업을 중시하며 우도함수보다는 사후확률이 자료가 가설을 뒷받침하는 정도와 밀접한 관련이 있다고 생각한다.

물론, 이러한 우도함수에 대한 각각의 입장에서 우도원리의 의미를 해석하는 관점도 서로 달라질 수밖에 없다. 빈도주의자는 우도원리가 우도함수 안에 자료의 증거적 측면이 모두 들어감을 나타내므로, 우도함수가 오직 빈도적으로 구축되었다는 점을 고려했을 때 우도원리는 빈도만을 사용해 통계적으로 추론하는 것이 가능함을 보여준다고 생각한다. 이에 비해, 베이지주의자는 우도원리가 우도함수에 의해 사후확률 안에 자료의 증거적 측면이 모두 들어가는 것을 나타낸다고 본다. 베이지주의자는, 우도원리가 사전확률을 사후확률로 조정하는 과정에서 새 자료의 증거적 측면이 고스란히 들어감을 보장하기에, 그 원리에 의해, 사후확률이 전체 자료가 가설을 뒷받침하는 정도를 판단하는 추론을 하는 데에 적합하다고 생각한다(Sober, 1988). 간단히 말해, 빈도주의자는 빈도적인 성격의 우도함수를 가지고 추론하는 것이 '타당하다'고 보고 베이지주의자는 사후확률을 가지고 추론하는 것[16]이 '적합하다'고 보기 때문에, 두 통계학파가 우도원리를 다르게 정의하고 해석한다고 할 수 있다.

우도함수의 역할과 우도원리의 의미의 해석과 관련해,

16) 이에 대해, 베이지주의자는 "베이지안 추론은 단지 우도함수와 사전분포에 의존하게 된다(김달호, 2013, p.90)."와 같은 특성을 부여한다.

본 연구자는 빈도주의자가 어떤 방식이 ‘타당하다’는 관점을 가지고 베이지주의자는 어떤 방식이 ‘적합하다’는 관점을 가진다고 언급하였는데, 이러한 표현의 구분은 두 통계학파가 우도함수의 역할과 우도원리의 의미의 해석을 달리하는 측면을 보여준다.

사실, 빈도주의자가 사전확률과 사후확률을 사용하지 않고 우도함수를 가지고 추론하려는 것은 통계적 추론의 ‘객관성’을 확보하기 위함이다. 즉, 빈도주의자가 빈도와 우도함수를 고수하려는 것은 ‘객관성’을 중요시하기 때문이다. 이에 비해, 베이지주의자는 자료가 확보될 때마다 사전확률로부터 사후확률로의 지속적인 조정을 강조하는 유연한 입장을 취한다. 즉, 베이지주의자는 ‘객관성’에 얽매이기보다는 ‘유용성’, ‘적합성’을 추구한다고 할 수 있다. 특히, 베이지주의자는 개인의 믿음의 정도를 측정하는 주관적 확률을 인정함으로써 그들의 추론이 객관적이 아니라는 비판을 어느 정도 감수하면서까지, 사전확률을 설정하고 지속적으로 그 믿음의 정도를 수정해간다고 할 수 있다(Howie, 2002).

이제, 우도원리의 해석에 따라 두 통계학파의 추론이 어떻게 달라지는지에 대해 사례를 통해 구체적으로 살펴보기로 하자. 이 예는 2009년에 미국 정부 산하의 유방암 검사 대책위원회에서 ‘40대 여성의 대부분이 해마다 X-선 사진을 찍어 유방암 검사를 할 필요가 있는 것은 아니다.’라고 발표함으로써 이루어진 논쟁과 관련된다[17].

유방암에 걸리는 사건을 A라 하고, X-선 유방암 검사를 통해 양성판정을 받는 사건을 B라고 하자. ‘수지’라는 미국의 40대 한 여성이 X-선 유방암 검사를 통해 양성판정을 받았다고 하자. 이 때, [표 1]과 같은 통계적 정보가 알려지게 되었다고 하자. 구체적으로, 미국의 40대 여성 1만명 가운데 약 40명이 유방암을 가진 것으로 이미 알려져 있었는데, X-선 유방암 검사의 정확도와 관련해서는 유방암 환자 40명 가운데 32명이 X-선 검사에서 양성판정을 받았고 유방암에 걸리지 않은 미국의 40대 여성 1만명 가운데 약 1천명이 그 X-선 검사에서 양성판정을 받았다는 실험결과가 새로이 알려지게 되었다고 하자.

여기서, ‘40대 여성의 대부분이 해마다 X-선 사진을 찍어 유방암 검사를 할 필요가 있는 것은 아니다.’는 주장은 ‘X-선 유방암 검사의 양성반응자라고 해서 실제로 유방암에 걸렸다고 보기는 어렵다.’는 믿음에 기초한 것이라 할 수 있다. 예를 들어, ‘수지’란 여성이 검사에서 양성판정을 받았다고 해도 그 여성이 실제로 유방암을 가지고 있을 확률 $P(A|B)$는 0.03에 불과하므로 ‘그 여성이 아마도 유방암에 걸리지 않았을 것이다.’라고 믿고서 지나치게 걱정하지 않고 정밀한 다른 종류의 재검사를 받아보는 게 합리적이라는 것이다. 이러한 미국의 유방암 검사 대책위원회의 주장은 기본적으로 베이지주의자의 추론에 따른 것인데, 그 위원회는 X-선 유방암 검사를 정기적으로 받는 여성보다 가슴에 멍울을 찾는 여성의 경우에서 실제로 유방암을 발견할 확률이 더 높다는 사례를 들어 그러한 주장에 대한 근거를 보강하였다.

한편, 이러한 주장에 대한 반론은 위험의 심각성에 기초해 제기되었다. 즉, 유방암 검사에서의 양성판정자가 유방암에 걸리지 않았을 확률이 낮다고 하더라도 그 사람에게 유방암 치료를 해야 하는 것이 현명하다는 것이다. 그 안에 담긴 논리는, 만약 ‘수지’란 여성이 환자라면 치료하는 것이 좋을 것이고 그 여성이 환자가 아니더라도 (의료기술 수준을 고려할 때) 치료가 심각한 피해를 가하지는 않을 것인데, 그 여성이 실제로 병을 가지고 있는데도 불구하고 치료를 하지 않으면 재앙을 야기할 것이라는 것이다. 물론, 이러한 반론은 한 사람의 생명을 구하는 것이 효율성보다 중요하기 때문에 유방암 검사의 대중화는 지속되어야 한다는 입장을 피력하고 있다.

이러한 위험의 심각성에 기초한 반론은 사전확률의 지나친 영향력에 대해 주목한다. 즉, ‘X-선 유방암 검사의 양성반응자라고 해서 실제로 유방암에 걸렸다고 보기는 어렵다.’는 믿음은 사전확률에 지나치게 의존해서 나온 것이기 때문에 속단을 경계해야 한다는 것이다. 사전확률이 너무 강해 새로운 자료를 무시했을 때의 재앙을 1980년대 미국 펜실베이니아의 원자력 발전소의 예에서 찾을 수 있다. 원자로에 실제로 고장이 있는 경우는 매우 드물었고 발전소의 계기반에 경고등이 오작동하는 경우도 많았는데, 경고등이 계속 켜졌고 원자로 내의 수위가 낮다는 표시가 나왔지만 기술자들은 이 증거를 무시해버렸고 결국 큰 사고가 발생하게 된 경우이다. 이것은

17) 이 논의는, McGrayne(2013, pp.567-571)의 예를 가지고 Royall(1999)의 논의에 따라 재구성한 것이다.

[표 1] X-선 유방암 양성검사결과(B)와 통계적 추론
[Table 1] Test results(B) of X- ray breast cancer and statistical inference

원인으로서의 사건	유방암에 걸리는 사건 A	유방암에 걸리지 않는 사건 A^c
사전확률	$P(A)=0.004$	$P(A^c)=0.996$
우도 (원인 →결과)	$P(B\|A)=0.8$	$P(B\|A^c)=0.1$
교사건 확률 (사전확률×조건부확률)	$P(A)\times P(B\|A)=P(A\cap B)$ $0.004\times 0.8=0.0032$	$P(A^c)\times P(B\|A^c)=P(A^c\cap B)$ $0.996\times 0.1=0.0996$
사후확률, 역-확률 (원인←결과)	$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^c\cap B)}=P(A\|B)$ $\frac{0.0032}{0.0032+0.0996}\fallingdotseq 0.03$	$\frac{P(A^c\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^c\cap B)}=P(A^c\|B)$ $\frac{0.0996}{0.0032+0.0996}\fallingdotseq 0.97$

사전 확률이 너무 낮아 그에 따른 선입견에 의해, 기술자들의 인식에 있어서 새로이 관측되는 자료가 사후확률을 크게 변화시키지 못했기 때문에 발생한 일이라 할 수 있다(Salsburg, 2003). 이러한 사전확률의 지나친 영향력과 관련해, 빈도주의자의 우도이론은 새로운 자료에 의해서만 추론해야 한다는 점을 강조한다고 볼 수 있다. 그 이론에 따르면, '$P(A|B)$가 $P(A^c|B)$보다 크다.'는 명제는 '사건 B와 관련된 자료가 가설 A^c에 비해 가설 A를 지지하는 증거이다.'는 명제와 동치이고, 우도비 $P(A|B)/P(A^c|B)$이 바로 그 증거의 힘을 측정하게 된다(Edwards, 1992; Hacking, 1965). 따라서 $P(A|B)$이 0.8이고 $P(A^c|B)$이 0.1인데, X-선 유방암 검사결과와 관련된 새 자료로부터 나온 이러한 우도비 $P(A|B)/P(A^c|B)=8$을 가지고 통계적으로 추론하려는 빈도주의자의 경우에는 '수지 씨의 X-선 유방암 검사결과가 그녀가 유방암을 가지고 있다는 것에 대한 증거가 된다.'고 생각한다. 이것은, 빈도적인 사전확률이 주어졌을 때에 사후확률을 계산하는 것 자체를 반대하지는 않지만, 우도만이 새로운 자료가 가설을 뒷받침하는 정도와 관련되므로 사후확률이 아닌 우도(의 비)를 가지고 추론해야 한다는 입장을 보여주는 것이다.

그런데 Royall(1999)은 위의 베이지주의자의 입장, 위험성을 경고하는 입장, 빈도주의자의 입장이 각각 '수지 여성은 아마도 유방암을 가지고 있지 않을 것이다.', '수지 여성은 유방암에 대한 치료를 받아야 한다.', '유방암 검사결과는 수지 여성이 유방암을 가지고 있다는 증거이다.'로 표현되는데, 이러한 세 가지 입장이 서로 모순을 일으키지 않고 모두 참이 될 수 있다고 주장한다. 이런 현상이 왜 가능한 것일까?

우도원리는 새로운 자료의 증거적 정보가 모두 우도함수 안에 들어감을 보장한다. 하지만 '빈도주의자의 우도원리'는 사전 정보(사전 확률)을 함께 이용해서 추론하는 것의 타당하지 않음을 지적하고 '베이지주의자의 우도원리'는 그 사전 정보의 이용을 전제한 사후확률에 의한 추론의 적절함에 대해 이야기한다. 그런데 사전확률의 이용은 선택의 문제이기 때문에 우도원리의 이용과 관련해 서로 충돌하는 것처럼 보이는 주장이 동시에 제기될 수 있는 것이다.

현재의 상황은, 베이지주의자는 사전확률과 우도를 통해 모든 종류의 자료를 활용하려 하고 빈도주의자는 새로운 자료의 증거적 측면에 더 초점을 맞추고 있는 것뿐이다. 위의 사례에서 알 수 있듯이, 베이지주의자가 '자료가 가설 A에 비해 가설 A^c을 지지함을 보여준다. 따라서 가설 A^c일 것이라고 믿는다.'고 말할 때의 자료는 사전확률과 우도함수에 들어간 자료 전체를 포함하고, 빈도주의자가 '사건 B와 관련된 자료가 가설 A^c에 비해 가설 A를 지지하는 증거이다.'라고 그 반대처럼 느껴지는 주장을 할 때의 자료는 '유방암 발생률에 대한 사전자료'를 포함시키지 않는다고 할 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

이 연구에서는 빈도주의자와 베이지주의자가 선호하는 우도원리에 있어서 차이가 있음을 보여주었다. 이러한 차이가 발생하는 것은 빈도주의자가 우도의 비 자체를 가지고 통계적 추론을 하고 베이지주의자는 사후확률을 통해 통계적 추론을 하는 것과 관련된다. 다시 말해, 빈도주의자와 베이지주의자는 우도원리를 각각 우도의 비와 사후확률에 의해 통계적 추론을 하는 것의 근거로 제시하고자 하기 때문에 두 학파가 선호하는 우도원리에 있어 차이가 나는 것이다.

물론, 빈도주의자가 사후확률이 아닌 우도를 가지고 통계적으로 추론하려는 가장 큰 이유는 많은 경우에 있어 사전확률이 주관성을 갖기 때문이다. 객관성을 추구하는 빈도주의자는, 우도원리가 우도함수 안에 자료의 증거적 측면이 모두 들어감을 인정하면서, 우도함수에 의해 두 가설을 비교하는 통계적 추론이 충분히 가능하다고 주장한다.

이에 반해, 베이지주의자는 우도원리가 우도함수 안에 자료의 증거적 측면이 모두 들어감을 나타내는 것에 대해 마찬가지로 동의하면서, 사전확률과 우도를 가지고 구한 사후확률 안에 새로운 자료의 증거적 측면이 모두 반영되기 때문에, 그 원리에 의해 사후확률이 전체 자료가 어떤 가설을 뒷받침하는 정도를 판단하는 척도로 적합하다는 것을 보장해준다고 주장한다.

그런데 이러한 사항은 두 통계학파가 우도함수에 각기 다른 역할을 부여하고 있음을 잘 보여준다. 빈도주의자는 우도함수 자체에 대해, 새 자료가 어떤 가설을 뒷받침하는 정도를 상대적으로 측정하는 도구라고 간주한다. 반면에, 베이지주의자는 사전확률분포와 새 자료로부터 우도함수에 의해 사후확률분포를 이끌어내고 그 사후확률이 전체 자료[18]가 통계적 가설을 뒷받침하는 정도를 나타내는 것으로 여긴다는 면에서 우도함수를 조정의 도구로 간주함을 알 수 있다.

그렇다면, 이상의 우도원리에 대한 분석과 그 원리를 둘러싼 두 통계학파 사이의 논쟁에 대한 논의는 학교수학의 통계교육에 어떤 시사점을 주고 있는 것일까? 기본적으로, 두 가지 주장을 동시에 반영하기 위해서는 공통적으로 중요시하는 사항이나 둘 사이의 타협점을 찾는 것이 필요할 것이다. 그리고 '통계학'과 '학교수학의 확률 및 통계' 사이를 연결시키기 위해서는 현재의 수학과 교육과정에 기초한 논의를 전개해 나가는 것이 바람직할 것이다.

빈도주의자가 사후확률을 사용하지 않으려는 경우는 사전정보가 전혀 주어지지 않았거나 사전확률이 주관적으로 정해지는 경우이다. 하지만 그들도 사전확률을 빈도적으로 취급할 수 있는 경우에는 베이지정리를 사용해 사후확률을 구하기도 하고, 사전확률로부터 사후확률로의 조정이 이루어졌다는 것에 동의한다. 특히, 주관적인 사전확률을 완강히 반대했던 Fisher도 동물의 혈통계보에 대한 빈도에 기초해 어떤 교배에 대한 사전확률을 설정한 후 베이지정리를 사용하였다. 이와 관련해, 빈도주의자 Pawitan(2001)은 "만약 모수 θ 가 (빈도적으로 다루는) 확률변수이면 그 상황에서 베이지정리를 사용하더라도 베이지주의자의 특성은 들어가 있지 않다. 빈도주의자도 베이지정리가 요구되는 응용상황에서는 그 정리를 사용한다(p.10)."고 말한다.

사실, 모든 과정에서 있어 빈도를 기반으로 한다면 빈도주의자도 새 자료를 통해 사전확률에서 사후확률로 조정하는 유용성에 주목한다. 이와 관련해, 과학철학자 Salmon(1994)은 "나는 가설을 확증하는 추론의 구조가 베이즈적이라는 것뿐만 아니라 그러한 구조의 구성 요소가 되는 확률은 빈도로 해석되어야 한다는 것을 아울러 주장해 왔다. 자연 과학이 계속 경험적이고 객관적인 성격을 갖는 것은 내가 보기에 빈도 해석을 통해서라고 여겨진다. (중략) 빈도 해석이 채택된다면, 베이지의 정리는 우리가 일반적인 가설들을 성공과 실패에 대한 어떠한 경험을 가지게 될 때에서야 비로소 적용될 수 있다(pp.222-223)."고 말한다. 빈도주의자의 철학에서도 사전확률 $P(A)$가 빈도적으로 주어져 있을 때 새로운 자료 $P(B|A)$에 의해 그 $P(A)$을 사후확률 $P(A|B)$로 조정하는 것의 장점을 인정한다.

베이지주의자도 빈도에 따라 사전확률을 설정하고 베이지정리를 활용하는 것이 타협의 실마리가 됨을 인식한다. 비록 Robbins가 1955년에 '경험적인 베이지주의 이론'(empirical Bayesian Theory)을 제안한 직후에는 계산

18) 사전확률에서의 사전정보로서의 자료와 새 자료를 모두 포괄한다.

의 복잡함에 의해 그 이론이 널리 사용되지 않았지만, 오늘날 상당수의 베이지주의자들은 그 이론을 사용한다. 예를 들어, 베이지주의자 Campbell은 자신을 성공회교도와 같은 통계학자로 비유하면서, 이전의 연구보고를 활용해 사전확률분포를 만들어 활용하는 방법론을 활용한다고 밝힌다(McGrayne, 2013).

물론, 이러한 모습은 두 통계학파 사이의 타협의 계기로 간주될 수 있다는 점에서, 학교수학의 통계교육을 논의함에 있어 어느 한쪽으로 기울지 않는 주장의 근거로 삼을 수 있다. 그런데 이에 기초했을 때, 연구자는 주관적 확률도 학교수학에 접목시키자는 제안(이경화, 1996; 이정연, 2005; Konold, 1991)보다는 현재와 같이 수학적 확률과 통계적 확률에 기초하되 빈도적인 사전확률 $P(A)$로부터 사후확률 $P(A|B)$으로 조정해 가는 과정, 결과 그리고 그에 대한 해석을 가르치는 것이 균형 잡힌 교육적 시도라고 생각한다.

학교수학에서 사전확률로부터 사후확률로 조정하는 과정을 가르치자는 주장은 Albert(1995), Borovcnik(1986), Falk(1986), Watson(1995), 이정연(2005) 등에 의해 제안된 바 있다. 하지만 이 연구에서와 달리, 그들은 주관적인 사전확률의 도입을 허용하거나 베이지주의자의 이론을 활용하자는 제안을 하였다. 특히, Borovcnik(Ibid)는 '$P(A) > P(A|B)$'을 'B는 A에 유리하다'는 방식으로 해석하는 교육, 곧 베이지주의 확증이론(Bayesian confirmation theory)의 관점에서의 지도를 제안하였다. 이러한 접근은 $P(A|B)$와 $P(B|A)$의 관계를 다룬다고 하더라도 본질적으로 우도를 제외한 사후확률에 의한 추론을 강조해 가르치는 것이다. '과정을 가르치자'고 하였지만 실제로는 '사후확률로 바뀐 결과'에 초점을 맞추어 가르치게 되는 제안을 한 것이라 할 수 있다. 이와 비교해, 연구자는 사전확률 $P(A)$로부터 사후확률 $P(A|B)$으로 조정해 놓은 결과와 그에 대한 해석뿐만 아니라 그 과정에서 (우도에 해당하는) 확률 $P(B|A)$를 이용하는 과정과 그에 대한 해석도 마찬가지로 중요한 지도 대상이 되어야 한다고 생각한다.

연구자는 이러한 주장을 우리나라 수학과 교육과정(교육부, 2015)의 확률 및 통계 교육의 목적을 통해 뒷받침할 수 있다고 본다. 교육과정에서 '눈금 등을 부적절하게 사용하여 자료를 부정확하게 나타낸 표나 그래프에서 오류를 찾는 활동을 하게 한다(Ibid, p.36).', '자료의 특성에 따라 적절한 대푯값을 선택하여 구해보고, 각 대푯값이 어떤 상황에서 유용하게 사용될 수 있는지 토론해보게 한다(Ibid, p.36).', '실생활 및 수학적 문제 상황에서 적절한 자료를 탐색하여 수집하고, 목적에 맞게 정리, 분석, 평가하며, 분석한 정보를 문제 상황에 적합하게 활용할 수 있게 한다(Ibid, p.69).' '조건부 확률에 대한 이해를 평가할 때에는 과정 중심 평가를 할 수 있다(Ibid, p.98).'는 사항은, 확률 및 통계 교육의 중요한 목적 중 하나가 '비판적 안목을 갖춘 민주시민의 양성'임을 보여준다고 할 수 있다. 그런데 조건부확률의 지도와 관련해 우도와 사후확률에 의한 추론을 균형적으로 다루는 것은 이러한 목표의 달성에 기여를 할 수 있다고 생각한다.

사실, 이 연구에서 다루었던 X-선 유방암 검사와 관련된 두 통계학파 사이의 공방은 확률 및 통계 교육에서 비판적으로 사고하는 것이 무엇인지를 잘 보여준다. 그 논의 과정 속에서, 어떤 여성이 검사에서 양성판정을 받았다고 해도 그 여성이 실제로 유방암을 가지고 있을 확률 $P(A|B)$는 0.03에 불과한 상황에서 '지나치게 걱정하지 않아도 된다.'는 주장, '그 여성을 치료해야 한다.'는 주장, '그 여성의 X-선 유방암 검사결과가 유방암을 가지고 있다는 것에 대한 증거가 된다.'는 주장은 서로 양립 가능함을 살펴보았는데, X-선 유방암 검사결과에 따른 속단이나 사전확률의 지나친 영향력에 대해 경계하는 모습 등은 바로 비판적 사고의 전형을 보여준다고 할 수 있다.

이것을 교육적 관점에서 보자면, 학생들이 비형식적인 수준에서라도 이와 같은 토론을 할 수 있다면 그들은 진정으로 비판적 안목을 갖추어 나가는 것이라 할 수 있다. 그리고 만약 학생들이 이 토론을 통해 이 논쟁을 해소할 수 있는 궁극적인 방안이 X-선 유방암 검사의 정확성인 우도 $P(B|A)$과 $P(B^c|A)$을 각각 1과 0에 가깝게 하는 '의료진단기술의 향상'이라는 점을 도출한다면, 그것은 우도와 사후확률에 의한 추론을 균형적으로 사용한 모습을 보여줄 뿐 아니라 '비판적 안목의 형성'이라는 확률 및 통계 교육의 목적를 달성해가는 모습을 보여준다고 하겠다.

물론, 조건부확률, 특히 사후확률(역-확률)의 지도는 매우 어려운 것이 사실이다. 그렇다면, 이 연구의 제안이

실현 가능성을 지니려면 이에 대한 극복방안이 필요할 것이다. 이 어려움의 극복과 관련해 Rossman & Short(1995)는 이원분류표를, Tomlinson & Quinn(1997)은 확률 수형도를, 그리고 Watson(1995)은 질병 진단과 같은 실제적 상황을 활용할 것을 제안한 바 있다. 기본적으로, 연구자는 그들의 제안을 긍정적으로 생각한다. 이에 보태어, 이 연구에서는 다양한 질병과 그에 대한 원인을 진단하는 상황 속에서 '[표 1] X-선 유방암 양성검사결과(B)와 통계적 추론'과 같은 이원분류표를 활용할 것을 제안한다. 이러한 표는 Rossman & Short의 이원분류표와 Tomlinson & Quinn의 확률 수형도의 장점을 결합함으로써 사전확률로부터 사후확률로의 조정과정을 일목요연하게 보여줄 뿐만 아니라, 계산의 부담을 덜어줌으로써 학습자로 하여금 '확률 계산' 아니라 '확률적 판단', '통계적 추론'에 집중할 수 있도록 한다[19].

우도원리와 관련해 통계학의 두 학파가 각기 고유한 이론을 전개한다는 것은 각 이론에 이치에 맞는 측면이 들어있음을 의미한다고 할 수 있다. 그런데 이 연구는 그러한 측면을 충돌의 관점에서가 아니라 '비판적 안목의 형성'이라는 교육적 관점에서 재해석하였다. 이런 점에서, 이 연구를 다음과 같이 요약할 수 있을 것이다 : 우도원리에 대한 교수학적 분석 결과는 우도와 사후확률을 균형 있게 이용하는 추론이 비판적 안목의 형성에 기여할 수 있다는 점을 지지한다.

참 고 문 헌

교육부 (2015). 수학과 교육과정(교육부 고시 제2015-74호).

Ministry of Education(2015). *Curriculum of mathematics department*(2015-74).

김달호 (2013). R과 WinBUGS를 이용한 베이지안 통계학. 경기도 파주 : 자유아카데미.

Kim, D.H. (2013). *Bayesian statistics using R and WinBUGS*. Pajoo: Jayooacademy.

김우철, 김재주, 박병욱, 박성현, 송문섭, 이상열, 이영조, 전종우, 조신섭 (2001). 현대통계학. 서울 : 영지문화사.

Kim, U.C., Kim, J.J., Park, B.U., Park, S.H., Song, M.S., Lee, S.Y., Lee, Y.J., Jeon, J.W., & Jo, S.S. (2001). *Modern Statistics*. Seoul: Youngjimunhwasa.

김혜랑 (2004). 가능성 원리 지도를 위한 중등 통계 교육과정의 개선 방향. 석사학위 논문, 이화여자대학교.

Kim, H.R. (2004). *A study on understanding of the principle and improvement of statistics curriculum in high school*. Master's thesis of Ewha Womans University.

서울대학교 교육연구소 (2000). 교육학 용어사전(전정판). 서울 : 하우동설.

Education Research Institute Seoul National University (2000). *The dictionary of educational terms*. Seoul: Haudongseol.

송상헌, 방정숙, 강옥기, 강현영, 권나영, 김남희, 류성림, 박만구, 백석윤, 송미영, 윤정호, 이영하, 장혜원, 정영옥, 최승현, 최종현, 최지영, 임재훈 (2013). 수학교육학 연구 방법. 서울 : 경문사.

Song, S.H., Bang, J.S., Kang, O.G., Kang, H.Y., Kwon, N.Y., Kim, N.H., Ryu, S.L., Park, M.G., Baek, S.Y., Song, M.Y., Yoon, J.H., Lee, Y.H., Jang, H.W., Jung, Y.O., Choi, S.H., Choi, J.H., Choi, J.Y., & Lim, J.H. (2013). *Research methods for mathematics education*. Seoul: Kyeongmoonsa.

신수영 (2011). 초·중·고등학교 확률과 통계단원에 나타난 표본개념에 대한 분석. 석사학위 논문, 이화여자대학교.

Shin, S.Y. (2011). *An Analysis of the Concept of Sample Shown in the Probability·Statistics chapter of the mathematics textbooks from primary school to high school*. Master's thesis of Ewha Womans University.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈 (2007). 수학교육학 연구방법론. 서울 : 경문사.

Woo, J.H., Jeong, Y.O., Park, K.M., Lee, K.H., Na, K.S., & Lim, J.H. (2007). *Research methods for mathematics education*. Seoul: Kyeongmoonsa.

이경화 (1996). 확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구. 박사학위 논문, 서울대학교.

Lee, K.H. (1996). *A study on the didactic transposition of the*

19) 이 표에서는 공식까지 제시되어 있는데, 연구자는 이 표의 항목에 대한 모든 값이 주어진 상태에서 이루어지는 교육이 바람직하다고 생각한다. 또한 계산능력이 목적이 아니므로, 만약 계산이 필요한 상황이라면 계산기를 활용하는 것도 좋다고 생각한다. 물론, 이 표에서 사용된 사전확률, 우도, 사후확률, 역-확률 등의 용어와 개념을 학교수학에서 어떤 방식으로 교수학적으로 변환해서 사용할지에 대해서는 또 다른 연구가 필요할 것이다.

concept of probability. Doctoral dissertation, Seoul national university.

이영하 (2016). 개인적인 면담 및 의사교환. (2016년 2월 13일).

Lee, Y.H. (2016). *Personal communications.* (2016-2-13)

이영하, 심효정 (2003). 확률 · 통계 연구에 대한 수학교육학적 고찰 - <수학교육>에 게재된 논문을 중심으로-. 수학교육 42(2), 111-119.

Lee, Y.H. & Sim, H.J. (2003). Focused on papers published in , the Journal of Korea Society of Mathematical Education = A trend analysis on the educational research of the probability and statistics. *The Mathematical education. 42*(2), 111-119.

이영하, 허지영 (2010). 분포 개념의 연계성 목표 관점에 따른 중학교 확률 단원 분석. 수학교육학연구 20(2), 163-183.

Lee, Y.H. & Huh, J.Y. (2010). An analysis of the 8th grade probability curriculum in accordance with the distribution concepts. *The journal of educational research in mathematics 20*(2), 163-183.

이은희, 김원경 (2015). 국내의 통계교육 연구동향 비교 분석. 수학교육 54(3), 241-259.

Lee, E.H. & Kim, W.K. (2015). A comparative analysis on research trends of statistics education between Korea and overseas. *The Mathematical education 54*(3), 241-259.

이정연 (2005). 조건부 확률 개념의 이해에 관한 연구. 석사학위 논문, 서울대학교.

Lee, J.Y. (2005). *Study on the understanding of conditional probability concept.* Master's thesis, Seoul national university.

허지영 (2010). 분포 개념의 연계성에 따른 중학교 2학년 확률단원의 지도. 석사학위 논문, 이화여자대학교.

Her, J.Y. (2010). *An analysis of the context of the middle-school second-grader's textbook from the perspective of the concept of distribution and its correlation with the context of the seventh national mathematics curriculum.* Master's thesis of Ewha Womans University.

Albert, J. (1995). Teaching Inference about Proportions Using Bayes and Discrete Models. *Journal of Statistics Education 3*(3). http://www.amstat.org/publications/jse/v3n3/ albert.html.

Berger, J. & Wolpert, R. (1988), *The likelihood principle(2nd edition).* Hayward, CA: IMS.

Berger, J., Fienberg, S., Gani, J. & Krickeberg, K. (1988). *Lectures notes in statistics.* New York : Springer-Verlag.

Birnbaum, A. (1962). On the foundations of statistical inference, *Journal of the American Statistical Association 57*, 269 - 326.

Borovcnik, M. G. (1986). Revising probabilities according to new information : A fundamental stochastic intuition. *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, 298-302.

Chatterjee, S. K. (2003). *Statistical thought ; A perspective and history.* Oxford University Press.

Cornfield, J. (1966). Sequential trials, sequential analysis, and the likelihood principle, *American Statistician 29*, 18-23.

Dale, A. I. (1991). *A history of inverse probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson.* New York : Springer-Verlag.

Edwards, A. W. F. (1978). Commentary on arguments of Thomas Bayes. *Scandinavian Journal of Statistics 5*, 116-118.

________________(1992). *Likelihood : Expanded edition.* Baltimore : The Johns Hopkins University Press.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities : Insights and difficulties. *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, 992-997.

Gandenberger, G. (2015). A new proof of the likelihood principle, *The British Journal for the Philosophy of Science 66*(3), 475-503.

Gillispie, C. Fox, R. & Grattan-Guiness, I. (1997). *Pierre-Simon Laplace 1749-1827 : A life in exact science.* Princeton University Press.

Hacking, I. (1965). *Logic of statistical inference.* Cambridge University Press.

_________(1999). *The emergence of probability.* Cambridge University Press.

Howie, D. (2002). *Interpreting probability: Controversies and developments in the early twentieth century.* Cambridge University Press.

27. Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability, In E. V. Glaserfeld, *Radical Constructivism in Mathematical Education*, 139-156.

Martin, R. & Liu, C. (2014). Discussion : Foundations of statistical inference, Revisited. *Statistical Science 29*(2), 247-251.

Mayo, D. (2014). On the Birnbaum argument for the strong likelihood principle. *Statistical Science 29*(2), 227-239.

McGrayne, S. B. (2013). 불멸의 이론. (이경식 옮김). 서울 : 휴먼사이언스. (원저 2011년 출판)

Milne, P.(1996). $\log[p(h/eb)/p(h/b)]$ is the One True Measure of Confirmation. *Philosophy of Science,* 63, 21-26

Pawitan, Y. (2001). *In all likelihood - Statistical modelling and inference using likelihood.* Oxford : Clarendon Press.

Rossman, A. J. & Short, T. H. (1995). Conditional pro bability and education reform : Are they compatibl e? *Journal of Statistics Education 3*(2). http://www.amstat.org/ publications/jse/v3n2/rossman.html.

Royall, R. M. (1999). *Statistical evidence: A likelihood paradigm.* London: Chapman & Hall.

Salmon, W. C. (1994). 과학적 추론의 기초. (양승렬 역), 서울 : 서광사. (원저 1967년 출판)

Salsburg, D. (2003). 천재들의 주사위. (최정규 역), 서울 : 뿌리와이파리. (원저 2001년 출판)

Savage, L. (1962). *Foundations of statistical inference: A discussion.* London : Methuen.

Sober, E. (1988). *Reconstructing the past: Parsimony, evolution, and inference.* Cambridge, MA: MIT Press.

Steel, D. (2003). A bayesian way to make stopping rules matter, *Erkenntnis 58*, 213-227.

_______(2007). Bayesian confirmation theory and the likelihood principle. *Synthese 156*(1), 53-77.

Stigler, S. M. (1986). *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900.* Harvard University Press.

_________(1999). *Statistics on the table: The history of statistical concepts and methods.* Harvard University Press.

_________(2010). 통계학의 역사. (조재근 역), 경기도 파주 : 한길사. (원저 1986년 출판)

Tomlinson, S. & Quinn, R. (1997). Understanding conditional probability. *Teaching Statistics 19*(1), 2-7.

Watson, J. M. (1995). Conditional probability : Its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher 88*(1), 12-17.

A Study on Analysis of Likelihood Principle and its Educational Implications

Sun Yong Park
Yeungnam University, 280 Daehak-Ro, Gyeongsan, Gyeongbuk, Korea
E-mail : polya@yu.ac.kr

Hyoung Seok Yoon
The Graduate School of Yeungnam University
E-mail : hsyunee@hanmail.net

This study analyzes the likelihood principle and elicits an educational implication. As a result of analysis, this study shows that Frequentist and Bayesian interpret the principle differently by assigning different role to that principle from each other. While frequentist regards the principle as 'the principle forming a basis for statistical inference using the likelihood ratio' through considering the likelihood as a direct tool for statistical inference, Bayesian looks upon the principle as 'the principle providing a basis for statistical inference using the posterior probability' by looking at the likelihood as a means for updating. Despite this distinction between two methods of statistical inference, two statistics schools get clues to compromise in a regard of using frequency prior probability. According to this result, this study suggests the statistics education that is a help to building of students' critical eye by their comparing inferences based on likelihood and posterior probability in the learning and teaching of updating process from frequency prior probability to posterior probability.

* ZDM Classification : K74
* 2000 Mathematics Subject Classification : 62A01
* Key words : Likelihood, Likelihood Principle, Statistics Education, critical Eye