Journal for History of Mathematics
Vol. 29 No. 2 (Apr. 2016), 103–143
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.2.103

Cours d'Analyse by Cauchy, Sturm and Jordan

19세기 에콜 폴리테크닉의 해석학 교재: Cauchy, Sturm, Jordan의 Cours d'Analyse

Kim Kyung-Hwa 김경화

We study the topics of the lectures in Analysis in 19th century at Ecole Polytechnique of France through the lists of the contents of the Cours d'Analyse by Cauchy, Sturm and Jordan, respectively and also we show how they stated the definitions of functions, continuity and limits in their Cours d'Analyse. Through this, we see that in 19th century, in France, analysis included differential and integral calculus, differential equations, variations and applications of these to differential geometry, and it was far from today's mathematical analysis.

Keywords: cours d'analyse, function, limits; 해석학 강의, 함수, 극한.

MSC: 01A55, 01A05

1 서론

오늘날의 해석학에서와 같은 엄밀한 정의와 증명은 19세기 초부터 시작되었다. 그 직접적인 계기가 된 것은 코시를 포함한 거의 대다수의 프랑스 수학자들이 grandes écoles에서 가르치면서, 학생들을 가르칠 목적으로 이론들을 정리해야 했었다는 것이다. 이것은 곧 기본원리들, 예를 들어 해석학에서 함수, 연속, 도함수 등의 개념을 정립하고 그들로부터 연역적으로 정리들을 끌어내는 것을 의미한다. 당시에 학생들을 위해 쓰여진 많은 교재에서 이것을 볼 수 있다.[1][1)]

1821년에 Cauchy의 Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique가 나온 이래로 Cours d'analyse de l'école polytechnique이란 이름으로 Duhamel(1847년), Sturm(1857년), Charles Hermite와 Paul Mansion(1873년), Camille Jordan(1882년), Joseph Bertrand(1895년), Georges Humbert(1897년)의 책이 19세기에 출판된 것을 볼 수 있다.

이 연구는 2012년 연구년 수혜에 따른 결과임.
Kim Kyung-Hwa: Dept. of Math., Ewha Womans Univ. E-mail: khkim@ewha.ac.kr
Received on Jan. 8, 2016, revised on Feb. 19, 2016, accepted on Feb. 23, 2016.

1) 3장 1절 끝부분

École Polytechnique의 해석학 교재 외에도, 19세기에 프랑스에서 나온 해석학교재로, Vieille의 l'École Normale 교재(1851년), Philippe Gilbert의 l'Université Catholique de Louvain교재(1872년), Catalan의 l'Université de Liège교재(1878년), Demartres의 Faculté des Science de Lille 교재(1892년), Appell의 l'École Centrale des Arts et Manufactures 교재(1898년)를 찾을 수가 있다.[2)]

우리는 이 논문에서 19세기 파리 École Polytechnique의 해석학 교재 중 1815년부터 1830년까지 répétiteur와 professeur로 해석학을 가르친 코시, 1840년부터 1855년까지 professeur 였던 Sturm, 1873년부터 examinateur와 professeur 였던 Jordan의 Cours d'analyse de l'École Polytechnique의 목차를 통해 당시에 가르친 해석학 강의의 내용을 살펴 보고, 아울러 함수개념과 극한을 각 교재에서 어떻게 다루었는지 보도록 한다.

2 코시의 해석학 교재

코시 자신이 쓴 해석학 교재는 1821년에 나온 Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique; 1re Partie, Analyse algébrique, 1823년에 나온 Résumé des leçons données à l'école polytechinique sur le calcul infinitésimal, 1826년과 1828년에 나온 Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie와 1829년에 나온 Leçons sur le calcul différentiel을 찾을 수 있다.

책의 제목 Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique; 1re Partie, Analyse algébrique에서 보듯이 코시는 이어서 두 번째 교재를 쓰려고 하였으나, 학교의 방침에 의해 엄밀함을 축소한 새 교재 Résumé des leçons données à l'école polytechinique sur le calcul infinitésimal, 1권을 1823년에 출판하였다. 이 책의 서문에 의하면 2권도 나오게 하려했으나, 2권은 존재하지 않는다. Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie는 서문에서 Résumé 의 후속으로 세 권으로 나누어 출판하려고 했음을 밝히며 1826년에 미분학의 응용에 대한 1권이, 1828년에 적분학의 응용에 대한 2권이 출판되었으나 3권은 보이지 않는다. 그리고 서문에서 Résumé가 다 소진되어 그것을 대신할 책을 미분학에 대한 것과 적분학에 대한 것을 분리하여 두 권으로 만들기로 하였다고 밝히며, 1829년에 미분학에 대한 Leçons sur le calcul différentiel을 출판하였으나 적분학에 대한 책은 보이지 않는다.[3)]

Cours d'analyse의 서문에서 코시는 라플라스와 푸아송을 포함한 여러 사람들이 École Royale Polytechnique의 해석학 교재를 쓰도록 권유하여서 학생들이 유용하게 잘 사용할 수 있도록 교재를 쓰기로 하였다고 Cours d'analyse를 출판하게 된 계기를 밝혔다. 또한 대수적

2) http://archive.org
3) Œuvres complètes, series 1과 series 2에 수록되어 있지 않고, 인터넷을 통해서도 존재함을 알 수 없었음.

일반성으로부터 유도된 추론에 의지할 필요가 없도록 기하학에서 요구되는 모든 엄밀함을 추구하였다고 책을 쓴 방법을 밝혔다.

그러나 다른 책들에서는 증명을 엄밀하게 하는 대신에 방법의 간결함을 추구하였다고 서문에서 밝혔다.

여기서 우리는 Cours d'analyse와 Résumé의 목차를 통해 내용을 살펴보고 함수와 극한에 대한 기술을 살펴보도록 한다.

2.1 Cours d'analyse (1821)

먼저 Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique의 내용을 목차를 통해 알아본다.

예비사항 (Preliminaries)

대수학이나 삼각법에서 우리가 다루는 여러 종류의 실 양과 그것들을 나타내기 위한 표기법에 대한 복습. 여러 양들의 평균.

1부. 대수적 해석학

1장. 실함수

§1. 함수에 대한 일반적 고려 §2. 단순함수 §3. 복합함수

2장. 무한소 또는 무한대의 양과 함수의 연속. 여러 특수한 경우에 함수의 특이값

§1. 무한소량과 무한대양 §2. 함수의 연속에 대하여 §3. 여러 특수한 경우에 함수의 특이값

3장. 우함수와 기함수. 임의의 개수의 미지수를 가진 일차방정식의 풀이를 위한 이 함수들의 사용법. 동차함수

§1. 우함수 §2. 기함수 §3. 동차함수

4장. 몇몇의 특정한 값들을 알 때 정수함수 결정하기. 응용

§1. 몇몇의 특정한 값들을 아는 일변수 정수함수에 대한 연구 §2. 몇몇의 특정한 값들을 안다고 가정할 때, 다변수 정수함수 결정하기 §3. 응용

5장. 어떤 조건들을 만족시키는 연속 일변수함수 결정하기.

§1. 변량들에 대한 비슷한 두 개의 함수가 서로 더해지거나 곱해지면, 합 또는 곱이 이 변수들의 합 또는 곱에 대한 비슷한 함수가 되도록 만들어지는 연속함수에 대한 연구 §2. 변량들에 대한 비슷한 두 함수를 곱하고, 그 곱을 두 배하면, 그 결과가 이 변수들의 합과 차에 대한 비슷한 함수들을 더해서 얻게 되는 함수와 같게 되도록 만들어지는 연속함수에 대한 연구

6장. 수렴(실)급수와 발산(실)급수. 급수의 수렴에 대한 규칙. 여러 수렴급수들의 합

§1. 급수에 대한 일반적 고려 §2. 모든 항들이 양수인 급수 §3. 양항과 음항을 포함하는 급수 §4. 일변수의 증가하는 정수멱에 따라 정렬된 급수

7장. 허수식과 그의 모듈

§1. 허수식에 대한 일반적 고려 §2. 허수식의 모듈과 축약된 식에 대하여 §3. 두 양 $+i$, $-i$에 대한 실 또는 복소근에 대하여, 그리고 그들의 분수 멱에 대하여 §4. 복소식의 근에 대하여,

대수적 해석학에 대한 notes

이제 예비사항에서 변량(변수), 상수, 극한을 정의한 것을 보도록 한다.

> 서로 다른 여러 값들을 연속적으로 취하는 것으로 간주되는 양을 변량(변수)라고 부른다. 그러한 양은 보통 알파벳의 뒤에 있는 것들 중에서 취한 문자로 나타낸다. 반대로, 고정되고 결정된 한 값을 취하는 모든 양을 상수라고 부르고 보통 알파벳의 앞에 오는 것 중의 하나로 나타낸다. 한 변수에 연속적으로 부여된 값들이, 원하는 만큼 작게 차이가 나게 끝나도록, 고정된 한 값에 한없이(indefinitely) 접근할 때, 이 값을 모든 다른 것들의 극한이라고 부른다.

이 정의에 이어 분수들의 극한으로 무리수와 내접 정다각형들의 넓이의 극한으로 원의 넓이를 예로 들었다. 그리고 이어서 무한소와 무한대를 다음과 같이 정의하였다.

> 한 변수의 연속적인 수 값[4)]이 주어진 어떠한 수보다 아래로 내려가는 방식으로, 한없이 감소할 때, 이 변수는 무한소(infinitesimal) 또는 무한히 작은 양(infinitely small quantity)이라고 부르는 것이 된다. 이 종류의 변수는 극한으로 0을 갖는다.
>
> 한 변수의 연속적인 수 값이, 주어진 어떠한 수보다 위로 올라가는 방식으로 점점 더 증가할 때, 양의 변수가 관련되면, 이 변수는 극한으로 양의 무한(positive infinity)을 갖는다고 말하고 기호 ∞로 나타내며, 음의 변수가 관련되면 음의 무한(negative infinity)을 갖는다고 하고 $-\infty$로 나타낸다. 양의 무한과 음의 무한은 함께 무한의 양(infinite quantity) 이란 이름으로 나타낸다.

그리고 여러 함수에 대한 표기법을 설명한 후에, 변수가 고정된 극한으로 수렴할 때 이 극한을 변수 앞에 lim를 붙여 나타낸다고 하고, 변수 x가 0으로 수렴한다고 하고, A가 양의 상수일 때 $\lim(A^x)$와 $\lim(\sin x)$가 각각

$$\lim(A^x) = 1 \quad \text{과} \quad \lim(\sin x) = 0$$

에 의해 결정되는 유일한 값이라고 하였다.

이제 1장에서 실함수를 어떻게 기술하였나 살펴본다.

1절에서 독립변수와 함수, 양함수와 음함수를 다음과 같이 정의하였다.

> 변하는 양들이 그들 중 하나의 값이 주어지면 다른 모든 것들의 값을 결정할 수 있도록 연결이 되어 있으면, 우리는 이 양들이 독립변수라는 이름을 가질 수 있는 그들 중 하나로 표현된 것으로 보통 생각한다. 그리고 이 독립변수로 표현된 다른 양들은 우리가 이 변수의 함수라고 부르는 것이다.
>
> 변하는 양들이 그들 중 몇 개의 값이 주어지면 다른 모든 것들의 값을 결정할 수 있도록 연결이 되어 있으면, 우리는 이 양들이 독립변수들 이라는 이름을 가질 수 있는 그들 중 몇 개로 표현된 것으로 보통 생각한다. 그리고 이 독립변수들로 표현된 나머지 양들은 우리가 이 변수들의 함수라고 부르는 것이다.
>
> 계산이나 삼각법을 만들어내는 여러 식들은 독립변수로 간주되는 변수들을 포함할 때, 이 변수들의 함수이다. 그래서, 예를 들어,
>
> $$L(x),\ \sin(x), \cdots$$

4) 여기서 수 값(numerical value)이란 절대값을 의미한다.

은 변수 x의 함수이고

$$x+y,\ x^y,\ xyz,\cdots$$

은 x와 y 또는 x, y와 z의 함수이다.

일변수 또는 다변수 함수가 앞의 예에서처럼 이 변수들로 직접적으로 표현될 때 그것들을 양함수(explicit function)라고 부른다. 그러나 함수와 변수 사이에 이 변수들이 만족시켜야 하는 방정식만 주어질 때, 이 방정식이 대수적으로 풀어지지 않은 한, 변수들로 직접적으로 표현되지 않은 함수들을 음함수(implicit function)라고 부른다. 예를 들어, y가 방정식

$$L(y)=x$$

에 의해 결정되는 x에 관한 음함수일 때, A를 우리가 다루고 있는 로그의 밑수라고 하면, 주어진 방정식을 풀어서 양함수가 된 같은 함수는

$$y=A^x$$

가 될 것이다.

x하나만의 또는 x, y, z, $\cdots$ 여러 변수의 양함수를 이 함수들의 본질을 결정하지 않고 나타내고자 할 때

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ \chi(x),\ \psi(x),\ \omega(x),\ \cdots$$

$$f(x,y,z,\cdots),\ F(x,y,z,\cdots),\ \psi(x,y,z,\cdots),\cdots$$

의 표기법을 사용한다.

위에서 $L(y)$는 $\log(y)$의 코시 표기법이다.

그리고 코시는 이어서 다가함수를 언급하고 $\arcsin((x))$와 같은 다가함수의 표기법을 보였다.

2절에서는 A가 양수이고, a는 양 또는 음의 상수일 때

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ A^x,\ \log(x),\ \sin x,\ \cos x,\ \arcsin x,\ \arccos x$$

와 같은 변수 x에 한 번의 대수적 연산을 하는 함수나 지수함수, 로그함수, 삼각함수를 단순함수(simple function)라고 하였다. 삼각함수 중에서 $\tan x$, $\sec x$, $\arctan x$, $\mathrm{arcsec}\, x$ 등은 복합함수(fonction composé(compound function))라고 하였다.

3절에서 한 변수로부터 여러 연산에 의해 얻어진 함수를 복합함수라고 하고, 이 함수들 중에서 현재 우리가 합성함수라고 부르는 것은 함수의 함수(function of function)라고 구별하여 불렀다. 예를 들어

$$x^x,\ \sqrt[x]{x},\ \frac{\log x}{x},\cdots$$

는 변수 x의 복합함수이고

$$\log(\sin x),\ \log(\cos x),\cdots$$

은 함수의 함수라고 하였다. 그리고 아래와 같이 복합함수를 구별하였다.

복합함수는 함수를 만든 연산에 의해 구별된다. 대수적 연산에 의해 만들어진 모든 함수들을 대수함수(algebraic function)라고 불러야 할 것 같다. 그러나 그 이름을 특히 주된 대수적 연산, 즉 더하기와 빼기, 곱하기와 나누기, 그리고 고정된 지수 올리기만을 사용해서 만들어진 것에 붙였다. 그리고 변수지수 또는 로그를 포함하는 함수는 지수함수 또는 로그함수란 이름을 갖는다.

대수함수는 유리함수(rational function)와 무리함수(irrational function)로 나누어진다. 유리함수는 변수에 정수 지수만 올려진 것들이다. 변수에 정수 지수만 올려진 모든 다항식, 예를 들면,

$$a + bx + cx^2 + \cdots$$

을 특히 정수함수(integer function)이라고 부르고, 두 개의 이러한 다항식들의 몫을 분수함수(fractional function) 또는 유리 분수(rational fraction)라고 부른다. x의 정수함수의 차수(degree)는 이 함수에서 x의 지수 중 가장 높은 지수이다. 1차 정수함수, 즉

$$a + bx$$

는 기하학에 적용할 때 직선의 세로좌표를 나타내는 데 사용하기 때문에, 또한 선형함수(linear function)라고 불린다. 모든 정수함수 또는 분수함수는 유리함수이고 다른 종류의 대수함수는 무리함수이다.

삼각법의 연산을 하게 하는 함수는 삼각함수(trigonometric function) 또는 원함수(circular function)라는 이름이 붙여진다.

다변수함수에 대해서도 각 변수가 일변수 복합함수에 붙여진 이름에 부여되는 성질을 가질 때 같은 이름이 적용된다. 예를 들어, 변수 $x, y, z, \cdots$ 에 대해 정수지수만 포함하는 모든 다항식은 이 변수들의 정수함수가 될 것이다. 변수의 지수의 합이 가장 큰 항에 있는 변수의 지수의 합을 이 정수함수의 차수라고 부른다.

$$a + bx + dy + dz + \cdots$$

과 같은 1차함수는 선형함수란 이름을 갖는다.

위에서 보듯이 여러 함수에 대한 정의를 상세히 밝혔으나, 다항식에 대한 정의는 보이지 않는다. 그리고 내용을 살펴보면 정수는 양의 정수만을 뜻한 듯하다.

2장에서는 무한소와 무한대, 함수의 연속성, 그리고 여러 특수한 경우에 함수의 특이값을 보였는데, 우리는 무한소와 무한대, 함수의 연속성을 어떻게 다루었나를 보도록 한다.

변량의 수 값이 극한 0으로 수렴하는 방법으로 한없이(indefinitely) 감소하면, 이 변량이 무한히 작아진다고 한다. 여기서 우리는 계속적인 감소(constant decrease)와 한없는 감소(indefinite decrease)를 혼동하면 안된다는 것을 지적하는 것이 좋다. 주어진 원에 외접하는 정다각형의 면적은 변의 수가 증가함에 따라 계속 감소하지만, 극한으로 원의 넓이를 갖기 때문에 한없이 감소하지는 않는다. 마찬가지로, 잇따른 값으로 수열

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots$$

의 다른 항들만을 취하는 한 변수는, 무한대까지 연장했을 때, 계속적으로 감소할 것이지만 수열의 잇따른 값이 극한 1을 향해 수렴하기 때문에 한없이 감소하지는 않는다. 반대로, 잇따른 값으로 수열

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{7},\cdots$$

의 다른 항들만을 갖는 한 변수는, 연이은 두 항의 차가 교대로 양과 음이기 때문에, 무한대까지 연장했을 때, 계속적으로 감소하지는 않지만, 궁극적으로 어떠한 주어진 수보다도 작아지기 때문에 한없이 감소한다.

변량의 수 값이 극한 ∞로 수렴하는 방법으로 한없이 증가할 때, 그 변량이 무한히 커진다(infinitely large)고 한다. 여기서 또한 한없이 증가하는(indefinitely increase) 변수와 계속적으로 증가하는(constantly increase) 변수를 혼동해서는 안된다는 것을 주목하는 것이 필수적이다. 주어진 원에 내접하는 정다각형의 넓이는 변의 수가 증가함에 따라 계속적으로 증가하지만, 한없이 증가하는 것은 아니다. 정수들의 자연스러운 수열

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots$$

의 항들은 계속적으로 그리고 한없이 증가한다.

2장의 2절에서 함수의 연속에 대해 다루었는데, 무한소를 다루는 목적 중의 하나가 함수의 연속에 대한 개념이라는 말로 시작하며 다음과 같이 일변수함수의 연속을 정의하였다.

$f(x)$를 변수 x의 함수라 하고, 주어진 두 한계 사이에 있는 각 x의 값에 대해, 이 함수가 유일하고 유한한 값을 계속 갖는다고 가정하자. 만일, 이 한계 사이에 포함된 x의 값으로 시작하여, 변수 x에 무한히 작은 증분 α를 주면, 함수 자신은 증분으로, 동시에 새로운 변수 α와 x의 값에 의존하는, 차

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

를 얻을 것이다. 그러면 함수 $f(x)$는 변수 x에 주어진 두 한계 사이에서, 이 한계 사이의 중간에 있는 각 x의 값에 대해, 차

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

의 수 값이 α의 수 값과 함께 한없이 감소한다면, 이 변수의 연속함수가 될 것이다. 달리 표현하면, 주어진 두 한계 사이에서 변수 x의 무한히 작은 증분이 항상 함수 자신의 무한히 작은 증분을 만들어 내면, 함수 $f(x)$는 주어진 한계 사이에서 x에 대해 연속이다.

변수 x에 주어진 특정한 값에 대해, 매우 가깝더라도, 그 값을 포함하는 x의 두 한계 사이에서 함수가 연속이면, 함수는 그 값의 근방에서 연속이라고 또한 말한다.

마지막으로 함수 $f(x)$가 변수 x의 한 특정한 값의 근방에서 연속이 아니면, 우리는 함수가 불연속이라고 하고, 이 특정한 값에 대해 solution of continuity[5)]가 있다고 한다.

5) 연속성이 사라졌다(dissolve 또는 disappear) 는 의미로 쓰임. [2]

이와 같이 정의하고 $\sin x$가 임의의 두 한계사이에서 연속임을 설명하고, 단순함수들

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ A^x,\ Lx,\ \sin x,\ \cos x,\ \arcsin x,\ \arccos x$$

이 각각 변수 x의 두 유한한 한계 사이에서 항상 실수이고 그 구간에서 무한이 되지 않을 때 이 두 한계 사이에서 연속이 된다고 말하며, 변수 x의 유한한 값이 어떤 한계 사이에 놓일 때 그 값의 근방에서 연속이 되는지를 말하였다.

2.2 Résumé des leçons données à l'école Royale polytechinique sur le calcul infinitésimal(1823)

서문에서 코시는 이 책이 그가 l'école Royale polytechinique에서 calcul infinitésimal에 대해 가르친 것의 대략본으로, l'école Royale polytechinique 교육위원회의 요구로 만들었다고 하였다. 2년 동안 가르친 것을 두 권으로 만들 것이며, 기술하는 방법은 Cours d'analyse에서 보여주고자 했던 엄밀함을 무한소량을 직접 다루는 것으로부터 나오는 단순함으로 누그러뜨리는 것이라고 하였다. 그 결과 같은 종류의 다른 책들과 내용전개 방법이 다름을 밝혔다.

목차는 아래와 같다.

미분학

제1강 변수, 변수의 극한, 무한소량

제2강 연속함수와 불연속함수. 연속함수의 기하학적 표현

제3강 일변수함수의 도함수

제4강 일변수함수의 미분

제5강 여러 함수의 합의 미분은 그들의 미분의 합이다. 이 원리의 결과들. 복소함수의 미분

제6강 여러 문제의 풀이에 미분과 도함수의 사용법. 일변수함수의 최대값과 최소값. $\frac{0}{0}$ 형태로 나타내지는 분수의 값

제7강 부정형 $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 형태로 나타내지는 여러 식들의 값. 유한차의 비와 도함수 사이에 존재하는 관계

제8강 다변수함수의 미분. 편도함수와 편미분

제9강 복합함수의 미분에서 편도함수의 사용법. 음함수의 미분

제10강 동차함수에 대한 정리. 다변수함수의 최대값과 최소값

제11강 최대, 최소값에 대한 연구에서 부정형 인수의 사용법

제12강 일변수함수에 대한 여러 계수의 미분과 도함수

제13강 다변수함수에 대한 여러 계수의 미분

제14강 여러 독립변수의 함수에 대한 전미분의 연구를 단순하게 하기 위한 방법. 이 미분에 대한 기호값(symbolic value)

제15강 일변수함수와 그의 도함수 또는 여러 계수의 미분 사이에 존재하는 관계. 최대, 최소값에 대한 연구에서 이 미분의 사용법

적분학

이 책에서는 목차에서 볼 수 있는 것처럼 오늘날 미분적분학에서 다루는 내용들을 포함하고 있다. 강의의 내용을 옮겼기 때문에 Cours d'analyse에서 예비사항에 넣었던 내용을 제1강(Leçon 1)에서 볼 수 있다. 변수, 상수, 극한의 정의는 무리수 대신에 쌍곡선의 점근선을

극한의 예로 바꾼 것을 제외하고는, Cours d'analyse의 예비사항에서와 완전히 동일하게 하였다. 그리고 변수가 극한으로 수렴할 때 이 변수 앞에 lim를 붙여 나타낸다고 하고, α가 0으로 수렴할 때 $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$와 $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$의 극한을 다루었다. 둘 다 오늘날 조임정리라고 부르는 것을 사용하는 방법으로 $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$가 극한 1을 갖고, $\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$임을 보였다. 이어서 무한소와 무한대를, 앞에 우리가 보인, Cours d'analyse의 예비사항에서와 동일하게 기술하였다.

제 2강에서 독립변수, 함수, 양함수, 음함수를, 앞에서 우리가 보인, Cours d'analyse의 1장 1절에서와 동일하게 정의하였다. 이어서 증분을 나타내는 기호 Δ를 소개하고, 함수 $y = f(x)$에 대해, x의 증분 Δx에 대응되는 y의 증분 Δy는 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$에 의해 결정된다고 하였다. 그리고 Δx에 무한히 작은 값 i를 주면 Δy의 값은, 함수

$$A^x, \sin x, \cos x$$

를 예를 들어

$$A^{x+i} - A^x = (A^i - 1)A^x$$
$$\sin(x+i) - \sin x = 2\sin\frac{i}{2}\cos\left(x + \frac{i}{2}\right)$$
$$\cos(x+i) - \cos x = -2\sin\frac{i}{2}\sin\left(x + \frac{i}{2}\right)$$

이므로 모두 i와 함께 극한 0으로 한없이 수렴하는 것을 말하였다. 그리고는 연속함수를, 우리가 앞에 보인, Cours d'analyse의 2장 2절에 있는 정의에서 α 대신 i로 바꾼 것을 제외하고는 동일하게 하였다.

3 Sturm의 Cours d'analyse (1863, 1864)

Sturm의 Cours d'analyse de l'école polytechnique은 Sturm의 강의를 그대로 옮긴 것에 해당하는데, 그의 강의를 들은 몇 학생들에 의해 우선 쓰여졌고, 그것을 바탕으로 Sturm이 책으로 인쇄하려고 하였으나 건강상태가 좋지 않아 그의 제자인 Pruhet의 도움을 받았으나 완성하지 못한 채로 죽게 되어서 그의 사후에 Pruhet가 완성하여 1857년에 첫판이 출판되었다.[6)] 첫판이 나온 이래로 Pruhet에 의해 조금씩 다듬어지며 1920년대까지 14판이 나왔다.

Sturm은 Cauchy의 방법을 잘 따르며 강의를 한 것으로 보인다. 먼저 1863년에 나온 제 2판 1권의 제 1강 예비사항에서 변수, 상수, 독립변수, 함수, 극한, 무한소, 무한대에 대한 정의를 어떻게 하였나 살펴보고, 1권과 1864년에 나온 2권의 목차를 보도록 한다.

1변수 및 다변수 함수의 개념

1. 연속적으로 다른 값을 갖는 양을 변수(variable)라고 부르고, 계산하는 과정에서 고정된 한 값을 갖는 양을 상수(constant)라고 부른다.

6) 제 2판에 있는 '첫 판에 대한 서문' 에서 발췌.

2. 한 변수의 연속된 값들이 어떤 규칙을 따르면서 다른 변수에 의존할 때 앞의 변수를 뒤의 변수의 함수라고 한다. 둘 중 하나의 값을 변화시키는 것이 다른 것의 결정된 값에 대응될 때, 그 둘 사이에 존재하는 관계가 알려지지 않았거나 식으로 표현되지 않았어도, 함께 변하는 두 양은 하나가 다른 것의 함수라고 볼 수 있다.
3. 임의의 값을 주는 변수를 독립변수라고 부르고, 대응되는 값을 갖는 변수를 함수라고 부른다. 예로써, 원의 넓이, 구의 넓이는 반지름의 함수이고, 추의 진동시간은 추의 길이의 함수이다.
   한 양은 여러 독립변수의 함수가 될 수 있다. 예를 들어 직원기둥의 부피는 밑면의 반지름과 높이의 함수이다.
   변수는 보통 알파벳의 뒤의 문자 x, y, z등으로 나타내고, 상수는 앞의 문자 a, b, c등으로 나타낸다. 한 변수 x의 서로 다른 함수를 나타낼 때 $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$, $\cdots$ 와 같은 기호를 사용하고, x에 한 특정한 값 a를 주면, $f(x)$의 x자리에 a를 집어 넣은 결과는 $f(a)$로 나타내진다.
   여러 변수의 함수는 $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $\cdots$ 의 기호로 나타내고 x, y, z자리에 a, b, c를 넣었을 때, $f(a, b, c)$, $\varphi(a, b, c)$, $F(a, b, c)$, $\cdots$ 으로 나타내진다.
4. 한 개만의 변수의 함수는 기하학적으로 곡선으로 나타낼 수 있다.
   이를 위해 독립변수 x를 방정식 $y = f(x)$에 의해 정의되는 평면곡선에 대응되는 가로좌표로, 함수 y를 세로좌표로 간주하면 된다. 보통 이 곡선은 연속이다. 즉, 아주 미미하게 변하는 x의 값에 대해 세로좌표 또한 아주 미미하게 변한다. y는 그러면 x에 대한 연속함수이다. 마찬가지로 두 개의 독립변수의 함수는 곡면으로 나타낼 수 있으나, 3개 이상의 독립변수의 함수는 기하학적 표현이 가능하지 않다.
5. 함수가 변수들에 정확히 나타내진 어떤 연산을 해서 그 값을 얻을 수 있도록, 의존하는 변수 또는 변수들로 즉각적으로 표현되면 함수는 양(explicit) 함수라고 한다. 그러므로
   $$y = x + \sqrt{x^2 - a^2},\ y = a^x$$
   는 x에 대한 양함수이다.
   풀어지지 않은 방정식 또는 해석적으로 표현되지 않은 조건들에 의존하는 변수에 의해 연결된 함수들은 음(implicit)함수라고 부른다. 방정식
   $$y^2 - 2xy + 2x^2 - a^2 = 0$$
   에 있는 y와 같은 것이 음함수이다. 함수의 값을 방정식으로부터 끌어내면 함수는 양함수가 되고,
   $$y = x \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$
   를 갖게 된다.

극한법

6. 변수의 연속된 값이 고정되고 정해진 양으로 원하는 만큼 작게 차이가 나는 방식으로 무한히 접근하면, 이 고정된 양은 변수 값의 극한이라고 불린다. 몇 개의 예를 보자.
   원의 표면은 내접 정다각형의 열이 변의 수가 점점 더 커질 때 그 넓이가 향해 가는 극한이다. 사실, 기하학적으로 원 안에 내접하는 정다각형의 넓이는 변의 수가 충분히 크다면 원의 넓이와 원하는

만큼 작게 차이가 날 수 있다. 내접 정다각형의 넓이가 그것의 변의 수와 함께 끊임없이 증가하는 것을 증명할 필요는 없다는 것을 말해야 한다.

마찬가지로 각과 그것의 사인을 생각하면, 항상 1보다 작은 비 $\frac{\sin x}{x}$ 는 각에 충분히 작은 값을 주면, 원하는 만큼 작게 차이가 날 수 있다. 그러므로 x가 한없이 감소하면, $\frac{\sin x}{x}$ 의 극한은 1이다.

우리는 또 다시 증명할 필요가 없음을 얘기하고, 사분원보다 작은 x가 한없이 작아질 때, 비 $\frac{\sin x}{x}$ 가 연속적으로 증가하는 것을 보통 증명하지 않는다.

7. 변수의 어떤 값에 대해 $\frac{0}{0}$ 형태로 나타내지는 함수는 때때로 극한을 갖는다. 비 $\frac{\sin x}{x}$ 를 예로 갖는데, 그것은 $x = 0$에 대해 $\frac{0}{0}$ 이 되고 극한 1을 갖는다. 마찬가지로 식

$$y = 2a - \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$$

는 $x = a$에 대해 $\frac{0}{0}$ 형태를 갖는다. 그러나 x에 a와 다르지만, 계속해서 접근하는 값을 주면, y의 값은 결정되고 식

$$2a - \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$$

의 값과 같다. 이제, x가 점점 a에 접근할 때, 이 앞의 식은

$$2a - \frac{3a}{2} \quad \text{또는} \quad \frac{a}{2}$$

와 점점 더 작게 차이가 난다. 그러므로 y값의 극한은 $\frac{a}{2}$ 이다.

8. 어떤 변량은 극한보다 항상 더 작거나 더 크면서 극한에 한없이 접근할 수 있다. 그러나 변량이 접근하는 극한보다 교대로 더 크게도 더 작게, 즉 여기저기 진동하면서 접근할 수 있다.

그래서 비 $\frac{\sin x}{x}$ 는 x가 한없이 증가할 때 0으로 간다. 동시에 x가 반원둘레의 배수와 같을 때 마다 $\frac{\sin x}{x}$ 는 0이 되고 부호를 바꾼다.

위 기술에서 보면, Sturm이 Cauchy의 정의를 잘 따르며 기술하였지만, 예를 적절히 들며 개념을 보다 더 분명하게 표현하였다. 그러나 x가 0으로 수렴할 때 $\frac{\sin x}{x}$ 의 극한이 1이라는 것에 대한 기술에서 보듯이, 비록 Cauchy가 Cours d'analyse 이후에 엄밀함을 축소하였다고 하여도, 조임정리를 쓰며 증명을 보여주었으나, Sturm은 Cauchy 보다는 훨씬 더 직관에 의존한 기술을 한 것을 볼 수 있다. 그러나 개념에 대한 설명은 강의내용을 Prouhet가 다듬었기 때문에 보다 더 분명하게 개념들이 들어오는 것을 볼 수 있다.

무한소와 무한대에 대한 정의는 무한소법이란 주제 하에 다음과 같이 정의하였다.

무한소법

9. 한 변수가 주어진 어떠한 양보다 더 작아지는 방법으로 점점 더 작은 값을 취하면, 그것이 무한히 작아진다고 한다. 그러므로 원의 면적과 내접다각형의 면적 사이의 차는 변의 수를 증가시킴으로써 무한히 작게 소진될 수 있다. 분수 $\frac{x}{x^2-2x+3}$ 은 x가 점점 더 큰 값을 취하면 무한히 작아진다.

무한히 작은 양은 따라서 실제로 부여될 수 있는 값을 갖는 결정된 양이 아니다. 그것은 반대로 극한 0을 갖는 근본적으로 변하는 양이다.

10. 한 변수가 주어진 어떠한 크기를 초과할 수 있는 방식으로 점점 더 큰 값을 취하면, 무한이 된다 또는 무한대가 된다고 하고, 기호 ∞ 또는 $\frac{K}{0}$ 로 그것을 나타낸다. 그래서 함수

$$y = a + \frac{a^2}{x-a}$$

는 $x = a$ 에서 무한이 된다.

a 와 아주 작게 차이가 나지만 a 보다 큰 x 의 값에 대해, 대응되는 y 의 값은 양이고, 반면에 a 보다 작은 x 의 값에 대해 y 의 값은 음이다. 그래서 경우에 따라 무한은 양 또는 음이다.

1863년에 나온 제2판 1권의 목차는 다음과 같다.

미분학

– 테일러급수에 대한 두 번째 증명

제 9강 – 매크로린급수의 응용

– 지수함수의 전개
– $\sin x$와 $\cos x$의 전개
– 임의의 지수에 대한 이항공식
– $\log(1+x)$의 전개
– 로그함수의 계산에 대한 공식
– 대수함수의 극한으로 간주된 로그함수

제 10강 – 무아브르 공식과 그 결과

– 허수식에 대한 일반론
– 무아브르 공식
– 한 각의 배수에 대한 사인과 코사인을 그 각에 대한 사인과 코사인의 멱으로 전개
– 사인과 코사인의 멱을 그 각의 배수에 대한 사인과 코사인으로 전개
– 허수 지수에 대한 이론
– 허수 로그함수

제 11강 – 이항방정식의 풀이

– 방정식 $x^m = a$의 풀이
– Cotes의 정리
– 방정식 $x^m = -a$의 풀이
– 방정식 $x^m = a + b\sqrt{-1}$의 풀이

제 12강 – 부정형으로 나타내진 식

– $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 0^0, 1^∞ 형태 중 하나로 나타내진 식에 대한 여러 값형태 중 하나로 나타내진 식에 대한 여러 값
– 앞의 규칙의 확장
– 응용

제 13강 – 다변수함수의 전개

– 테일러정리의 다변수함수로의 확장
– 매크로린정리의 확장
– 동차함수의 성질

제 14강 – 1변수 함수의 최대, 최소값

– 1변수 함수의 최대, 최소값
– 응용
– 음함수의 최대, 최소값

제 15강 – 다변수함수의 최대, 최소값

– 다변수의 양함수 및 음함수의 최대, 최소값

제 16강 – 미분학의 기하학적 응용 – 탄젠트 이론

– 접선과 법선 방정식
– 접선, 법선, 등으로 불리는 선들의 길이
– 접선방정식의 차수(degree)
– 접선에 대한 문제
– 곡선의 오목, 볼록

제 17강 – 평면곡선의 면적과 호에 대한 정리

– 평면곡선의 면적의 미분
– 평행사변형의 합의 극한으로 간주된 면적
– 응용
– 평면곡선의 호의길이 구하기
– 곡선의 호의 미분
– 현에 대한 호의 비의 극한
– 극한으로 간주된 곡선의 호에 대한 새로운 정리

제 18강 – 극좌표에서 만들어진 평면곡선

– 접선 구하기
– 접선, 법선의 길이
– 부채꼴의 면적의 미분
– 곡선의 호의 미분
– 응용
– 양극좌표

제 19강 – 평면곡선의 접촉에 대한 이론

– 평면곡선의 다양한 계수의 접촉
– 이 접촉의 계수는 좌표축의 선택과 독립적이다.
– 짝수 또는 홀수 계수의 접촉에 대한 다른 특성들

– 접촉곡선
– 접촉원
– 원추곡선에의 응용

제 20강 – 평면곡선의 전개와 포락선

– 평면곡선의 전개와 전개하기
– 전개의 일반적 성질
– 포물선, 타원, 쌍곡선에의 응용
– 움직이는 곡선의 포락선

제 21강 – 사이클로이드에 대한 특별 학습

– 곡선의 정의와 방정식
– 접선과 법선
– 접촉원의 반경
– 전개
– 사이클로이드 한 호의 길이

제 22강 – 평면곡선의 곡률

– 독립변수가 임의일 때 곡률반경의 식
– 극좌표에의 응용
– 평면곡선의 곡률에 대한 이론
– 곡률원과 접촉원의 일치
– 응용

제 23강 – 이중곡률의 곡선

– 접선의 방정식
– 접선과 좌표축의 각
– 법평면
– 곡선의 호의 미분
– 현에 대한 호의 비의 미분

제 24강 – 곡면과 이중곡률선

– 접평면의 방정식
– 법평면의 방정식
– 접평면의 방정식의 차수
– 접평면에 관련된 문제
– 접촉평면
– 접촉평면과 좌표평면의 각
– 주 법평면

제 25강 – 공간 선의 곡률– 헬릭스

– 공간 선의 곡률
– 접촉원
– 비틀림 및 제 2 곡률반경
– 헬릭스의 방정식
– 접선
– 곡률반경과 곡률원
– 곡률중심의 자취
– 접촉평면과 비틀림각

제 26강 – 평면곡선의 특이점

– 변곡점
– 중복점
– 역행점
– 고립점
– 중지점(stop point)
– 돌출각(angular point)

적분학

제 27강 – 함수의 적분에 대한 규칙

– 정의와 표기법
– 상수를 곱한 함수의 적분
– 몇 간단한 미분의 즉각적인 적분
– 합의 적분
– 부분적분
– 치환적분

제 28강 – 유리함수의 적분

– 단일 근의 경우
– 단일 복소근의 특수한 경우
– 중근의 경우
– 복소 중근의 특별한 경우

제 29강 – 무리함수의 적분

– 단항의 무리식만을 포함하는 함수
– 2차의 근을 포함하는 경우

다음은 1864년에 나온 제2판 2권의 목차다.

적분학의 계속

– 기호 하에서 미분 또는 적분에 의해 얻어진 적분
– 기하학적 고려에 의해 얻어진 적분
– 실 양과 복소 양의 분리에 의해 얻어진 적분
– 미분방정식에 의해 얻어진 적분

제 39강 – 정적분 구하기 계속– 오일러 적분

– M. Cauchy의 방법
– 기본 공식
– 응용
– 급수로의 전개
– 오일러 적분
– 정의
– 1차 공간 적분의 성질
– 오일러 적분들의 관계
– Γ-함수로 나타내지는 중적분
– 부피와 중심에의 응용

제 40강 – 전미분의 적분과 미분방정식의 적분

– 이변수함수의 경우에 적분가능 조건과 적분
– 임의의 개수의 변수의 경우로 확장
– 미분방정식
– 정의
– 1차방정식
– 변수분리
– 동차방정식
– 동차로 되는 방정식

제 41강 – 1차방정식의 적분 계속

– 선형방정식
– 선형방정식으로 되는 방정식
– de Beaume 방정식
– 궤적에 대한 문제
– 1차방정식과 임의의 차수의 방정식
– 변수들 또는 변수들 중 하나를 명백하게 포함하지 않는 방정식의 경우
– 1 개의 변수에 대해 풀어질 수 있는 방정식의 경우

제 42강 – 1차방정식의 계속

– 1차 미분방정식의 적분의 존재성
– 방정식의 첫 항을 적분가능하게 하는 적당한 인자의 존재
– 이 인자 구하기

제 43강 – 이변수방정식의 특이해

– 일반적 적분으로부터 어떻게 유도될 수 있나
– 방정식의 첫 항을 적분가능하게 하는 인자에 의해 얻어지는 특이해
– 특이해의 예
– 특이해는 적분방정식으로 얻어지는 포락선이다.

제 44강 – 임의의 차수의 미분방정식

– 임의의 미분방정식의 적분의 존재
– 일반 적분에 들어오는 상수를 채워야 하는 조건
– 다양한 차수의 미분방정식의 적분
– 방정식 $\frac{d^m y}{dx^m} = v$의 적분

제 45강 – 고차방정식 몇 개의 적분

– $f(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \frac{d^m y}{dx^m}) = 0$ 형의 방정식
– $f(\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}, \frac{d^m y}{dx^m}) = 0$ 형의 방정식
– 차수를 낮출 수 있는 방정식
– 기하학적 응용
– 동차방정식

제 46강 – 두 번째 항이 없는 선형방정식의 적분

– 정의
– 두 번째 항이 빠진 방정식의 성질
– 상수계수를 가진 방정식
– 서로 다른 허수 근의 경우
– 등근의 경우
– 달랑베르의 방법
– 다른 방법들

제 47강 – 완전 선형 미분방정식의 적분

– 완전방정식을 두 번째 항이 없는 방정식으로

4 C. Jordan의 Cours d'analyse (1882, 1893, 1894)

죠르당은 1882년에 처음 출판된 cours d'analyse 제 1권 서문에서 이 책이 école Poytechnique에서 몇 년 간 가르친 것을 옮긴 것이며, 단지 몇 군데에서 새로 발전된 것을 추가하였지만, 이 책의 일반적 성격을 바꾸지는 않았다고 밝혔다.

이 cours d'analyse는 세 권으로 구성되는데, 1권은 미분학에 대한 것, 2권은 적분론에 대한 것, 3권은 미분방정식의 풀이와 변분법의 기초에 대한 것이라고 하였다. 1887년에 출판된 3

권은 찾을 수 있었으나, 2권은 찾을 수가 없었다. 그래서 우리는 1권의 내용 중 서론에서 양에 관해 기술한 것과 1장에서 변수, 함수, 연속함수에 대해 기술한 것과 목차를 살펴 보고, 1893년과 1894년에 각각 출판된 2판의 목차를 살펴 보도록 할 것이다.

4.1 C. Jordan의 Cours d'analyse, 첫판 제1권 (1882)

우선 첫판 1권의 서론에서 양에 관해 서술한 것을 보도록 한다.

I 수학은 양의 과학이다. 수학은 계산에 관련된 크기의 성격에 따라 여러 분야로 나누어진다. 산술, 기하학, 역학, 수리물리학, 확률계산학으로 주로 구별한다.
이 다양한 분야는 공통의 연결고리로, 연산의 계산을 정의할 수 있는 대수학을 갖고 있다.

II 수학에서 학문의 주제에 따라서 뿐만 아니라 방법에 따라서 다른 분류를 할 수 있다. 이 새로운 관점으로 해석학을 두 종류로 구별한다:
1° 불연속 양에 대한 것;
2° 연속 양에 대한 것.
첫 번째에서는, 선험적으로 주어진 어떤 고정된 양 사에에 존재하는 관계를 추구한다. 이 방법은 증명이 통분불가능 양의 개념을 요구하는 소수의 기본정리들을 제외하고 수학의 기본적인 부분, 특히 산술에서, 그리고 기하학의 시작 단계에서 사용된다.
연속 양에 대한 해석학에서는, 대조적으로, 감지할 수 없는 정도로 변하는 것으로 받아들여지는 것으로 제안된 문제의 요소들을 생각하며, 그들의 동시 변화를 지배하는 법칙을 결정하는 것을 추구한다.
탄젠트문제와 구적법문제를 해결하기 위하여, 곡선론에 대수학을 적용하는 것에 대한 데카르트의 주목할 만한 발견이 기하학을 다시 보게 했을 때까지, 유클리드와 아르키메데스가 이전에 탁월한 예들에서 보인 이 방법은 수세기동안 잊혀 졌었다.

다음에는 1장에서 변수, 함수, 연속함수에 대해 기술한 것을 본다.

1. 두 변량 x와 y가 어떤 관계에 의해 서로 연결이 될 때, 우리는 둘 중 하나를 독립변수로 임의로 선택할 수 있고, 다른 변수를 그 변수의 함수라고 한다.
좀 더 일반적으로, $m+n$개의 변수 $x, y, z, \cdots$ 이 m개의 관계에 의해 서로 연결이 된다고 하자. 우리는 이 양들 중 n개를 독립변수로 선택할 수 있고, 다른 것들은 함수가 될 것이다.
한 변수 x의 함수는 기호 $f(x)$로 나타내진다; 동시에 여러 개의 다른 함수들을 고려한다면, 우리는 앞의 기호의 첫 문자를 바꾸면서 각각 $F(x)$, $\varphi(x)$, $\cdots$ 으로 나타낼 수 있을 것이다.
여러 변수 $x, y, \cdots$ 의 함수는 비슷한 표기법 $f(x, y, \cdots)$으로 나타내진다.

이어서 번호 2 아래에 여러 일변수함수의 예를 들었는데, 첫 번째 다항함수 (또는 정수함수)를 보이고 기본성질로 달랑베르가 처음 증명한 정리:

모든 m차 정수함수는 m개의 1차 인수(실수 또는 허수의 계수를 가진)의 곱으로 분해될 수 있다.

를 기술하였다. 이어서 유리분수를 말하고 "모든 유리분수는 정수함수와 몇 개의 단순분수의 합으로 나타낼 수 있다"는 것을 보일 것이라고 하였다. 그리고는 일반적 대수함수를 말하고, 다음으로 초월함수의 예로 함수 $y = x^m$(m은 통분불가능), 지수함수 $y = a^x$, 앞의 역함수인, 로그함수 $y = \log x$, 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, 등과 이들의 역함수 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, 등을 들었다.

다음은 연속함수의 정의이다.

3. 양 ϵ이 아무리 작더라도, $-\eta$와 $+\eta$사이에 포함된 모든 h값에 대해

$$f(a+h) - f(a) < \epsilon$$

이 되는, 두 번째 양 η를 항상 결정할 수 있으면, 우리는 함수 $y = f(x)$가 값 $x = a$에 대해 연속이라고 말한다.

함수 $f(x)$가 $x = a$부터 $x = b$까지의 구간에 포함된 모든 x값에 대해 연속이면 $x = a$부터 $x = b$까지 연속이 될 것이다. a를 포함하고 그 안에서 함수가 연속인 구간을 결정할 수 있으면, 함수가 값 a의 근방에서 연속이 될 것이다.

마찬가지로 다변수함수 $z = f(x, y)$가 임의의 작은 양 ϵ에 대해, h와 k가 $-\eta$와 $+\eta$사이에 놓일 때

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) < \epsilon$$

이 되는 η를 결정할 수 있으면, $x = a$, $x = b$에 대해 연속이 될 것이다.

우리는 이 개념을, 덜 정확하지만, 변수에 주어진 무한히 작은 증분 체계에 대해 함수의 무한히 작은 증분이 대응된다고, 매우 간단하게 말로 흔히 표현한다.

함수 값이 무한 또는 부정이 되게 하는 변수값들의 체계에 대해 함수가 불연속인 것은 분명하다.

위를 통해 보면, 죠르당이 ϵ-η를 써서 함수의 연속을 정의했지만, 여전히 말로 하는 것을 선호한 듯하다.

이제 목차를 보도록 한다.

10. 곱의 도함수

11. 몫의 도함수

12. 합성함수의 도함수

13. 역함수의 도함수

14. $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, e^x, x^m 등의 도함수

15. 공식 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$

16. 도함수가 모든 점에서 0 인 함수는 상수함수이다.

17. 미분

III. 편미분- 전미분

18. 편도함수

19–21. 전미분

22–23. 합성함수의 도함수와 미분

24–26. 음함수의 도함수

IV. 고차 도함수와 미분

27–28. 고차 도함수

29. 미분하는 순서는 상관 없다.

30–31. 고차의 미분

32. 다변수함수의 n 번째 미분에 대한 일반적 표현

33. 곱의 n 번째 미분

34. 합성함수의 연속적 미분

V. 변수변환

35. 독립변수의 변환

36. 함수의 동시 변화

37. 극좌표에서 곡률 중심

38. 역함수의 연속적 도함수

39–40. 여러 개의 독립변수로의 확장

41–42. 미분매개변수에의 응용

43. 함수의 동시변환

제 2장. 미분방정식의 형성

I. 상미분방정식

44–45. 정의

46–49. $\arcsin x$, $(x+\sqrt{x^2}-1)^n$, $\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ 가 만족시키는 선형미분방정식

50. 상수의 소거

51–53. 동일 초점의 원추형의 미분방정식: 원, 원추곡선, 포물선

54. 함수가 선형관계로 연결되기 위한 조건

II. 편도함수를 가진 방정식

55. 정의

56. 상수의 소거

57. 임의의 함수의 소거

58–60. 함수가 한 관계로 연결되기 위한 조건 – 야코비안

61–63. 원주면, 원추, 회전곡면의 편도함수를 가진 방정식

64. 동차함수에 대한 정의

65. 같은 편각에 의존하는 임의의 n 개의 함수의 소거

66. 정칙곡면에 대한 방정식

67–68. 전개 가능 곡면에 대한 방정식

제 3장. 급수전개

I. 테일러 공식

69–71. 테일러와 매크로린 공식

72. 다변수함수로의 확장

II. 응용

74. $(1+x)^m$ 의 전개

75–76. $\log(1+x)$ 의 전개 - 로그표의 계산

III. 급수전개를 위한 과정

82–86. 합, 몫, 곱의 전개

87–88. 베르누이 수로의 응용

89–90. 근호의 전개

91–93. 함수들 X_n 으로의 응용

94–99. 대수방정식의 근의 전개

100. 앞의 전개의 사용

101. $x=\infty$ 에 대한 $x^\alpha e^x$ 의 극한

4.2 C. Jordan의 Cours d'analyse 2판 1권 (1893) 과 2권 (1894)

죠르당은 2판 1권의 서문에서 이 새로운 판이 이전 것과 많이 다름을 밝혔다. 또한 에꼴폴리테크닉에 들어오는 학생들은 이미 기본함수들을 잘 알기 때문에 그것들을 이미 안다고 가정하였으나, 그것들을 학습하는데 무한소해석학의 개념을 필요로 하여 이 2판의 처음 3장에 무한소해석학의 기본개념들을 넣었다고 하였다.

이전 판에서는 가능한 한 간단하게 하려 했던 중요한 원리들을 이 판에서는 가능한 한 자세하고 일반적으로 보여준다고 하였다.

목차에서 볼 수 있듯이, 오늘날 해석학개론 교재에서 볼 수 있는 내용들이 1장과 3장에, 기초복소함수론의 내용이 2장에 실려 있다.

먼저 극한과 함수의 연속에 대해 어떻게 기술하였나 보도록 한다.

제 1장 8번 극한이란 주제 하에서 다음과 같이 극한을 정의하였다.

> x를 값들 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$의 제한없는 열을 연속적으로 갖는 변수라고 하자. 양수 ϵ의 임의의 값에 대해, ν보다 큰 모든 n의 값에 대해
>
> $$|x_n - c| < \epsilon$$
>
> 이 되는 정수 ν를 할당할 수 있으면, 우리는 열 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 또는 짧게 말해서, 변수 x가 극한 c로 향한다 (tend) 또는 수렴한다 (converge) 고 말한다.

위와 같이 정의하고 변수 x가 서로 다른 두 개의 극한으로 동시에 수렴할 수 없음을 증명하였다.

그리고 9번에서 다음 정리를 쓰고 증명하였다.

정리. 수열 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 이 극한으로 향하기 위해서, 극한 0을 갖고, 모든 정수 n과 p의 값에 대해
$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon_n$$
이 되는 증가하지 않는 양수열 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n, \cdots$ 을 찾을 수 있다는 것이 필요하고 충분하다.

이어서 10번에서

따름정리. 양 x_n 이 항상
$$x_{n+1} \geq x_n$$
이면, 그것은 극한 c로 향하거나, 주어진 모든 크기 E를 마침내 뛰어 넘는 방식으로 증가한다.

를 쓰고 증명하였다.

11번에서 "변수 x가 극한 c로 향하면, $-x$는 극한 $-c$로 향한다"를 쓰고 증명하고. 12번에서 "변수 x가 0이 아닌 극한 c로 향하면, $\frac{1}{x}$는 극한 $\frac{1}{c}$로 향한다"를 쓰고 증명하였다. 이어서 "x가 극한 0으로 향하면 $\frac{1}{x}$는 아무런 극한으로 향하지 않고, 이때 ∞로 향한다고 말하기로 한다"고 하고, ∞로 향할 때 어느 순간부터 계속해서 양수이면 $+\infty$로 향하고, 계속해서 음수이면 $-\infty$로 향할 것이라고 하였다.

13번에서 "x와 y가 동시에 변하고 각각 값들 $x_1, y_1; \cdots, x_n, y_n, \cdots$ 의 열을 취하는 양이라고 하자. x와 y가 각각 극한 c와 d로 향하면, $x+y$와 xy는 극한 $c+d$와 cd로 향할 것이다"를 쓰고 증명하였다.

14번에서 "앞의 결과들로부터 다음의 정리가 즉각적으로 끌어내진다:

$R(x, y, \cdots)$은 임의의 변수 x, y, $\cdots$ 의 유리식이라 하자. 이 변수들이 동시에 극한 c, d, $\cdots$ 으로 향하면, $R(x, y, \cdots)$은 극한 $R(c, d, \cdots)$으로 향할 것이다." 라고 하고, 연산 중에 나누기가 있으면 나누는 것이 0이 아니어야 한다는 제한을 얘기하였다.

무한소에 대해서는 16번에서 0으로 향하는 모든 변수에 무한소라는 이름을 주고, ∞로 향하는 모든 변수에 무한대란 이름을 준다고 하였다.

함수의 정의는 제 1장 41번에서 x, y, $\cdots$ 이 독립변수이고, 집합 E의 각 점 $(x, y, \cdots)$에 다른 변수 u의 값이 대응되면 이 관계가 u를 집합 E에서 x, y, $\cdots$ 의 함수로 정의한다고 하고, 59–62번에서 연속함수의 정의를 하였다. 여기서는 1판에서 보다 더 나아가서 균등연속을 정의한 것을 볼 수 있다.

연속함수의 정의를 다음과 같이 하였다.

$f(x, y, \cdots)$을 집합 E에서 정의된 n 변수 x, y, $\cdots$ 의 함수라고 하자.

$(a, b, \cdots)$을 E의 정해진 점이라 하자; h, k, $\cdots$ 은 $(a+h, b+k, \cdots)$이 E에 속한다는 조건을 만족시키는 변수다.

양수 ϵ의 모든 값에 대하여

$$|h| < \delta, |k| < \delta, \cdots$$

이 되는 h, k, $\cdots$ 의 모든 값 체계에 대해

$$|f(a+h, b+k, \cdots) - f(a, b, \cdots)| < \epsilon$$

이 되는, 또 다른 양수 δ를 결정할 수 있으면, 우리는 함수 $f(x, y, \cdots)$이 점 $(a, b, \cdots)$ 에서 연속이라고 한다.

이 개념은 더 간단한 형태로 표현될 수 있다:

$$f(a+h, b+h, \cdots) - f(a, b, \cdots)$$

이 h, k, $\cdots$ 과 동시에 0으로 가면 함수 $f(a+h, b+k, \cdots)$은 점 $(a, b, \cdots)$에서 연속이다.

위와 같이 한 점에서 함수의 연속을 정의한 후에, 오늘날 합성함수라고 부르는 것을 함수의 함수 또는 fonction composée 라고 부르며 정의하고, 연속함수들의 합성함수가 연속인 것과 두 연속함수들의 합, 차, 곱이 연속임을 설명하고, f가 $(a, b, \cdots)$에서 연속이고 0이 아닐 때, $1/f$이 이 점에서 연속인 것을 증명과 함께 보였다.

그리고 "함수 $f(x, y, \cdots)$이 집합 E의 각 점에서 연속이면, 집합 E에서 연속이다" 라고 하고, "집합 E가 유계이고 완전하면, 연속이 균등하게 될 것이다" 라고 하며 연속이 균등하다는 용어에 대한 설명과 정의를 다음과 같이 보였다.

φ가 변수 x, y, $\cdots$ 과 h, $\cdots$ 의 함수라고 하자. 집합 E에 속하는 x, y, $\cdots$ 의 각 값에 대해, φ가 h, $\cdots$ 이 주어진 극한 α, $\cdots$ 으로 향할 때 결정되는 극한으로 향한다고 가정하자. 이 극한값들의 집합은 변수 x, y, $\cdots$ 에 대한 어떤 함수 Φ가 될 것이다. 각 양수 ϵ과 E의 각 점 $(x, y, \cdots)$에 대해, 정의에 의해, $|h-\alpha|$, $\cdots$ 이 $< \delta$일 때

$$|\varphi(x, y, \cdots, h, \cdots) - \Phi(x, y, \cdots)| < \epsilon \tag{1}$$

이 되는 양수 δ를 할당할 수 있을 것이다.

더욱이 이 조건을 만족시키는 수 δ가 무한히 많이 존재한다; 왜냐하면, δ의 한 값이 만족시키면, 더 작은 모든 값들이 그것을 만족시키기 때문에 이 수들 δ의 최대값을 Δ로 나타낼 것이다. (모든 δ값이 조건을 만족시키면, Δ는 무한이 될 것이다.)

그래서 우리는 ϵ의 각 값에 대해, E의 각 점에 대응되는 양수 Δ의 집합을 얻을 것이다. 이 수들의 집합은 양수 또는 0인 최소값 γ_1을 가질 것인데, 이것은 ϵ에만 의존하고,

$$|h-a| < \gamma_1$$

이 되는 한 조건 (1)이 E의 모든 점에 대해 만족될 것이다.

γ_1이 > 0이면, ϵ이 아무리 작아도, ϵ의 양수 값에 대해 x, y, $\cdots$ 과 독립적이고, $|h-a|$, $\cdots$ 이 $< \gamma_1$ 일 때, E의 각 점에 대해

$$|\varphi(x, y, \cdots, h, \cdots) - \Phi(x, y, \cdots)| < \epsilon$$

이 되는 다른 양수 γ_1 을 할당할 수 있을 것이다.

이 경우에 우리는 함수 φ가 집합 E에서 극한 Φ로 균등하게 수렴한다고 할 것이다.

이 개념을 집합 E에서 연속인 함수 $f(x, y, \cdots)$에 적용하자. 연속의 정의로부터, h, k, $\cdots$ 이 0으로 갈 때, $f(x+h, y+k, \cdots)$이 $f(x, y, \cdots)$으로 간다. 그리고 ϵ이 무엇이건, x, y, $\cdots$ 과 독립적이고

$$|h| < \gamma_1, |k| < \gamma_1, \cdots$$

일 때, E의 모든 점에 대해 $|f(x+h, y+k, \cdots) - f(x, y, \cdots)| < \epsilon$ 이 되는 양수 γ_1 을 찾을 수 있으면 연속은 균등하게 될 것이다.

이제 목차를 보도록 한다.

제 1부. 미분학

제 1장. 실변수

I. 극한

II. 집합

III. 유계함수 – 적분가능함수

IV. 연속함수

V. 유계변동함수

VI. 일변수함수의 도함수와 적분

VII. 편도함수– 전미분

III. 포락선

IV. 평면곡선

V. 무한소 기하학

VI. 뒤틀린 곡선과 전개가능 곡면

VII. 직선계

VIII. 곡면

IX. 곡선 좌표

제 5장. 대수적 평면 곡선

I. 동차좌표

이제 1894년에 출판된 2권의 목차를 보도록 한다. 2권의 서문에서 Jordan은 1권과 마찬가지로 2판에서 완전하게 수정작업을 하였으며, 발레-푸생 (M. de la Vallée-Poussin), 바이어슈트라스 (M. Weierstrass), 슈바르츠 (M. Schwartz), Halphen, M. Weber, 리만의 영향을 받았음을 밝혔다.

제 2장. 정적분

I. 일반화된 정적분

II. 중적분

III. 정적분의 계산

IV. 기하학적 응용

제 3장. 정적분으로 나타내진 함수

I. 정적분의 미분

II. 오일러 적분

III. 포텐셜

제 4장. 푸리에 급수

I. 푸리에적분

II. 삼각급수

III. 라플라스 함수

제 5장. 복소적분

I. 일가함수의 적분

II. 코시적분

III. 일가함수에 대한 일반적 정리

VI. 제 2종과 제 3종의 주기함수

VII. 매개변수에 대한 도함수

VIII. 나누기

IX. 변환

X. genre 1의 아벨미분의 적분

제 7장. 아벨적분

I. 리만곡면

II. 아벨적분 – 주기성

III. 아벨적분의 변형

IV. 반전

목차의 끝

5 결론

함수의 정의에 대해 아래와 같이 조금씩 변화한 것을 볼 수 있다.

"변하는 양들이 그들 중 하나의 값이 주어지면 다른 모든 것들의 값을 결정할 수 있도록 연결이 되어 있으면, 우리는 이 양들이 독립변수라는 이름을 가질 수 있는 그들 중 하나로 표현된 것으로 보통 생각한다. 그리고 이 독립변수로 표현 된 다른 양들은 우리가 이 변수의 함수라고 부르는 것이다." 라고 코시가 함수를 정의한 것을 따라 Sturm도 비슷하게 함수를 정의하였다. 그러나 Sturm은 조금 더 진전된 아래와 같은 정의를 보였다.

"한 변수의 연속된 값들이 어떤 규칙을 따르면서 다른 변수에 의존할 때 앞의 변수를 뒤의 변수의 함수라고 한다. 둘 중 하나의 값을 변화시키는 것이 다른 것의 결정된 값에 대응될 때, 그 둘 사이에 존재하는 관계가 알려지지 않았거나 식으로 표현되지 않았어도, 함께 변하는 두 양은 하나가 다른 것의 함수라고 볼 수 있다."

Jordan은 1판에서는 "두 변량 x와 y가 어떤 관계에 의해 서로 연결이 될 때, 우리는 둘 중 하나를 독립변수로 임의로 선택할 수 있고, 다른 변수를 그 변수의 함수라고 한다. 좀 더 일반적으로, $m+n$개의 변수 x, y, z, $\cdots$ 이 m개의 관계에 의해 서로 연결이 된다고 하자. 우리는 이 양들 중 n개를 독립변수로 선택할 수 있고, 다른 것들은 함수가 될 것이다." 라고 하였으나 2판에서는 집합을 사용하며 "x, y, $\cdots$ 이 독립변수이고, 집합 E의 각 점 $(x, y, \cdots)$에 다른 변수 u의 값이 대응되면 이 관계가 u를 집합 E에서 x, y, $\cdots$ 의 함수로 정의한다" 고 하였다.

극한에 대하여는 코시가 "한 변수에 연속적으로 부여된 값들이, 원하는 만큼 작게 차이가 나게 끝나도록, 고정된 한 값에 한없이 (indefinitely) 접근할 때, 이 값을 모든 다른 것들의

극한이라고 부른다." 고 하였고, Sturm도 같은 방식으로 정의하였으나, Jordan은 수열의 극한을 사용하며 정의하였다.

연속함수는 코시가 "주어진 두 한계 사이에서 변수 x의 무한히 작은 증분이 항상 함수 자신의 무한히 작은 증분을 만들어 내면, 함수 $f(x)$는 주어진 한계 사이에서 x에 대해 연속이다." 고 하고, Sturm의 책에서는 연속함수의 정의가 보이지 않았다. Jordan은 오늘날의 정의와 똑같이 1판에서 "양 ϵ이 아무리 작더라도, $-\eta$와 $+\eta$사이에 포함된 모든 h 값에 대해

$$f(a+h) - f(a) < \epsilon$$

이 되는, 두 번째 양 η를 항상 결정할 수 있으면, 우리는 함수 $y = f(x)$가 값 $x = a$에 대해 연속이라고 말한다" "함수 $f(x)$가 $x = a$부터 $x = b$까지의 구간에 포함된 모든 x값에 대해 연속이면 $x = a$부터 $x = b$까지 연속이 될 것이다. a를 포함하고 그 안에서 함수가 연속인 구간을 결정할 수 있으면, 함수가 값 a의 근방에서 연속이 될 것이다." 라고 하고 다변수함수의 연속도 마찬가지로 정의하였다. 2판에서는 더 나아가서 균등연속도 정의하였다.

목차를 통해 내용을 살펴보면, Cauchy의 Cours d'Analyse에서는 실함수와 복소함수들의 특정한 성질들과 급수의 수렴, 발산을 중요하게 다루고, Resumé...에서 오늘날 미분적분학에서 다루는 내용들을 포함하였다.

Sturm의 책은 두 권으로 나누어 오늘날 다루는 미분적분학의 내용과 미분방정식과 변분을 다루었다. 특히 곡선과 곡면과 관련한 내용들을 많이 포함한 것을 볼 수 있는데, 이것은 당시 해석학이 기하학과 역학에 중요하게 응용되는 것을 반영한 것이다.

Jordan의 책은 1판에서는 곡선과 곡면에의 응용을 많이 다루며 몇 년 간 가르친 미분적분학의 내용을 다루었으나, 2판 1권에서는 오늘날 해석학개론과 복소함수론의 내용을 많이 포함하며, 급수, 기하학적 응용을 많이 다루고, 2권에서는 많은 특이한 함수들의 적분과 적분의 기하학적 응용뿐만 아니라 푸리에급수와 복소적분, 타원함수, 아벨적분까지 다루며 당시에 발전된 이론을 많이 포함시키며 1판의 내용과 상당히 다른 것을 볼 수 있다.

결론적으로 당시의 해석학교재에는 미분적분학, 미분방정식, 미분기하를 주로 포함하며, 기하학과 역학에의 응용을 많이 다루었고, 필요한 이론적 근거를 밝혔으나, 오늘날 해석학의 틀은 아직 보이지 않는다.

References

1. Umberto Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, New York, 1986.
2. Robert E. Bradley, C. Edward Sandifer, *Cauchy's Cours d'analyse: an annotated translation*, Dordrecht[the Netherlands]; London-New York, Springer, 2009.
3. A L. Cauchy, *Cours d' analyse de l' école royale polytechnique, 1st partie: analyse algebrique*, Paris 1821, In Cauchy [– , series 2, vol.3]

4. A. L. Cauchy, *Résumé des leçons données à l' école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, vol. 1, Paris, 1823. [In Cauchy [– , series 2, vol. 4]
5. A. L. Cauchy, *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, de Bure Frères, 1828, In Cauchy [– , series 2, vol.4]
6. A. L. Cauchy, *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géometrie*, Paris, 1826–1828, In Cauchy [– , series 2, vol.5]
7. *Œuvres complètes d' Augustin Cauchy*, publieés sous la direction scientifique de l' Académie des Sciences, Paris: Gauthier-Villars, series 1, 2; 1882.
8. Ivor Grattan-Guinness, *Convolutions in French mathematics, 1800–1840*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1990.
9. M. C. Jordan, *Cours d' analyse de l' école polytechnique*, Tome Premier, Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1882.
10. M. C. Jordan, *Cours d' analyse de l' école polytechnique*, Deuxìeme édition, Tome Premier, Paris, Gauthier-villars, Imprimeurs-Libraires, 1893.
11. M. C. Jordan, *Cours d' analyse de l' école polytechnique*, Deuxìème édition, Tome Deuxième, Paris, Gauthier-villars, Imprimeusr-Libraires, 1894.
12. M. Sturm, *Cours d' analyse de l' école polytechnique*, Deuxìeme édition, Tome Premier, Paris, Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1863.
13. M. Sturm, *Cours d' analyse de l' école polytechnique*, Deuxìeme édition, Tome Second, Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1864.
14. http://archive.org