

무향변환을 이용한 비선형 필터에 대한 연구

윤장호^{1,†}

¹극동대학교 항공정비학과

Study on Nonlinear Filter Using Unscented Transformation Update

Jangho Yoon^{1,†}

¹Dept. of Aviation Maintenance, Far East University,

Abstract : The optimal estimation of a general continuous-discrete system can be achieved through the solution of the Fokker-Planck equation and the Bayesian update. Due the high nonlinearity of the equation of motion of the system and the measurement model, it is necessary to linearize the both equation. To avoid linearization, the filter based on Fokker-Planck equation is designed. with the unscented transformation update mechanism, in which the associated Fokker-Planck equation was solved efficiently and accurately via discrete quadrature and the measurement update was done through the unscented transformation update mechanism. This filter based on the Direct Quadrature Moment of Method(DQMOM) and the unscented transformation update is applied to the bearing only target tracking problem. The proposed filter can still provide more accurate estimation of the state than those of the extended Kalman filter especially when measurements are sparse. Simulation results indicate that the advantages of the proposed filter based on the DQMOM and the unscented transformation update make it a promising alternative to the extended Kalman filter.

Key Words : Nonlinear Estimation, Kalman Filter, Unscented Transformation, Fokker-Planck Equation, Bearing Only Tracking

1. 서 론

최적 비선형 필터문제(Optimal Bayesian filter problem)는 베이시안방식(Bayesian Framework)이 일반적으로 사용된다[1-4]. 그러나 최적화된 베이시안 필터는 아주 제한적인 문제를 제외하고는 정확하게 구해될 수 없다. 따라서 실제적으로는 확장칼만필터같은 근사적 필터가 사용되고 있다[1-5]. 확장칼만필터나 그와 유사한 필터들은 역학계가 가우시안 프로세스라는 가정 하에서 비선형 역학계의 선형화를 바탕으로 개발되었고 이것을 비선형 필터문제에서의 국지적 접근(local approach)이라한다. 이 경우 만약 해당 역학계가 가우시안 프로세스가 아닐 경우에는 사용될 수 없고 또한 확장칼만필터의 경우에는 역학계의 비선형도가 높으면 정상적으로 작동하지 않을 수 있다. 이러한 한계는 특정한 가정 없이 접근하는 전체적 접근법(global approach)에 의해 해결되어질 수 있다. 가장 대표적인 전체적 접근법에 의한 필터로는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)[6]을 이용한 파티클 필터(particle filter)가 있으며 또한 포커-플랑크 방정식(Fokker Planck Equation, Eq.1)을 이용한 방법이 있다[7-13].

근(local approach)이라한다. 이 경우 만약 해당 역학계가 가우시안 프로세스가 아닐 경우에는 사용될 수 없고 또한 확장칼만필터의 경우에는 역학계의 비선형도가 높으면 정상적으로 작동하지 않을 수 있다. 이러한 한계는 특정한 가정 없이 접근하는 전체적 접근법(global approach)에 의해 해결되어질 수 있다. 가장 대표적인 전체적 접근법에 의한 필터로는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)[6]을 이용한 파티클 필터(particle filter)가 있으며 또한 포커-플랑크 방정식(Fokker Planck Equation, Eq.1)을 이용한 방법이 있다[7-13].

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [pf_i]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [p(GQG^T)_{ij}]}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1)$$

포커-플랑크 방정식(Eq. 1)은 원래 브라운 운동을 설

명하기 위해 개발되었다[14-15]. 이 방정식은 시간에 따라 바뀌는 동역학계의 확률밀도함수(pdf:probability density function)의 변화를 설명하는 비선형 편미분 방정식이다.

Figure 1의 흐름도가 보여주는 것과 같이 포커-플랑크 방정식을 이용 필터를 설계한 경우 포커-플랑크 방정식을 효율적으로 푸는 것이 필터의 성능을 좌우한

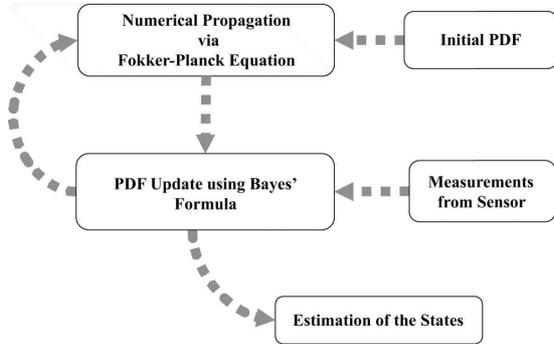


Fig. 1 Nonlinear Filter with Fokker-Planck Eq.

다. 따라서 이 연구에서는 필터의 효율을 크게 떨어뜨릴 수 있는 유한 차분법 대신 [7, 9] 비유한 차분법중 하나인 quadrature method를 이용한 Direct Quadrature Moment of Method(DQMOM)를 사용하여 포커-플랑크 방정식을 풀었다[11-13, 16-17]. 이 방법은 확률밀도함수를 Eq. 2와 같이 다차원 디랙 델타함수(Dirac delta function)의 가중 합으로 정의한 뒤 이 정의를 포커-플랑크 방정식에 대입함으로써 편미분 방정식인 포커-플랑크 방정식을 단순한 일반 벡터 미분 방정식으로 전환될 수 있다.

$$p = \sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} \prod_{j=1}^{N_s} \delta[x_j - \langle x_j \rangle_{\alpha}] \quad (2)$$

자세한 식의 전개와 그 결과로 얻어지는 일반 벡터 미분 방정식 소개는 참고문헌[16]에서 볼 수 있다.

측정값을 이용한 보정은 베이즈의 정리(Eq. 3)에 의해서 이루어진다.

$$p(\mathbf{x}_{t_k} | \mathbf{Y}_{t_k}) = \frac{p(\mathbf{x}_{t_k} | Y_{t_{k-1}}) p(\mathbf{y}_{t_k} | \mathbf{x}_{t_k})}{\int p(\boldsymbol{\xi}_{t_k} | Y_{t_{k-1}}) p(\mathbf{y}_{t_k} | \boldsymbol{\xi}_{t_k}) d\boldsymbol{\xi}} \quad (3)$$

단 DQMOM는 확률밀도함수를 직접 구할 수 없고 해당 확률밀도함수의 확률모멘트를 구하기 때문에 베이즈의 정리도 이에 맞춰 다음과 같이 수정 된다[16].

$$w_{\alpha}(t, Y_{k+1}) = \frac{w_{\alpha}(t, Y_k) p(y_{k+1} | \langle x_1 \rangle_{\alpha}, \dots, \langle x_{N_s} \rangle_{\alpha})}{\sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha}(t, Y_k) p(y_{k+1} | \langle x_1 \rangle_{\alpha}, \dots, \langle x_{N_s} \rangle_{\alpha})} \quad (4)$$

이로 부터 필요한 예측된 상태(predicted state)와 예측된 추정 공분산행렬(predicted covariance matrix)은 가중치와 노드를 이용해서 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\widehat{x}_i^- = \sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} \langle x_i \rangle_{\alpha} \quad i = 1, \dots, N_s \quad (5)$$

$$P_{ij}^- = \left[\sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} \langle x_i \rangle_{\alpha} \langle x_j \rangle_{\alpha} \right] - \widehat{x}_i^- \widehat{x}_j^- \quad (6)$$

그러나 참고문헌[12, 13]에서 지적된 것처럼 DQMOM의 결과를 적용한 수정된 베이스의 정리를 이용한 계측 수정공식(Eq. 4)은 파티클 필터의 “degeneracy” 현상과 유사한 현상을 발생시킬 수 있다.

이 문제를 해결하기 위해서 Eq. 4 대신 참고문헌[12, 13]에서는 확장칼만필터 수정공식이 사용되었고 이 논문에서는 무향칼만필터의 수정공식이 사용되었고 그 결과를 확장칼만필터와 비교하였다.

2. 무향 변환과 보정공식

2.1 무향변환(Unscented Transformation)

오늘날 가장 많이 사용되는 비선형 필터는 아마도 확장칼만필터에 근거한 필터들일 것이다. 확장칼만필터는 비선형 동역학계(nonlinear dynamic system)와 비선형 측정모델(nonlinear measurement model)을 선형화하여 사용한다. 즉 선형화를 통한 변환을 사용하여 기존의 칼만필터를 확장한 것이다(Fig. 2).

확장칼만필터는 선형화로 인해 갖는 몇 가지 문제점들이 있다[18].

- 동역학계나 측정모델이 매우 높은 경우 선형화로 인해서 발생하는 오차가 커서 필터의 안정성을 해치고 시스템 상태에 대한 예측이 매우 부정확하게

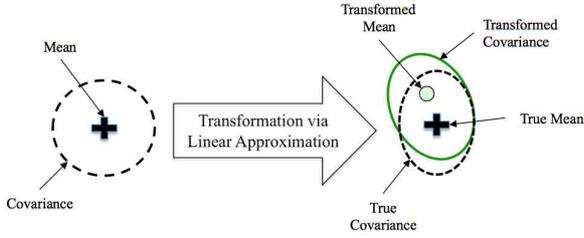


Fig. 2 Transformation via Linearization

된다.

- 선형화를 위한 자코비안(Jacobian)의 유도가 많은 경우 단순하지 않다.
- 자코비안의 수치해석학적 분석이 필요한 경우 이를 계산하기 위한 추가적인 시간과 계산력이 필요하다.

S. Julier & J. Uhlmann은 그들의 논문에서 선형화를 통한 변환대신 무향변환(unscented transformation)을 이용한 비선형 필터를 제안한다 [18, 19]. 이 필터는 오늘날 무향칼만필터(Unscented Kalman Filter)라 불리며 여러 분야에 걸쳐서 많이 사용되어 지고 있으며 이 필터는 선형화가 필요 없으므로 선형화로 인한 단점이 없어 평균과 공분산을 확장칼만필터에 비해서 정확히 구해낸다(Fig. 3).

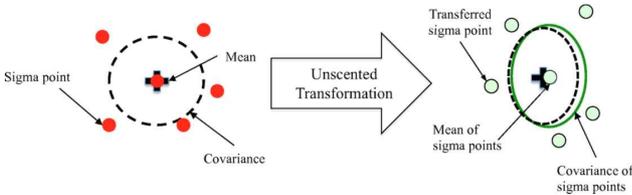


Fig. 3 Unscented Transformation

무향변환은 비선형 변환을 거치는 불규칙 변수(random variable)의 통계적 특성을 계산하는 방법으로 확률분산(probability distribution) 보다 비선형 함수의 근사값이 더 구하기 쉽다는 생각에 근거하고 있다. 무향변환은 우선 불규칙 변수의 평균과 공분산을 나타내는 sigma point라 불리는 값을 선택한다. 몬테 카를로법(Monte Carlo method)[4]와는 달리 sigma point는 개수가 훨씬 적고 정해진 결정론적인 규칙(deterministic rule)에 따라서 선택된다. 선택된 sigma point는 각각 비선형 함수를 통한 비선형 변환

을 거치며 변환을 거친 sigma point를 이용 변환 후 불규칙 변수의 평균과 공분산을 계산 할 수 있다. 무향변환은 sigma point를 선택하는 방법에 따라 여러 가지가 있으며 이 논문에서는 scaled unscented transformation을 소개 한다 [18].

2.2 Scaled Unscented Transformation

크기가 n 인 불규칙 변수(random variable), \mathbf{x} 의 평균과 공분산 행렬은 각각 $\bar{\mathbf{x}}$ 와 \mathbf{P}_{xx} 이며 비선형 함수 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 를 통해 변환 된다면 sigma point는 다음에 의해서 결정된다.

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \bar{\mathbf{x}} \\ \chi_i &= \bar{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{(n+\lambda)\mathbf{P}_{xx}} \right)_i \quad i = 1, \dots, n \\ \chi_i &= \bar{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{(n+\lambda)\mathbf{P}_{xx}} \right)_{i-n} \quad i = n+1, \dots, 2n \end{aligned} \quad (7)$$

그리고 각 sigma point는 비선형 함수를 통해 변환 된다.

$$y_i = \mathbf{f}(\chi_i) \quad i = 0, \dots, 2n$$

변환된 불규칙 변수의 평균과 공분산은 다음의 가중합을 이용하여 계산된다.

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^m y_i \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{yy} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (y_i - \bar{\mathbf{y}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (9)$$

위 계산을 위한 가중치는 다음과 같이 계산된다.

$$W_0^m = \frac{\lambda}{n+\lambda}$$

$$W_0^c = \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (10)$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n+\lambda)} \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

여기서 $\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$ 은 축척 매개변수(scaling parameter)이다. 상수 α 는 sigma point들과 평균 간의 거리를 조절하는 기능을 하며 참고문헌 [20]에 잘 설명되어져 있으며 통사 아주 작은 양의 정수이다. 상수 κ 는 또 다른 축척 매개변수로 통계변수 계산의 정밀도를 높여주며 대개 $\kappa = 3 - n$ 이 사용된다. β 는 세 번째 매개변수로 가우스 분산(Gaussian distribution)인 경우 $\beta = 2$ 가 최적이다[20, 21].

2.3 무향칼만필터(Unscented Kalman Filter)

무향변환을 확장칼만필터에 적용하여 칼만필터와 유사한 공식을 얻을 수 있으며 이것을 무향칼만필터(Unscented Kalman Filter)라 한다. 무향칼만필터에 관한 자세한 정보는 참고문헌[19-21]에서 볼 수 있다.

2.3 무향변환 보정공식

(Unscented Update Equations)

무향변환을 사용한 무향칼만필터의 보정공식(update equation)은 확장칼만필터의 보정공식과는 달리 센서의 측정모델(measurement model)을 선형화하기 위한 자코비안의 계산이 불필요하며 선형화로 인한 오차를 줄일 수 있다는 장점이 있다. 무향칼만필터의 보정공식은 다음과 같다[20, 21].

$$\mathbf{P}_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (y_i - \bar{y}_k)(y_i - \bar{y}_k)^T \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{xy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (\chi_i - \hat{x}_k^-)(y_i - \bar{y}_k)^T \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy}^- \mathbf{K}_k^T \quad (14)$$

칼만이득(Kalman gain)은 $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1}$ 로 계산되며 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 와 \mathbf{P}_k^- 는 DQMOM을 이용한 포커-플랑크 방정식의 결과에서 Eq. 5 & 6을 사용하여 계산 할 수 있다.

3. 시뮬레이션

3.1 시스템 모델(System Model)

본 논문은 참고문헌 [8]에서 사용된 단순화된 표적추적문제(Fig. 4)에 DQMOM과 무향보정공식을 적용하여 표적의 위치와 속도를 예측하였다. 하나의 센서가 사용된 이 문제에서 방위각 정보는 그 위치가 $x_p = 40t$ 그리고 $y_p = 20$ 인 움직이는 센서에 의해 얻어지며 표적의 움직임은 다음의 모델로 설명된다.

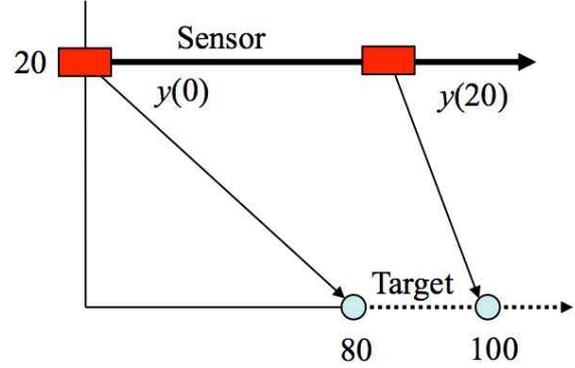


Fig. 4 Bearing Only Tracking Problem

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (15)$$

표적의 초기위치는 $\mathbf{x} = [80 \ 1]^T$ 이며 $w(t)$ 는 평균과 분산이 각각 0 와 $Q = 10^{-2}$ 인 가우스 프로세스 노이즈 (Gaussian process noise) 이다. 센서의 측정모델은 다음과 같다.

$$y(t_k) = \tan^{-1} \frac{y_p(t_k)}{x_1(t_k) - x_p(t_k)} + v(t_k) \quad (16)$$

$v(t_k)$ 는 평균과 분산이 각각 0 와 $R = (4^\circ)^2$ 인 가우스 노이즈이며 여기서 얻어지는 각도가 표적을 추적하기 위해 사용된 유일한 측정정보이다. 마지막으로 t 와 t_k 는 각각 연속시간과 이산시간이다. 이는 표적의 움직임은 연속적이며 측정은 간헐적으로 이루어짐을 나타내며 시뮬레이션에서는 1 Hz와 0.2 Hz 측정빈도가 사용되었다.

3.2 시뮬레이션과 결과

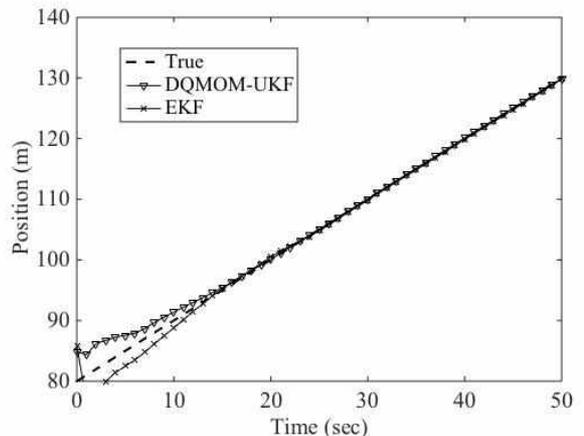


Fig. 5 Estimation of Position (1Hz)

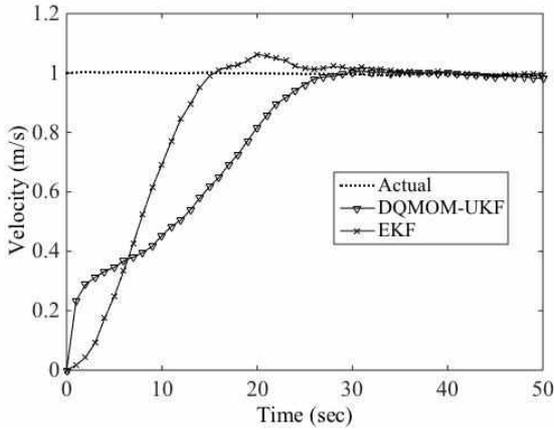


Fig. 6 Estimation of Velocity (1 Hz)

다음 두 개의 그림은 500번의 몬테카를로 시뮬레이션의 결과이다. 계측빈도 1 Hz(매초 측정을 이용한 보정이 이루어짐)를 사용하여 표적의 위치와 속도를 예측하였다. Figure 5가 보여주는 위치예측은 정확도와

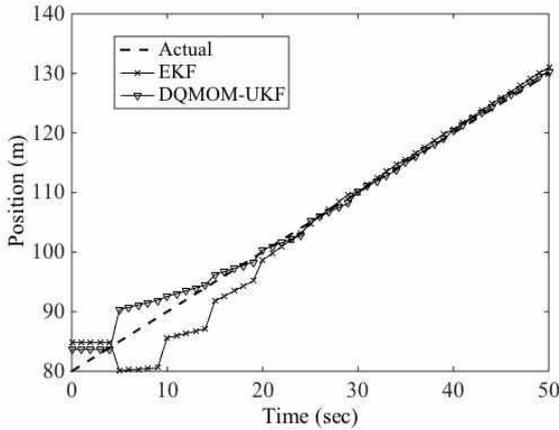


Fig. 7 Estimation of Position (0.2 Hz)

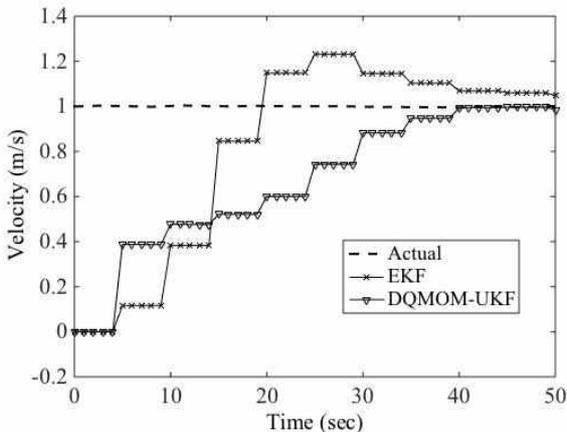


Fig. 8 Estimation of Velocity (0.2 Hz)

수렴에 있어서 양쪽이 유사한 결과를 보여주고 있으나 Fig. 6에 드러난 속도 예측에선 논문이 제시한 필터가 overshoot 없이 좀 더 안정적인 수렴형태를 보여주고 있다.

다음 두 개의 그림은 계측빈도 0.2 Hz(매 5초마다 측정을 이용한 보정이 이루어짐)를 사용하여 표적의 위치와 속도를 예측한 결과이다. 위치예측(Fig. 7)에 있어서는 확장칼만필터보다 빠른 수렴을 보여주고 있으며 정확도 역시 상대적으로 우수함을 볼 수 있다. 속도예측에 있어서는 논문에서 제시한 필터는 overshoot 없이 정확한 값에 안정적으로 수렴하고 있으나 확장칼만필터는 overshoot으로 인해 정확한 속도 값으로 수렴하지 못하고 있음을 Fig. 8에서 볼 수 있으며

4. 결론

이 논문에서는 포커-플랑크 방정식과 DQMOM을 이용한 필터에 무향변환을 이용한 보정공식을 사용하여 필터를 설계하였다. 무향변환은 측정모델(measurement model)의 비선형성으로 인한 선형화의 필요를 없애고 오차를 줄여준다. 확장칼만필터와 두 개의 다른 측정빈도를 사용하여 비교한 시뮬레이션의 결과는 본 논문이 제시한 필터의 성능이 우수함을 보였고 특히 센서 측정을 이용한 보정빈도가 낮은 경우에도 변함없이 확장칼만필터에 비해 우수한 성능을 유지했다.

참고 문헌

- [1] A. Jazwinski, Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, New York, NY, 2007 (re-publication of the version of 1970).
- [2] A. Gelb, Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge, MA, 1974.
- [3] R. G. Brown and P. Y. Hwang, Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 3rd edition, 1997.
- [4] L. Aggoun, and R. J. Elliott, Measure Theory and Filtering, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2005.

- [5] 유성숙, 김정래, 송용규 “위성발사체 궤도추적을 위한 융합필터 연구,” 항공우주시스템공학회지 제1권 제3호 pp. 37 -42 2007
- [6] 문근환, 김완범, 이정표, 최주호 “몬테 카를로 시뮬레이션을 이용한 하이브리드 로켓의 신뢰성 분석,” 항공우주시스템공학회지, Vol.7, No.4, pp.1-11, 2013
- [7] J. Yoon, and Y. Xu, “Alternating Direction Implicit Method Enhanced Nonlinear Filtering for Relative Orbit Estimation,” ASCE Journal of Aerospace Engineering, Vol 23, Iss 3, pp 186-196.
- [8] S. Challa, Y. Bar-Shalom, and V. Krishnamurthy, “Nonlinear filtering via generalized Edgeworth series and Gauss Hermite quadrature,” IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 48, No. 6, pp. 1816-1820, June 2000.
- [9] S. Challa and Y. Bar-Shalom, “Nonlinear filter design using fokker-planck-kolmogorov probability density evolutions,” IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 36(1):309-315, January 2000
- [10] S. Musick, J. Greenswald, C. Kreucher and K. Kastella, “Comparison of particle method and finite difference nonlinear filters for low snr target tracking,” In 4th International Conference on Information Fusion, 2001.
- [11] Y. Xu and P. Vedula, “A quadrature based method of moments for nonlinear filtering,” Automatica, vol. 45, no. 5, pp. 1291-1298, May 2009.
- [12] 윤장호 “궤도결정을 위한 비선형 필터,” 항공우주시스템공학회지, Vol.10, No.1, 2016 (게재예정)
- [13] 윤장호 “방위각 정보만을 이용한 비선형 표적추적 필터,” 항공우주시스템공학회지, Vol.10, No.1, 2016
- [14] Fokker, “Die mittlere energie rotierender elektrischer dipole im strahlungsfeld,” Annalen der Physik, vol. 43, pp. 810-820, 1914.
- [15] M. Planck, “Über einen satz der statistischen dynamik und seine erweiterung in der quantentheorie,” Sitzungsber. Pr.
- [16] P. J. Attar and P. Vedula, “Direct quadrature method of moments solution of the fokker-planck equation,” Journal of Sound and Vibration, vol. 317 issues 1-2, pp. 265-272, 2008.
- [17] J. Yoon, “Nonlinear Bearing Only Target Tracking Filter,” Journal of The Society for Aerospace System Engineering, Submitted.
- [18] S. J. Julier. “The scaled unscented transformation,” In American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002, volume 6, pages 4555-4559 vol.6, 2002.S.
- [19] J. Julier and J. K. Uhlmann, “Unscented filtering and nonlinear estimation,” Proceedings of the IEEE, 92(3):401-422, March 2004.
- [20] E. A. Wan, R. Van Der Merwe, “The unscented Kalman filter for nonlinear estimation,” Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, pp. 153-158, October 2000.
- [21] S. Haykin, Kalman Filtering and Neural Networks, Ch. 7, Wiley & Sons, NY, NY, 2001