

경쟁적 위험하에서의 신뢰성 분석*

백재욱†

한국방송통신대학교 정보통계학과

Reliability Analysis under the Competing Risks*

Jaiwook Baik†

Department of Information Statistics, Korea National Open University

Purpose: The purpose of this study is to point out that the Kaplan-Meier method is not valid to calculate the survival probability or failure probability (risk) in the presence of competing risks and to introduce more valid method of cumulative incidence function.

Methods: Survival analysis methods have been widely used in biostatistics division. However the same methods have not been utilized in reliability division. Especially competing risks cases, where several causes of failure occur and the occurrence of one event precludes the occurrence of the other events, are scattered in reliability field. But they are not noticed in the realm of reliability expertism or they are analysed in the wrong way. Specifically Kaplan-Meier method which assumes that the censoring times and failure times are independent is used to calculate the probability of failure in the presence of competing risks, thereby overestimating the real probability of failure. Hence, cumulative incidence function is introduced and sample competing risks data are analysed using cumulative incidence function and some graphs. Finally comparison of cumulative incidence functions and regression type analysis are mentioned briefly.

Results: Cumulative incidence function is used to calculate the survival probability or failure probability (risk) in the presence of competing risks and some useful graphs depicting the failure trend over the lifetime are introduced.

Conclusion: This paper shows that Kaplan-Meier method is not appropriate for the evaluation of survival or failure over the course of lifetime. In stead, cumulative incidence function is shown to be useful. Some graphs using the cumulative incidence functions are also shown to be informative.

Keywords: Competing Risks, Kaplan-Meier Estimator, Cumulative Incidence Function, Risk

1. 서론

생존분석의 방법론들은 지난 수십 년에 걸쳐 의학 분야의 연구에서 폭넓게 사용되어 왔다. 통상적인 생존 데이터는 어떤 사건이 발생할 때까지 걸리는 시간

들로 이루어진다. 이와 같이 어떤 사건이 발생할 때까지의 시간은 여러 가지 형태의 함수로 설명할 수 있다. 이들 중 가장 폭넓게 쓰이는 것이 생존함수(survival function) 또는 생존확률(survival probability) $S(t)$ 로서, 이는 어느 개체의 수명이 적어도 t 시간이 될 가능

* 이 논문은 2014년 한국방송통신대학교 학술연구비지원을 받아 작성된 것임

† 교신저자 jbaik@knou.ac.kr

2016년 3월 3일 접수; 2016년 3월 15일 수정본 접수; 2016년 3월 20일 게재 확정.

성 즉, $P(T > t)$ 을 나타낸다. 생존분석에 많이 쓰이는 또 다른 함수로 위험률(hazard rate) $h(t)$ 는 시간 t 에서의 사건 발생률(rate of occurrence)을 나타낸다 [1, 2].

신뢰성분석은 생존분석과 똑같은 의미를 가지고 있지만 신뢰성분석이 공학 분야에서 제품의 수명을 다루는 것이라면 생존분석은 의학 분야에서 사람의 수명을 다루는 것이라고 할 수 있다. 따라서 생존분석에서 생존함수 $S(t)$ 나 위험률 $h(t)$ 은 신뢰성분석에서 신뢰도(또는 신뢰성함수) $R(t)$ 와 고장률(failure rate) $\lambda(t)$ 와 똑같은 개념이다.

생존분석에서 어떤 개체에 대한 수명이 관측되지 않고 중도 중단(censoring)되는 경우가 많은데, 이런 중도 중단이 어떤 개체인 상관없이 독립적으로 일어난다고 하는 가정하에 앞의 생존함수(신뢰도)와 위험률(고장률)은 각각 Kaplan-Meier 추정치와 Nelson-Aslen 추정치로 추정된다.

생존분석 또는 신뢰성분석에서는 개체에 대한 시험 결과 연구기간이내에 개체가 사망 또는 고장에 이를 수 있지만 많은 경우 연구기간 내에 개체가 사망 또는 고장에 이르지 못할 수 있다. 그 이유는 때로는 일정한 시간동안만 연구가 진행되어 그 기간 안에 모든 개체가 사망 또는 고장에 이르지 못할 수 있고 때로는 실험대상인 개체에 피치 못할 사정이 생겨 연구기간 중간에 관측을 중단해야 하는 상황에 있을 수 있다. 이런 경우 생길 수 있는 데이터를 중도 중단(censored) 데이터라고 한다.

의학 분야에서 어떤 사건(예를 들어 사망)이 발생할 때 그 원인이 특정한 것(예를 들어 폐암) 하나일 수 있으나 때로는 여러 가지(예를 들어 폐암, 위암, 대장암 등)일 수 있으며, 이들 여러 가지 원인들 중 어떤 하나가 문제가 되어 결국 실험의 대상인 개체가 사망이라는 사건에 이르게 된다. 마찬가지로 공학 분야에서 어떤 제품이 고장 날 때 그 원인이 균열(crack)일 수 있으나 때로는 균열이외에 파괴(fracture), 마모(wear) 등이 발생할 수 있으며, 이런 여러 가지 원인들 중 어떤 특정한 원인 하나로 인하여 제품이 고장에 이를 수 있다. 이와 같이 여러 개의 고장원인이 있지만 그들 중 특정한 하나가 원인이 되어 개체가 사망 또는 고장에 이르게 되는 것을 경쟁적 위험(competing risks)이라고 한다.

어떤 개체가 경쟁적 위험하에 있는 경우 특정한 하

나의 고장원인에 의한 생존확률을 보기 위해 나머지 고장원인들을 무시하여 우측 중도 중단(right censored)으로 보고, 기존의 Kaplan-Meier 방법을 적용하여 생존확률(신뢰도)을 구하고, 1에서 생존확률을 뺀 값으로 Risk(Risk는 생존확률과 달리 일정한 시간까지 개체가 사망 또는 고장 날 확률을 말함)를 구하기도 한다[3]. 하지만 여러 고장원인에 의한 고장시간이 서로 독립적이지 않고 고장시간과 중도 중단시간 간 서로 독립적이지 않을 때에는 앞서와 같은 방식으로 생존확률(신뢰도) 또는 Risk를 구하면 그 추정치에 편향(bias)이 생기게 된다[4]. 따라서 경쟁위험하에서는 신뢰도 또는 Risk를 추정하기 위한 적절한 방법이 필요하다[5, 6]. 이에 본 연구에서는 제2장에서 경쟁적 위험하에서 Risk를 추정하는데 Kaplan-Meier 방법을 적용하면 실제보다 과대하게 추정된다는 것을 보이며, 제3장에서는 경쟁적 위험하에서 Risk를 추정할 때에는 cumulative incidence function을 어떻게 구하여 신뢰성분석을 하는지 설명하고자 한다. 이어 제4장에서는 경쟁적 위험하에서 cumulative incidence function의 비교라든지 공변수가 있는 경우 회귀분석은 어떻게 적용할 것인지 논한다.

2. Kaplan-Meier 방법과 이 방법의 문제점

경쟁적 위험은 연구의 대상인 어떤 개체가 여러 가지 사망원인(고장원인)에 노출되고, 이들 여러 가지 원인들 중에서 하나의 원인으로 인하여 사망(고장)에 이르게 되는 것이다. 여러 가지의 원인이 반복적으로 발생할 수도 있는데, 본 연구에서는 여러 가지 원인들 중에서 가장 먼저 발생하는 원인으로 인해 개체가 사망(고장)에 이르게 되는 경우에 대해 살펴본다.

경쟁적 위험하에서의 데이터는 고장시간 T , 고장 원인 D 및 공변수 벡터 Z 로 구성된다. 여기서 T 는 연속적인 양(+)의 값을 취하는 확률변수이고, $D = \{1, 2, \dots, m\}$ 로 m 은 고장원인 m 개임을 나타낸다. 경쟁적 위험의 경우 예전에는 다변량분석 기법을 많이 사용했다. 이 모델에서 각 개체는 각각의 고장원인에 대해 잠재적인 고장시간(potential failure time)이 있는 것으로 가정하고, 이들 여러 가지 고장원인들 중에서 가장 빠른 고장원인에 의한 고장시간만 관측하고, 나머지 고장원인들에 의한 고장시간은 관측하지 못하고 숨어

있는(latent) 것으로 본다[7]. 이 모형에서는 m개의 서로 다른 고장원인에 의한 고장시간 T_1, \dots, T_m 을 다음과 같이 결합생존함수

$$S(t_1, \dots, t_m) = P(T_1 > t_1, \dots, T_m > t_m)$$

의 형태로 나타낸다. 이 경우 주변위험함수(marginal hazard function)는

$$h_j(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T_j < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t},$$

$$j = 1, \dots, m$$

와 같으며, 주변생존함수(marginal survival function)는 다음과 같다.

$$S_j(t) = P(T_j > t) = S(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$$

그러나 추가적인 가정이 없이는 결합생존함수나 주변생존함수가 주어진 데이터로는 식별되지(identifiable) 않으므로[2, 8, 9], 이런 ‘잠재고장시간(latent failure time)’ 접근법은 실용성이 떨어진다. 이에 후술하는 다른 방법들이 사용된다.

이에 첫 번째 방법은 경쟁적 위험하에서도 다음의 Kaplan-Meier 방법에 의해 생존확률 또는 Risk를 구하는 것이다. Kaplan-Meier 방법은 신뢰성 분석에서도 비모수적인 방법으로 생존확률 즉, 신뢰도를 구하는데 사용된 바 있다[10]. Kaplan-Meier 방법에 의한 생존확률 $S(t)$ 는 n_j 와 m_j 를 t_j 라는 고장시점(사실 t_j 는 순서통계량인 $t_{(j)}$ 임)에서의 risk set과 고장 개수라고 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{S}(t_j) = \hat{S}(t_{j-1}) \times P(T > T_j | T \geq t_j)$$

$$= \prod_{i=1}^j P(T > t_i | T \geq t_i)$$

$$= \frac{n_1 - m_1}{n_1} \times \frac{n_2 - m_2}{n_2} \times \dots \times \frac{n_j - m_j}{n_j}$$

이제 경쟁적 위험하에서도 Kaplan-Meier 방법을 적용하는 경우 Risk가 과대하게 추정된다는 것을 간단한 예를 들어 설명한다. <Table 1>은 100개의 제품에

Table 1 Life test results from 100 products

life (unit: month)	number of failures	cause of failure
3	99	crack
5	1	wear

Table 2 Kaplan–Meier survival probability due to wear $S_{wear}(t_j)$

j	t_j	n_j	m_j	q_j	$S_{wear}(t_j)$
0	0	100	0	0	1
1	3	100	0	99	1
2	5	1	1	-	0

대해 수명시험 결과를 나타낸다. 3시간이 지난 시점에 99개가 균열로 고장이 났고, 5시간이 지난 시점에서 1개의 제품이 마모로 고장이 났다.

이 경우 cause-specific hazard의 측면에서 마모를 염두에 둔 생존확률은 <Table 2>에서와 같이 구해진다(여기에서 q_j 는 t_j 시점에 중도 중단된 제품수임). 특히 $t_j = 5$ 인 시점에서 risk set에 있는 개체는 1개이고, 그 개체가 $t_j = 5$ 에서 고장 나므로 $S(5) = S(4) \times P(T > 5 | T \geq 5) = 1 \times 0 = 0$ 이다. 따라서 5달까지 마모에 의해 제품이 고장 날 확률(Risk) $Risk_{\text{마}}(T \leq 5) = 1 - 0 = 1$ 이다. 하지만 <Table 1>의 데이터를 다시 한 번 살펴보면 제품이 마모로 인해 고장 날 가능성은 단지 $\frac{1}{100} = 0.01$ 에 불과하다.

문제는 3번째 달에 균열로 99개의 제품들이 고장이 났는데, 이런 사건이 일어나지 않았다면 이들 중에서 5번째 달에 몇 개나 마모로 고장이 났을까 하는 것이다. 하지만 이에 대한 답은 현재의 데이터로서는 구할 수 없다. 데이터의 독립성 가정이 얼마나 타당성이 있는지 간접적으로 알아보기 위해 <Table 2>의 데이터에 대해 민감도분석을 실시해보기로 한다.

첫 번째 민감도분석에서는 3번째 달에 99개의 제품이 균열로 고장 나지 않았다면 5번째 달에 하나의 제품이 마모로 고장 났으므로 이들 99개의 제품도 5번째 달에 마모로 고장이 났을 것이라고 하는 다소 비관적인 가정을 한다. 이때 <Table 3>과 같은 결과를 얻으며, 이로부터 첫 번째 민감도분석에서는 5번째 달에 생존확률이 0이라는 것을 알 수 있다(따라서 5번째 달까지 고장 날 확률

Table 3 Sensitivity analysis A (Assuming that the 99 products that had been censored at 3 months due to crack failed because of wear)

j	t_j	n_j	m_j	q_j	$S_{wear}(t_j)$
0	0	100	0	0	1
1	3	100	0	99	1
2	5	1	1	-	0

Table 4 Sensitivity analysis B (Assuming that if the 99 products, which had been censored at 3 months due to crack, did not fail because of crack they would not have failed because of wear)

j	t_j	n_j	m_j	q_j	$S_{wear}(t_j)$
0	0	100	0	0	1
1	3	100	0	0	1
2	5	100	1	99	0.99

즉, $Risk_{cr}(P(T \leq 5)) = 1 - 0 = 1$ 임). 그런데 이 결과는 Kaplan-Meier 방법에서 고장시간과 중도 중단시간이 독립적이라고 가정하고 나온 결과와 일치한다.

두 번째 민감도분석으로 3번째 달에 99개의 제품이 균열로 고장 나지 않았더라면 5번째 달에 마모로도 고장 나지 않았을 것이라는 다소 낙관적인 가정을 한다. 그러면 <Table 4>와 같은 결과를 얻을 수 있으며, 두 번째 민감도분석으로는 5번째 달의 생존확률이 99%가 되므로, 따라서 5번째 달까지 고장 날 가능성인 $Risk_{cr}(P(T \leq 5)) = 1 - 0.99 = 0.01$ 임을 알 수 있다.

<Table 1>의 원 데이터를 보면 99개의 제품이 3번째 달에 균열로 고장 났지만 적어도 마모로 고장 난 것은 아니므로 마모의 측면에서는 이들 99개의 제품이 3번째 달에 관측이 중도 중단된 것으로 볼 수 있으며 100개의 제품 중에서 마모로 확실히 고장 난 것은 1개이므로 5번째 달에 Risk는 $1/100 = 0.01$ 로 볼 수 있을 것이다. 이와 같이 관심의 대상인 고장원인 이외의 다른 고장원인에 의한 고장은 중도 중단된 것으로 보지만 독립성 가정은 하지 않고 Risk를 구할 수 있는데, 이런 것을 marginal probability라고 부른다. 다음 장의 cumulative incidence function(CIF)은 이런 marginal probability의 개념을 활용한다.

앞에서 본 바와 같이 사망시간이 중도 중단시간과

서로 독립적이라고 하는 가정이 위배되는 경우 Kaplan-Meier 추정치에 편이가 생기는데, 이런 가정이 위배되는지 여부는 경쟁적 위험하에서 모형을 세우는 데에도 매우 중요하다. 통상적으로 경쟁적 위험하에서도 독립성을 가정하는데, 이는 기존의 사망시간과 중도 중단시간과의 독립성을 말하기도 하지만 경쟁적 위험하에서의 각 고장원인에 의한 고장시간 간의 독립성을 말하기도 한다. 후자의 경우 특정한 고장원인에 노출되어 개체가 고장이 발생할 위험성이 경쟁적 위험하에 있는 또 다른 고장원인에 노출된 개체와 노출되지 않은 개체 간 차이가 없다고 가정하는 것이다. 분명 경쟁적 위험하에서는 어떤 개체가 특정한 고장원인에 노출되어 고장이 발생한 경우 다른 여러 가지 고장원인에 의해서는 고장이 관측되지 못할 것이다. 기존의 Kaplan-Meier 방법에서는 주관심 대상인 고장원인이외의 다른 고장원인에 의한 고장시간은 중도 중단시간으로 처리하다가 나중에 주관심 대상인 고장원인에 의해 고장 나면 고장시간으로 처리하므로 Risk를 과대추정하게 되고, 역으로 생존확률(신뢰도)을 과소추정하게 된다[4, 11]. 이에 경쟁적 위험하에서는 다음 절에서 설명하는 cumulative incidence function을 구하여 Risk를 구하는 것이 더욱 적절하다.

3. 경쟁적 위험하에서 Cumulative Incidence Function 구하기

경쟁적 위험하에서 많이 쓰이는 모델로는 cause-specific hazard function과 cumulative incidence function이 있다. 이 두 함수는 고장시간과 고장원인인 (T, D) 의 결합분포를 완전히 명시한다[9]. 첫 번째 모형에서 j 번째의 고장원인에 대한 cause-specific hazard function은 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_j(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T_j < t + \Delta t, D = j | T \geq t)}{\Delta t},$$

$j = 1, \dots, m$

이 함수는 경쟁적 위험하에서 j 번째 고장원인에 의해 개체가 고장이 일어날 위험률(고장률)을 나타낸다. 이 경우 cause-specific cumulative hazard는 다음과 같이 정의된다.

$$A_j(t) = \int_0^t \lambda_j(u) du$$

하지만 cause-specific cumulative hazard를 이용한 $S_j(t) = \exp(-A_j(t))$ 를 경쟁적 위험하에서의 사건에 따른 고장시간과 중도 중단시간이 서로 독립적이지 않으면 주변생존함수로 해석해서는 안 된다(독립성 가정이 들어맞는다면 주변분포 $S_j(t)$ 는 경쟁적 위험하에서 여타 다른 사건들이 일어나지 않을 때의 상황을 모델링하는 것이다). 전체 위험률(total hazard rate) $\lambda(t)$ 와 전체 생존함수(overall survival function)는 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T_j < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^m \lambda_j(t)$$

$$S(t) = P(T > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=1}^m \int_0^t \lambda_j(u) du\right) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m A_j(t)\right)$$

전체 생존함수는 시간 t 까지 어떤 고장원인에 의해서도 개체가 고장 나지 않을 확률을 나타낸다.

고장원인 j 의 cumulative incidence function $CIF_j(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$CIF_j(t) = P(T \leq t, D=j), j=1, \dots, m$$

이는 개체가 경쟁적 위험하에서 고장원인 j 에 의해서 시간 t 또는 그 이전에 고장 날 확률을 나타내는 것으로 다음과 같이 cause-specific hazard와 전체생존함수를 이용한 식으로 표현된다

$$CIF_j(t) = \int_0^t \lambda_j(u) S(u) du$$

이 함수는 종종 crude cumulative incidence function 또는 subdistribution function이라고 불린다. 왜냐하면 시간을 무한대로 보내 cumulative incidence function을 구해도 $CIF_j(\infty) = P(D=j)$ 이 1 이하가 되어 정상적인 분포함수가 되지 않기 때문이다 통상적인 Kaplan-Meier 방법에 의해 시간 t 또는 그 이전에 고장 날 확률, 즉 Risk는

$$1 - S_j(t) = \int_0^t \lambda_j(u) S_j(u) du$$

와 같이 정의되는데, 이는 앞의 cumulative incidence function $CIF_j(t)$ 와 그 모양은 비슷해도 $S(t) \leq S_j(t)$ 이고 따라서

$$CIF_j(t) \leq 1 - S_j(t)$$

이므로 경쟁적 위험하에서 Kaplan-Meier 방법에 의해 구하는 Risk는 cumulative incidence function에 의해 구하는 Risk보다 더 크다는 것을 알 수 있다.

앞의 CIF 방법은 cause-specific hazard function을 활용하므로 관심 대상이외의 고장원인에 의한 고장은 중도 중단된 것으로 처리하지만 Kaplan-Meier 방법에서와 같이 고장시간과 중도 중단시간 간 독립성가정을 하지 않고 marginal probability를 구하는 것이다. 다음은 구체적인 신뢰성시험 결과 나온 수명 데이터에 대해 CIF를 구하는 과정이다.

1. 관심대상인 고장원인 c 로 인한 고장시간을 크기 순서대로 나열하여 t_j 라고 하는 경우 각 고장시간 t_j 에서의 위험률(고장률)을 구한다.

$$\hat{h}_c(t_j) = \frac{m_{cj}}{n_j}$$

여기에서 m_{cj} 는 고장시간 t_j 에서 고장원인 c 로 인해 고장 난 제품의 개수이며 n_j 는 고장시간 t_j 에서의 risk set이다.

2. 제품이 시간 t_{j-1} 까지 어떤 고장원인으로도 고장 나지 않을 전반적인 생존확률(overall survival probability) $S(t_{j-1})$ 을 구한다. 이는 모든 고장원인으로부터 자유로운 생존확률을 일컫는다.
3. 시점 t_j 의 바로 이전까지 어떤 고장원인으로도 고장 나지 않았는데, 이제 시점 t_j 에서 고장원인 c 로 인해 고장이 일어날 고장발생가능성(incidence of failing)을 다음과 같이 구한다.

$$\hat{I}_c(t_j) = \hat{S}(t_{j-1}) \times \hat{h}_c(t_j)$$

4. 원점부터 시점 t_j 까지 고장원인 c 로 인해 고장이 발생할 가능성인 CIF를 다음과 같이 구한다.

$$CIF_c(t_j) = \sum_{j=1}^j \hat{I}_c(t_j) = \sum_{j=1}^j \hat{S}(t_{j-1}) \times \hat{h}_c(t_j)$$

참고: Kaplan-Meier 방법에 의한 Risk는 $\sum_{j=1}^i \hat{S}_c(t_{j-1}) \times \hat{h}_c(t_j)$ 로 $\hat{S}_c(t_{j-1}) \geq \hat{S}(t_{j-1})$ 이므로 Kaplan-Meier 방법에 의한 Risk가 CIF 방법에 의한 Risk보다 더 크다는 것을 알 수 있다. 하지만 고장원인이 단 하나만 있는 경우에는 Kaplan-Meier 방법에 의해 Risk를 구하나 CIF 방법에 의해 Risk를 구하나 똑같은 결과를 얻게 된다.

(예제) 어떤 제품은 균열 또는 마모로 고장이 날 수 있다고 하자. 10개의 제품에 대한 수명시험 결과 다음과 같은 결과를 얻었다고 하자. 여기에서 예를 들어 10(균)은 제품이 균열로 인해 10시간이 지난 시점에

서 고장 난 것을 의미하고, 40(마)는 제품이 마모로 인해 40시간이 지난 시점에서 고장 난 것을 의미한다. 20+는 제품이 20시간 지난 시점에서 관측이 중도 중단(censoring)된 것을 의미한다.

10(균), 20+, 35(균), 40(마), 50+, 55(균), 70(마), 71(마), 80(균), 90+

이때 Kaplan-Meier 방법을 적용하여 Risk를 구한 결과와 CIF 방법을 적용하여 Risk를 구한 결과가 <Table 5>와 <Table 6>에서와 같다.

이로부터 Kaplan-Meier 방법에 의해 구한 Risk가 CIF 방법에 의해 구한 Risk보다 더 크다는 것을 알 수 있다. 구체적인 예로, 고장원인이 균열인 경우 관측시간이 끝나는 시점인 90시간에 Kaplan-Meier 방법에

Table 5 Risk computation based on kaplan-meier method

subject	follow-up time	event	# at risk set	crack #	censor #	crack free survival	$Risk_{crack}^{KM}$
1	10	crack	10	1	0	$1 \times (9/10) = 0.9$	$0 + 1 \times (1/10) = 0.1$
2	20+	censor	9	0	1	$0.9 \times (9/9) = 0.9$	$0.1 + 0.9 \times (0/9) = 0.1$
3	35	crack	8	1	0	$0.9 \times (7/8) = 0.7875$	$0.1 + 0.9 \times (1/8) = 0.2125$
4	40	wear	7	0	1	$0.7875 \times (7/7) = 0.7875$	$0.2125 + 0.7875 \times (0/7) = 0.2125$
5	50+	censor	6	0	1	$0.7875 \times (6/6) = 0.7875$	$0.2125 + 0.7875 \times (0/6) = 0.2125$
6	55	crack	5	1	0	$0.7875 \times (4/5) = 0.63$	$0.2125 + 0.7875 \times (1/5) = 0.37$
7	70	wear	4	0	1	$0.63 \times (4/4) = 0.63$	$0.37 + 0.63 \times (0/4) = 0.37$
8	71	wear	3	0	1	$0.63 \times (3/3) = 0.63$	$0.37 + 0.63 \times (0/3) = 0.37$
9	80	crack	2	1	0	$0.63 \times (1/2) = 0.315$	$0.37 + 0.63 \times (1/2) = 0.685$
10	90	censor	1	0	1	$0.315 \times (1/1) = 0.315$	$0.685 + 0.315 \times (0/1) = 0.685$

Table 6 Risk computation based on CIF method

subject	follow-up time	event	# at risk set	crack and wear #	censor #	crack & wear free survival	$Risk_{crack}^{CIF}$	$Risk_{wear}^{CIF}$
1	10	crack	10	1	0	$1 \times (9/10) = 0.9$	$0 + 1 \times (1/10) = 0.1$	$0 + 1 \times (0/10) = 0$
2	20+	censor	9	0	1	$0.9 \times (9/9) = 0.9$	$0.1 + 0.9 \times (0/9) = 0.1$	$0 + 0.9 \times (0/9) = 0$
3	35	crack	8	1	0	$0.9 \times (7/8) = 0.7875$	$0.1 + 0.9 \times (1/8) = 0.2125$	$0 + 0.9 \times (0/8) = 0$
4	40	wear	7	1	0	$0.7875 \times (6/7) = 0.675$	$0.2125 + 0.7875 \times (0/7) = 0.2125$	$0 + 0.7875 \times (1/7) = 0.1125$
5	50+	censor	6	0	1	$0.675 \times (6/6) = 0.675$	$0.2125 + 0.675 \times (0/6) = 0.2125$	$0.1125 + 0.675 \times (0/6) = 0.1125$
6	55	crack	5	1	0	$0.675 \times (4/5) = 0.54$	$0.2125 + 0.675 \times (1/5) = 0.3475$	$0.1125 + 0.675 \times (0/5) = 0.1125$
7	70	wear	4	1	0	$0.54 \times (3/4) = 0.405$	$0.3475 + 0.54 \times (0/4) = 0.3475$	$0.1125 + 0.54 \times (1/4) = 0.2475$
8	71	wear	3	1	0	$0.405 \times (2/3) = 0.27$	$0.3475 + 0.405 \times (0/3) = 0.3475$	$0.2475 + 0.405 \times (1/3) = 0.3825$
9	80	crack	2	1	0	$0.27 \times (1/2) = 0.135$	$0.3475 + 0.27 \times (1/2) = 0.4825$	$0.3825 + 0.27 \times (0/2) = 0.3825$
10	90	censor	1	0	1	$0.135 \times (0/1) = 0.135$	$0.4825 + 0.135 \times (0/1) = 0.4825$	$0.3825 + 0.135 \times (0/1) = 0.3825$

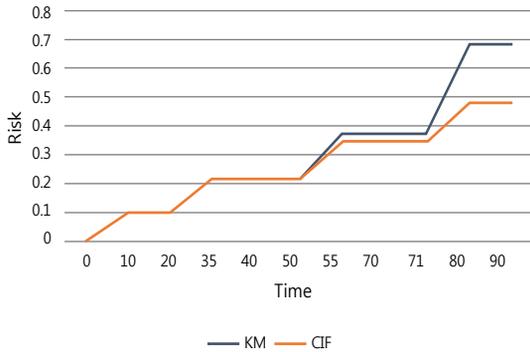


Fig. 1 Risk trend in terms of kaplan-meier method and CIF method

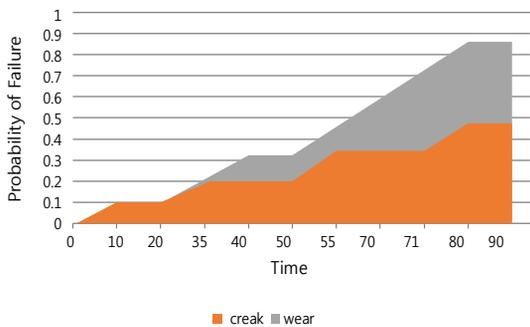


Fig. 2 Stacked risk

의해 구한 Risk는 0.685인 반면, CIF 방법에 의해 구한 Risk는 0.4825라는 것을 알 수 있다. 원점부터 추적시간이 흐르면서 두 방법 간에 Risk가 얼마나 차이가 나는지는 <Fig. 1>에 나와 있는 바와 같다.

CIF 방법을 적용하여 고장원인에 대한 Risk를 평가하면 어느 시점에서든 전반적 생존확률(overall survival probability, 앞에서는 균열 및 마모 free survival 임)과 각 고장원인에 의한 Risk들의 합은 1이다. 예를 들어 추적시간 90시간이 지난 시점에 제품이 어떤 고장도 나지 않을 확률 즉, 전반적 생존확률은 0.135로 작은 반면 균열로 인해 고장이 날 확률은 0.4825이고, 마모로 인해 고장이 날 확률은 0.3825로, $0.135 + 0.4825 + 0.3825 = 1$ 이다. 추적시간이 변하면서 이들 확률 값들이 어떻게 변하는지는 <Fig. 2>에 잘 나타나 있다.

4. 결론 및 논의

생존분석의 방법론들은 지난 수십 년에 걸쳐 의학

분야에서 폭넓게 사용된 반면, 신뢰성 분야에서는 많이 사용되지 못했다. 특히 본 연구의 주제에서와 같이 경쟁적 위험하에서의 올바른 생존분석 방법이 신뢰성 분야에서는 거의 소개되지 않았다. 이에 본 연구에서는 고장의 원인이 여럿이고 이들 고장원인들 중 하나의 고장원인으로 제품이 고장이 나는 경쟁적 위험하에서 생존확률 및 Risk를 어떻게 하면 올바르게 추정할 수 있는지 설명했다. 가장 많이 쓰이는 방법이 Kaplan-Meier 방법으로, 이는 고장시간과 중도 중단시간 간의 독립성을 가정하여 생존확률을 구하고, ‘1-생존확률’로 Risk를 구한다. 하지만 Kaplan-Meier 방법에서는 고장시간과 중도 중단시간 간 독립성을 가정하여 주관심 대상인 고장원인이외의 다른 고장원인에 의한 고장시간을 중도 중단시간으로 처리하다가 나중에 주관심 대상인 고장원인에 의해 고장 나면 앞의 모든 중도 중단시간을 고장시간으로 처리하므로 Risk를 과대하게 추정하게 된다. 이에 주관심 대상인 고장원인이외의 다른 고장원인에 의한 고장은 중도 중단으로 보지만 독립성을 가정하지 않고 Risk를 구하는 cumulative incidence function 방법에 대해 살펴봤다.

하지만 어떤 사건에 대한 cumulative incidence function을 추정하는 것 이외에 여러 그룹들 간에 cumulative incidence function이 서로 다른지 알고 싶을 수 있다. 통상적인 생존분석에서 Kaplan-Meier 방법으로 구해지는 곡선을 비교하는 비모수적 검정법(예를 들어 log-rank 검정법, Gehan-Wilcoxon 검정법 등)을 이용하여 여러 집단 간 비교가 이루어진다. 그러나 경쟁적 위험하에서 이런 검정법은 적절하지가 않다. 이에 Gray[12]는 여러 집단 간 cumulative incidence function을 비교하는데 generalized linear rank 통계량을 제안했다. 이 검정통계량은 각 고장원인에 대한 cumulative incidence function을 구하여, 이를 가중평균함으로써 얻어진다. 이에 추후 연구에서는 신뢰성 분야의 데이터를 이용하여 여러 그룹들 간 cumulative incidence function을 어떻게 비교하는지 살펴보고자 한다.

다음으로 경쟁적 위험하에서의 회귀모형에 대해 생각해볼 수 있다. 다른 회귀모형에서와 마찬가지로 이 모형에서는 경쟁적 위험하에서 다른 여타 잠재 위험변수들을 모형에 넣어 이들의 영향력을 고려하고 나서 특정 변수의 영향력을 파악하는데 사용된다 먼저 cause-specific hazard function에 대한 회귀모형을

고려해보자. 우선 cause-specific hazard function은 식별가능(identifiable)하므로 이 함수에 기반을 둔 회귀 모형 또한 식별가능하며, 따라서 Cox proportional hazard 모델을 이용한 경쟁적 위험하에서의 분석 또한 적절하다[2]. 이 모형은 공변수 벡터가 Z 인 개체에 대한 고장원인 j 의 cause-specific hazard를 다음과 같이 표현한다.

$$\lambda_j(t, Z) = \lambda_{0j}(t)\exp(\beta_j^T Z)$$

여기에서 $\lambda_{0j}(t)$ 는 고장원인 j 의 baseline cause-specific hazard를 나타내고, β_j 는 고장원인이 j 인 경우 회귀 계수 벡터를 나타낸다. baseline cause-specific hazard나 회귀계수 둘 다 고장원인 j 에 따라 달라질 수 있다. 이제 $t_{j1} < t_{j2} < \dots < t_{jk_j}$ 를 고장원인 $j(j = 1, \dots, m)$ 에 의한 k_j 개의 고장시간이라고 하고 Z_{ji} 를 시간 t_{ji} 에 고장 나는 개체의 공변수 벡터라고 하는 경우 partial likelihood는 각 고장시간 t_{ji} 에 단지 하나의 고장원인에 의해서만 고장이 일어난다고 가정하는 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L(\beta_1, \dots, \beta_m) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{k_j} \frac{\exp(\beta_j^T Z_{ji}(t_{ji}))}{\sum_{\gamma \in R(t_{ji})} \exp(\beta_\gamma^T Z_\gamma(t_{ji}))}$$

여기에서 $R(t_{ji})$ 는 고장시간 t_{ji} 에서의 risk set을 말한다. 그러면 이제는 통상적인 점근 가능도(asymptotic likelihood) 기법을 활용하여 회귀계수 β_j 에 대한 추정은 물론 비교도 가능하다.

하지만 앞의 cause-specific hazard function은 특정 고장원인에 대한 생존확률의 측면에서는 현실적인 해석이 결여된다. 더욱이 cause-specific hazard function에 기반을 둔 공변수의 계수는 cumulative incidence function에 기반을 둔 공변수의 계수와 똑같지 않다[12]. 따라서 Fine and Gray[13]는 경쟁적 위험하에서 공변수가 있는 경우 cumulative incidence function에 대해 직접 회귀모형을 적합시킬 것을 제안했다. 이에 추후 연구에서는 공변수가 있는 신뢰성 분야의 수명 데이터에 대해 cause-specific hazard function과 cumulative incidence function을 이용한 방법을 적용하여 그 결과가 어떤 면에서 다른지 살펴보고자 한다.

References

- [1] Klein, J. P. and Moeschberger, M. L. (2005). "Survival analysis: techniques for censored and truncated data". Springer Science & Business Media.
- [2] Kalbfleisch, J. D. and Prentice, R. L. (2011). "The statistical analysis of failure time data". John Wiley & Sons.
- [3] Porta Bleda, N., Gómez Melis, G. and Calle Rosingana, M. L. (2008). "The role of survival functions in competing risks".
- [4] Putter, H., Fiocco, M. and Geskus, R. B. (2007). "Tutorial in biostatistics: competing risks and multi state models". *Statistics in medicine*, Vol. 26, No. 11, pp. 2389-2430.
- [5] Kim, H. T. (2007). "Cumulative incidence in competing risks data and competing risks regression analysis". *Clinical Cancer Research*, Vol. 13, No. 2, pp. 559-565.
- [6] Scrucca, L., Santucci, A. and Aversa, F. (2007). "Competing risk analysis using R: an easy guide for clinicians". *Bone marrow transplantation*, Vol. 40, No. 4, pp. 381-387.
- [7] Fürstová, J. and Valenta, Z. (2011). "Statistical analysis of competing risks: overall survival in a group of chronic myeloid leukemia patients". *European Journal for Biomedical Informatics*, Vol. 7, No. 1, pp. 2-10.
- [8] Tsiatis, A. (1975). "A nonidentifiability aspect of the problem of competing risks". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 72, No. 1, pp. 20-22.
- [9] Lawless, J. F. (2011). "Statistical models and methods for lifetime data". John Wiley & Sons.
- [10] Chastain, J. S., Young, T. M., Guess, F. M. and León, R. V. (2009). "Using Reliability Tools to Characterize Wood Strand Thickness of Oriented Strand Board Panels". *International Journal of Reliability and Applications*, Vol. 10, No. 2, pp. 89-99.
- [11] Gooley, T. A., Leisenring, W., Crowley, J. and Storer, B. E. (1999). "Estimation of failure probabilities in the presence of competing risks: new representations of old estimators". *Statistics in medicine*, Vol. 18, No. 6, pp. 695-706.
- [12] Gray, R. J. (1988). "A class of K-sample tests for comparing the cumulative incidence of a competing risk". *The Annals of statistics*, Vol. 16, pp. 1141-1154.
- [13] Fine, J. P. and Gray, R. J. (1999). "A proportional hazards model for the subdistribution of a competing risk". *Journal of the American statistical association*, Vol. 94, No. 446, pp. 496-509.