

혼합 군에 대한 확률적 란체스터 모형의 정규근사

박동현 · 김동현 · 문형일 · 신하용[†]

KAIST 산업 및 시스템 공학과

Gaussian Approximation of Stochastic Lanchester Model for Heterogeneous Forces

Donghyun Park · Donghyun Kim · Hyungil Moon · Hayong Shin

Department of Industrial and Systems Engineering, KAIST

We propose a new approach to the stochastic version of Lanchester model. Commonly used approach to stochastic Lanchester model is through the Markov-chain method. The Markov-chain approach, however, is not appropriate to high dimensional heterogeneous force case because of large computational cost. In this paper, we propose an approximation method of stochastic Lanchester model. By matching the first and the second moments, the distribution of each unit strength can be approximated with multivariate normal distribution. We evaluate an approximation of discrete Markov-chain model by measuring Kullback-Leibler divergence. We confirmed high accuracy of approximation method, and also the accuracy and low computational cost are maintained under high dimensional heterogeneous force case.

Keywords: Combat Modelling, Stochastic Lanchester Model, Heterogeneous Forces

1. 서론

두 부대의 전투상황을 수학적으로 모형화하여 두 부대의 피해 양을 예측하는 연구는 란체스터(1916)가 초석이 되었고, 이를 확장하고 응용한 많은 연구들이 진행되어 왔다. 란체스터는 각각 하나의 무기로 구성된 두 부대가 전투를 할 때 시간에 따라 입는 피해 양을 두 개의 미분방정식으로 제시하였고, 전투 결과를 예측할 수 있게 하였다. 또한 그의 모형을 1805년 발생 하였던 트라팔가 해전의 결과에 적용시켜봄으로써 모형의 정당성을 입증하였다. 후에 이 모형은 란체스터 모형, 란체스터 방정식, 란체스터 법칙 등으로 불리게 되었다. 그러나 초기 란체스터 모형은 시간에 따른 두 부대의 피해양이 확률적으로 나타나는 것이 아닌 하나의 값으로 고정되어 있다는 큰 결점이 있다. 란체스터 모형은 수학적으로 간단하고 직관적으로 이해하기 쉬운 모형이었으나, 전투상황에서의 불확실성을 전혀 반영하지 못했다. 이러한 단점을 보완하기 위해 불확실성

을 모형에 반영하는 여러 연구가 있었다.

Amacher and Mandallaz(1986)는 기존의 란체스터 방정식과는 다르게 방정식에 사용되는 상수를 고정된 값으로 사용하지 않고, 불확실성을 반영하기 위해 독립적인 Brownian motion을 더하여 모형을 확장시켰다. 그들은 모형을 확률적 미분방정식으로 확장하였으며, 확장된 모형에서의 첫 번째, 두 번째 모멘트를 계산하여 평균과 분산을 비교하였다. 이 모형의 경우 변동성을 나타내는 모수를 어떻게 설정하는가에 따라 병력 분포의 분산이 다르게 나온다. Karmeshu and Jaiswal(1986)이 위와 비슷한 방법으로 방정식에 나오는 모수를 고정된 값으로 사용하지 않고 불확실성을 반영하기 위해 모수에 1 또는 -1의 값을 가지는 확률변수를 더하여 표현하였다. 마찬가지로 그들은 확장된 모형에서 첫 번째, 두 번째 모멘트를 계산하여 평균과 분산을 계산하였으나, 수학적 형태만 제시하였을 뿐 결과식의 타당성을 검증하지 못하였고 또한 여러 무기체계를 가진 부대의 전투로는 수학적 계산이 너무 복잡하여 확장하지

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다(N04140004).

[†] 연락저자 : 신하용 교수, 34141 대전광역시 유성구 대학로 291 KAIST 산업 및 시스템 공학과, Tel : 042-350-3124, Fax : 042-350-3110,

E-mail : hyshin@kaist.ac.kr

2015년 10월 28일 접수; 2015년 12월 21일 수정본 접수; 2016년 1월 6일 게재 확정.

못하였다.

가장 대표적인 확률적 란체스터 모형을 표현하는 방법은 마코프 체인을 활용하는 것이다. Taylor(1983)에 의해 제시되었고, Ancker and Gafarian(1988), 그리고 Kingman(2002)에 의해 모형이 더욱 발전하였다. 이 모형의 경우 앞서 제시된 방법들보다 더 타당한 결과를 제시했다. 그러나 이 모형의 경우 각 군의 병력이 M명, N명이라고 하였을 때 총 (M+1)(N+1)개의 state가 발생한다. 즉, 각 군의 병력의 규모가 커지면 커질수록 계산량이 매우 커지게 되어 각 state에 있을 확률을 구하기가 어려워진다. 또한 여러 무기체계를 가진 부대 간의 전투에 마코프 체인을 활용할 경우, 계산 시간이 기하급수적으로 증가하여 이 방법을 적용할 수가 없다.

본 논문에서는 전투를 모델링 할 때 가장 일반적으로 사용되는 마코프 체인을 활용한 확률적 란체스터 모형을 표현하는 새로운 모형을 제시하고, 첫 번째 모멘트와 두 번째 모멘트를 계산하여 모멘트들의 미분 방정식 형태로 표현하였다. 미분 방정식을 통해 모멘트의 값을 빠르게 계산할 수 있으며, 이 모멘트들을 이용하여 평균과 분산 및 공분산을 계산하고 다변량 정규분포로 근사하여 두 부대의 피해량의 타당한 확률 분포를 제시한다. 기존 연구에서는 부대의 규모가 커지면 커질수록 계산 시간이 많이 소모되는 단점이 있었으나, 본 연구를 통해 부대의 규모와는 상관없이 훨씬 빠르게 확률 분포를 근사할 수 있다. 또한 기존의 방법으로는 여러 무기체계를 가진 부대의 전투에는 적용할 수 없었으나, 본 연구를 통하여 여러 개의 무기체계를 가진 부대의 전투에도 쉽게 적용하여 결과를 검증해 보았다.

본 연구는 총 5장으로 구성되어 있다. 제 1장 서론에서는 지금까지 연구되어온 확률적 란체스터 모형에 관한 설명과 문제점을 언급하고 본 연구의 필요성과 내용을 설명하였다. 제 2장에서는 확률적 란체스터 모형에 관해 설명하고 제 3장과 제 4장에서 연구 방법과 연구 결과에 대해 서술하였다. 마지막으로 제 5장에서 결과를 요약하고 결론을 지었다.

2. 확률적 란체스터 모형

2.1 란체스터 모형

란체스터는 전투상황에서 두 부대의 손실을 간단한 수학적 모형으로 제시했다. 청군과 홍군의 시간에 따른 병력 양을 각각 $B(t)$ 와 $R(t)$ 라고 하고, 청군과 홍군의 살상력을 b 와 r 라고 정의 했을 때, 시간에 따른 청군과 홍군의 병력량은 다음과 같은 식으로 표현된다(Lanchester, 1916).

$$\frac{dB(t)}{dt} = -rR(t), \quad \frac{dR(t)}{dt} = -bB(t) \quad (1)$$

식 (1)의 미분 방정식을 풀면

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{2} \left(\left(B(0) - \sqrt{\frac{r}{b}} R(0) \right) e^{\sqrt{br}t} \right. \\ &\quad \left. + \left(B(0) + \sqrt{\frac{r}{b}} R(0) \right) e^{-\sqrt{br}t} \right) \\ R(t) &= \frac{1}{2} \left(\left(R(0) - \sqrt{\frac{b}{r}} B(0) \right) e^{\sqrt{br}t} \right. \\ &\quad \left. + \left(R(0) + \sqrt{\frac{b}{r}} B(0) \right) e^{-\sqrt{br}t} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)로 표현이 된다. 이 두 식은 항상

$$rR^2 - bB^2 = Constant \quad (3)$$

식 (3)과 같은 관계를 만족하며, 이를 ‘Lanchester’s square law’라고 부른다. 즉 청군과 홍군의 살상력을 나타내는 b 와 r 을 알고 있고, 초기시점에서의 홍군과 청군의 병력의 양을 알고 있다면, 일정 시간이 경과한 후에 두 병력의 손실을 예측할 수 있다. 식 (1)은 직접 사격 상황에 대한 피해평가로 널리 사용되며, 식 (1)을 변형한 여러 형태의 피해평가 방정식들이 있다.

2.2 혼합 군에 대한 란체스터 모형

일반적인 사용되는 란체스터 모형은 두 부대가 각각 하나의 종류의 무기체계로 이루어져 있을 때 전투를 묘사한다. 그러나 현대전의 경우 단일한 무기체계로 부대를 편성하여 전투하는 경우는 없다. 현대전을 보다 잘 반영하기 위해서 각각 m 개와 n 개의 종류의 무기체계로 이루어진 혼합 군 간의 전투로 란체스터 모형을 확장할 수 있다. 첫 번째 방법으로, 여러 무기의 살상력을 고려해서 부대의 총 전투력을 계량화할 수 있다. 예를 들어 청군의 부대가 1,000명의 보병과, 20대의 탱크가 있다고 가정하자. 탱크의 살상력이 보병에 비해 40배가 강하다고 할 경우, 청군의 총 전투력은 (1,000+20×40)이 된다. 이러한 방법으로 두 부대의 총 전투력을 계량화 하고 나서 단일 란체스터 모형에 적용하여 두 병력의 손실을 예측할 수 있다. 이 방법을 혼합 군의 전투에 적용할 경우, 부대의 총 전투력에 대한 피해를 예측할 수 있으나, 각각의 무기에 대한 피해평가를 정밀하게 예측할 수 없다. 특히 무기체계가 상대방 특정 무기체계에만 강력하거나 약한 경우, 총 전투력으로 계량화할 때 더 큰 오차가 발생한다.

가장 일반적으로 사용되는 혼합 군에 대한 란체스터 모형은 각각의 무기체계의 병력 양을 변수로 보고 란체스터 모형을 확장한다. n 개의 무기체계로 이루어진 청군과, m 개의 무기체계로 이루어진 홍군이 전투를 하고, t 시점에서의 청군의 i 번째 무기체계의 병력과 홍군의 j 번째 병력을 각각 $B_i(t)$, $R_j(t)$ 라 하자. 청군의 i 번째 무기가 홍군의 j 번째 무기를 타격할 때 살상력을 b_{ij} 라고 하자. 마찬가지로 홍군의 j 번째 무기가 청군의 i 번째 무기를 타격할 때 살상력을 r_{ij} 라고 할 때, 각 병력들의 시간에 따른 피해를 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{dB_i(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^m r_{ji} R_j(t), \quad \frac{dR_j(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^n b_{ij} B_i(t) \quad (4)$$

단일 무기체계의 경우와 마찬가지로 시간에 따른 각 무기체계들의 병력 양을 식 (4)을 통해 계산할 수 있다.

2.3 확률적 란체스터 모형

란체스터가 제시한 미분 방정식 형태의 전투 모형은 병력의 피해가 고정적인 하나의 값으로만 나타나는 단점이 있다. 이를 보완하기 위해 Taylor는 각 군의 수가 음이 아닌 정수로 나타나며, transition 한 번에 사상자가 둘 이상 발생하지 않는다고 가정하고, 마코프 체인을 이용하여 란체스터 모형을 확률적 란체스터 모형으로 확장하였고, 이 모형이 확률적 란체스터 모형의 가장 일반적인 형태이다(Taylor, 1983).

청군의 병력 양과 살상력을 B 와 β , 홍군의 병력 양과 살상력을 R 과 α 라고 하고 t 시점에서 청군과 홍군의 병력 양 (B_t, R_t) 를 병력 상태 변수라고 했을 때, 마코프 체인에서 State는 (B_t, R_t) 로 정의된다. 여기서 B_t 와 R_t 는 모두 자연수 값이다. 그리고 발생할 수 있는 state transition은 청군에서 한명의 사상자가 발생하거나 홍군에서 한명의 사상자가 발생하거나 양 쪽 모두 피해가 발생하지 않는 경우이다. 즉 병력 상태 변수 (B_t, R_t) 는 마코프 성질을 가지며, 세 가지 state transition이 있는 연속 시간 마코프 체인(CTMC)로 표현할 수 있다. 세 가지 transition에 대한 확률을 다음 <Table 1>에 나타내었다.

즉 확률적 란체스터 모형을 <Figure 1> 과 같이 표현할 수 있다.

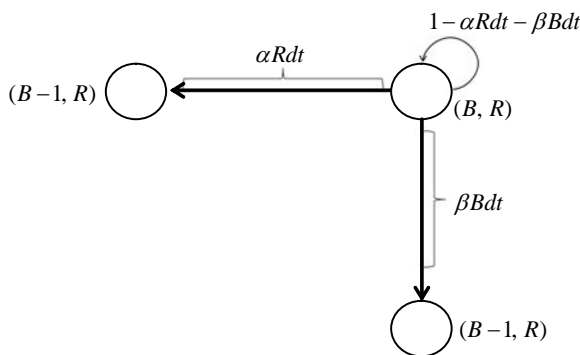


Figure 1. State Transition of Stochastic Lanchester Model.

위와 같이 정의된 CTMC에서 t 시간 동안 state가 (j_1, j_2) 에

서 (i_1, i_2) 로 전이 될 확률을 $P_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t)$ 라 하자. 즉 $P_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t) = P\{(B_{t+s}, R_{t+s}) = (i_1, i_2) | (B_s, R_s) = (j_1, j_2)\}$, for all $s, t \geq 0$ 이다. 또한 변수 $q_{k_1 k_2 j_1 j_2}$ 와 $v_{j_1 j_2}$ 를 다음 식 (5), 식 (6)과 같이 정의하자.

$$P_{k_1 k_2 j_1 j_2}(dt) = q_{k_1 k_2 j_1 j_2} dt, \quad (k_1, k_2) \neq (j_1, j_2) \quad (5)$$

$$P_{j_1 j_2 j_1 j_2}(dt) = 1 - v_{j_1 j_2} dt \quad (6)$$

<Table 1>에 표시한 확률 값에 의해 변수 $q_{k_1 k_2 j_1 j_2}$ 와 $v_{j_1 j_2}$ 는 다음과 같은 값을 가진다.

$$q_{i-1, j i j} = \alpha j, \quad q_{i j -1, i j} = \beta i, \quad otherwise \quad q_{k_1 k_2 j_1 j_2} = 0 \quad (7)$$

$$v_{ij} = \beta i + \alpha j \quad (8)$$

식 (7), 식 (8)과 같이 정의된 두 변수를 이용하여 새로운 변수 $u_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$u_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \begin{cases} q_{i_1 i_2 j_1 j_2}, & \text{if } (i_1, i_2) \neq (j_1, j_2) \\ -v_{i_1 i_2}, & \text{if } (i_1, i_2) = (j_1, j_2) \end{cases} \quad (9)$$

$u_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ 를 원소로 갖는 $BR \times BR$ 크기의 행렬을 U , 그리고 $P_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t)$ 를 원소로 갖는 transition probability 행렬을 $P(t)$ 라고 했을 때 다음과 같은 방정식을 만족한다.

$$P'(t) = UP(t) \quad (10)$$

식 (10)의 풀면 다음과 같다.

$$P(t) = \exp(Ut) \quad (11)$$

여기서 $\exp(Ut) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ut)^n}{n!}$ 이다.

식 (11)을 이용하여 t 시간 동안 state가 전이되는 확률을 계산할 수 있으며, 즉 초기 시점의 청군과 홍군의 병력의 상태가 주어진다면, 이러한 계산 방법으로 시간이 흐른 후에 두 부대의 병력 양에 대한 확률 분포를 계산할 수 있다

확률적 란체스터 모형을 여러 종류의 무기체계를 가진 부대들의 전투로 확장할 경우, state의 개수가 기하급수적으로 증가

Table 1. State Transition Probability

발생 가능한 세 가지 transition	확률
$P\{(B_{t+dt}, R_{t+dt}) = (i-1, j) (B_t, R_t) = (i, j)\}, \forall i=1 \cdots B, \forall j=1 \cdots R$	$\alpha R_t dt$
$P\{(B_{t+dt}, R_{t+dt}) = (i, j-1) (B_t, R_t) = (i, j)\}, \forall i=1 \cdots B, \forall j=1 \cdots R$	$\beta B_t dt$
$P\{(B_{t+dt}, R_{t+dt}) = (i, j) (B_t, R_t) = (i, j)\}, \forall i=1 \cdots B, \forall j=1 \cdots R$	$1 - \beta R_t dt - \alpha B_t dt$

한다는 단점이 있다. 예를 들어 각 부대가 3개의 종류의 무기 체계로 이루어져 있고, 각 무기체계의 병력 수는 20개라고 했을 때, state의 수는 20^6 개가 된다. 즉 혼합 군의 경우, 메모리 크기의 제한 때문에 상태 전이 확률의 행렬을 구성할 수 없다. 다시 말해 마코프 체인을 활용한 Taylor의 모형은 가장 합리적인 결과를 제공하지만 혼합 군끼리의 전투에는 적용할 수 없다.

3. 병력 상태 변수에 대한 정규근사

3.1 단일 군의 경우

본 논문에서는 일반적으로 사용되는 Taylor의 확률적 랜체스터 모형의 계산 시간을 훨씬 빠르게 하고, 여러 무기체계를 가진 부대의 전투에도 쉽게 적용할 수 있도록 개선하였다. 청군의 병력 양과 살상력을 B 와 β , 홍군의 병력 양과 살상력을 R 과 α 라고 했을 때, 마코프 체인 모형에 의하면 state는 (B, R) 로 나타나고, 아무런 사상자가 없거나 청군에서 사상자 한 명이 발생하거나 홍군에서 사상자 한명이 발생, 이렇게 세 개의 가능한 transition이 있다. 이 모형은 청군과 홍군 모두 각각 한 명씩 사상자가 발생한 경우가 포함된 네 개의 가능한 transition이 있는 모형과 거의 유사하며, 다음과 같은 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$B_{t+dt} = B_t - 1_{\alpha R_t dt}, \quad R_{t+dt} = R_t - 1_{\beta B_t dt} \quad (12)$$

$$1_p = \begin{cases} 1 & \text{with probability } p \\ 0 & \text{with probability } 1-p \end{cases} \quad (13)$$

1_p 는 식 (13)과 같이 정의된 확률변수이다. 즉 $1_{\alpha R_t dt}$ 는 $\alpha R_t dt$ 의 확률로 1의 값을 가지고 $1 - \alpha R_t dt$ 의 확률로 0의 값을 가진다. 방정식 (12)는 $\alpha R_t dt$ 의 확률로 청군에서 한명의 사상자가 발생하고 $\beta B_t dt$ 의 확률로 홍군에서 한명의 사상자가 발생하는 상황인 연속시간 마코프 체인을 이용한 모형을 수식으로 표현한 것이다. (12) 식을 통해 B_t 와 R_t 에 관한 첫 번째 모멘트와 두 번째 모멘트를 도출하고, 계산된 모멘트들의 값으로부터 B_t 와 R_t 의 평균, 분산, 공분산을 각각 계산하여 B_t 와 R_t 의 다변량 확률 분포를 근사하여 제시한다.

B_t 와 R_t 의 첫 번째 모멘트계산은 식 (12)에 기대 값을 취해서 바로 얻을 수 있으며, 두 번째 모멘트계산은 식 (12)에 양변을 제곱하여 나온 식에 기대 값을 취해서 얻을 수 있다. 두 번째 모멘트를 계산할 때 생기는 dt^2 항은 무시하였다. 모멘트 값들에 관한 방정식은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} E[B_{t+dt}] &= E[B_t] - \alpha E[R_t]dt, \\ E[R_{t+dt}] &= E[R_t] - \beta E[B_t]dt \end{aligned} \quad (14)$$

또한 $E[1_{\alpha R_t dt}] = E[E[1_{\alpha R_t dt} | R_t]] = E[\alpha R_t dt] = \alpha E[R_t]dt$ 이므

로 2차 모멘트는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} E[B_{t+dt}^2] &= E[B_t^2] - 2E[B_t 1_{\alpha R_t dt}] + E[1_{\alpha R_t dt}^2] \\ &= E[B_t^2] - 2\alpha E[B_t R_t]dt + \alpha E[R_t]dt, \\ E[R_{t+dt}^2] &= E[R_t^2] - 2E[R_t 1_{\beta B_t dt}] + E[1_{\beta B_t dt}^2] \\ &= E[R_t^2] - 2\beta E[B_t R_t]dt + \beta E[B_t]dt, \\ E[B_{t+dt}R_{t+dt}] &= E[B_t R_t] - \beta E[B_t^2]dt - \alpha E[R_t^2]dt \end{aligned} \quad (15)$$

모멘트 벡터 M_t 와 행렬 V 를 다음과 같이 정의했을 때,

$$M_t := \begin{pmatrix} E[B_t] \\ E[R_t] \\ E[B_t^2] \\ E[R_t^2] \\ E[B_t R_t] \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -2\alpha \\ \beta & 0 & 0 & 0 & -2\beta \\ 0 & 0 & -\beta - \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

식 (14)과 식 (15)를 다음과 같은 행렬식으로 다시 표현할 수 있다.

$$M_{t+dt} = (I + Vdt) M_t \quad (17)$$

식 (17)의 해는 다음과 같다.

$$M_t = \exp(V)^t M_0 \quad (18)$$

여기서 $\exp(V)$ 는 V 에 대한 matrix exponential이다. 즉 $\exp(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} V^k$ 이다.

식 (12)와 같이 병력 상태 변수를 모델링 하여 얻은 t 시점의 (B_t, R_t) 의 확률 분포는 unimodal한 형태의 확률 분포이나, 우리가 흔히 알고 있는 특정한 형태의 확률 분포가 아니다. 그러므로 (B_t, R_t) 의 확률 분포를 정확하게 추론하기 위해서는 모수가 굉장히 많은 확률 분포라 가정하고 1차 모멘트와 2차 모멘트 값 뿐만 아니라 모든 모멘트 값들을 일치시키는 모수 값을 결정해야한다. 본 논문에서는 모든 모멘트를 다 일치시키는 것보다 1차 2차 모멘트만 일치 시켰다. (B_t, R_t) 의 확률 분포가 unimodal한 점을 착안하여 계산하기 쉬운 정규 분포라고 가정했으며, 1차 모멘트와 2차 모멘트 값을 이용해 근사하였다.

B_t 와 R_t 의 확률 분포를 얻기 위해서 식 (18)로부터 구한 모멘트를 이용하여 B_t 와 R_t 의 평균과 분산, B_t 와 R_t 사이의 공분산을 계산한다.

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_t) &= E[B_t^2] - E[B_t]^2, \quad \text{Var}(R_t) = E[R_t^2] - E[R_t]^2, \\ \text{Cov}(B_t, R_t) &= E[B_t R_t] - E[B_t]E[R_t]. \end{aligned} \quad (19)$$

계산된 평균, 분산, 공분산을 이용하여 (B_t, R_t) 를 아래와 같

이 이변량 정규분포로 근사한다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_t \\ R_t \end{pmatrix} &\sim N(\mu | \Sigma), \quad \mu = \begin{pmatrix} E(B_t) \\ E(R_t) \end{pmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \text{Var}(B_t) & \text{Cov}(B_t, R_t) \\ \text{Cov}(B_t, R_t) & \text{Var}(R_t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

즉, (B_t, R_t) 의 분포를 식 (20)과 같이 근사할 수 있다.

3.2 혼합군의 경우

방정식 (12)은 부대가 단일한 무기체계로 이루어진 경우에만 적용된다. 그러나 우리는 식 (12)을 다양한 무기체계로 구성된 혼합 부대의 전투에도 쉽게 확장할 수 있다. 앞 선 경우와 비슷하게 청군과 홍군이 전투를 하는 상황에서 청군은 M 개의 무기체계, 홍군은 N 개의 무기체계로 구성되어 있다고 가정한다. 즉, 시점에서 청군과 홍군의 각 무기체계의 병력 양은 $(B_{1,t}, B_{2,t}, \dots, B_{M,t})$ 와 $(R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{N,t})$ 로 나타낼 수 있다. 여기서 청군의 i 번째 무기가 홍군의 j 번째 무기를 타격할 때의 살상력을 β_{ij} , 홍군의 j 번째 무기가 청군 i 번째 무기를 타격할 때의 살상력을 α_{ji} 라 하자. 그러면 식 (12)을 다음과 같은 식으로 확장할 수 있다.

$$\begin{aligned} B_{i,t+dt} &= B_{i,t} - 1 \sum_{k=1}^N \alpha_{ki} E[R_{k,t}] dt, \quad \forall i = 1 \dots M \\ R_{j,t+dt} &= R_{j,t} - 1 \sum_{l=1}^M \beta_{lj} E[B_{l,t}] dt, \quad \forall j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)을 통해 첫 번째 모멘트와 두 번째 모멘트에 관한 식이 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} E[B_{i,t+dt}] &= E[B_{i,t}] - \sum_{k=1}^N \alpha_{ki} E[R_{k,t}] dt, \\ E[R_{j,t+dt}] &= E[R_{j,t}] - \sum_{l=1}^M \beta_{lj} E[B_{l,t}] dt \\ E[B_{i,t+dt}^2] &= E[B_{i,t}^2] - 2 \sum_{k=1}^N \alpha_{ki} E[B_{i,t} R_{k,t}] dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \alpha_{ki} E[R_{k,t}] dt \\ E[R_{j,t+dt}^2] &= E[R_{j,t}^2] - 2 \sum_{l=1}^M \beta_{lj} E[R_{j,t} B_{l,t}] dt + \sum_{l=1}^M \beta_{lj} E[B_{l,t}] dt \\ E[B_{i,t+dt} R_{j,t+dt}] &= E[B_{i,t} R_{j,t}] - \sum_{l=1}^M \beta_{lj} E[B_{i,t} B_{l,t}] dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \alpha_{ki} E[R_{j,t} R_{k,t}] dt \\ E[B_{i,t+dt} B_{j,t+dt}] &= E[B_{i,t} B_{j,t}] - \sum_{k=1}^N \alpha_{ki} E[B_{j,t} R_{k,t}] dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \alpha_{kj} E[B_{i,t} R_{k,t}] dt \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} E[R_{i,t+dt} R_{j,t+dt}] &= E[R_{i,t} R_{j,t}] - \sum_{k=1}^N \beta_{ki} E[R_{j,t} B_{k,t}] dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \beta_{kj} E[R_{i,t} B_{k,t}] dt \end{aligned} \quad (23)$$

단일 무기체계의 경우와 마찬가지로, 첫 번째 모멘트와 두 번째 모멘트를 벡터로 정의하고 식 (22), 식 (23)을 모멘트 벡터에 관한 미분방정식으로 표현한 뒤, matrix exponential을 계산하여 모멘트 값들을 빠르게 계산할 수 있다.

본 논문에서는 청군과 홍군이 각각 두 종류의 무기체계로 구성되어 있는 경우($N = 2, M = 2$)에 대해 위의 방법을 적용시켜보았다. 청군과 홍군이 각각 두 종류의 무기체계를 가지고 있을 때, 총 모멘트의 개수는 14개가 있으며, 모멘트 벡터 M_t 와 행렬 V 를 다음과 같이 정의한다.

$$M_t := \begin{pmatrix} E[B_1] \\ E[B_2] \\ E[R_1] \\ E[R_2] \\ E[B_1^2] \\ E[B_2^2] \\ E[R_1^2] \\ E[R_2^2] \\ E[B_1 B_2] \\ E[R_1 R_2] \\ E[B_1 R_1] \\ E[B_1 R_2] \\ E[B_2 R_1] \\ E[B_2 R_2] \end{pmatrix}, \quad V := \begin{bmatrix} -V_1 & 0 & 0 \\ V_1 & 0 & -2V_2 \\ 0 & -V_3 & -V_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서 행렬 V 는 14×14 크기의 행렬이며 소행렬 V_1, V_2, V_3, V_4 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ 0 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ 0 & 0 & \beta_{11} & 0 & \beta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{12} & 0 & \beta_{22} & 0 \end{pmatrix}, \\ V_3 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \alpha_{11} & 0 \\ \beta_{12} & 0 & 0 & \alpha_{21} \\ 0 & \beta_{21} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad V_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ 0 & 0 & \beta_{12} & \beta_{11} & \beta_{22} & \beta_{21} \\ \beta_{21} & \alpha_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{22} & \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

식 (24)을 이용하여 식 (22), 식 (23)를 다음과 같은 행렬 식으로 다시 표현할 수 있다.

$$M_{t+dt} = (I + V dt) M_t \quad (25)$$

식 (25)의 해는 다음과 같다.

$$M_t = \exp(V)^t M_0 \quad (26)$$

식 (25)와 식 (26)은 단일한 무기체계의 경우에서 도출된 식 (17), 식 (18)과 같은 형태를 가지고 있다. 무기체계의 종류가 여러 가지인 경우에도 식 (26)을 통해 쉽게 모멘트 값들을 계산할 수 있다. 계산된 모멘트 값을 이용하여 단일 무기체계의 경우와 마찬가지로 평균, 분산, 공분산 값들을 계산하여 $(B_{1,t}, B_{2,t}, \dots, B_{M,t}, R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{N,t})$ 를 다음의 식 (27)과 같이 $M+N$ 차원의 다변량 정규분포로 근사할 수 있다.

$$(B_{1,t}, B_{2,t}, \dots, B_{M,t}, R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{N,t})^T \sim N(\mu_t | \Sigma_t) \quad (27)$$

즉 $(B_{1,t}, B_{2,t}, \dots, B_{M,t}, R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{N,t})$ 의 분포를 식 (27)과 같이 근사할 수 있으며, 여기서 μ_t 와 Σ_t 는 첫 번째, 두 번째 모멘트 값들을 이용하여 아래의 식 (28)과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{t,i} &= E[B_i], \quad \forall i = 1 \dots M \\ \mu_{t,i} &= E[R_i], \quad \forall i = M+1 \dots M+N \\ \Sigma_{t,ij} &= E[B_i B_j] - E[B_i]E[B_j], \\ &\quad \forall i = 1 \dots M, \quad \forall j = 1 \dots M \\ \Sigma_{t,ij} &= E[B_i R_{j-M}] - E[B_i]E[R_{j-M}], \\ &\quad \forall i = 1 \dots M, \quad \forall j = M+1 \dots M+N \\ \Sigma_{t,ij} &= E[B_j R_{i-M}] - E[B_j]E[R_{i-M}], \\ &\quad \forall i = M+1 \dots M+N, \quad \forall j = 1 \dots M \\ \Sigma_{t,ij} &= E[R_{i-M} R_{j-M}] - E[R_{i-M}]E[R_{j-M}], \\ &\quad \forall i = M+1 \dots M+N, \quad \forall j = M+1 \dots M+N \end{aligned} \quad (21)$$

4. 연구 결과

본 논문에서 제시한 근사법을 이용하여 시간에 따른 청군과 홍군의 병력 양의 확률 분포를 매우 빠른 시간에 얻을 수 있다. 이는 Taylor의 확률적 란체스터 모형에서 얻어진 시간에 따른

청군과 홍군의 병력 양의 확률 분포와 매우 유사한 결과를 보여 준다. 청군의 무기체계 종류의 수를 M이라고 하고 홍군의 무기체계 종류의 수를 N이라고 했을 때, $M = 1, N = 1$ 일 경우와, $M = 2, N = 2$ 일 경우, 두 가지 경우에 대해서 실험을 하였다.

4.1 단일 무기체계 경우(M = 1, N = 1 일 때)

단일 무기체계의 경우, 시간에 따른 청군의 병력 양과 살상력을 B_t 와 β 시간에 따른 홍군의 병력 양과 살상력을 R_t 와 α 라고 할 때, $B_0 = 100, R_0 = 80, \beta = 0.1, \alpha = 0.1$ 로 고정하고 실험을 하였다. <Figure 2>는 $t = 4$ 시점에서 Taylor의 모형을 통해 얻어진 청군과 홍군 병력 양의 확률 분포의 등고선과(왼쪽), 본 논문에서 제시된 정규분포로 근사하는 방법을 이용하여 얻어진 청군과 홍군 병력 양의 확률 분포의 등고선을 보여준다(오른쪽).

본 논문에서 제시한 근사법으로 얻은 확률 분포는 Taylor의 모형을 통해 얻은 확률 분포와 유사한 등고선을 보여준다. 마코프 체인을 이용한 Taylor의 모형은 계산하는데 7초가 소모되었고, 식 (20)을 이용하여 Taylor의 모형을 근사하는 방법은 계산하는데 0.02초가 소모되었다. Taylor의 모형의 경우 병력 양이 증가하면 증가할수록 필요한 계산시간이 증가하는 반면, 본 논문의 방법은 계산시간이 병력 양과 전혀 상관없다.

본 논문에서 제시한 방법이 얼마나 높은 정확도로 근사하는지 확인하기 위해 Taylor의 모형을 이용하여 얻은 청군과 홍군의 확률 분포를 기준으로 두고 Kullback-Leibler divergence를 계산하였다. <Table 2>에서 이 값들을 비교하여 본 논문에서 제시한 방법이 기준 모형을 얼마나 유사하게 묘사하는지를 확인하였다.

본 논문에서 제시한 방법으로 Taylor의 모형을 근사한 경우, 병력의 수가 음수가 될 수 없다는 사실을 고려하지 않았으므로 시간이 많이 흘러 남은 병력의 양이 0 근처인 경우에는 제대로 근사할 수 없다. 그러나 시점이 충분히 지나지 않은 상황에서는 기준이 되는 Taylor의 모형을 높은 유사도로 근사할 수 있음을 확인하였다.

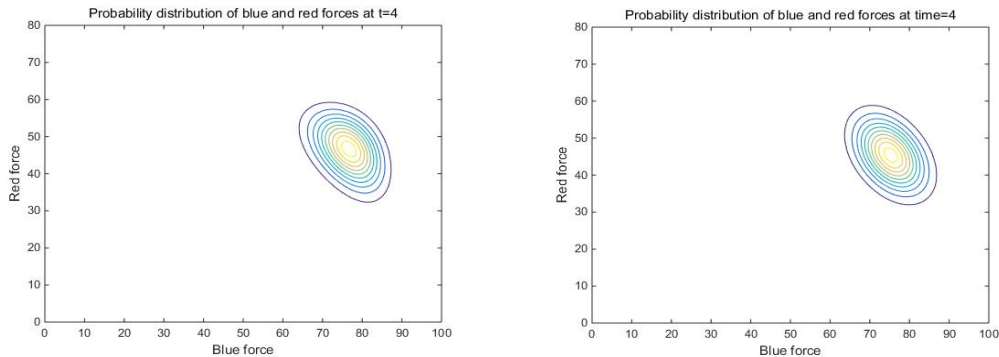


Figure 2. Probability Distribution of Blue and Red Force at $t = 4$ Using Taylor's Model(Left) and Approximation Method in This Paper (Right)

Table 2. Kullback-Leibler Divergence of Three Models from Each Benchmarks. Model 1 is Monte Carlo Simulation (Rep : 10^6) Method. Model 2 is Approximation Method from the Paper. Model 3 is Model from Amacher and Mandallaz(1986)

Time	KL divergence
1	0.021887
2	0.013663
3	0.01022
4	0.009043
5	0.008874
6	0.009343
7	0.011618
8	0.027206

4.2 두 개의 무기체제로 구성된 경우(M = 2, N = 2 일 때)

두 부대가 각각 여러 종류의 무기체제를 가진 경우에 대해서도 본 논문에 제시한 방법을 이용하여 매우 빠르게 근사할 수 있다. 그러나 마코프 체인을 이용한 Taylor 모형은 무기체제가 2개 이상일 경우 state의 개수가 기하급수적으로 증가하여 적용하기 매우 힘들다. 본 논문에서 두 부대의 무기체제 종류를 2가지로 한정하고 실험을 하였으며, 마코프 체인 모형 대신 몬테카를로 시뮬레이션을 이용한 모형을 통해 얻은 결과를 기준으로 하여 비교하였다.

실험 환경은 다음과 같다. 청군은 B_1, B_2 두 종류의 무기로 구성되어있고, 홍군 또한 R_1, R_2 두 종류의 무기로 구성되어 있다. 초기 시점에 각각의 병력 양은 $B_1 = 100, B_2 = 30, R_1 = 60, R_2 = 80$ 이다. 청군의 i 번째 무기가 홍군의 j 번째 무기를

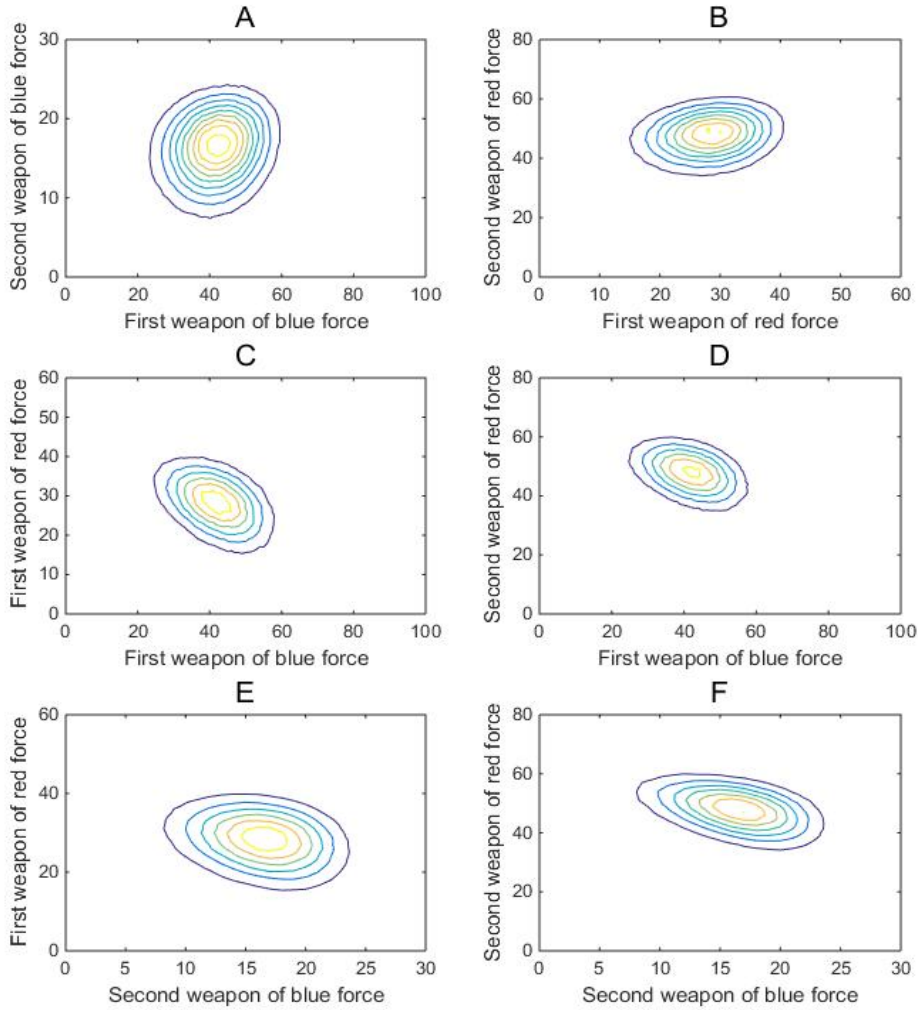


Figure 3. Probability Distribution of Each Weapon of Blue and Red Force at t = 6 Using Montecarlo Simulation method (Rep : 10^6).

A : First Weapon of Blue Force and Second Weapon of Blue Force. B : First Weapon of Red Force and Second Weapon of Red Force. C : First Weapon of Blue Force and First Weapon of Red Force. D : First Weapon of Blue Force and Second Weapon of Red Force. E : Second Weapon of Blue Force and First Weapon of Red Force. F : Second Weapon of Blue Force and Second Weapon of Red Force

공격할 때의 살상력을 β_{ij} 라고 하고 홍군의 j 번째 무기가 청군의 i 번째 무기를 공격할 때의 살상력을 α_{ji} 라고 했을 때,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.12 \\ 0.15 & 0.08 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.04 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \text{로 설정하였다. 이와 같이 실험환경을 설정하고 식 (14)에 몬테카를로 시뮬레이션을 } 10^6 \text{회}$$

시행하였고, $t = 6$ 시점에서 각 병력사이의 확률 분포는 <Figure 3>과 같다. 같은 실험환경에서 본 논문에서 제시한 방법을 이용하여 근사한 $t = 6$ 시점에서의 각 병력사이의 확률 분포는 <Figure 4>와 같다. <Figure 3>과 <Figure 4>에서 맨 위의 행의 왼쪽 등고선은 B_1 과 B_2 사이의 확률 분포를 나타내고 오른쪽 등고선은 R_1 과 R_2 사이의 확률 분포를 나타낸다. 두 번째 행의 왼쪽 등고선은 B_1 과 R_1 사이의 확률 분포를 나타내고, 오른쪽 등고선은 B_1 과 R_2 사이의 확률 분포를 나타낸다. 마지막 행의

왼쪽 등고선은 B_2 와 R_1 사이의 확률 분포를 나타내고 오른쪽 등고선은 B_2 와 R_2 사이의 확률 분포를 나타낸다.

<Figure 3>의 결과를 얻기 위해서 741.9초의 계산시간이 소모된다. 몬테카를로 시뮬레이션을 이용한 방법은 정확한 결과를 제공하기는 하나 굉장히 긴 계산시간을 요구한다. <Figure 4>의 결과는 얻는 데는 0.34초의 계산시간이 소모된다. 즉, 본 논문에서 제시한 근사법으로 매우 빠르게 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 얻은 확률 분포와 유사한 확률 분포를 얻을 수 있다. 청군의 총 병력 ($B_1 + B_2$)과 홍군의 총 병력 ($R_1 + R_2$)의 확률 분포는 <Figure 5>와 같다. <Figure 5>의 왼쪽은 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 얻은 확률 분포이고, 오른쪽은 본 논문의 근사법을 이용하여 얻은 확률 분포이다.

본 논문에서 제시된 방법의 정확도를 측정하기 위해 몬테카

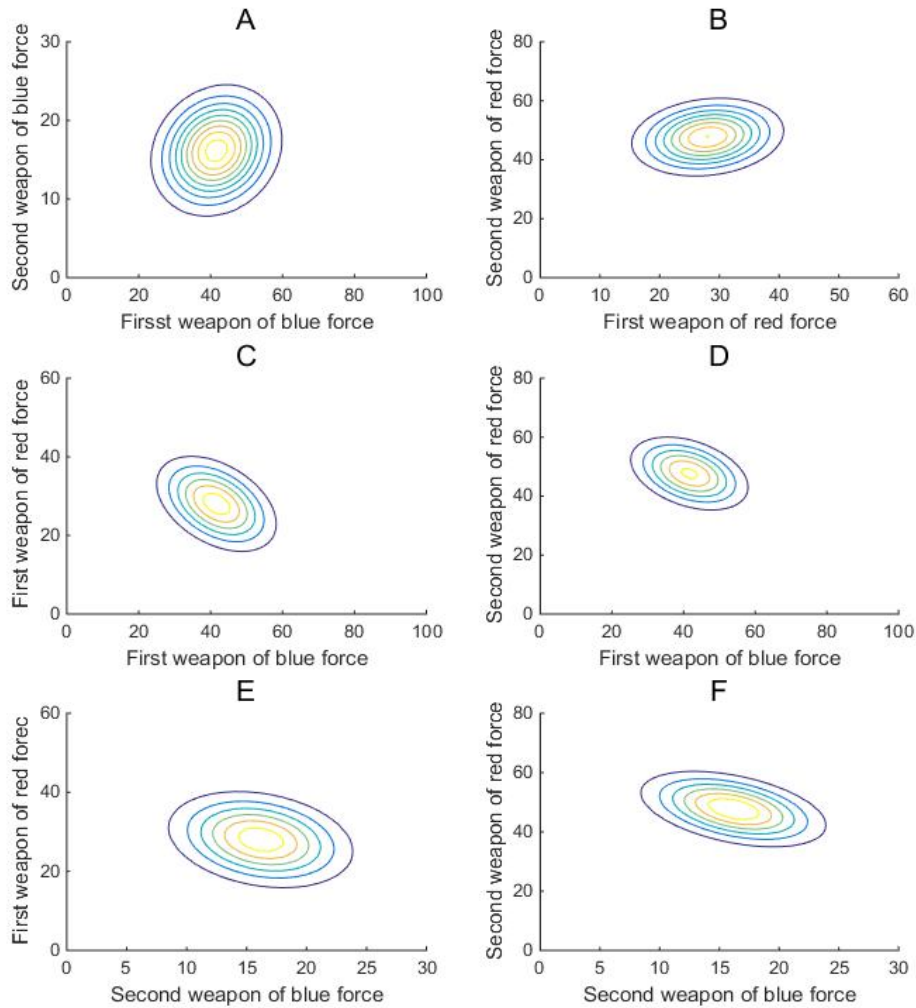


Figure 4. Probability Distribution of Each Weapon of Blue and Red Force at $t = 6$ Using Approximation Method in Our Paper. **A** : First Weapon of Blue Force and Second Weapon of Blue Force. **B** : First Weapon of Red Force and Second Weapon of Red Force. **C** : First Weapon of Blue Force and First Weapon of Red Force. **D** : First Weapon of Blue Force and Second Weapon of Red Force. **E** : Second Weapon of Blue Force and First Weapon of Red force. **F** : Second Weapon of Blue Force and Second Weapon of Red Force

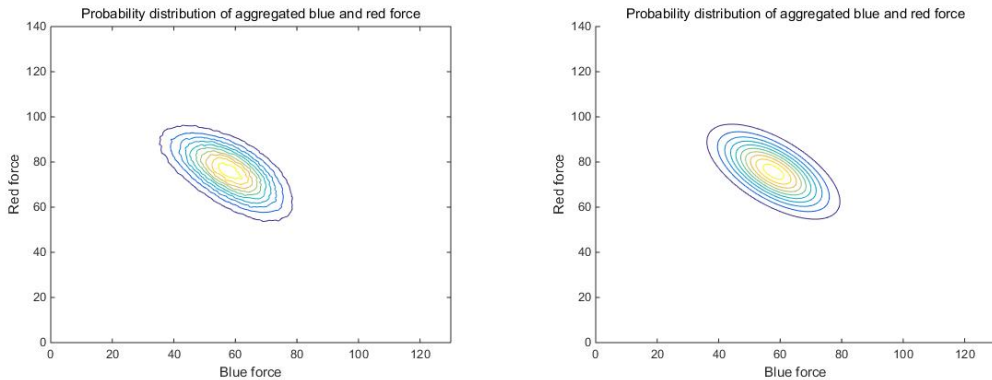


Figure 5. Probability Distribution of Aggregated Blue and Red Forces Using Montecarlo Simulation(Rep : 10^6) (Left) and Approximation Method in Our Paper (Right)

틀로 시뮬레이션을 이용하여 계산한 시간에 따른 평균의 홍군의 총 병력의 확률 분포를 기준으로 하여 Kullback-Leibler divergence를 <Table 3>에서 계산하였다.

Table 3. Kullback-Leibler Divergence of Approximation Method in Our Paper from the Benchmark (Montecarlo Simulation Method)

Time	KL divergence
1	0.012664
2	0.007065
3	0.005565
4	0.00545
5	0.005501
6	0.005935
7	0.00613
8	0.006058

<Table 2>의 KL divergence값들과 비교하면, 무기체계의 종류가 여러 가지일 경우에도 본 논문의 근사법이 상당히 높은 유사도를 보여준다. 본 논문에서 제시된 방법으로 무기체계의 종류의 수와 상관없이 쉽게 확률적 라체스터 모형을 근사할 수 있다. 그러나 본 논문의 방법은 남은 병력의 수가 음수가 될 수 없다는 조건을 반영하지 않기 때문에, 시간이 충분히 지난 시점에서는 유사도가 더 떨어진다.

5. 요약 및 결론

확률적 라체스터 모형에 대한 여러 연구가 있으나 그 중 직접 사격 전투를 가장 잘 묘사하는 모형은 Taylor가 제시한 마코프 체인을 활용한 확률적 라체스터 모형이다. Taylor의 모형은 가장 통상적으로 사용되는 확률적 라체스터 모형이고, 많은 연구들이 그의 모형을 기준으로 삼고 있다. 그러나 부대가 단일

한 무기체계로 구성되어 있을 경우에만 적용이 가능하며, 여러 무기체계로 구성된 혼합군의 경우는 매우 큰 계산시간이 요구되며 적용이 불가능하다.

본 논문에서는 모멘트 계산을 통해 두 부대가 전투할 때 시간에 따른 병력 양의 분포를 훨씬 빠르고 높은 정확도로 근사하는 방법을 제시하였다. 특히 두 부대가 여러 종류의 무기체계로 구성된 경우에도, 무기체계 종류의 수와 상관없이 빠르게 근사하는 방법을 제시했고, 높은 정확도를 가지고 있음을 보였다. 혼합 군의 경우로 쉽게 확장이 가능하기 때문에 본 논문의 근사방법을 이용하여 최적 병력조합을 구성하는 문제에 쉽게 응용될 수 있다. 이 외에도 혼합 군을 다루는 여러 문제를 푸는 데에 활용 될 수 있을 것이다. 하지만 본 논문에서 제시한 근사 법은 병력의 수가 음수가 될 수 없다는 사실을 반영하지 않고 정규분포로 근사하기 때문에 시점이 많이 지난 후 부터는 정확도가 떨어진다. 병력의 수가 음수가 될 수 없다는 사실을 반영하고 전투가 진행되고 시간이 많이 지난 후의 결과도 쉽게 근사할 수 있는 방법을 추후 연구 과제로 남긴다.

참고문헌

Amacher, M. and Mandallaz, D. (1986), Stochastic version of Lanchester equations in wargamimng, *European Journal of Operational Research*, **24**(1), 41-45.

Ancker Jr, C. J. and Gafarian, A. V. (1988), The validity of assumptions underlying current uses of Lanchester attrition rates, *Technical Report TRAC-WSMR-TD-7-88. US Army TRADOC Analysis Command-WSMR*, White Sands Missile Range, New Mexico.

Baek, S. W. and Hong, S. P. (2013), A pragmatic method on multi-weapon Lanchester's law, *Journal of the Korean Operations Research and Management Science Society*, **38**(4), 1-9.

Kaup, G. T., Kaup, D. J., and Finkelstein, N. M. (2005), The Lanchester (n, 1) problem, *Journal of the Operational Research Society*, **56**(12), 1399-1407.

Karmeshu, and Jaiswal, N. K. (1986), A Lanchester-type model of combat with stochastic rates, *Naval Research Logistics Quarterly*, **33**(1),

- 101-110.
- Kress, M. and Talmor, I. (1999), A new look at the 3 : 1 rule of combat through Markov stochastic Lanchester models, *Journal of the Operational Research Society*, **50**(7), 733-744.
- Kingman, J. F. C. (2002), Stochastic aspects of Lanchester's theory of warfare, *Journal of applied probability*, 455-465.
- Lanchester, F. W. (1916), Aircraft in warfare : The dawn of the fourth arm., *Constable and Company*, London.
- Lappi, E., Pakkanen, M. S., and Åkesson, B. (2012), An approximative method of simulating a duel, *Proceedings of the Winter Simulation Conference*, Winter Simulation Conference, 208.
- Strickland, J. (2011), Fundamentals of Combat Modeling, Lulu.com.
- Strickland, J. (2011), Mathematical Modeling of Warfare and Combat Phenomenon, Lulu.com.
- Taylor, J. G. (1983), Lanchester models of warfare, Military Applications Section, *Operations Research Society of America*, Alexandria, VA, **II**.