

이동질량을 고려한 단순지지된 교량의 진동수 및 공진현상 분석

The Effect of Moving Mass on Resonance Phenomenon and Natural Frequency of a Simply Supported Beam

민 동 주* · 정 명 락* · 박 성 민* · 김 문 영†

Dong-Ju Min, Myung-Rag Jung, Sung-Min Park and Moon-Young Kim

(Received September 9, 2015 ; Revised December 14, 2015 ; Accepted January 14, 2016)

Key Words : Moving Mass(이동 질량), Sprung Mass(스프링 질량), Natural Frequency(고유 진동수), Resonance(공진), Simple Beam(단순 보)

ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate the influence of moving mass on the vibration characteristics and the dynamic response of the simply supported beam. The three types of the moving mass(moving load, unsprung mass, and sprung mass) are applied to the vehicle-bridge interaction analysis. The numerical analyses are then conducted to evaluate the effect of the mass, spring and damper properties of the moving mass on natural frequencies and dynamic responses of the simply supported beam. Particularly, in the case of the sprung mass, variations of the natural frequency of simply supported beam are explored depending on the position of the moving mass and the frequency ratio of the moving mass and the beam. Finally the parametric studies on the resonance phenomena are performed with changing mass, spring and damper parameters through the dynamic interaction analyses.

1. 서 론

열차-교량의 상호작용 해석은 이동하중에 따른 교량의 진동특성 및 동적 충격계수의 증가, 그리고 교량의 사용성 및 열차의 주행 안정성 등을 파악하는 분야로 많은 연구가 수행된 바 있다. Willis⁽¹⁾와 Stokes⁽²⁾에 의해 처음으로 관련 연구가 시작되면서, 특히 Fryba⁽³⁾가 일정한 속도와 크기의 하중 또는 질량을 단순교에 적용하면서 활발한 연구가 진행되어 오고 있다. 이후 Wang 등⁽⁴⁾은 모드 중첩 해석을 통하여 교량-열차의 상호작용 해석을 수행한 바 있다.

또한 Yang과 Lin⁽⁵⁾은 기존의 유한요소 형식에서 효율적인 해석을 강화한 dynamic condensation technique를 적용하여 좀 더 현실적인 차량과 교량의 상호작용 문제의 해석에 효과적으로 접근하였다. 더 나아가 Yang 등⁽⁶⁾은 일정한 간격을 가진 운행하는 이동하중(Fig. 1 참고)이 교량 위를 지나갈 때 발생하는 진동에 대해 교량의 일반해를 유도하고, 교량의 공진 및 공진소멸 현상에 대해 연구한 바 있으며, Huang 등⁽⁷⁾은 유한요소 해석이 아닌 동적강성 매트릭스(dynamic stiffness matrix)를 사용하여 상호작용 해석을 실시하였다. Yau⁽⁸⁾는 유한요소를 이용한 고속열차-연속보의 상호작용 해석을 실시하여

† Corresponding Author ; Member, Sungkyunkwan University
E-mail : kmye@skku.edu

* Sungkyunkwan University

A part of this paper was presented at the KSNVE 2015 Annual Autumn Conference

‡ Recommended by Editor Hyung-Jo Jung

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

충격계수에 대한 연구를 수행하였으며, Xia 등⁽⁹⁾은 열차-교량 시스템의 공진현상에 대해 이론적으로 접근하여 동일한 간격의 연속하는 교량을 주행하는 열차의 공진현상에 대한 연구를 수행한 바 있다. 또한 Liu 등⁽¹⁰⁾은 이동질량과 교량의 질량비, 고유 진동수비, 감쇠비 등에 대한 매개변수연구를 통하여 교량의 충격계수 및 공진현상에 미치는 영향에 대해 연구하였다. 또한 유진석 등⁽¹¹⁾은 단순보에 작용하는 등분포 접선종동력과 이동질량이 단순보의 횡진동 변위에 미치는 영향을 수치해석적으로 연구한 바 있다.

일반적으로 열차-교량 상호작용 해석은 수치 해석에 앞서 고유치 해석을 통하여 교량의 진동특성(고유 진동수 및 모드형상)을 파악하고, 이를 통하여 교량의 동적거동특성을 예측한다. 특히 교량의 고유 진동수는 교량에 작용하는 하중의 타격주기 사이와의 관계에 의해 공진현상을 파악하는데 필수적인 인자로서 정확한 교량의 진동특성을 파악하는 것은 매우 중요하다고 말할 수 있다. 하지만 대부분의 연구에서 교량에 재하된 이동질량이나 스프링, 혹은 감쇠 효과 등을 고려하지 않은 상태에서 교량만의 질량 및 강성행렬을 이용한 고유치 해석을 통해 진동특성을 파악한다. 하지만 이는 Li 등⁽¹²⁾에 의해 제시된 바와 같이 이동질량의 크기 및 스프링 상수가 교량의 진동특성을 변화시키기 때문에 이동질량이 공진속도 부근에서의 주행 시 부정확한 교량의 동적응답을 도출할 가능성을 가지고 있다. 이에 Ülker-Kaustell과 Karoumi 등⁽¹³⁾은 실 교량인 The Skidtråsk bridge를 대상으로 교량의 비선형 강성 및 감쇠항을 고려하여 교량의 고유 진동수 변화 및 공진현상에 미치는 영향에 대해 연구한바 있으며, Mao와 Lu⁽¹⁴⁾은 교량 위에 재하된 이동질량의 효과를 고려하여 교량의 고유 진동수의 변화 및 공진속도 등에 대한 연구를 실시하였다.

하지만 앞선 연구들은 이동질량이 교량을 통과하는 동안에 교량의 고유 진동수의 변화에 미치는 요인들에 대한 정확한 분석이 이루어지지 않았으며, 변화된 고유 진동수가 교량의 동적 응답에 미치는 영향에 대한 평가가 부족한 것으로 판단된다. 그러므로 이 논문에서는 이동질량의 크기, 스프링상수, 댐퍼 등이 교량의 진동특성 및 동적응답에 미치는 영향에 대한 평가를 하고자 하며, 이동질량의 크기

와 스프링 및 댐퍼 상수의 영향을 정확히 파악하고자 이동질량의 형태를 이동하중 및 이동질량(unsprung mass and sprung mass)으로 구분하여 각각의 상호 작용 시스템에 대한 고유치 해석과 수치 해석을 실시한다. 또한 교량 및 이동질량의 무차원화된 운동방정식을 통하여 특정교량이 아닌 좀 더 일반화된 단순보 형태의 모든 교량에 적용할 수 있는 방법을 제시하며, 수치예제를 통하여 단순 지지된 교량의 고유 진동수 변화와 이에 따른 공진유발속도 대역의 변화에 대해 분석한다.

2. 이동질량-교량 상호작용을 고려한 운동방정식

연행하는 이동질량을 Fig. 1과 같이 스프링과 댐퍼가 연결된 sprung mass로 가정하고 이동질량이 재하되는 교량은 단순지지된 형태로 가정한다면, 이동질량-교량의 상호작용을 고려한 교량 및 이동질량의 운동방정식은 식 (1)과 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{m}\ddot{w} + c\dot{w} + EIw'''' = \sum_{k=1}^N \left\{ m_v g + k_v (u_v^k - w^k) + c_v (\dot{u}_v^k - \dot{w}^k) \right\} \times \delta[x - V(t - t_k)] \{ H(t - t_k) - H(t - t_k - t_l) \} \tag{1}$$

$$m_v \ddot{u}_v^k + k_v (u_v^k - w^k) + c_v (\dot{u}_v^k - \dot{w}^k) = 0 \tag{2}$$

$$\text{where } t_k = \frac{(k-1)d_v}{V}, \quad t_l = \frac{L_b}{V}$$

여기서 \bar{m} 는 교량의 단위길이당 질량, EI 는 교량의 휨 강성, c 는 교량의 감쇠, w 는 교량의 수직방향에 대한 자유도, N 은 이동질량의 개수를 의미하며, V 는 이동질량 속도, $H(t - t_k) - H(t - t_k - t_l)$ 는 단위함

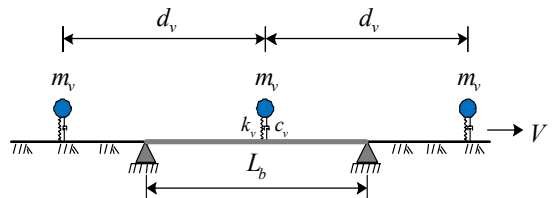


Fig. 1 Simply supported beam subjected to sprung mass

수로써 k 번째 이동질량이 교량 위에 재하된 상태를 판별하는 항이다. 또한 t_k 는 k 번째 이동질량이 교량 도입부에 도착하는 시간을 의미한다. 그리고 m_v, k_v, c_v 는 각각 sprung mass의 질량 크기, 스프링, 댐퍼 상수를 나타내며, u_v^k 는 k 번째 이동질량의 수직방향에 대한 자유도를 나타낸다. 그리고 w_k, \dot{w}_k 는 k 번째 이동질량 위치에서 교량의 처짐과 속도를 의미한다. 이때 수식의 간략화를 위하여 식(3)과 같은 무차원 변수들을 도입하면, 무차원화된 교량과 이동질량의 운동방정식을 식(4), (5)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 w^* &= \frac{wEI}{L_b^3 m_v g}, x^* = \frac{x}{L_b}, t^* = \frac{t\sqrt{EI/\bar{m}}}{L_b^2}, \dot{w}^* = \frac{\dot{w}\sqrt{EI\bar{m}}}{L_b m_v g} \\
 \dot{w}^* &= \frac{\dot{w}L_b\bar{m}}{m_v g}, V^* = \frac{VL_b}{\sqrt{EI/\bar{m}}}, t_k^* = \frac{t_k\sqrt{EI/\bar{m}}}{L_b^2}, d_v^* = \frac{d_v}{L_b} \\
 t_l^* &= \frac{t_l\sqrt{EI/\bar{m}}}{L_b^2}, k_v^* = \frac{k_v L_b^3}{EI}, c_v^* = \frac{c_v L_b}{\sqrt{EI\bar{m}}}, m_v^* = \frac{m_v}{\bar{m}L_b} \\
 u_v^{k*} &= \frac{u_v^k EI}{L_b^3 m_v g}, \dot{u}_v^{k*} = \frac{\dot{u}_v^k \sqrt{EI\bar{m}}}{L_b m_v g}, \ddot{u}_v^{k*} = \frac{\ddot{u}_v^k L_b \bar{m}}{m_v g}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 &\ddot{w}^* + \gamma^* \dot{w}^* + w^{*''''} \\
 &= \sum_{k=1}^N \left\{ 1 + k_v^* (u_v^{k*} - w^{k*}) + c_v^* (\dot{u}_v^{k*} - \dot{w}^{k*}) \right\} \\
 &\quad \times \delta \left[x^* - V^* (t^* - t_k^*) \right] \Gamma^k
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$m_v^* \ddot{u}_v^{k*} + k_v^* (u_v^{k*} - w^{k*}) + c_v^* (\dot{u}_v^{k*} - \dot{w}^{k*}) = 0 \tag{5}$$

$$\text{where } \Gamma^k = H(t^* - t_k^*) - H(t^* - t_k^* - t_l^*), \gamma^* = \frac{cL_b^2}{\sqrt{\bar{m}EI}}$$

다음으로 교량의 운동정식을 모드중첩법을 이용한 일반화된 운동방정식으로 표현하기 위하여 고유진동수 및 모드형상을 식(6)과 같이 정의한다. 또한 무차원화된 교량의 변위를 일반화된 좌표와 모드형상의 곱으로 표현할 수 있으며, 고려하는 모드개수 N_m 만큼 중첩하여 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_n^* = (n\pi)^2 = \omega_n \frac{L_b^2}{\sqrt{EI/\bar{m}}}, \phi_n^*(x^*) = \sin(n\pi x^*) \tag{6}$$

$$w^* = \sum_n \phi_n^*(x^*) q_n^*(t^*) \tag{7}$$

그리고 식(1)에 식(7)를 대입한 후 양변에 ϕ_m^* 곱하고 모드형상의 직교성을 이용하여 정리하면 식(8)과 같이 일반화된 교량의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\ddot{q}_n^* + 2\xi_n \omega_n^* \dot{q}_n^* + \omega_n^{*2} q_n^* \\
 &= 2 \sum_{k=1}^N S_n^{k*} \left\{ 1 + k_v^* (u_v^{k*} - w^{k*}) + c_v^* (\dot{u}_v^{k*} - \dot{w}^{k*}) \right\} \Gamma^k
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{where } S_n^{k*} = \sin(n\pi V^* (t^* - t_k^*)), \gamma^* = 2\xi_n \omega_n^*$$

한편 $w_k^*, \dot{w}_k^*, \ddot{w}_k^*$ 는 k 번째 이동질량 위치에서 무차원화된 교량의 처짐, 속도와 가속도를 나타내며, 모드중첩의 형태로 표현하면 식(9), (10), (11)과 같다. 이때 $\dot{w}_k^*, \ddot{w}_k^*$ 에서 coriolis force와 centrifugal force와 관련된 항은 생략한다(Yang 등⁽⁶⁾).

$$w^{k*} = \sum_{m=1}^{N_m} \phi_m^*(V^*(t^* - t_k^*)) q_m^*(t^*) = \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} q_m^*(t^*) \tag{9}$$

$$\dot{w}^{k*} = \sum_{m=1}^{N_m} V \phi_m^{*'}(V^*(t^* - t_k^*)) q_m^*(t^*) = \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} \dot{q}_m^*(t^*) \tag{10}$$

$$\ddot{w}^{k*} \approx \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} \ddot{q}_m^*(t^*) \tag{11}$$

그러므로 무차원화된 교량의 운동방정식 및 이동질량의 운동방정식은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned}
 &\ddot{q}_n^* + 2\xi_n \omega_n^* \dot{q}_n^* + \omega_n^{*2} q_n^* \\
 &= 2 \sum_{k=1}^N S_n^{k*} \left[1 + k_v^* \left(u_v^{k*} - \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} q_m^*(t^*) \right) \right. \\
 &\quad \left. + c_v^* \left(\dot{u}_v^{k*} - \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} \dot{q}_m^*(t^*) \right) \right] \Gamma^k
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 &m_v^* \ddot{u}_v^{k*} + k_v^* \left(u_v^{k*} - \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} q_m^*(t^*) \Gamma^k \right) \\
 &\quad + c_v^* \left(\dot{u}_v^{k*} - \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} \dot{q}_m^*(t^*) \Gamma^k \right) = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

여기서 교량과 이동질량의 자유도에 관련된 항을 좌변으로 넘기면 교량-이동질량 상호작용을 고려한

coupled 행렬운동방정식을 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$M_t \ddot{X}_t + C_t \dot{X}_t + K_t X_t = F_t \tag{14}$$

만약 이동질량을 Fig. 2와 같이 자중만큼의 일정한 하중으로 가정한다면, 즉 이동하중의 형태로 가정한다면 식 (13)은 생략되고 식 (12)는 다음 식 (15)와 같이 간략화 된다.

$$\ddot{q}_n^* + 2\xi_n \omega_n^* \dot{q}_n^* + \omega_n^{*2} q_n^* = 2 \sum_{k=1}^N S_n^{k*} \Gamma^k \tag{15}$$

그러므로 질량, 감쇠, 그리고 강성행렬과 하중벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} M_t &= \text{diag}[1 \ 1 \ \dots \ 1], K_t = \text{diag}[\omega_1^{*2} \ \omega_2^{*2} \ \dots \ \omega_{N_m}^{*2}] \\ C_t &= 2 \times \text{diag}[\xi_1 \omega_1^* \ \xi_2 \omega_2^* \ \dots \ \xi_{N_m} \omega_{N_m}^*] \\ F_t &= 2 \left\{ \sum_{k=1}^N S_1^{k*} \Gamma^k \ \dots \ \sum_{k=1}^N S_{N_m}^{k*} \Gamma^k \right\}^T \end{aligned} \tag{16}$$

한편 Fig. 3과 같이 이동질량을 unsprung mass 형태로 가정한다면, 교량에 작용하는 하중은 이동질량의 자중과 이동질량의 관성력까지 고려하여 식 (12)의 운동방정식을 식 (17)과 같이 표현할 수 있다.

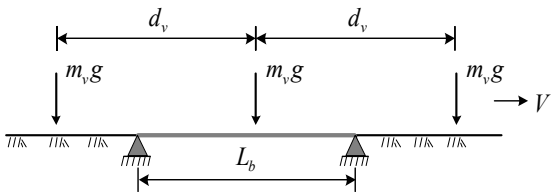


Fig. 2 Simply supported beam subjected to moving load

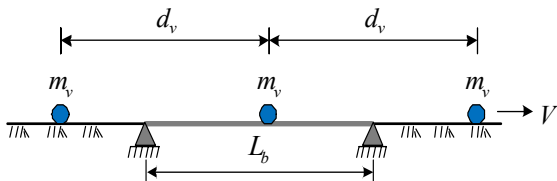


Fig. 3 Simply supported beam subjected to unsprung mass

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n^* + 2\xi_n \omega_n^* \dot{q}_n^* + \omega_n^{*2} q_n^* \\ = 2 \sum_{k=1}^N S_n^{k*} \left[1 - m_v^* \sum_{m=1}^{N_m} S_m^{k*} \dot{q}_m^*(t^*) \right] \Gamma^k \end{aligned} \tag{17}$$

또한 앞선 이동하중모델과 마찬가지로 식 (13)은 생략되고, 식 (17)을 바탕으로 질량, 감쇠, 그리고 강성행렬과 하중벡터를 구성할 수 있다. 이때 식 (16)의 행렬에서 질량 행렬만 식 (18)과 같이 변하게 되며 나머지는 동일하다.

$$\begin{aligned} M_t &= \text{diag}[1 \ 1 \ \dots \ 1] \\ &+ 2m_v^* \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N (S_1^{k*})^2 \Gamma^k & \sum_{k=1}^N S_1^{k*} S_2^{k*} \Gamma^k & \dots & \sum_{k=1}^N S_1^{k*} S_{N_m}^{k*} \Gamma^k \\ \sum_{k=1}^N S_2^{k*} S_1^{k*} \Gamma^k & \sum_{k=1}^N (S_2^{k*})^2 \Gamma^k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sum_{k=1}^N S_{N_m}^{k*} S_1^{k*} \Gamma^k & & & \sum_{k=1}^N (S_{N_m}^{k*})^2 \Gamma^k \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

3. 교량의 고유 진동수

일반적으로 교량의 고유치 해석에 있어서 감쇠효과가 고려되지 않은 상태에서 고유 진동수를 산출하게 되며, 식 (19)와 같이 질량과 강성행렬만을 이용하여 고유치 문제를 풀게 된다.

$$|K_t - \omega^2 M_t| = 0 \tag{19}$$

감쇠효과를 고려한 고유 진동수를 산정할 경우 식 (14)의 우변을 0으로 두고 독립변수 Y_t ($\equiv \dot{X}_t$)를 도입하면, 식 (14)는 2개의 1계 연립 상미분방정식으로 변환할 수 있다.

$$M_t \dot{X}_t = M_t Y_t \tag{20a}$$

$$M_t \dot{Y}_t + C_t \dot{X}_t = -K_t X_t \tag{20b}$$

위 식은 식 (21)과 같이 행렬방정식으로 표현가능하며, 식 (22)와 같이 고유치 문제를 풀 수 있다. 이때 고유 진동수 ω 는 복소수 형태로 나타나게 되며,

허수부가 감쇠 고유 진동수를 의미한다.

$$\begin{bmatrix} M_t & \mathbf{0} \\ C_t & M_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_t \\ \dot{Y}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & M_t \\ -K_t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_t \\ Y_t \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{0} & M_t \\ -K_t & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \bar{\omega}^* \begin{bmatrix} M_t & \mathbf{0} \\ C_t & M_t \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (22)$$

4. 해석예제

2장에서 살펴본 바와 같이 교량 위에 재하되는 이동질량의 형태에 따라 교량의 질량 및 강성행렬이 변하게 되며, 특히 sprung mass의 경우 이동질량의 운동방정식까지 추가 되어 시스템 행렬의 형태뿐만 아니라 크기까지 변하게 된다. 그러므로 앞서 설명된 3가지 유형 중 이동질량(sprung mass, unsprung mass)이 단순지지된 교량 위를 지나갈 때 교량의 고유진동수 변화와 수치해석결과를 비교하여 이동질량의 형태에 따른 영향을 분석한다.

4.1 이동질량이 교량 고유 진동수에 미치는 영향

먼저 unsprung mass와 sprung mass형태의 이동질량에 대해 감쇠효과를 고려하지 않은($\xi_n = 0, c_v = 0$)상태에서 단순지지된 교량의 고유 진동수 변화를 살펴본다. 2장에서 살펴본 바와 같이 교량 및 이동질량의 운동방정식을 무차원화하여 표현하였고, 특히 교량의 제원을 $EI = L_b = \bar{m} = 1$ 로 가정함으로써 특정교량이 아닌 단순보 형태의 모든 교량에 적용할 수 있다. 이때 단순지지된 교량의 무차원화된 고유 진동수는 식 (6)에 제시되었으며, 대표적으로 첫 번째와 두 번째 고유 진동수는 Table 1과 같다. 한편 이동질량이 교량의 고유 진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 Table 2와 같이 무차원화된 이동질량의 제원을 기본값으로 선정하여 이동질량 위치에 따른 고유 진동수의 변화를 살펴본다. 또한 Li 등⁽¹²⁾에 의해 제시된 간략화된 교량의 고유 진동수를 무차원화하여 식⁽²³⁾과 같이 나타낼 수 있으며, 이를 이용하여 이 논문에서 제시된 결과와 비교한다.

$$\bar{\omega}_n^{*2} = \frac{\omega_n^{*2} + 2k_v^* \sum_{k=1}^N (S_n^{k*})^2 \Gamma^k}{1 + 2m_v^* \sum_{k=1}^N (S_n^{k*})^2 \Gamma^k} \quad (23)$$

Fig. 4는 3개의 등간격으로 운행하는 이동질량이 (unsprung mass과 sprung mass) 교량 위를 지날 때 첫 번째 이동질량의 위치에 따른 교량의 첫 번째 고유 진동수의 변화를 나타내고 있다. 그림에서 보듯이 Li 등⁽¹²⁾에 의해 제시된 간략해석법과 이 논문에 제시된 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있다. Unsprung mass의 경우 질량이 재하됨에 따라 교량의 고유 진

Table 1 Natural frequency of dimensionless simple beam

Mode no.	Natural frequency
1	9.87
2	39.5

Table 2 Dimensionless parameter for moving mass

Dimensionless parameter	Value
Moving mass m_v^*	0.05
Spring constant k_v^*	0.5
Damper constant c_v^*	0.1
Interval of moving load d_v^*	0.8
Number of moving mass N	3

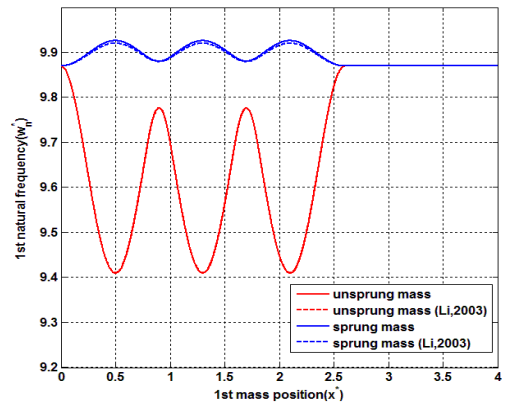


Fig. 4 1st natural frequency of beam subjected to moving mass

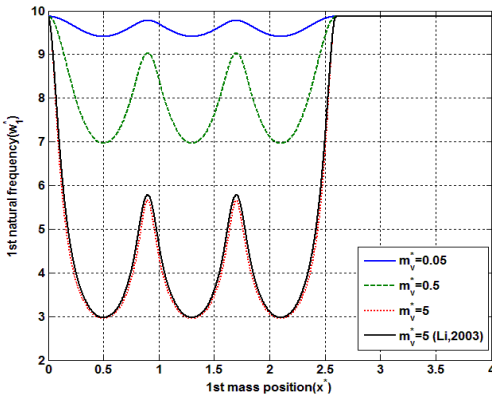


Fig. 5 1st natural frequency of beam subjected to unsprung mass according to 3 types of mass

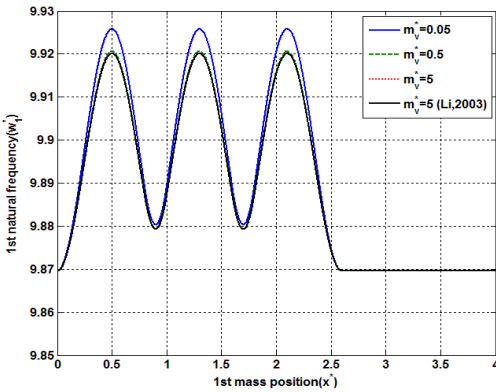


Fig. 6 1st natural frequency of beam subjected to sprung mass according to 3 types of mass

동수를 감소시키는 경향이 있으나, sprung mass의 경우 교량의 고유 진동수를 증가시키는 경향이 있다. 이는 unsprung mass의 경우 강성행렬의 변화 없이 질량행렬의 값이 커짐에 따라 고유 진동수가 감소한 것이며, sprung mass의 경우 반대로 교량의 질량행렬의 변화 없이 강성행렬의 값이 커짐에 따라 고유 진동수가 증가한 것으로 판단된다. 또한 위 결과와 식 (18)로부터 unsprung mass의 경우 이동질량의 크기가 커질수록 고유 진동수가 더욱 작아질 것이지만, sprung mass의 경우 식 (14)로부터 이동질량의 크기가 변함에 따라 큰 변화가 없을 것이고 스프링 상수의 값이 변함에 따라 고유 진동수의 변화가 발생할 것임을 유추할 수 있다.

Fig. 5는 unsprung mass가 교량 위를 지나갈 때 무차원화된 이동질량의 크기 증가에 따른 교량의 고

유 진동수 변화를 나타내며, Fig. 6은 sprung mass가 교량 위를 지나갈 때 무차원화된 이동질량의 크기 증가에 따른 교량의 고유 진동수 변화를 나타내고 있다. Unsprung mass의 경우 Fig. 5에서 보듯이 이동질량의 크기가 커질수록 고유 진동수가 작아지는 것을 확인할 수 있으며, Fig. 6의 sprung mass 경우 예상된 바와 같이 이동질량의 크기가 커짐에 따라 고유 진동수의 변화가 거의 없음을 알 수 있다.

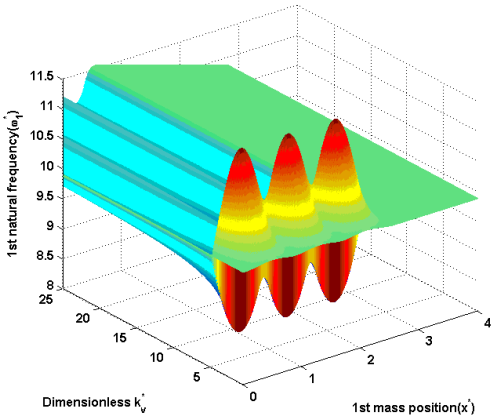
Fig. 7과 8은 sprung mass의 스프링상수 변화 및 이동질량 위치에 따른 교량의 첫 번째와 두 번째 고유 진동수 변화를 나타내고 있으며, Fig. 9는 스프링 상수 변화에 따른 교량의 고유 진동수 최댓값 및 최솟값의 변화를 보여주고 있다. 여기서 주목할만한 점은 첫 번째 고유 진동수의 경우(Fig. 7과 9(a) 참고) 무차원화된 스프링 상수가 5이전까지는 증가하는 경향을 보이다가 그 이후 감소하는 현상을 보이며, 두 번째 고유 진동수의 경우(Fig. 8과 9(b) 참고) 스프링 상수가 78이전까지는 증가하는 경향을 보이다가 그 이후 감소하는 현상을 보인다. 이는 Li 등⁽¹²⁾에 의해 제시된 간략해석법과는 상이한 결과로서, 이에 대한 설명은 sprung mass의 고유 진동수와 교량의 고유 진동수간의 상관관계에 의해 설명될 수 있다. 식 (14)의 sprung mass시스템에 대한 질량과 강성행렬에서 1개의 이동질량과 1개의 진동모드를 선택한다면 질량 및 강성행렬은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$M_t = \begin{bmatrix} m_v^* \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

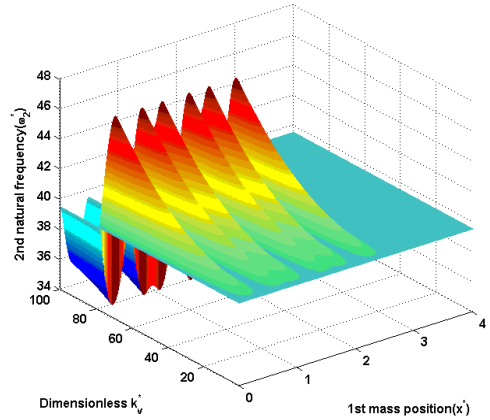
$$K_t = \begin{bmatrix} k_v^* & -k_v^* S_1^* \Gamma^1 \\ -2k_v^* S_1^* \Gamma^1 & \omega_1^{*2} + 2k_v^* (S_1^*)^2 \Gamma^1 \end{bmatrix}$$

이때 이동질량이 교량 위에 위치하고 있다고 가정하고($\Gamma^1 = 1$), 위 시스템의 고유치 문제를 풀게 되면 식 (25)과 같이 고유치가 계산된다.

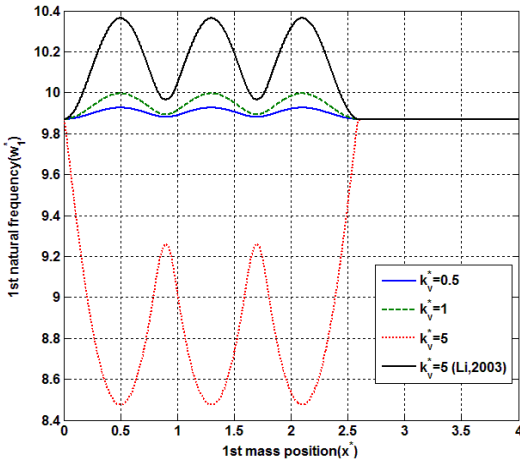
$$\bar{\omega}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pm \frac{k_v^* + 2k_v^* (s_1^*)^2 + \omega_1^{*2}}{m_v^*} \pm \sqrt{4k_v^* m_v^* \omega_1^{*2} + (-k_v^* - 2k_v^* m_v^* (s_1^*)^2 - m_v^* \omega_1^2)^2}}{m_v^*} \tag{25}$$



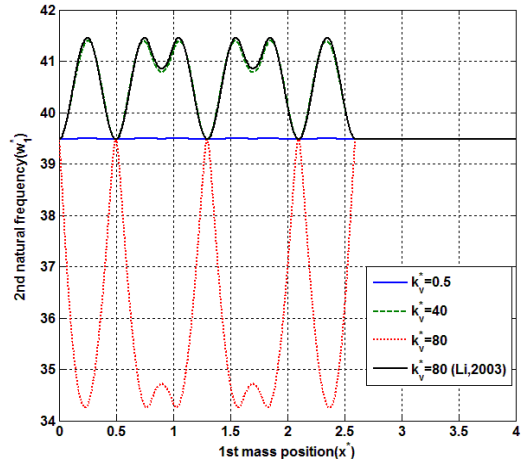
(a) Natural frequency according to stiffness and position



(a) Natural frequency according to stiffness and position



(b) Natural frequency according to 3 types of stiffness



(b) Natural frequency according to 3 types of stiffness

Fig. 7 1st natural frequency of beam subjected to sprung mass with changing stiffness

Fig. 8 2nd natural frequency of beam subjected to sprung mass with changing stiffness

그리고 식 (25)에서 이동질량이 교량 도입부에 있다고 가정한다면 ($\lim_{r \rightarrow 0} s_1^* = 0$), 다음과 같이 단순화된 형태로 나타낼 수 있다.

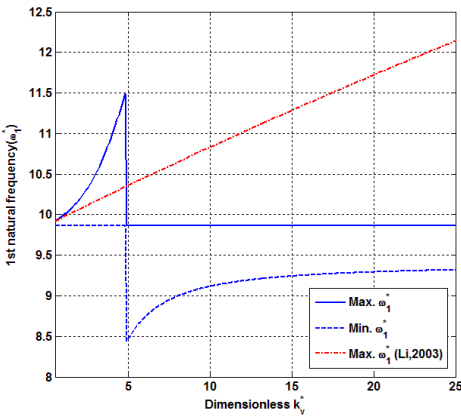
$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\omega}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_v^{*2} + \omega_1^{*2} \pm \sqrt{(\omega_v^{*2} - \omega_1^{*2})^2}} \quad (26)$$

여기서 $\omega_v^* = \sqrt{k_v^* / m_v^*}$ 는 이동질량의 고유 진동수를 의미한다. 이때 교량의 고유 진동수가 이동질량의 고유 진동수보다 크다면, ±부호가 양(+)일 때 교량의 고유 진동수를, 음(-)일 때 이동질량의 고유 진

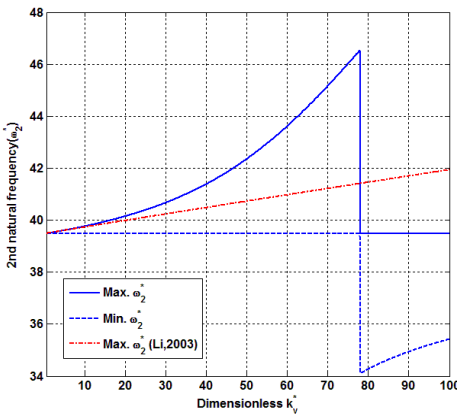
동수를 나타내게 된다. 한편 반대의 경우 교량의 고유 진동수가 이동질량의 고유 진동수보다 작다면, ±부호가 양(+)일 때 이동질량의 고유 진동수를, 음(-)일 때 교량의 고유 진동수를 나타내게 된다. 즉, 교량의 고유 진동수가 재하된 이동질량(sprung mass)의 고유 진동수보다 클 경우 교량의 고유 진동수가 커지는 경향이 있지만, 이동질량의 고유 진동수보다 작은 경우에는 작아지는 특성이 있다. 그러므로 Figs. 7~9에서 관찰된 교량의 고유 진동수가 작아지는 현상은 이동질량의 스프링상수가 커짐에 따라 이동질량의 고유 진동수가 교량의 고유 진동

수 보다 커지게 되며 ($k_v^* = 4.87 \rightarrow \omega_v^* = 9.87$ 또는 $k_v^* = 77.93 \rightarrow \omega_v^* = 39.5$), 식 (25)에 의해 교량의 고유 진동수는 작아지게 된다.

또한 sprung mass의 스프링 상수 값이 매우 작다고 가정하면 이는 이동하중의 형태로 간주할 수 있으며, 반대로 스프링 상수의 값이 매우 큰 값을 가진다면 교량 위를 붙어서 이동하는 unsprung mass의 형태로 간주할 수 있다. 이는 Fig. 9에서도 관찰되는데 스프링 상수가 0에 가까워질수록 교량의 고유 진동수 변화가 거의 없으며, 스프링 상수가 커지면서 하나의 값에 수렴하게 되는데 이 값은 Fig. 4의 unsprung mass가 재하된 경우에 해당하는 최소 고유 진동수에 수렴하게 된다.



(a) 1st natural frequency



(b) 2nd natural frequency

Fig. 9 Maximum value of natural frequency of beam subjected to sprung mass with changing stiffness

4.2 감쇠효과가 고려된 교량의 고유 진동수

일반적으로 알려진 감쇠 고유 진동수는 식 (28)과 같이 교량의 감쇠비를 고려하여 구할 수 있으며, 교량의 감쇠비를 0.05라는 가정하에 교량의 고유 진동수의 변화는 약 0.2% 미만으로 그 영향이 매우 작음을 알 수 있다.

$$\omega_{dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} \tag{28}$$

하지만 2장에서 언급된 바와 같이 sprung mass의 damper까지 고려된 경우 이동질량이 교량에 재하됨에 따라 감쇠행렬이 변화하게 되며, 이는 감쇠 고유 진동수에 직접적인 영향을 미칠 것으로 판단된다. 그러므로 여기서는 교량의 감쇠효과뿐만 아니라 sprung mass의 damper까지 고려하여 이동질량이 재하됨에 따른 교량의 고유 진동수 변화를 살펴본다. 이를 위하여 교량의 감쇠비는 0.02로 가정하며, Table 2에 제시된 이동질량에 대한 물성치를 적용하여 3장에서 언급된 감쇠효과를 고려한 교량의 고유 진동수를 식 (22)를 이용하여 구한다.

Fig. 10은 sprung mass의 damper 상수 변화 및 이동질량 위치에 따른 교량의 첫 번째 고유 진동수 변화를 나타내고 있다. 그림에서 보듯이 스프링상수가 0.5임에도 불구하고 sprung mass에서 관찰되던 고유 진동수가 증가하는 현상은 관찰되지 않았으며, 교량의 고유 진동수의 변화는 최대 약 4.5%로 식 (28)에 의해 단순 계산되는 감쇠 고유 진동수보다는

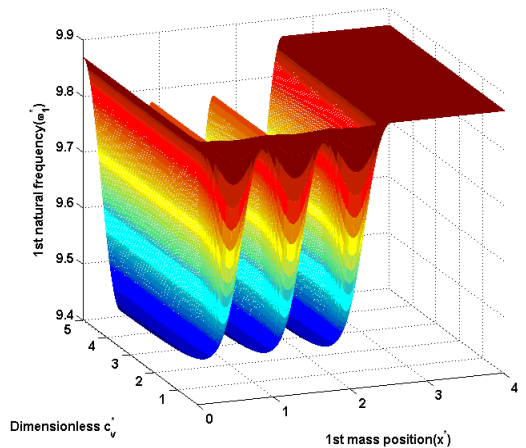


Fig. 10 1st natural frequency of beam subjected to sprung mass with changing damper

크게 증가하였지만 다른 물성치에 비해 교량의 고유 진동수를 변화시키는 폭이 크지 않음을 알 수 있다.

4.3 이동질량 유형별 공진유발속도

이번 절에서는 앞서 설명된 이동질량 재하 시 변화되는 교량의 고유 진동수가 교량의 동적응답, 특히 공진현상에 미치는 영향을 알아보기 위해 수치해석을 실시한다. Table 2와 동일한 조건하에 이동질량의 뎀퍼는 고려하지 않은 상태에서 교량의 감쇠비는 0.02, 그리고 공진의 효과를 극대화하기 위하여 10개의 연행이동질량이 교량을 통과하는 것으로 가정하며, 무차원화된 이동질량의 속도를 0.01~1.5로 0.01단위로 증가시키면서 단순지지된 교량 중앙에서의 처짐 및 가속도 응답을 조사한다. 또한 정해석 결과와 동해석결과의 처짐 최대값을 통하여 식 (29)을 이용하여 충격계수를 조사한다(Yang과 Lin⁽⁵⁾).

$$I = \frac{MAX(w_d^*) - MAX(w_s^*)}{MAX(w_s^*)} \tag{29}$$

여기서 w_d^* 는 동해석 결과 교량 중앙에서의 무차원화된 처짐 최대값을, w_s^* 는 정해석 결과 교량 중앙에서의 처짐 최대값을 의미한다. 이 해석제와 같이 집중하중이 작용하는 경우, 앞서 언급되었듯이 무차원화하여 교량의 응답들을 표현하였기 때문에 정해석에 의한 교량 중앙에서의 처짐 최대값은 식 (30)과 같이 나타낼 수 있다.

$$MAX(w_s^*) = \frac{PL_b}{48EI} = \frac{1}{48} \tag{30}$$

Fig. 11은 이동하중, unsprung mass, sprung mass에 대한 시간이력해석 결과 교량 중앙에서의 최대 처짐으로 계산되는 충격계수를 나타내고 있으며, Fig. 12는 교량 중앙에서의 가속도 최대값을 나타내고 있다. 그림에서 공진유발속도인 $1.26(V_c^* = f_1^* \times d_v^*)$ 를 기준으로 unsprung mass의 경우 왼쪽으로 치우친 경향이 있으며, sprung mass의 경우 미세하게 오른쪽으로 치우친 것을 관찰할 수 있다. 앞서 언급되었듯이 unsprung mass의 경우 교량의 고유 진동수를 감소시키는 특징이 있으며, 이에 따라 공진현상이 이동하중보다 더 낮은 대역에서 발생하는 것을 알

수 있다. 또한 sprung mass의 경우 Table 2의 물성치를 기반으로 이동질량의 고유 진동수가 교량의 고유 진동수보다 작으므로($\omega_1^* > \omega_v^*$) 교량의 고유 진동수를 증가시키는 특성이 있으며, 이에 따라 공진현상이 이동하중보다 더 높은 대역에서 발생하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 13은 unsprung mass의 경우 이동질량의 크기를 점차 증가시키며 이동질량 속도별 충격계수의 변화를 나타내고 있는데, 그림에서 보듯이 이동질량의 크기가 커질수록 공진유발속도가 더 낮은 대역에서 발생하는 것을 관찰할 수 있다. 이는 4.1절에서 설명된 바와 같이 unsprung mass의

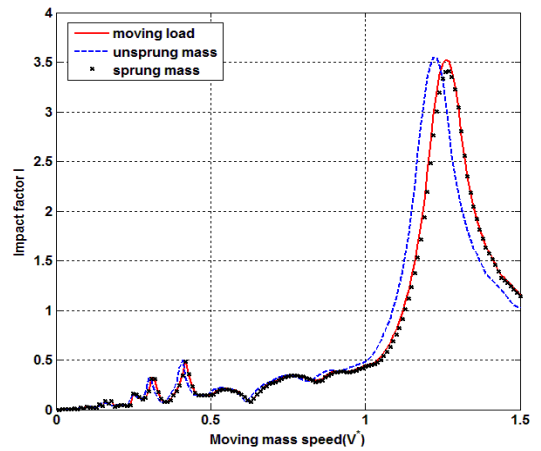


Fig. 11 Impact factor at center of the beam from displacement

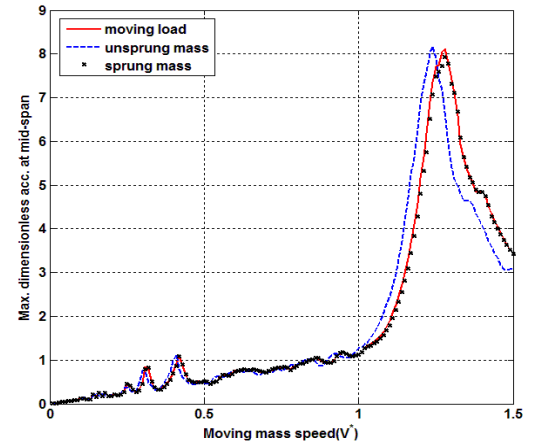


Fig. 12 Maximum value of acceleration at center of the beam

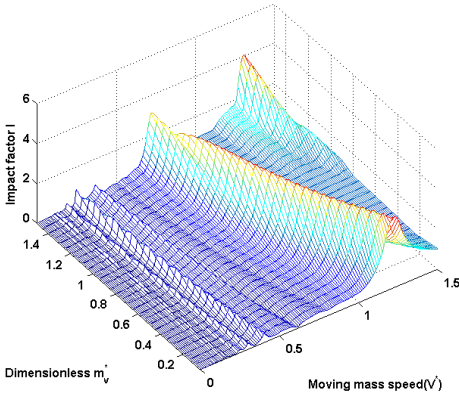
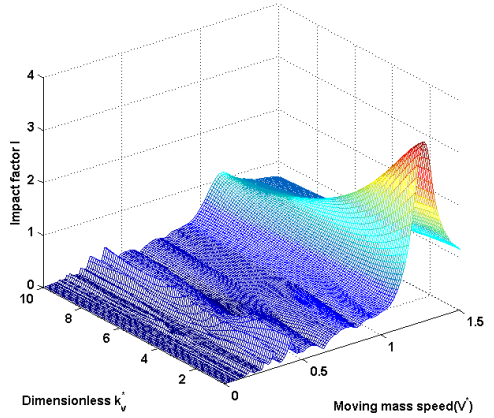


Fig. 13 Impact factor at center of the beam subjected to unsprung mass with changing mass



(a) 3D view

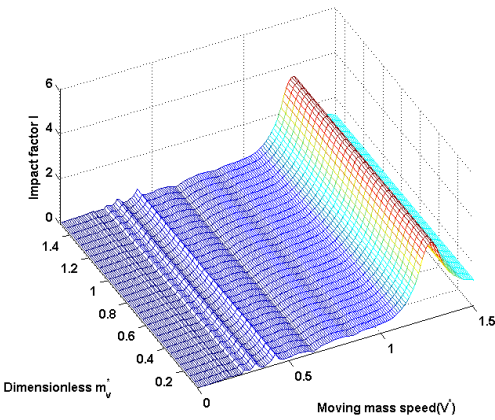
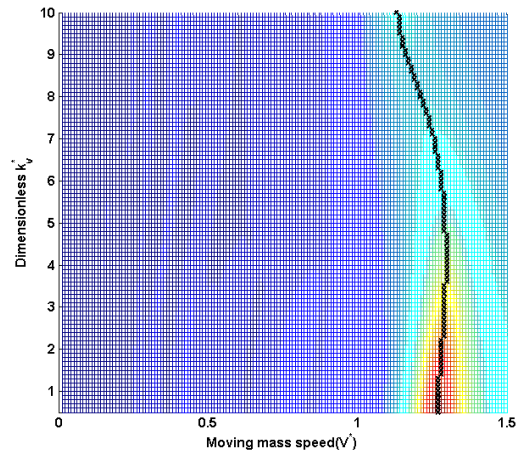


Fig. 14 Impact factor at center of the beam subjected to sprung mass with changing mass



(b) $V^* - k_v^*$ plane view

Fig. 15 Impact factor at center of the beam subjected to sprung mass with changing stiffness

경우 이동질량에 의해 교량의 고유 진동수가 낮아지기 때문이며, 이동질량의 크기가 클수록 더 큰 폭으로 고유 진동수가 낮아져 더 낮은 속도에서 공진이 발생하는 것을 관찰할 수 있다.

Fig. 14는 sprung mass의 경우로 이동질량의 크기를 점차 증가시키며 이동질량 속도별 충격계수의 변화를 나타내고 있는데, 4.1절에서 설명된 바와 같이 sprung mass의 경우 이동질량의 크기가 교량의 고유 진동수에 미치는 영향은 미미하기 때문에 공진유발속도의 변화가 거의 보이지 않는 것을 알 수 있다. 하지만 스프링상수의 크기를 증가시킨 경우 Fig. 15와 같이 공진유발속도가 이동질량의 고유 진동수와 교량의 고유 진동수간의 상관관계에 의해 변하고

있는 것을 관찰할 수 있다. 즉, 이동질량의 고유 진동수가 교량의 고유 진동수 보다 작은 경우 스프링 상수값이 증가함에 따라 교량의 고유 진동수가 증가하면서 공진유발속도 또한 증가하지만, 이동질량의 고유 진동수가 교량의 고유 진동수 보다 큰 경우 교량의 고유 진동수가 감소하면서 공진현상이 더 낮은 속도대역에서 발생한 것을 알 수 있다.

5. 결론

이 연구에서는 이동질량이 교량의 진동특성 및 동적 응답에 미치는 영향을 파악하는데 주 목적이 있으며, 3가지 유형의 이동질량에 대해 교량-이동질

량 시스템에 대한 고유치 해석을 실시하여 각 유형별 교량의 고유 진동수 및 공진에 미치는 영향을 파악하였다. 또한 수치예제를 통하여 변화되는 고유 진동수가 교량의 공진현상에 미치는 영향을 분석하였으며, 이를 통하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

(1) Unsprung mass의 경우 교량의 mass matrix를 증가시키는 경향이 있으며, 이로부터 교량의 고유 진동수가 감소하는 특징을 갖는다. 또한 이동질량의 크기가 커질수록 교량의 고유 진동수는 감소하는 특성이 있으며, 이에 따라 공진현상이 이동하중보다 더 낮은 대역에서 발생하는 것을 관찰할 수 있다.

(2) 교량의 감쇠비뿐만 아니라 sprung mass의 damper상수 변화가 교량의 고유 진동수에 미치는 영향에 대해 살펴보았으나 다른 물성치에 비해 교량의 고유 진동수를 변화시키는 폭이 크지 않음을 알 수 있다.

(3) Sprung mass의 경우 교량의 고유 진동수는 이동질량의 고유 진동수와 교량의 고유 진동수간의 상관관계에 의해 결정되며, 이동질량의 크기가 교량의 고유 진동수에 미치는 영향은 미미하였다. 또한 이동질량의 스프링 상수가 증가함에 따라 교량의 고유 진동수가 증가하는 경향이 있으나, 특정 조건 ($\omega_n < \omega_c$)을 만족하게 된다면 이동질량의 고유 진동수보다 작은 차수의 교량의 고유 진동수는 오히려 감소하는 특징이 관찰되었다. 수치예제를 통하여 이동질량의 크기가 교량의 고유 진동수에 미치는 영향은 미미하기 때문에 공진유발속도의 변화가 거의 보이지 않았다. 또한 스프링상수의 크기가 증가함에 따라 이동질량의 고유 진동수가 교량의 고유 진동수보다 작은 경우 교량의 고유 진동수가 증가하면서 공진유발속도 또한 증가하지만, 이동질량의 고유 진동수가 교량의 고유 진동수 보다 큰 경우 교량의 고유 진동수가 감소하면서 공진현상이 더 낮은 속도대역에서 발생하였다.

References

(1) Willis, R., 1849, Report of Commissioners Appointed to Inquire the Application of Iron to Railway Structures, Appendix B., His Majesty's Stationary Office,

London, England.

(2) Stokes, G. G., 1849, Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges, Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. 8, No. 5, pp. 707~735.

(3) Fryba, L., 1972, Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Noorhoff Interatonal Publishing. Groningen. The Netherlands.

(4) Wang, T. L., Huang, D. and Shahawy, M., 1992, Dynamic Response of Multigirder Bridges, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 8, pp. 2222~2238.

(5) Yang, Y. B. and Lin, B. H., 1995, Vehicle-bridge Interaction Analysis by Dynamic Condensation Method, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 121, No. 11, pp. 1636~1643.

(6) Yang, Y. B., Yau, J. D. and Hsu, L. C., 1997, Vibration of Simple Beams due to Trains Moving at High Speeds, Engineering Structures, Vol. 19, No. 11, pp. 936~944.

(7) Huang, C. S., Tseng, Y. P. and Hung, C. L., 2000, An Accurate Solution for the Responses of Circular Curved Beams Subjected to a Moving Load, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 48, No. 12, pp. 1723~1740.

(8) Yau, J. D., 2001, Resonance of Continuous Bridges due to High Speed Trains, Journal of Marine Science and Technology, Vol. 9, No. 1, pp. 14~20.

(9) Xia, H., Zhang, N. and Guo, W. W., 2006, Analysis of Resonance Mechanism and Conditions of Train-bridge System, Journal of Sound and Vibration, Vol. 297, No. 3-5, pp. 810~822.

(10) Liu, K., Roeck, G. and Lombaert, G., 2009, The Effect of Dynamic Train-bridge Interaction on the Bridge Response During a Train Passage, Journal of Sound and Vibration, Vol. 325, No. 1-2, pp. 240~251.

(11) Yu, J. S., Yoon, H. I. and Choi, C. S., 2003, Influence of Two Moving Mass on Dynamic Behavior of a Simply Supported Pipe Conveying Fluid Flow, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vo. 13, No. 8, pp. 605~611.

(12) Li, J., Su, M. and Fan, L., 2003, Natural Frequency of Railway Girder Bridges under Vehicle Loads, J. Bridge Eng, Vol. 8, No. 4, pp. 199~203.

(13) Ülker-Kaustell, M. and Karoumi, R., 2012,

Influence of Non-linear Stiffness and Damping on the Train-bridge Resonance of a Simply Supported Railway Bridge, *Engineering Structures*, Vol. 41, pp. 350~355.

(14) Mao, L. and Lu, Y., 2013, Critical Speed and Resonance Criteria of Railway Bridge Response to Moving Trains, *J. Bridge Eng.*, Vol. 18, No. 2, pp. 131~141.



Moon-Young Kim received his B.S. degree and Ph.D. from Seoul National University. He has studied static buckling and vibrational behaviors of thin-walled structures for over 20 years. Recently he has been concentrating on non-linear analysis of cable-supported bridges and dy-

namic interaction analysis of bridge and Maglev train.



Dong-Ju Min received a B.S. degree in Dept. of Civil and Environmental Engineering from Sungkyunkwan Univ. in 2010. He is currently in an integrated M.S. and Ph.D. candidate at the same department. His main research

topic is dynamic interaction analysis of bridge-KTX train and guideway-Maglev train.