

이산요소법을 이용한 수치해석에서의 상사성 이론의 적용성 검토

Feasibility Study on Similarity Principle in Discrete Element Analysis

윤태영 Yun, Taeyoung
박희문 Park, Hee Mun

정회원 · 한국건설기술연구원 수석연구원 · 교신저자 (E-mail : tyun@kict.re.kr)
정회원 · 한국건설기술연구원 연구위원 (E-mail : hpark@kict.re.kr)

ABSTRACT

PURPOSES : The applicability of the mechanics-based similarity concept (suggested by Feng et al.) for determining scaled variables, including length and load, via laboratory-scale tests and discrete element analysis, was evaluated.

METHODS : Several studies on the similarity concept were reviewed. The exact scaling approach, a similarity concept described by Feng, was applied in order to determine an analytical solution of a free-falling ball. This solution can be considered one of the simplest conditions for discrete element analysis.

RESULTS : The results revealed that 1) the exact scaling approach can be used to determine the scale of variables in laboratory tests and numerical analysis, 2) applying only a scale factor, via the exact scaling approach, is inadequate for the error-free replacement of small particles by large ones during discrete element analysis, 3) the level of continuity of flowable materials such as SCC and cement mortar seems to be an important criterion for evaluating the applicability of the similarity concept, and 4) additional conditions, such as the kinetics of particle, contact model, and geometry, must be taken into consideration to achieve the maximum radius of replacement particles during discrete element analysis.

CONCLUSIONS : The concept of similarity is a convenient tool to evaluate the correspondence of scaled laboratory test or numerical analysis to physical condition. However, to achieve excellent correspondence, additional factors, such as the kinetics of particles, contact model, and geometry, must be taken into consideration.

Keywords

similarity, scale factor, numerical analysis, scaled test, discrete element method

Corresponding Author : Yun, Taeyoung, Senior Researcher
Highway Research Division, Korea Institute of Construction Technology,
283, Goyangdae-ro, Ilsanseo-gu, Goyang-si, Gyeonggi-do, 10223, Korea
Tel : +82.31.910.0445 Fax : +82.31.910.0161
E-mail : tyun@kict.re.kr

International Journal of Highway Engineering

http://www.ksre.or.kr/

ISSN 1738-7159 (Print)

ISSN 2287-3678 (Online)

Received Feb. 16, 2016 Revised Mar. 03, 2016 Accepted Mar. 23, 2016

1. 연구배경 및 목적

유한요소법(finite element method, FEM) 또는 전산 유체역학(computerized fluid dynamics, CFD) 등으로 대표될 수 있는 연속체 역학(continuum mechanics)에 기반을 둔 수치해석기법(numerical analysis)은 제품을 생산하거나 구조물을 건설하지 않고 이들에 대한 거동을 분석하고 예측할 수 있다는 비용-효과적 장점으로 인하여 조선, 자동차, 항공 분야 등의 균질성 재료

를 활용하는 고부가가치 산업에서 활발하게 사용되고 있다(Zhang et al. 2008, Zhao and Shan 2013, Kafui et al. 2011, Fries et al. 2011). 그러나 도로를 포함한 건설 분야에서는 수치해석기법에 대한 신뢰가 비교적 높지 않아 교량 등의 일부 제한된 분야에서만 적용되고 있으며, 실제적으로는 구조물을 그대로 재현하거나 역학적 거동에 대하여 상사성(similarity or similitude)을 가질 것으로 예상되는 축소 구조물의 시공과 이를 통

한 실내실험을 통하여 거동을 예측하거나 분석하는 경우가 일반적이다. 이는 다른 분야의 경우와는 달리 도로 및 건설 분야의 구조물의 전체 크기에 비하여 재료 물성에 대하여 대표성을 나타낼 수 있는 최소 단위인 대표 체적 요소(representative volume element, RVE)의 크기가 매우 작기 때문에 합리적인 구성방정식을 개발하기 위하여 많은 연구가 필요한 동시에, 균질성(homogeneity)과 연속성(continuity)을 기반으로 하는 일반적인 연속체 역학에 기반을 둔 수치해석 기법을 활용할 때의 비용-효과적인 장점이 상쇄되기 때문이다. 이에 최근에는 연속성이 있는 구조물에 대하여 이러한 문제를 해결할 수 있는 현실적 대안으로 재료의 대표 체적요소의 거동과 전체 구조물 시스템의 거동을 연동하는 멀티 스케일(multiscale) 해석 기법이 대안으로 제시되고 있다 (Teixeira et al. 2014). 한편 연속성이 없는 재료 또는 이산성 재료의 거동 예측에 효과적인 이산요소법(discrete element method, DEM)은 실제적인 재료 입자의 동적 거동을 모사할 수 있으며, 다양한 접촉모형(contact model)을 통하여 균질하지 않은 재료의 분말, 유체, 고체의 상태변화 및 동적거동 특성을 순차적으로 또는 동시적으로 모사할 수 있다는 장점으로 인하여 주목받고 있다. 그러나 균질성이 낮은 건설재료에 대하여 이산요소법을 활용하기 위해서는 연속체 역학에서 대표 체적 요소를 매우 작게 설정하는 것과 유사하게 매우 작은 입자(particle)를 적용해야 하는데, 이때 필요한 해석시간이 유한요소법이나 전산유체역학에서 필요한 해석시간에 비하여 매우 길기 때문에 실제 적용에 어려움이 많다. 따라서 합리적인 수치해석 도구로서 이산요소법을 효율적으로 활용하기 위해서는 재료의 동적 특성에 대하여 상사성을 최대한 유지하는 조건에서 최대 입자크기를 합리적으로 결정하는 것이 가장 현실적인 방법이라 할 수 있다. 이러한 결정조건을 활용하면, 이산요소법 또는 이산요소법과 전산유체역학과의 결합(coupling)을 통하여 도로하부의 동공의 발생이나 함몰의 발생, 자가다짐 콘크리트(self-compacting concrete, SCC), 사면에서 흙의 전단파괴 및 3D 프린터에서 사용되는 유동적 건설재료의 거동을 합리적으로 예측하거나 수치해석을 기반으로 조건에 맞는 재료의 조성을 결정할 수 있는 가능성이 매우 높아진다. 특히 상사성을 잃지 않는 최대 입자크기가 역학적인 이론을 기반으로 도출된다면, 수치해석에서의 입자크기 등을 결정하기 위한 조건뿐만 아니라 재료의 정적 또는 동적 평가를 위하여 수행하는 실내 축소실험에서의 상사조건을 결정할 수도 있다는 장점이 있다. 따라서 본 연구에서는

실내실험에서의 하중이나 단면의 합리적 결정과 이산요소법을 활용한 수치해석에서 입자의 확대를 결정하기 위한 기존 역학적 방법의 적용 가능성을 검토하고자 하였다. 이를 위하여 현재까지의 상사성 관련 문헌을 고찰하고 역학에 근거한 조건을 유도하였으며, 이를 개략적으로 검증하기 위하여 입자 운동의 가장 단순한 조건인 구(sphere)의 자유낙하 조건에 대한 상사성 평가를 수행하였다.

2. 상사성의 기본개념

2.1. 역학적 상사성의 의미

도로를 포함한 건설 분야에서는 전체 구조물의 거동 특성을 사전에 검토하기 위하여, 구조물을 실제 현장에 적용하기 전에 시험시공을 통하여 분석하는 방법이 선호되고 있다. 그러나 시험시공을 통하여 공정 및 절차에 따른 실제적인 정보를 얻을 수 있다는 큰 장점이 있음에도 불구하고, 도로와 같이 주변 경계조건에 영향을 많이 받는 구조물의 경우에는 시간적 공간적 비용에 비하여 구조물의 거동에 대한 실제적 현장 조건이 충분히 조성되기에는 한계가 있다. 따라서 현장 구조물을 축소된 형태의 예비실험으로 이를 평가하는 방법이 비용-효과적인 대안으로 수행되는데, 이러한 방법에서는 구조물의 기하학적 수치에 1보다 작은 조정계수(scale factor)를 곱하여 축소시키는 것이 일반적이다. 그러나 이러한 예비실험에서 실제 사용될 재료의 기하학적 특성이나 역학적 물성을 적합하게 조정하지 않는 경우에는 상사적 특성을 제대로 나타낼 수 없는 경우가 많다. 예를 들어, 공칭치수 1.3cm 골재를 사용하는 20cm 두께의 콘크리트 슬래브에 대한 축소실험을 위하여 슬래브에 조정계수 0.1을 적용한 축소실험을 수행하는 경우가 그 대표적인 예라고 할 수 있는데, 슬래브에 적용한 조정계수 0.1을 골재에도 적용하여 형태적 특성이 유사한 0.13cm의 골재를 사용한다고 하더라도, 슬래브의 거동에 영향을 미칠 수 있는 골재 및 모르타르의 탄성계수나 파괴강도, 밀도 등의 역학적 물성의 상사성이 검토되지 않으면 슬래브의 거동이나 파손의 경향의 유의성을 보장할 수 없다. 이는 재료의 하중-파손의 관계가 선형적인 관계에 있지 않은 경우, 일반적으로 사용되는 교통하중보다 극단적으로 높은 하중이 적용된 포장 가속실험이나 실내실험의 결과를 그대로 신뢰할 수 없는 이유와 유사하다. 다음 Fig. 1은 위에서 언급된 조정계수 적용에 따른 상사성의 여부를 나타내고 있는데, 경우에 따라서는 상사성을 확보하기 위하여 크기에 관련된 변수뿐만 아니

라 물성에 관련된 변수들을 조정해야 할 필요성이 있음을 나타낸다.

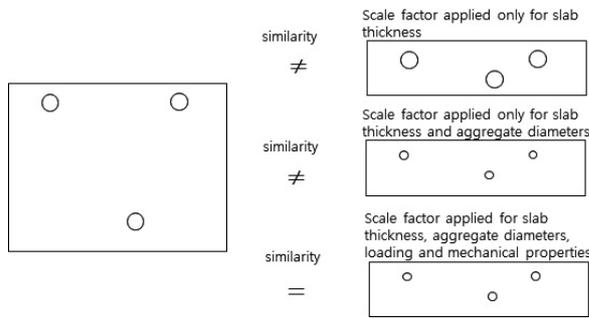


Fig. 1 Similarity Condition for Concrete Slab Test

상사성 개념은 그 활용이 필수적인 유체역학 분야에서 우선적으로 정의되었다고 할 수 있는데, 구조물의 기하학적 상사성에 대한 기하학적 상사성(geometric similarity), 시간에 대한 하중과 변위의 상사성을 고려한 운동학적 상사성(kinematic similarity), 구조물 내 외부에 작용하는 하중의 방향과 크기에 대한 상사성을 고려한 동적 상사성(dynamic similarity)으로 구분된다(Cengel and Cimbala 2014). 연속체 중에서 고체의 거동을 해석하는 정역학을 적용하는 경우에는 축소 또는 확대된 구조물에 대하여 접지면적과 하중크기를 조정하여 기하학적 상사성 및 동적 상사성을 확보하는 것으로 상사조건을 확보할 수 있는 경우도 있으나, 공기나 물과 같은 유체의 연속체를 연구하는 유체역학 관련 분야에서는 위의 3가지 상사성 모두를 확보하는 것이 전체적인 상사성 확보를 위한 전제조건이며, 이를 위하여 레이놀즈수(Reynolds number, Re), 프루드수(Froude number, Fr), 웨버수(Weber number, We) 등의 무차원 변수(dimensionless variable)가 활용되기도 한다. 이들 무차원 변수는 직경, 속도, 밀도, 동점도나 관성력, 전단력으로 표현될 수 있는 변수들의 조합으로 결정되어 유체의 운동에 대한 경계조건에 따라 선택적으로 활용될 수 있기 때문에, 관련분야에서는 조건에 맞는 무차원 변수를 제시하기 위한 연구가 활발하게 수행되기도 하였다(Cengel and Cimbala 2014, Munson et al. 2013).

3. 이산요소법에서의 상사성

3.1. 역학기반 상사조건 연구문헌 고찰

마이크로(micro) 단위에서 유체 내에 존재하는 분자의 동적 거동을 해석하는 분자 동역학(molecular

dynamics, MD)은 분자 사이에서의 역학적 관계를 뉴턴의 제 2법칙에 기반을 두고 해석하여 보다 기초적인 유체의 거동을 모사할 수 있다는 장점이 있으나, 마이크로 단위에서의 입자의 운동을 수치 해석적으로 큰 오차 없이 해석하기 위해서는 마이크로 단위보다 매우 작은 단위를 시간 증분(incremental time)으로 고려해야 하기 때문에 매우 큰 수치해석 자원을 요구한다. 이러한 제약을 해결하기 위하여 큰 입자 활용 기술(coarse graining technique)을 활용하여 역학적 또는 통계학적으로 대표할 수 있는 상사적 입자를 설정하는 경우도 있는데, 이 기술은 입자의 운동을 효과적으로 가시화(visualization)하는 방법으로 적용되기도 한다. 이외에도 분자 동역학에서 사용되는 다수의 입자를 대표할 수 있는 입자와 이들 사이에서의 상호관계를 역학적으로 설정하는 소산적 입자 동역학(dissipative particle dynamics, DPD), 다양한 크기와 종류의 입자의 흐름(particle flow) 해석에서는 운동이 유사한 입자들을 대표할 수 있는 동일크기의 대표입자를 설정하는 이산 집합법(discrete parcel method, DPM)와 여러 개의 입자들의 부피의 합과 동일한 부피를 갖는 대표 입자를 설정하는 집합 균형법(population balance method, PBM) 및 브라운 동역학(Brownian dynamics, BD) 등이 메소(meso) 단위에서의 전산유체역학 기법을 활용하기 어려운 생체나 전자장비 분야의 개발 및 분석에 적용되고 있다. Fig. 2는 이상에서 언급된 수치해석 기법의 시간 및 길이 단위에 따른 적용공간(Marshall and Li, 2014)을 나타낸다. 연속체의 개념을 적용할 수 없는 메소 단위에서 개별 입자의 동적 거동을 해석하는 이산요소법 활용분야에서는 상사성에 관련되어 확인될 수 있는 기존 연구 결과가 매우 제한적인데, 영국의 Swansea 대학의 Feng 교수에 의하여 제시된 논문 2편이 대표적이라 할 수 있다. Feng et al.(2009)은 이산요소법에서 이론적으로 합리적인 상사성을 갖기 위한 조건으로 일반적으로 입자를 표현하기 위하여 사용되는 구의 기하학적 특성을 반영한 응력-변형률 조건과 함께, 기하학적 상사성, 동적 상사성 및 역학적 상사성(mechanical similarity)을 만족할 것을 제시하였으며, 다양한 접촉모형에 대한 조정계수 결정 방법을 이론적으로 제시하였다. 또한 Feng and Owen(2014)은 상사성을 만족시키기 위한 방법으로 기하학적 변수, 운동학적 변수 및 역학적 물성 모두에 조정계수를 적용하는 완전 조정법(exact scaling approach)과 특정조건에서 얻어진 역학적 물성을 상수로 취급하고 기하학적 변수와 운동학적 변수에만 조정

계수를 적용하는 부분 조정법(partial scaling approach)을 개념적으로 비교하였다. 그러나 개념적 상사성의 실제 적용에 따른 문제점 고찰이 이산요소법의 적용 및 이를 위한 상사성 기준 설정 연구의 방향 및 완성도를 결정하는데 매우 중요한 의미를 가짐에도 불구하고, Feng et al.(2009)과 Feng and Owen(2014)의 연구에서는 모사에 대한 개념적 상사성의 실제 적용 연구는 수행되지 않았다는 한계가 있다.

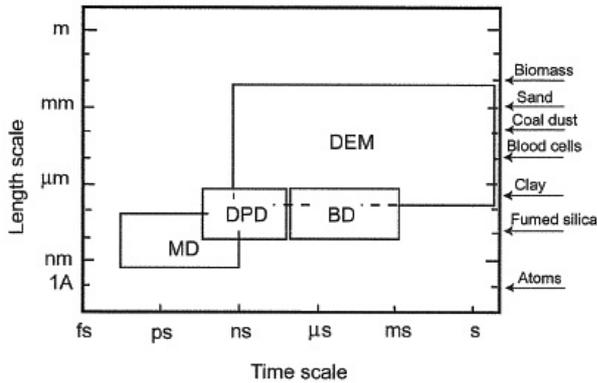


Fig. 2 Approximate Time and Length Scales for Particle Flow Simulation Methods (Marshall and Li 2014)

3.2. 역학기반 상사조건의 검토

Feng and Owen(2014)은 이산요소법에서 사용되는 접촉모형에 대하여 완전 조정법의 적용 가능성을 개념적으로 검토하기 위하여, SI 단위계(International System of Units, SI)의 차원표시(dimension Symbol)를 적용한 입자운동의 지배방정식을 활용하여 입자의 기하학적 특성을 반영한 입자 응력 및 변형률 결정을 제안한 바 있다. Feng et al.(2009)과 Feng and Owen(2014)에 의하여 제안된 바를 본 연구에서 활용하기에 적합하도록 정리한 내용은 다음 절에 나타나 있다.

• Physical Quantities Represented by Fundamental Units

Feng et al.(2009)와 Feng and Owen(2014)의 논문에서 언급된 완전 조정법을 효율적으로 활용하기 위해서는 중량, 길이, 시간과 같은 기본단위에 $[M]$, $[L]$, $[T]$ 와 같은 차원 표시를 적용할 필요가 있다. 단위 전환의 수월성을 위하여 일반적인 차원 표시와는 달리 밀도($[\rho]$), 길이, 시간을 기본단위로 설정하면 3차원 물리적 공간에서 중량, 가속도, 힘, 변형률, 탄성계수, 스프링계수, 동점도(dynamic viscosity)는 각각 다음 Eq. (1)에서

Eq. (7)과 같이 차원표시의 조합으로 표현될 수 있다.

$$m = [\rho] [L]^3 \quad (1)$$

where, $m = \text{mass}$.

$$a = [L] [T]^{-2} \quad (2)$$

where, $a = \text{acceleration}$.

$$F = ma = [\rho] [L]^4 [T]^{-2} \quad (3)$$

where, $F = \text{normal or tangential force}$.

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{[L]}{[L]} = 1 \quad (4)$$

where, $\epsilon = \text{strain}$,

$\Delta l = \text{change in length}$, and

$l = \text{original length}$.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F}{\epsilon A} = [\rho] [L]^2 [T]^{-2} \quad (5)$$

where, $E = \text{elastic modulus}$,

$\sigma = \text{stress}$, and

$A = \text{area}$.

$$k = \frac{F}{\Delta u} = [\rho] [L]^3 [T]^{-2} \quad (6)$$

where, $k = \text{spring constant}$, and

$\Delta u = \text{distance}$.

$$c = \frac{F}{du/dt} = [\rho] [L]^3 [T]^{-1} \quad (7)$$

where, $c = \text{dynamic viscosity } (c = \eta A)$,

$du = \text{infinitesimal distance}$, and

$dt = \text{infinitesimal time}$.

• Particle Strain and Stress for Selected Models

이산요소법은 뉴턴의 가속도의 법칙, 입자의 기하학적 특성, 스프링계수 또는 탄성계수 등의 역학적 물성, 액체가교(liquid ridge) 모형에서의 접촉각(contact angle)이나 소성 모형의 누적 변형률(accumulated plastic strain)과 같은 내부 상태변수(internal state variable), 접하고 있는 입자의 중첩량(overlap)에 근거하여 충돌한 입자의 반발력(repulsive force)의 방향과 속도를 결정한다. 이는 접촉에 따른 에너지의 손실을 나타내는 감쇠(damping)를 고려한 선형탄성 모형

(linear spring model)이나 Hertz-Mindlin 모형, 부착성을 고려한 JKR 모형이나 DMT 모형, 표면장력을 반영한 액체가교모형, 부착성과 소성을 함께 고려한 부착성 점소성(adhesive elastoplastic) 모형 등 모든 접촉모형에 동일하게 적용된다. 따라서 Feng and Owen(2014)에서 가정된 바와 같이, 반경(R)이 동일하고, 직경, 중첩량 및 단면적이 각각 $L, \Delta u, A$ 로 정의된 두 입자의 접촉을 나타내는 조건은 접촉모형의 종류에 무관하게 다음 Fig. 3으로 표현될 수 있다. 단, 입자의 충돌에 따른 입자 내 응력의 크기 및 분포는 일반적인 힘과 접촉면적으로 정확하게 결정할 수 없으나, 본 연구에서는 이론적 단순화를 위하여 입자의 지름을 이용하여 응력을 결정하는 것으로 가정한다.

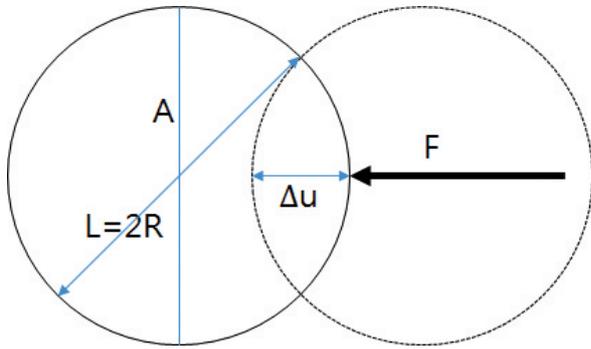


Fig. 3 Contact of Two Spheres

이산요소법에서 사용되는 대부분의 접촉모형에서 정의되는 접촉력은 일반적으로 중첩량, 직경과 내부 상태 변수의 함수로 Eq. (8)과 같이 나타내어질 수 있다. 특히 소성변형률 등의 내부 상태변수가 반드시 고려되어야 하는 점소성 모형 등을 제외한 일반적인 Hertz-Mindlin 모형 등의 접촉모형에서는 Eq. (8)이 중첩량과 직경의 함수로 단순화될 수 있다.

$$F = F(\Delta u, L, \xi) \quad (8)$$

where, F = contact force,

Δu = overlap distance between particles

L = particle length scale, and

ξ = internal state variable.

한편, 입자의 운동에 대한 상사성 확보의 목적에 따라 다를 수는 있으나, 힘과 변위보다는 특정 단위에 대하여 환산된 응력과 변형률을 기준으로 조건의 상사성을 평가하는 조건을 가정할 수 있다. Eq. (8)을 이용하는 동시에, 응력의 분포가 단순하게 정의될 수 있다고 가정하면, 구

에서의 응력과 변형률은 Eq. (9)와 같이 정의될 수 있다.

$$\sigma(\epsilon) = \sigma(\Delta u, L) = \frac{F(\Delta u, L)}{A} \quad (9)$$

$$\epsilon(\Delta u, L) = \frac{\Delta u}{L} \quad (10)$$

이산요소법에서 빈번하게 활용되는 Hertz-Mindlin 모형과 감쇠를 고려한 선형탄성 모형을 적용한 입자의 운동에 대한 상사성은 입자의 응력 및 변형률을 비교하여 평가할 수 있다. 3차원 공간에서 Hertz-Mindlin 모형은 Eq. (11)과 같이 정의되므로, 탄성계수, 프와송비 및 반경이 동일한 두 개의 구의 접촉 조건에 대하여 Eq. (9)를 Eq. (11)에 적용하면 응력의 형태로 표현된 Hertz-Mindlin 모형은 Eq. (12)와 같다.

$$F = \frac{4}{3} E^* (R^* \Delta u^3)^{1/2} \quad (11)$$

where, E^* = effective elastic modulus $\left(= \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$,

E_1, E_2 = elastic modulus of sphere 1 and 2,

ν_1, ν_2 = Poisson's ratios of sphere 1 and 2,

R^* = effective radius $\left(= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$, and

R_1, R_2 = radius of sphere 1 and 2.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4}{3} \frac{E^*}{A} \left(\frac{R}{2} \Delta u^3 \right)^{1/2} \quad (12)$$

where, R = radius of sphere.

또한 Eq. (12)에 Eq. (1)에서 Eq. (7)까지의 차원표시와 변형률을 정의한 Eq. (10)을 적용하면, 응력으로 표현된 Hertz-Mindlin 모형은 Eq. (13)과 같이 탄성계수와 변형률의 함수로 표현된다. Eq. (13)에 적용된 기준 차원표시 L, T 에 대하여 조정계수 f_s 만큼 축소 또는 확대된 공간에서의 차원표시가 Eq. (14)와 Eq. (15)와 같이 정의된다고 할 때, 축소 또는 확대된 공간에서 Eq. (13)의 Hertz-Mindlin 모형은 탄성계수와 변형률의 함수로 Eq. (16)과 같이 유도되어진다.

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4}{3} E^* \frac{4}{\pi L^2} \left(\frac{L \Delta u^3}{4} \right)^{1/2} \\ &= \frac{8}{3\pi} E^* \left(\frac{L \Delta u^3}{L^4} \right)^{1/2} \\ &= \frac{8}{3\pi} E^* (\epsilon^3)^{1/2} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{L} = f_s L \quad (14)$$

where, \bar{L} = length in scaled domain, and
 f_s = scale factor.

$$\bar{T} = f_s T \quad (15)$$

where, \bar{T} = time in scaled domain,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{8}{3\pi} E^* (\bar{\epsilon}^3)^{1/2} \\ &= \frac{8}{3\pi} \bar{E}^* (\bar{\epsilon}^3)^{1/2} \end{aligned} \quad (16)$$

Eq. (13)과 Eq. (16)의 비교를 통하여, Hertz-Mindlin 모형에는 기준공간에서의 유효 탄성계수(E^*)와 조정계수 f_s 만큼 축소 또는 확대된 공간에서의 유효 탄성계수 (\bar{E}^*)의 값의 변화없이 동일한 응력을 얻을 수 있는 것을 알 수 있으며, 이는 Hertz-Mindlin 모형이 연속체 역학에서 일반적으로 활용되는 부분 조정법이 적용 가능한 접촉모형인 것을 의미한다. 한편 3차원 공간에서 감쇠를 고려한 선형탄성 모형은 탄성계수와 동점성 계수의 조합으로 Eq. (17)과 같이 표현되며, 이에 대한 응력의 형태는 Eq. (18)로 표현된다.

$$F = k\Delta u + c \frac{du}{dt} \quad (17)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{k}{A} \Delta u + \frac{c}{A} \frac{du}{dt} \quad (18)$$

Eq. (18)에 Eq. (3)에서 Eq. (7)까지의 차원표시와 변형률을 나타내는 Eq. (10)을 적용하면, 응력의 형태로 표현된 Eq. (18)의 감쇠를 고려하는 선형탄성 모형은 3차원 공간에서 스프링 계수, 동점도 및 직경의 함수로 Eq. (19)와 같이 표현된다. 이는 감쇠를 고려한 선형탄성 모형이 적용된 축소 또는 확대된 입자에 대하여 상사성이 확보된 응력을 얻기 위해서는 입자의 직경의 변화 또는 조정계수를 고려해야 하는 것을 의미한다. Eq. (19)에서 입자의 직경이 적용된 스프링 계수의 단위는 탄성계수의 단위와 동일하며, 이는 Eq. (5)와 Eq. (6)의 관계에서 나타난 바와 같다.

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4k\Delta u}{\pi L^2} + \frac{4c}{\pi L^2} \frac{du}{dt} \\ &= \frac{4k}{\pi L} \epsilon + \eta \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (19)$$

Eq. (19)의 감쇠를 고려한 선형탄성 모형은 조정계수 f_s 만큼 축소 또는 확대된 공간에서 Eq. (20)과 같이 나타내어질 수 있다. Eq. (20)의 축소 또는 확대된 공간에서 감쇠를 고려한 선형탄성 모형에는 반드시 조정계수 f_s 를 스프링 계수에 적용해야 기준조건과 동일한 응력을 얻을 수 있는데, 이는 Hertz-Mindlin 모형과는 달리, 해당되는 접촉모형에 대하여 축소 또는 확대에 대한 불변성 (scale invariance)이 보장되지 않는 것을 의미한다. 축소 또는 확대에 대한 불변성이 보장되지 않은 경우에는 부분 조정법의 적용이 불가능한 경우이며, 역학적 물성을 조정계수로 조정하는 완전 조정법을 적용해야 한다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{4k}{\pi \bar{L}} \bar{\epsilon} + \bar{\eta} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} \\ &= \frac{4k}{\pi L f_s} \epsilon + \bar{\eta} \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (20)$$

이상의 두 접촉모형의 비교를 통하여, 특정한 실험조건에서 얻어진 역학적 물성을 이산요소법을 활용하는 수치해석에서 입자의 크기와 무관하게 적용하는 것은 상사성을 위배할 수 있으며, 이때 해석조건이 기대하는 해석조건과는 다른 조건을 나타낼 수 있다. 또한 해석시간을 감소시키기 위하여 입자의 크기를 조정할 경우에도 접촉모형의 특성에 따라 물성의 조정의 필요성을 반드시 검토해야 하는 것을 알 수 있다.

4. 자유낙하하는 부착성 구에 대한 상사조건 적용

4.1. 해석조건

본 절에서는 이상의 검토된 개념적 상사성 중에서 모든 변수에 대하여 조정계수를 적용하는 완전 조정법을 실제 해석조건에 활용하고, 이에 따른 적합성을 확인하

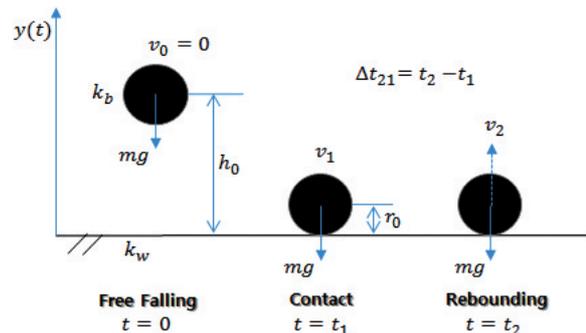


Fig. 4 Schematic Description of Free-Falling Ball (Yun and Yoo, 2015)

Table 1. Reference Variables

| h_0 (m) | r_0 (m) | g (m/sec ²) | ρ_b (kg/m ³) |
|-------------|-------------|---------------------------|-------------------------------|
| 0.5 | 0.01 | 9.81 | 2600 |
| k_b (N/m) | k_w (N/m) | c (N·sec/m) | k_c (N/m) |
| 1E6 | 1E8 | 20 | 3E5 |

고자 하였다. 해석조건은 일정한 높이에서 부착성을 갖고 자유낙하하는 구가 지면과 접촉한 후 다시 튀어오르는 과정으로 설정하였으며, 완전 조정법을 적용해야 하는 것으로 확인된 감쇠를 고려한 선형탄성 모형을 활용하였다. 자유낙하하는 구의 힘, 시간, 위치 및 속도의 관계와 역학적 물성은 각각 Fig. 4와 Table 1에 나타난 바와 같으며, 구체적인 유도방법과 설정조건은 Yun and Yoo(2015)에 나타나 있다.

4.2. 낙하운동하는 구의 운동방정식

낙하 후 지면과 접지한 후 튀어 오르는 구의 운동방정식은 1) 자유낙하 조건, 2) 지면과 접촉한 조건, 3) 튀어 오르는 조건으로 구분하여 유도할 수 있다. 구체적인 조건에 따른 운동방정식은 부착성의 유무 또는 감쇠의 조건에 따라서 세분화 될 수 있으나, 이들 운동방정식을 유도하기 위한 물리적 공간에서의 일반적인 형태의 지배방정식과 부착성을 갖는 지면과 구의 미분방정식은 각각 Eq. (21)과 Eq. (22)와 같이 표현된다.

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_i + F_d + F_e \quad (21)$$

where, m = mass of sphere

F_i = interaction force(resultant force)

F_d = damping force(dissipation energy related force), and

F_e = external force including gravity force

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = k(r_0 - y) + c \frac{dy}{dt} - mg \quad (22)$$

where, $k = k_v - k_c$,

k_v = composite spring coefficient $\left(= \frac{k_b k_w}{k_b + k_w} \right)$,

k_b = ball spring coefficient

k_w = wall spring coefficient

k_c = cohesion coefficient

r_0 = radius of ball

c = damping coefficient(dynamic viscosity), and

g = gravity force

Eq. (21)과 Eq. (22)의 우변의 첫 번째 항은 탄성 등의 개념으로 축적되거나 전달되는 힘 또는 에너지, 두 번째 항은 점탄성이나 소성 등의 개념으로 소실되는 힘 또는 에너지, 세 번째 항은 중력 등의 외부에서 작용하는 힘 또는 에너지를 나타내기 위한 항이다. 따라서 Eq. (22)의 첫 번째 항은 구와 지면의 탄성 및 부착성을 나타내며, 두 번째 항은 감쇠, 세 번째 항은 구에 작용하는 중력의 영향을 나타내는 것을 알 수 있다.

4.3. 조정계수의 적용 및 이에 따른 해석결과

Eq. (22)의 미분방정식을 조건에 따라 주어진 초기값을 이용하여 풀면, 자유낙하 조건, 지면과 접촉한 조건, 튀어 오르는 조건에 대하여 각각 Eq. (23), Eq. (24), Eq. (25)과 같은 분석적 해를 얻을 수 있다(Yun and Yoo 2015).

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0 \quad (23)$$

$$y(t-t_1) = e^{-\lambda(t-t_1)} \left[\left(\frac{mg}{k_v} \right) \cos(\omega_d(t-t_1)) + \right. \quad (24)$$

$$\left. \frac{\lambda \left(\frac{mg}{k_v} \right) - \sqrt{2g(h_0-r_0)}}{\omega_d} \sin(\omega_d(t-t_1)) \right] + r_0 - \frac{mg}{k_v}$$

where, $\lambda = \frac{c}{2m}$,

$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$, and

$\omega = \sqrt{\frac{k_v}{m}}$.

$$y(t-t_2) - y(t_2) = -\frac{1}{2}g(t-t_2)^2 + v_2(t-t_2) \quad (25)$$

where, v_2 = outward velocity at time t_2 .

Eq. (23), Eq. (24), Eq. (25)에서 공통적으로 적용되어 조정계수의 적용이 반영되어야 할 기본적인 변수는 시간, 길이, 중력, 동점성 계수, 스프링 계수 등 5개인 것을 확인할 수 있으며, 이외의 변수들은 이상의 5개 변수의 조합으로 수식에 따라 자동적으로 결정된다. 조정공

간(scaled space)에서의 차원표시는 기준공간(reference space)에 대한 조정공간의 관계를 어떻게 설정하느냐, 즉 조정계수를 어떤 기본단위에 적용하느냐에 따라 달라진다. Eq. (26)과 Eq. (27)은 각각 해당 조건에서 밀도, 길이, 시간을 기본단위로 설정하고, 길이에 관련된 변수에만 조정계수를 적용한 경우의 조정된 공간에서의 중력과 스프링계수를 나타내고 있으며, Eq. (28)과 Eq. (29)는 각각 길이와 시간에 관련된 변수에 조정계수를 적용한 경우의 중력을 나타내고 있다. Table 2는 조정된 공간에서 길이에 조정계수를 적용한 경우와 길이와 시간에 조정계수를 적용한 경우에 대하여 5개 변수의 변화를 나타내고 있다.

$$\begin{aligned} \bar{g} &= [\bar{L}] [\bar{T}]^{-2} = f_s [L] [T]^{-2} \\ &= f_s g \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{k} &= [\bar{\rho}] [\bar{L}]^3 [\bar{T}]^{-2} = f_s^3 [\rho] [L]^3 [T]^{-2} \\ &= f_s^3 k \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{g} &= [\bar{L}] [\bar{T}]^{-2} = f_s f_s^{-2} [L] [T]^{-2} \\ &= f_s^{-1} g \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{k} &= [\bar{\rho}] [\bar{L}]^3 [\bar{T}]^{-2} = f_s^3 f_s^{-2} [\rho] [L]^3 [T]^{-2} \\ &= f_s k \end{aligned} \quad (29)$$

Table 2. Scaled Quantities

| | $\bar{\rho} = \rho, \bar{L} = f_s L, \bar{T} = T$ | $\bar{\rho} = \rho, \bar{L} = f_s L, \bar{T} = f_s T$ |
|------------------------------------|---|---|
| \bar{t} (m) | t | $f_s t$ |
| \bar{h}_0 (m) | $f_s h_0$ | $f_s h_0$ |
| \bar{g} (m/sec ²) | $f_s g$ | $f_s^{-1} g$ |
| \bar{c} (N·sec/m) | $f_s^3 c$ | $f_s^2 c$ |
| \bar{k} (N/m) | $f_s^3 k$ | $f_s k$ |

Fig. 5는 Eq. (23), Eq. (24), Eq. (25)에 조정계수 1.2 (20% 증가조건)를 적용하지 않은 기준공간(reference), 길이 단위에만 적용한 조정공간(scaled L) 및 길이 단위와 시간 단위에 적용한 조정공간(scaled L and T)에서 구의 자유낙하와 튀어 오름에 따른 위치의 변화를 시간에 따라 나타내고 있으며, Fig. 6은 기준공간과 길이에만 조정계수가 적용된 조정공간에서 구가 지면과 접

촉했을 때의 접촉에 따른 거동의 변화를 나타내고 있다. Fig. 5에 나타난 바와 같이, 조정계수를 길이 단위에만 적용한 경우에는 구의 반경과 최초높이가 20% 상승되었으나, 지면에 접지하는 시각과 튀어 올라 가장 높은 위치에 다다를 때의 시각은 기준공간에서의 동일한 것을 확인할 수 있다. 이는 길이 단위의 조정으로 인하여 그에 따라 중력, 감쇠, 스프링계수가 모두 체계적으로 변화되었기 때문에 역학에 근거한 완전 조정법이 문제없이 적용되었음을 나타내며, 조정계수가 길이 단위에도 적용된 경우에는 최초높이와 지면에 접지하는 시각, 튀어올라 가장 높은 위치에 다다를 때의 시각은 모두 20% 증가되어 중력, 감쇠, 스프링계수에 대하여 완전 조정법이 적절히 반영되었음을 나타낸다. 이러한 결과는 기준조건에서의 실제 콘크리트 슬래브의 거동을 축소 또는 가속조건에서 상사적으로 평가하기 위하여 축소 단면의 크기, 축소하중의 크기 등의 변수를 필요에 따라 역학적으로 결정할 수 있다는 가능성을 나타내기 때문에 매우 중요한 의미를 갖는다.

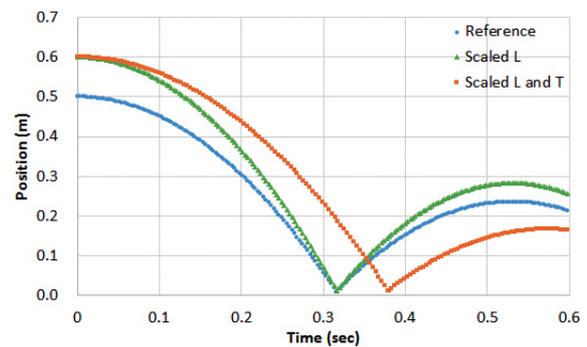


Fig. 5 Effect of Scale Factor to Overall Position-Time Relationship of Ball

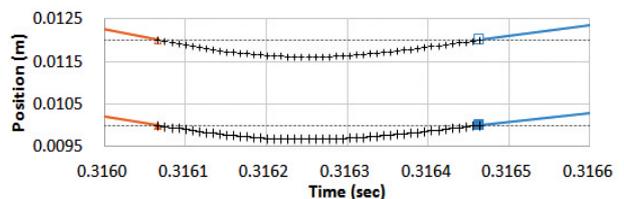


Fig. 6 Effect of Scale Factor to Position-Time Relationship of Ball in Contact

그러나 완전 조정법을 적용하면 Fig. 7과 같이 입자의 반경과 함께 최초 높이를 포함한 모든 길이 단위가 조정되기 때문에, 이산요소해석에서 해석시간을 단축시키기 위하여 여러 입자를 하나의 큰 입자로 대체하는 방법이 그대로 적용될 수 없음을 명확하게 알 수 있다. 따라서 완전 조정법을 포함한 상사조건 결정방법을 활용할 경

우에는 해석 결과의 타당성을 확보할 수 있는, 입자와 주변경계의 크기 비교를 통한 최대 입자크기 제한 또는 입자 대체 시 변화된 조건을 고려할 수 있는 접촉모형 보완 등의 추가적인 조건이 필요한 것으로 판단된다.

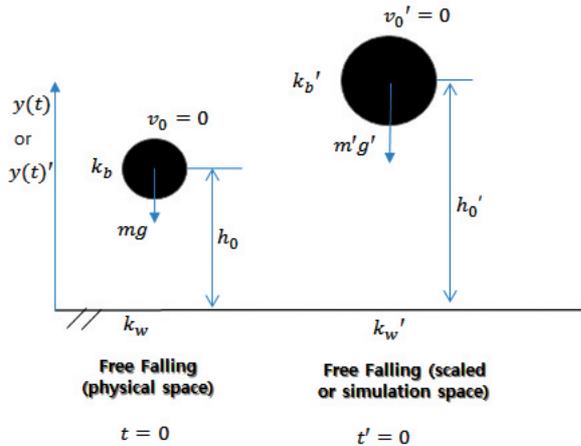


Fig. 7 Initial Condition of Free-Falling Ball in Physical and Scaled Space

한편 본 연구를 통하여 상사조건과 이산요소법의 활용가능성을 평가하기 위한 시멘트 모르타르 또는 페이스트, 아스팔트 바인더 등의 유동성 재료는 자유낙하하는 구의 조건과는 달리 입자 사이의 부착력이나 결합력(bonding strength)이 상대적으로 높아 연속체의 특성을 갖는 경우로 가정할 수 있다. 이와 같이 연속체의 특성이 높고 주변의 경계조건이 비교적 자유로울 때 여러 입자를 하나의 큰 입자로 대체할 경우에는 상사성에 대한 신뢰도가 높아질 수 있는데, 이는 재료의 운동에 대한 입자의 기하학적 특성의 영향이 상대적으로 작아져 재료를 대표하는 대표 체적 요소를 상대적으로 크게 설정할 수 있기 때문이다. 따라서 완전 조정법을 포함한 역학적 상사조건 결정 검토 결과와 연속체 역학에 근거한 유체역학 등에서의 기본개념을 활용하면, 이산요소 해석에서 시간을 단축시키기 위하여 필요한 조건은 다음과 같이 정리될 수 있다.

- 완전 조정법을 적용한 결과에서 확인한 바와 같이, 이산요소해석에서 해석시간을 단축하기 위하여 조정계수를 적용하여 입자의 반경을 증가시키는 방법은 특정한 하나의 입자를 그보다 큰 입자로 대체하는 개념으로 적용될 수 없다.
- 경계조건과의 접촉에도 불구하고 입자 사이의 연속성이 가정될 수 있도록 부착성이나 결합력이 충분히 큰 작은 크기의 입자들에 대해서는 이들을 대체

할 수 있는 증가된 반경의 하나의 입자를 고려할 수 있는 가능성이 매우 높는데, 이는 응력과 변형률을 기준으로 한 연속체 개념에서 도출된 상사개념을 적용할 때 유효하다.

- 실제 입자보다 반경이 증대된 입자를 모사에서 활용할 경우에는, 대체되는 복수의 작은 입자들의 운동에 따른 상호작용을 반영할 수 있도록 접촉모형의 변화가 필요하다.
- 입자의 반경을 증가시킬 경우, 입자의 최대 반경은 입자의 속도 등을 포함하는 운동조건, 입자 사이의 상호작용을 나타내는 접촉모형, 입자가 운동하는 공간의 크기 또는 굴곡 등의 경계조건을 고려하여 결정되어야 한다. 이들 조건은 입자들 사이의 운동에 대하여 개념적으로 접근한 Feng et al.(2009)와 Feng and Owen(2014)의 연구에서 고려되지 못한 사항으로, 입자의 최대반경 제시를 통하여 역학적 상사조건 결정방법의 신뢰도를 확보할 수 있다.

5. 결론

본 연구는 실내 축소 또는 가속 실험에서 하중이나 단면의 합리적 결정과 이산요소법을 활용한 수치해석 시간 단축을 위한 입자의 확대를 위한 역학적 상사조건 결정방법과 적용성을 검토하였다. 이를 위하여 상사성에 근거한 조건을 유도하였으며, 이를 구의 자유낙하 조건에 적용하였다. 이에 따른 결론은 다음과 같다.

1. Feng and Owen(2014)에서 제안되고 본 논문에서 검토된 역학에 근거한 상사조건은 단면조건을 변화시킨 실내 축소 및 하중조건을 변화시켜 파손의 진전 형태가 다른 가속 실험에서의 재료, 단면 및 하중을 결정하기 위한 합리적인 방법으로 적용될 수 있다. 또는 변화된 조건에서의 수행된 실험결과가 실제 조건에서의 결과에 대하여 어떠한 의미를 갖는지 정량적으로 파악할 수 있는 근거로 활용될 수 있다.
2. 이상의 결과는 역학에 근거하지 않은 부분적 또는 임의적 조정을 통하여 특정한 조건에서 수행된 축소 실험에서 얻어진 결과가 실제 조건을 모사할 수 없음으로 이론적으로 증명하는 의미를 갖는다.
3. 자유낙하하는 구에 역학적 상사조건 결정방법을 적용한 결과, 길이 또는 시간 등의 기본단위는 목적에 따라 체계적으로 조정이 가능하며, 이에 따라 재료의 특성을 나타내는 역학적 물성도 상수의 형태가 아닌

조정계수가 고려된 형태로 적용되어야 한다.

- 이산요소해석에서 큰 입자로 여러 개의 작은 입자를 대체하기 위해서는 역학적 상사조건 결정방법 이외에 추가적인 조건이 필요하며, 이를 위하여 입자의 운동조건, 접촉모형, 경계조건 등이 고려된 무차원 변수 형태의 조건이 제시되어야 할 필요성이 있다.

감사의 글

이 논문 2015년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. NRF-2015R1C1A1A01051871).

REFERENCES

Cengel YA., Cimbala JM. Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications. Third Edition, Mc Graw Hill.

Feng YT. Own DRJ. 2014. Discrete element modeling of large scale particle systems-I: exact scaling laws. *Comp. Part Mech.* Vol. 1, 159-168.

Feng YT. Han K., Own DRJ. 2009. On upscaling of discrete element models: similarity principles. *Inter. jour. Comp Aided Eng and SW* Vol. 26 No. 6, 599-609.

Fries, L., Antonyuk, S., Heinrich, S., and Palzer, S. 2011, DEM-

CFD modeling of a fluidize bed spray granulator, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 66, 2340-2355.

Marshall JS. LI S. 2015, *Adhesive Particle Flow*. Cambridge University Press.

Munson BR., Okiishi TH., Buebsch WW., Rothmayer AP. 2013. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Seventh Edition. Wiley.

Kafui, DK., Johnson, S., Thornton, C. and Seville, JPK. .2011. Parallelization of a Lagrangian/Eulerian DEM/CFD code for application to fluidized beds. *Powder Technol.*, Vol. 207, 270-278.

Teixeira JES., Kim Y., Souza FV., Allen DH., and Little DN. 2014. Multiscale Model for Asphalt Mixtures Subjected to Cracking and Viscoelastic Deformation. *Transportation Research Record*, Vol. 2447, 136-145.

Yun TY. Yoo PJ. 2015. Implementation and verification of linear cohesive viscoelastic contact model for discrete element method. *Int, J, Highw, Eng.* Vol. 17, No. 4, 25-31.

Zhang, MH., Chu, KW., Wei, F., and Yu, AB. 2008, A CFD/DEM study of the cluster behavior in riser and downer reactors, *Powder Technol.*, Vol. 184, 151-165.

Zhao, J., Shan, T., 2013, Coupled CFD-DEM simulation of fluid-particle interaction in geomechanics, *Powder Technology*. Vol. 239, 248-258.