

## 궤도결정을 위한 비선형 필터

윤장호<sup>1,†</sup>

<sup>1</sup>극동대학교 항공정비학과

## Nonlinear Filter for Orbit Determination

Jangho Yoon<sup>1,†</sup>

<sup>1</sup>Dept. of Aviation Maintenance, Far East University,

**Abstract** : Orbit determination problems have been interest of many researchers for long time. Due to the high nonlinearity of the equation of motion and the measurement model, it is necessary to linearize the both equations. To avoid linearization, the filter based on Fokker-Planck equation is designed. with the extended Kalman filter update mechanism, in which the associated Fokker-Planck equation was solved efficiently and accurately via discrete quadrature and the measurement update was done through the extended Kalman filter update mechanism. This filter based on the DQMOM and the EKF update is applied to the orbit determination problem with appropriate modification to mitigate the filter smugness. Unlike the extended Kalman filter, the hybrid filter based on the DQMOM and the EKF update does not require the burdensome evaluation of the Jacobian matrix and Gaussian assumption for the system, and can still provide more accurate estimations of the state than those of the extended Kalman filter especially when measurements are sparse. Simulation results indicate that the advantages of the hybrid filter based on the DQMOM and the EKF update make it a promising alternative to the extended Kalman filter for orbit estimation problems.

**Key Words** : Nonlinear Estimation, Kalman Filter, Fokker-Planck Equation, Bearing Only Tracking

### 1. 서 론

궤도결정은 인공위성이나 달이나 행성 같은 천체의 궤도를 결정하는 기술이다. 위성의 궤도결정은 수세기 동안 천문학자와 수학자가 관심을 가져온 문제이다. 예를 들면 1801년 수학자 가우스는 최소자승법(least square method)을 이용하여 소행성 Ceres의 궤도를 예측한 적이 있다[1].

궤도결정을 위해 예측 위성의 움직임은 일련의 운동방정식으로 나타내지며 위성의 상태(state)는 관측 결과를 이용하여 궤도를 예측하게 된다. 위성에 대한 관측은 주로 지상에서 이루어지며 계측자료

(observational data)는 통상 azimuth, elevation, 거리(range)등 으로 이루어지며 궤도의 예측은 이것들을 기반으로 위성의 위치와 속도를 예측함을 의미한다.

위성은 대개 중력, 대기항력, 태양풍등의 여러 가지 종류의 힘의 영향 하에 있다[2]. 이로 인해 위성의 동역학적 운동방정식은 대개 높은 비선형성을 가지며 위성이 놓여있는 환경에 대한 정확한 정보의 부족은 위성상태의 예측의 정확성을 제한한다. 또한, azimuth, elevation, 거리(range)등의 위성상태에 관련된 관측자료 역시 높은 비선형성을 포함하고 있다[3].

이러한 비선형성으로 칼만필터와 같은 선형예측법을 적용하기 힘들다. 이로 인해 선형예측법을 적용하기 위해 운동방정식(equation of motion)과 측정모델(measurement model)를 선형화 시킨다. 이로 인해

Received: Oct. 27, 2015 Revised: Dec 17, 2015 Accepted: Dec 21, 2015

† Corresponding Author

Tel: +82-43-880-3897, E-mail: yoon00@kdu.ac.kr

Copyright © The Society for Aerospace System Engineering

확장칼만필터(Extended Kalman Filter)에 기반을 둔 필터가 많이 사용되어왔다. 최근 선형화로 인한 문제를 해결 하기위해 무향칼만필터(Unscented Kalman Filter)에 기반을 둔 필터가 사용되고 있다. 이 논문에서는 선형화나 역학계가 가우시안 프로세스라는 가정과 같은 특정한 가정 없이 접근하는 전체적 접근법(global approach)이 필터설계에 사용되었다.

## 2. 궤도결정 필터설계

### 2.1 비선형 필터문제

비선형 필터문제는 비선형 stochastic system의 상태를 노이즈가 섞인 측정결과를 이용 시스템의 상태를 예측하는 것으로 가우시안 오렌 기간 동안 연구의 대상이 되어왔다[4]. 오늘날까지 비선형 필터는 항법, 유도, 레이더 추적, 항공기나 인공위성의 궤도추적이나 상태감시, 금융시장이나 증권시장의 예측 등, 여러 분야에서 다양한 목적을 위해 사용되어지고 있다 [5-7].

일반적으로 베이시안방식(Bayesian Framework)이 가장 흔히 사용되는 최적 비선형 필터문제의 접근방법이다. 이 방식의 핵심은 동역학계(dynamic system)의 상태(state)의 센서 측정값을 이용해서 보정된 확률밀도함수(pdf: probability density function)를 결정하는 것이다. 그러나 최적화된 베이시안 필터는 아주 제한적인 문제를 제외하고는 정확하게 구해질 수 없다. 따라서 실제적으로는 확장칼만필터와 같은 근사적 필터가 사용되어지고 있다[4, 8-9]. 칼만필터나 그와 유사한 필터들은 역학계가 가우시안 프로세스라는 가정 하에서 그리고 비선형 역학계의 선형화를 바탕으로 개발되었고 이것을 비선형 필터문제에서의 국지적 접근(local approach)이라한다. 이 경우 만약 해당 역학계가 가우시안 프로세스가 아닐 경우에는 사용되어 질 수 없고 또한 확장칼만필터의 경우에는 역학계의 비선형도가 높으면 정상적으로 작동하지 않을 수 있다. 이러한 한계는 특정한 가정 없이 접근하는 전체적 접근법(global approach)에 의해 해결되어질 수 있다. 가장 대표적인 전체적 접근법에 의한 필터로는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)이용한 파티클 필터(particle filter)가 있으며 또한 포커-플랑크 방정식(Fokker Planck Equation)을 이용한 방법이 있

다[10-15]. 이 논문에서는 포커-플랑크 방정식을 이용하여 필터를 설계하였다

### 2.2. 포커-플랑크 방정식과 비선형 필터

비선형 동역학계는 아래의 n-차원의 이토 확률미분 방정식(Ito stochastic differential equation)을 이용한 모델로 나타낼 수 있다[4].

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, t)dt + \mathbf{G}(\mathbf{x}_t, t)d\beta_t \quad (1)$$

$\mathbf{x}_t$ 는 상태벡터(state vector),  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_t, t)$ 는 동역학계를 나타내는 행렬함수,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_t, t)$ 는 확산행렬(diffusion matrix)이며 그리고  $d\beta_t$  분산 값을  $E[d\beta_t d\beta_t^T] = Q(t)dt$ 로 갖는 브라운 운동이다. 이산 시간(discrete time)  $t_k$ 에 측정된 센서 측정값,  $\mathbf{y}_{t_k}$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{y}_{t_k} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{t_k}, t_k) + \mathbf{v}_{t_k} \quad (2)$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}_{t_k}, t_k)$ 는 측정 센서의 모델이고  $\mathbf{v}_{t_k}$ 는 측정값에 포함된 노이즈로 공분산 행렬이  $\mathbf{R}(t)$ 인 가우스 노이즈(Gaussian noise) 이다[4].

만약 Eq. 1이 나타내는 과정(process)이 Markovian diffusion process라면 포커-플랑크 방정식이 이 과정의 지배방정식이 된다[3].

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [pf_i]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [p(GQG^T)_{ij}]}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3)$$

Fokker-Planck 방정식(Eq. 3)은 원래 브라운 운동의 설명하기위해 개발되어졌다[16-17]. 이 방정식은 시간에 따라 바뀌는 동역학계의 확률밀도함수(pdf:probability density function)의 변화를 설명하는 비선형 편미분 방정식으로 때로는 콜모고로프 방정식(Kolmogorv forward equation)이라 불리기도 한다 [4].

여기에서  $p$ 는 동역학 시스템과 연계된 pdf,  $f$ 는 동역학 시스템의 모델,  $Q$ 는 공분산 행렬 (covariance matrix), 그리고  $G$ 는 노이즈가 동역학계에 주는 영향을 나타내는 확산행렬함수(diffusion matrix function)이다. 따라서 이 방정식의 근은 현재상태에 기반을 둔 미래의 pdf이므로 이 방정식은 동역학계와 연계된 pdf가 동역학계 내에서 시간에 따른 변화를 설명한다. 예

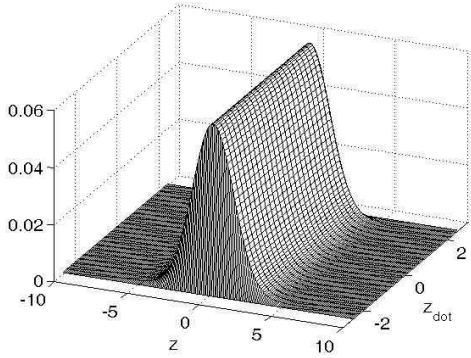


Fig. 1 Initial pdf

를 들면 Fig. 1 처럼 어떤 동역학계의 초기조건이  $z$  방향에 대해서 평균이 0인 가우시안 형식을 가졌고  $\dot{z}$  방향에 대해서는  $z$  방향에 대해서 일정한 값을 갖는다면 이 동역학계가 일정시간 Fokker-Planck에

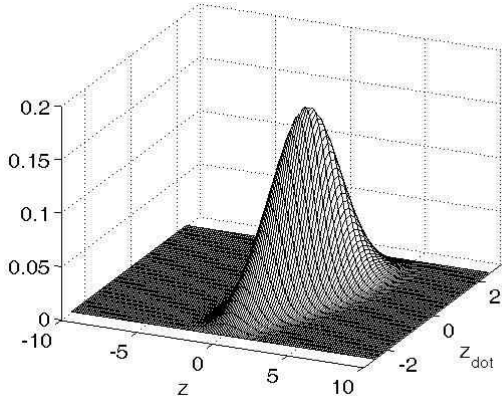


Fig. 2 Propagated pdf

의해 발전된 뒤의 결과는 Fig. 2와 같다.

귀납조건확률밀도함수(posterior conditional state pdf),  $p(\mathbf{x}_{t_0}|\mathbf{Y}_{t_0})$ 를 포커-플랑크 방정식의 초기조건으로 사용하게 되면 방정식의 근은 해당 동역학계의 연

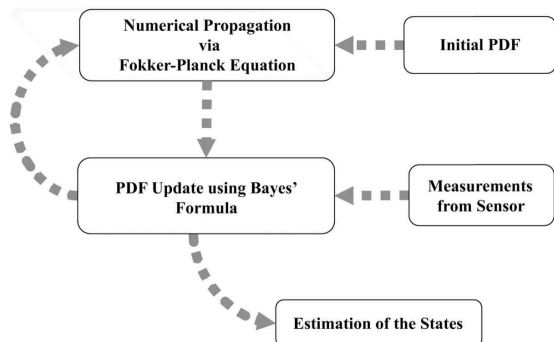


Fig. 3 Nonlinear Filter with Fokker-Planck Eq.

역조건상태 확률밀도함수(priori conditional state pdf),  $p(\mathbf{x}_{t_k}|\mathbf{Y}_{t_{k-1}})$ 이 되며 이 함수를 센서에서 얻어진 관측과 베이즈의 정리(Eq. 4)를 이용하여 보정하면 원하는 동역학계의 귀납조건상태 확률밀도함수가 얻어진다[1].

$$p(\mathbf{x}_{t_k}|\mathbf{Y}_{t_k}) = \frac{p(\mathbf{x}_{t_k}|Y_{t_{k-1}})p(\mathbf{y}_{t_k}|\mathbf{x}_{t_k})}{\int p(\xi_{t_k}|Y_{t_{k-1}})p(\mathbf{y}_{t_k}|\xi_{t_k})d\xi} \quad (4)$$

$\mathbf{Y}_{t_k} = [\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(t_k)]^T$ 는 측정값으로 이루어진 벡터이고 pdf  $p(\mathbf{y}_{t_k}|\mathbf{x}_{t_k})$ 는 센서의 특성을 나타내는 가우시안 pdf 함수이며 여기서 얻어진 pdf와 다음의 적분을 이용해서 동역학계의 상태를 추정할 수 있다[1].

$$\hat{x}_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(\mathbf{x}, t) \prod_{j=1}^n dx_j \quad (5)$$

이것이 기본적으로 포커-플랑크 방정식을 이용한 비선형 필터이다(Fig. 3)[1].

### 2.3 Quadrature Moment of Method

포커-플랑크 방정식을 이용한 방법을 사용할 경우 포커-플랑크 방정식을 풀기위해 수치해석학적 방법이 동원되어야 특히 일부 유한 차분법은 파티클 필터이상의 계산력을 요구하며 이것이 필터의 효율을 크게 떨어뜨릴 수 있다[10-15]. 따라서 이 연구에서는 비유한 차분법중 하나인 quadrature method를 이용한 Direct Quadrature Moment of Method(DQMOM)를 사용하여 포커-플랑크 방정식을 풀었다[15,18].

최근 Fokker-Planck 방정식의 비유한 차분법을 이용한 해법들이 개발되어 예측문제나 불확도 전파(uncertainty propagation)에 사용되었다. 여기서는 Direct Quadrature Moment of Method(DQMOM)가 사용되었다[18]. 이 방법은 확률밀도함수를 다차원 디랙 델타함수의 가중 합으로 아래와 같이 정의한다.

$$p = \sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} \prod_{j=1}^{N_s} \delta[x_j - \langle x_j \rangle_{\alpha}] \quad (6)$$

여기서  $w_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ 는 노드(node)  $w_{\alpha}$ 의 가중치이고  $\langle x_j \rangle_{\alpha}$ ,  $j = 1, \dots, N_s$ 는 노드  $\alpha$ 의 속성벡터(the property vector of node)로 “abscissas”라 불린다.  $N$ 는 사용된 노드의 숫자이고 and  $N_s$ 는 상태벡터

(state vector)의 크기이다. 특정 pdf가 가중치,  $w_\alpha$ 와 abscissas,  $\langle x_j \rangle_\alpha$ 의 가중 합으로 나타내어지므로(Eq. 6) 가중치와 abscissas는 특정 pdf의 평균과 분산과 같은 특성을 정확히 계산 할 수 있도록 선택되어야 한다. 이 정의를 포커-플랑크 방정식에 대입함으로 편미분 방정식인 포커-플랑크 방정식을 단순한 일반 벡터 미분 방정식으로 전환되어질 수 있다. 자세한 식의 전개와 그 결과로 얻어지는 일반 벡터 미분 방정식 소개는 참고문헌에서 볼 수 있다[18]

$w_\alpha$ 와  $\delta_{j\alpha}$ 는 시간함수로 DQMOM의 결과로 구해지며 이것들을 이용해서 pdf의 평균, 분산, 공분산과 같은 통계적 moment를 계산 할 수 있다.

$$M^{k_1, k_2, \dots, k_{N_s}} = \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha \prod_{j=1}^{N_s} \langle x_j \rangle_\alpha^{k_j} \quad (7)$$

$k_1, k_2, \dots, k_{N_s}$ 는 양의 정수로 계산하고자 하는 통계적 moment를 나타낸다.

## 2.4 측정용 이용한 보정

측정값을 이용한 보정은 베이즈의 정리(Eq. 4)에 의해서 이루어진다. 단 DQMOM는 확률밀도함수를 직접 구할 수 없고 해당 확률밀도함수의 확률모멘트를 구하기 때문에 베이즈의 정리도 이에 맞춰 수정 되어야 한다. 수정된 베이즈 정리는 다음과 같다[14].

$$w_\alpha(t, Y_{k+1}) = \frac{w_\alpha(t, Y_k) p(y_{k+1} | \langle x_1 \rangle_\alpha, \dots, \langle x_{N_s} \rangle_\alpha)}{\sum_{\alpha=1}^N w_\alpha(t, Y_k) p(y_{k+1} | \langle x_1 \rangle_\alpha, \dots, \langle x_{N_s} \rangle_\alpha)} \quad (8)$$

수정된 베이즈의 정리는 본래의 정리와는 달리 확률밀도함수를 직접 수정하는 것이 아닌 Eq. 6에 사용된 가중치를 수정한다. 이 수정된 베이즈의 정리는 구현하기가 단순하다는 장점이 있다. 그러나 가중치만을 수정하고 속성벡터속의 노드의 위치는 수정하지 않음으로 파티클필터에서 종종 관찰되는 “degeneracy” 현상과 유사한 현상을 발생시킬 수 있다. 다시 말해서 수정되지 않은 노드가 큰 의미가 없는 확률밀도함수의 꼬리부분으로 이동함으로 추정의 오차를 증가시키게 된다. Figure 4는 Eq. 8을 사용한 경우 방위각만을 사용한 표적추적의 결과로 실제위치를 필터가 온전히 예측하고 있지 못 함을 보여준다[21].

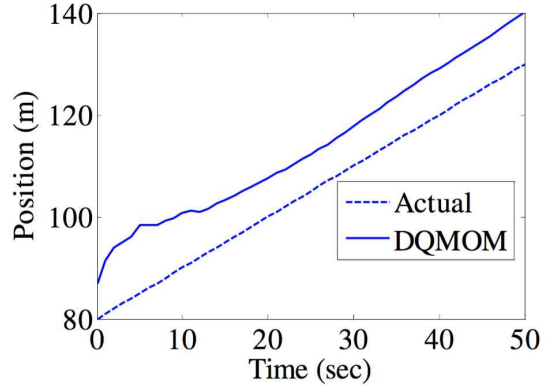


Fig. 4 방위각만을 사용한 위치예측

이 문제를 해결하기 위해서 Eq. 8대신에 확장칼만필터와 수정공식이 사용되었다[21]. 이에 필요한 예측된 상태(predicted state)와 예측된 추정 공분산행렬(predicted covariance matrix)은 가중치와 노드를 이용해서 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\hat{x}_i^- = \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha \langle x_i \rangle_\alpha \quad i = 1, \dots, N_s \quad (9)$$

$$P_{ij}^- = \left[ \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha \langle x_i \rangle_\alpha \langle x_j \rangle_\alpha \right] - \hat{x}_i^- \hat{x}_j^- \quad (10)$$

칼만이득(Kalman gain),  $\mathbf{K}_k$ 의 보정은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (11)$$

$\mathbf{H}_k = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^-}$ 는 선형화된 센서모델이며 상태의 예측과 공분산 행렬의 보정은 다음과 같이 이루어진다

$$\hat{\mathbf{x}}^{+k} = \hat{\mathbf{x}}^{-k} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \quad (13)$$

보정이 이루어진 뒤 Eq. 12 와 Eq. 13에서 구해진 상태와 공분산을 이용해서 새로운 abscissas를 선택해야 한다[18].

## 2.5 필터 Smugness

필터 smugness는 필터의 공분산행렬값이 아주 작아져서 필터이득(filter gain)이 적정값 보다 아주 작아지는 현상이다. 그 결과로 필터는 정상적으로 오차를 걸러내지 못하고 예측 값의 오차가 아주 크게 된다. 다시 이야기하면 필터는 오차가 많은 예측을 오차가 없

는 예측이라 생각하고 센서에서 들어오는 측정을 무시하게 된다[4, 21]. 이러한 현상은 궤도결정 같은 시스템의 상태(system state)보다 시스템 노이즈(system noise)가 현격히 작은 경우에 발생하기 쉽다[21]. 이를 해결하기 위한 여러 가지 방법이 개발되어 있는데 일반적으로 적응법(adaptive approach)과 비적응법(non-adaptive approach) 두 가지로 나뉜다[4, 18].

이 연구에서는 비적응법의 하나인 고정 공분산 행렬이 논문에서 제안된 필터와 비교 대상인 확장칼만필터에 사용되었다. 따라서 보정공식에서  $\mathbf{P}_k$  대신에 값이 고정된 공분산 행렬,  $\bar{\mathbf{P}}$  사용하였고 따라서 이득의 계산은 다음과 같이 바뀐다.

$$\mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (14)$$

적절한 공분산 행렬,  $\bar{\mathbf{P}}$  은 시뮬레이션을 반복함으로써 찾아야 한다[4].

### 3. 시스템 모델 (System Model)

#### 3.1 케플러 공식(Kepplerian Equation)

지구 저궤도상의 인공위성의 움직임을 지배하는 지배공식은[18]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_D \quad (15)$$

$\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ 와  $\mu$ 는 각각 위성의 위치벡터 그리고 중력상수(gravitational parameter) 이고 스칼라(scalar),  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 은 위치벡터의 크기 즉 궤도의 반지름을 나타낸다.  $\mathbf{a}_D$ 는 지구대기(earth atmosphere)로 인한 항력(drag)을 나타내며 대기밀도와 위성의 대기에 대한 상대속도의 제곱에 비례한다. 궤도상에서 위성의 운동은 지구가 완전 구형이라는 가정 하에 지구와 위성의 상호 작용으로 나타나는데, 지구의 모양은 완전 구형이 아니므로 발생하는 중력장의 섭동(perturbation) 존재하며  $\mathbf{a}_G$ 는 이를 나타낸다. 이 논문에서는 이 두 항을 제외한 공식이 사용되었다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (16)$$

#### 3.2 케플러 공식과 포커-플랑크 방정식

Process noise를 케플러 공식의 상태공간식(state space equation)은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{r^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{r^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{r^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ &\equiv \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{G} \mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (17)$$

$\mathbf{w}_t$ 는 분산값을  $E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_\tau^T] = \mathbf{Q}_t \delta(t - \tau)$ 로 갖는 가우시안 노이즈 process(Gaussian noise process)이다.

Eq. 16에 대응하는 포커-플랑크 방정식은 Eq. 17을 Eq. 3에 대입하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\left( \frac{\partial p}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial p}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial p}{\partial z} \dot{z} \right) + \frac{\mu}{r^3} \left( \frac{\partial p}{\partial x} x + \frac{\partial p}{\partial y} y + \frac{\partial p}{\partial z} z \right) \\ &\quad + \frac{Q_4}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{Q_5}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{Q_6}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (18)$$

(18)

여기서  $Q_i, i = 4, 5, 6$ 는 Eq. 3 에서 대각행렬인  $[\mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T]$ 의 마지막 세 개의 대각요소이다.

#### 3.3 측정모델(Measurement Model)

측정모델은 인공위성의 관성위치벡터(inertial position vector)이며 이것은 레이더의 위치벡터와 레이더에서 위성까지의 위치벡터의 합으로 쓰일 수 있다 (Fig. 5)

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_s + \boldsymbol{\rho}$$

$\mathbf{R}_s$ 는 레이더의 위치벡터이고  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_u \ \rho_e \ \rho_n]^T$ 는 레이더 중심 좌표계로 나타낸 인공위성의 위치벡터이다. 따라서 위성까지의 거리는  $\rho = \sqrt{\rho_u^2 + \rho_e^2 + \rho_n^2}$ 이다. Azimuth 와 elevation 각은 다음 식으로 나타낸다.

$$az = \tan^{-1} \left( \frac{\rho_e}{\rho_n} \right) \quad el = \sin^{-1} \left( \frac{\rho_u}{\sqrt{\rho_e^2 + \rho_n^2}} \right) \quad (19)$$

레이더의 위치벡터,  $\mathbf{R}_s$ 는 오차를 줄이기 위해서 지구의 정확한 모양을 반영하여 구해져야 한다[20].  $\mathbf{R}_s$ 를 지구중심관성좌표(geocentric inertia coordinate)

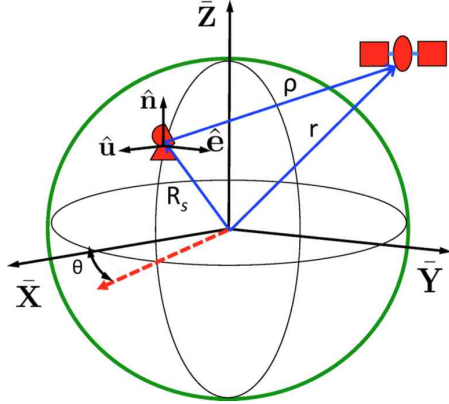


Fig. 5 Measurement Model

로 지구 적도가 블록하게 튀어나온 것을 반영하면 다음과 같다[20]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= r_\delta \cos \theta \mathbf{I} + r_\delta \sin \theta \mathbf{J} + r_k \mathbf{K} \\ \|\mathbf{R}_s\| &= \sqrt{r_\delta^2 + r_k^2} \end{aligned} \quad (20)$$

$\theta$ 는 레이더 위치의 항성시(sidereal time of the radar)이다. 그리니치 항성시(Greenwich sidereal time, GTS)를 이용한  $\theta$ 의 계산은 Astromical Almanac[19-20]에서 찾을 수 있으며  $r_\delta$ 와  $r_k$ 는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} r_\delta &= \left[ \frac{R_\oplus}{\sqrt{1 - e_\oplus^2 \sin^2 \lambda}} + H \right] \cos \lambda \\ r_k &= \left[ \frac{R_\oplus (1 - e_\oplus^2)}{\sqrt{1 - e_\oplus^2 \sin^2 \lambda}} + H \right] \sin \lambda \end{aligned} \quad (21)$$

$\lambda$ 는 레이더 위치의 위도이며  $R_\oplus = 6378.1363 \text{ km}$ 는 지구 적도의 평균 반지름 이고  $e_\oplus = 0.081819221456$ 은 지구의 이심률(eccentricity)이다. 마지막으로  $H$ 는 해발고도(elevation above the sea level)이다.

관성좌표계에서 위치벡터,  $\rho$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho = \begin{bmatrix} x - \|\mathbf{R}_s\| \cos \lambda \cos \theta \\ y - \|\mathbf{R}_s\| \cos \lambda \sin \theta \\ z - \|\mathbf{R}_s\| \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (22)$$

관성좌표에서 레이더좌표로의 변환은 다음의 회전행렬로 계산할 수 있다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

따라서 레이더의 위치는 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_e \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \theta & \cos \lambda \sin \theta & \sin \lambda \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \lambda \cos \theta & -\sin \lambda \sin \theta & \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (24)$$

## 4. 시뮬레이션과 결과

### 4.1 시뮬레이션 설정(Simulation Setup)

시뮬레이션에 사용된 위성의 궤도의 매개변수(orbit parameter)는  $a = 6778.136 \text{ km}$ ,  $e = 1.0 \times 10^{-5}$ ,  $i = 51.6^\circ$ ,  $\omega = 30^\circ$ , 그리고  $\Omega = 25^\circ$ 이다. 레이더의 위치는 위도  $30.2316^\circ$  서경  $86.2147^\circ$  이다. 측정오차는 가우스 노이즈이며 평균은 영이고 변위는 각각  $\sigma_{range} = 25.0 \text{ m}$ ,  $\sigma_{azimuth} = 0.015^\circ$ , 그리고  $\sigma_{elevation} = 0.015^\circ$  이다.

궤도 시뮬레이션에 사용된 초기 조건은  $x_0 = 4011.5713 \text{ km}$ ,  $y_0 = 4702.6493 \text{ km}$ ,  $z_0 = 3238.3582 \text{ km}$ ,  $\dot{x}_0 = -5.653084 \text{ km/s}$ ,  $\dot{y}_0 = 1.5401902 \text{ km/s}$ , and  $\dot{z}_0 = 4.7765408 \text{ km/s}$ 이다. 필터에 사용된 초기 조건은 Herrick-Gibbs법을 이용해서 구해졌다[19]. 그 값은  $x_0 = 3931.3399 \text{ km}$ ,  $y_0 = 4068.5963 \text{ km}$ ,  $z_0 = 3173.5911 \text{ km}$ ,  $\dot{x}_0 = -5.540022 \text{ km/s}$ ,  $\dot{y}_0 = 1.5093864 \text{ km/s}$ , and  $\dot{z}_0 = 4.6810100 \text{ km/s}$ 이다.

$J_2$ 와 항력 섭동은 ( $\mathbf{a}_G$ 와  $\mathbf{a}_D$ )는 시스템 노이즈로 처리되었다. 이에 따른 공정 노이즈 공분산(process noise covariance)는

$$\mathbf{Q}_t = [0 \ 0 \ 0 \ 10^{-10} \ 10^{-10} \ 10^{-10}] \text{ 이다.}$$

위성궤도의 포커-플랑크 방정식의 DQMOM을 통한 해석은 표준단위(standard unit)가 아닌 canonical unit을 수치해석학적 안정성을 위해서 사용했다. 이를 위해 초기위치가 거리단위(DU)로 사용되었고 속도단위(VU)는  $\sqrt{\mu/DU}$ 로 구해지고 시간단위는  $DU/VU$ 로 나타내어진다[18]. canonical unit 사용으로 인한 동역학 모델공식(Eq. 16)의 외형적 변화는 없다. 그러나 측정을 이용한 보정은 표준단위를 사용하여 이루어졌다.

### 4.2 시뮬레이션 결과(Simulation Results)

시뮬레이션은 1Hz와 0.05 Hz의 두 개의 다른 측정 빈도(measurement frequency)를 사용하여 이루어졌고 DQMOM을 사용한 필터와 확장칼만필터로부터의 결과가 제시되고 비교 되었다. 각 필터의 성능 비교를 위해 위성의 위치와 속도 예측의 평균 제곱근 편차 (root mean square error, RMSE)를 비교했고 평균

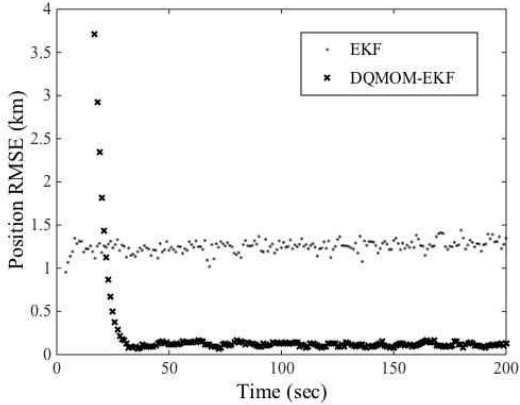


Fig. 6 Root Mean Square Error of Position(1Hz)

제곱근 편차는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)을 이용해서 구해졌다. 측정빈도가 1 Hz일 때(측정을 이용한 보정이 매초 이루어진다), Figure 6 과 7은 위치와 속도의 평균 제곱근 편차를 보여준다. Figure 6는 DQMOM을 이용한 필터가 수렴하는 속도

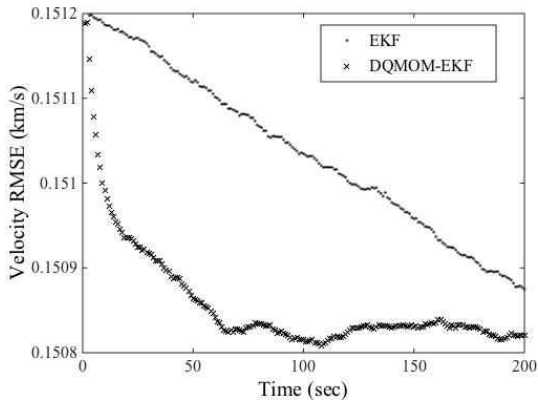


Fig. 7 Root Mean Square Error of Velocity(1Hz)

는 다소 느리나 정확도는 확장칼만필터보다 월등히 뛰어난 모습을 보여주며 Fig. 7은 속도예측에서는 본 논문이 제시한 필터가 수렴속도나 정확도면에서 훨씬 우수한 성능을 보여주고 있다.

Figure 8과 9는 측정빈도가 0.05 Hz 일 때(측정을 이용한 보정이 매 20초 마다 이루어진다), 위치와 속

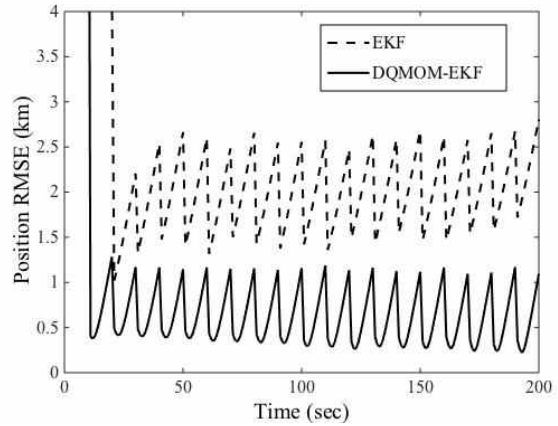


Fig 8 Root Mean Square Error of Position (0.05Hz)

도의 평균 제곱근 편차를 보여준다. Figure 8은 확장 칼만필터와 비교할 때 DQMOM을 사용한 필터가 수렴 속도나 정확도면에서 우수할 뿐 아니라 센서측정의 부재시에도 변함없이 우수한 예측을 보여주며 칼만필터가 약간의 확산성(divergence)을 보여 주는 것과는 달리 계속해서 수렴성(convergence)을 유지함을 볼 수

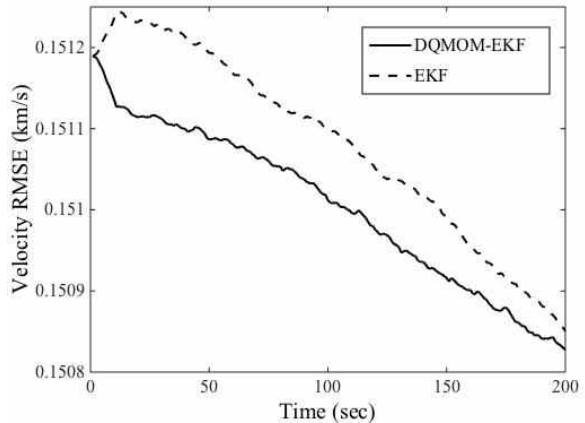


Fig. 9 Root Mean Square Error of Velocity (0.05Hz)

있다. 20초마다 보정이 이루어 질 경우 속도예측은 두 필터가 어느 정도 비슷한 성능을 보여주나 논문에서 제시한 필터가 조금 나은 성능을 수렴성과 정확성에서 보여주고 있다.

## 5. 결론

이 논문에서는 위성궤도예측을 위해 포커-플랑크 방정식과 DQMOM을 이용한 필터와 확장칼만필터를 사용하였고 두 필터의 성능을 비교하였다. 필터의 smugness 문제를 해결하기위해서 고정 공분산행렬을 사용하였고 canonical unit을 써서 DQMOM 필터의

안정성을 높였다. 시뮬레이션의 결과는 본 논문이 제시한 필터의 성능이 우수함을 보였고 특히 센서 측정을 이용한 보정빈도가 낮은 경우에도 변함없이 칼만필터에 비해 우수한 성능을 유지했다.

## 참고 문헌

- [1] E. G. Forbes, "Gauss and the Discovery of Ceres," *Journal for the History of Astronomy* Vol. 2, pp. 195-199, 1971
- [2] 정옥철, 임현정, 김화영, 안상일 "우주환경 변화에 따른 저궤도 위성의 궤도변화 분석," *항공우주시스템공학회지* 제9권 제2호, pp. 57-62, 2015
- [3] J. R. Vetter, "Fifty Years of Orbit Determination: Development of Modern Astrodynamics Methods," *Johns Hopkins APL Technical Digest*, Vol. 27 No. 7, pp. 239-252, 2007
- [4] A. Jazwinski, *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic Press, New York, NY, 2007 (re-publication of the version of 1970).
- [5] L. Aggoun, and R. J. Elliott, *Measure Theory and Filtering*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2005.
- [6] F. Michael, and M. D. Johnson, "Financial Market Dynamics," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 320, pp. 525-534, March 2003.
- [7] 유성숙, 김정래, 송용규 "위성발사체 궤도추적을 위한 융합필터 연구," *항공우주시스템공학회지* 제1권 제3호 pp. 37 -42 2007
- [8] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, MA, 1974.
- [9] R. G. Brown and P. Y. Hwhang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 3rd edition, 1997.
- [10] J. Yoon, and Y. Xu, "Alternating Direction Implicit Method Enhanced Nonlinear Filtering for Relative Orbit Estimation," *ASCE Journal of Aerospace Engineering*, Vol 23, Iss 3, pp 186-196.
- [11] S. Challa, Y. Bar-Shalom, and V. Krishnamurthy, "Nonlinear Filtering via Generalized Edgeworth Series and Gauss Hermite Quadrature," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 48, No. 6, pp. 1816-1820, June 2000.
- [12] S. Challa and Y. Bar-Shalom, "Nonlinear filter design using fokker-planck- kolmogorov probability density evolutions," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 36(1):309-315, January 2000<sup>0</sup>.
- [13] S. Musick, J. Greenswald, C. Kreucher and K. Kastella, "Comparison of particle method and finite difference nonlinear filters for low snr target tracking," In 4th International Conference on Information Fusion, 2001.
- [14] J. Yoon and Y. Xu, "Relative position estimation using fokker-planck and bayes' equations," In AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Hilton Head, South Carolina, August 2007. AIAA.
- [15] Y. Xu and P. Vedula, "A quadrature based method of moments for nonlinear filtering," *Automatica*, vol. 45, no. 5, pp. 1291-1298, May 2009.
- [16] Fokker, "Die mittlerer energie rotierender elektrischer dipole im strahlungsfeld," *Annalen der Physik*, vol. 43, pp. 810-820, 1914.
- [17] M. Planck, "U iber einen satz der statistischen dynamik und seine erweiterung in der quantentheorie," *Sitzungsber. Pr.*
- [18] P. J. Attar and P. Vedula, "Direct quadrature method of moments solution of the fokker-planck equation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317 issues 1-2, pp. 265-272, 2008.
- [19] J. Yoon, "Nonlinear Bearing Only Target Tracking Filter," *Journal of The Society for Aerospace System Engineering*, Submitted.
- [20] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, Ch. 6, Microcosm Press, NY, NY, 2001.
- [21] R. R. Bate, D. D. Mueller, and J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, Ch. 2, Dover, NY, NY, 1972.