한국학교수학회논문집 제 19 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 19, Number 1, 63-82, March 2016

표기 관점에서 무리수 개념 학습의 어려움과 대안

강정기[1)]

수학에서 표기는 수학의 힘을 깨닫게 하는 주요 수단이다. 이러한 관점 하에 본 연구는 무리수 개념 학습의 어려움을 표기의 관점에서 분석하고, 표기에서 비롯된 어려움을 극복할 수 있는 방안을 모색해 보았다. 근호를 사용한 무리수 표기에는 '무리수는 소수나 분수 표현이 불가하므로 문자로 표기해야 한다는 점'과 '$\sqrt{2}$의 경우에 제곱하면 2가 되는 특징을 부각하기 위해 문자에 수를 첨가한 표기'라는 정신이 깃들어 있다. 하지만 교과서에서는 무리수 표기에 대한 발견의 기회를 제공하지 않으므로 학습자는 근호 표기에 깃든 정신을 파악하기 어렵다. 더군다나 무리수 기호 발전 과정에서 문자의 투명성이 축소되어 개념적인 측면에서의 접근이 더욱 어렵게 되었다. 이런 이유로 '이중 맥락에 따른 인식론적 장애', '수치의 투명성 우세로 비롯된 인식론적 장애'가 예상된다. 인식론적 장애를 극복하기 위해서는 '표기 개발의 기회 제공', '문자의 투명성이 기존보다 강화된 표기 사용 경험'이 전제될 필요가 있으며, 본 연구에서는 이러한 원칙에 입각한 6단계의 방안을 제안하였다.

주요용어 : 표기, 무리수, 투명성, 인식론적 장애

Ⅰ. 서론

무리수 개념은 이해하기 어려운 과제이다. 초등학교 때부터 꾸준하게 다루는 유리수 개념과는 다르게 중학교 3학년이 되어서야 비로소 등장하는 무리수는 학생들에게 학습하기 어려운 개념에 해당한다(이선비, 2013). 무리수 개념은 역사적으로 오랫동안 사용되었음에도 불구하고 형식적인 엄밀한 정의는 상대적으로 늦게 형성된 개념으로 단순히 개념의 확장이 아닌 비약적 개념의 변화와 재구조화를 필요로 하는 개념이다(이지원, 2008). 특히 무리수 개념은 유리수와는 달리 일상생활과의 연관성이 거의 없고 양적으로나 직관적으로 시각화되지 않아 학생들이 이해하는데 어려움이 크다(박윤희 외, 2004).

어려움의 원인은 여러 가지가 있을 수 있지만, 그 중 한 가지로 근호를 이용한 무리수 표현에서 비롯된 이중성을 들 수 있다. $\sqrt{2}$는 수치와 문자라는 양면적 성질을 모두 지닌 표기이다. 근호를 이용한 무리수 표현의 양면성은 맥락에 따라 어느 한 측면으로 치우친다. 동일 표현임에도 맥락에 따라 수치의 면모가 강하기도, 문자의 면모가 강하기도 하다. 예컨대, 성질 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$은 수치로서의 면모가, 근호를 포함한 식의 계산

* MSC2010분류 : 97D70
1) 진영중학교 (jeonggikang@gmail.com)

$3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$은 $3a+a=4a$와 같은 문자로서의 면모가 강하다. 따라서 학생들은 각각의 경우에 어떤 특징이 우세한지를 파악할 수 있어야 한다. 그러나 맥락별로 상이한 특징을 파악하기란 쉬운 일이 아니다. 이런 측면에서 무리수 개념 학습의 어려움은 $\sqrt{2}$라는 표기가 표면적으로 수치와 문자의 양면적 성질을 보유하고 있기에 겪게 되는 인식론적 장애로 해석할 수 있다.

표기에 입각한 접근은 무리수 개념에 관한 교수·학습의 어려움을 파악할 수 있는 하나의 분석 관점이 될 수 있다. 수학에서 기호를 따로 떼어놓고 수학적 개념을 생각하기는 쉽지 않다. 이와 같은 맥락에서 Skemp(1989)는 수학적 표기는 수학이 가진 진정한 힘이 무엇인지를 깨닫게 하는 수단이라고 주장하기도 하였다. 수학적 개념과 기호 양자의 밀접한 관련성을 고려할 때, 표기의 관점에서 무리수 개념 학습의 어려움을 분석해 보는 것도 의미 있는 일일 것이다.

하지만 무리수 관련 연구 중 표기의 관점에서 접근한 연구는 많지 않으므로 이와 관련한 연구가 필요하다. 국내 연구로는 통약 불가능성을 무리수 발생의 본질이자 근간으로 보고 지도법을 제안한 연구(김부윤·정영우, 2008; 변희현·박선용, 2002; 장혜원, 2003), Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법을 제안하고 적용한 연구(이영란·이경화, 2006), 무리수 개념에 대한 학습자 및 예비교사의 이해 연구(박윤희 외, 2004; 이선비, 2013), 연분수의 관점에서 무리수를 논한 연구(강미광, 2000) 등이 있었다. 국외에서는 예비교사와 현직교사 교육 프로그램으로 개발된 무리수의 역사를 조망한 연구(Arcavi et al., 1987), 길이가 무리수인 선분의 구성과 관련한 과제에서 예비교사가 겪는 어려움의 원인을 조사한 연구(Peled & Hershkovitz, 1999), 예비 교사들이 무리수를 수직선 위에 나타내는 능력을 조사한 연구(Sirotic & Zazkis, 2007) 등이 있었다. 표기가 무리수 개념 학습에 미치는 영향력을 조사한 Zazkis & Sirotic(2004)의 연구가 있지만 표기와 관련한 보다 다양한 접근이 요구된다.

이에 본 연구에서는 무리수 개념 학습의 어려움을 무리수 표기의 관점에서 분석함으로써, 표기로부터 비롯된 어려움을 극복할 수 있는 방안을 모색해 보고자 한다. 이를 위해 먼저, 선행연구로부터 수 표현이 갖는 영향력을 조망함으로써 본 연구의 당위성을 확보하고자 한다. 아울러 무리수 표기 발전의 역사를 고찰할 것이다. 다음 무리수 표기 $\sqrt{2}$에 깃든 정신과 한계를 분석하고, 현 교과서에서의 무리수 표기와 관련한 지도법이 갖는 문제점 살펴볼 것이다. 마지막으로 무리수 표기로부터 비롯된 인식론적 장애를 살펴보고, 이를 극복하기 위한 대안을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수 표현의 영향력

실수 표현 방법은 유리수와 무리수의 구분에 상당한 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. Peled & Hershkovitz(1999)는 총 70명의 예비교사들을 대상으로 유리수, 무리수의 정의에 대한 인식을 조사하였다. 그 결과 대다수는 유리수와 무리수의 정의를 정확하게 알고 있는 것으로 나타났다. 그들은 여기서 멈추지 않고, 어떤 실수를 서로 다른 표현 방법으로 나타냈

을 때 예비교사들이 이를 어떻게 인식하는지를 조사하였다. 그 결과 예비교사들은 $0.333\cdots$ 과 $\frac{1}{3}$을 각각 무리수와 유리수로 인식하였다. 이처럼 Peled & Hershkovitz(1999)의 연구 대상인 예비교사들은 그들이 알고 있는 유리수와 무리수의 정의와는 상관없이 표현 방법에 따라 유리수와 무리수의 구분에 혼동을 겪고 있었다.

수 표현이 갖는 영향력을 더욱 잘 보여주는 개념으로 투명성과 불투명성이 있다. 투명성[2]은 수의 표현으로 인해 특정 개념이 두드러지게 되는 특성을, 불투명성은 수의 표현으로 인해 특정 개념이 숨겨지는 특성을 의미한다. 이 개념은 Lesh, Behr & Post(1987)의 연구에서 비롯된다. 그들은 표현을 투명 표현(transparent representations)과 불투명 표현(opaque representation) 두 가지로 구분하였다. Zazkis & Gadowsky(2001)는 이 용어를 빌려와 수 표현에 있어서 상대적 투명성과 불투명성의 개념을 소개하였다. 그들은 모든 수 표현은 항상 몇 가지 특징을 숨긴다는 점에서 불투명하다고 말한다. 예컨대, 784를 28^2로 표현하는 것은 완전제곱임을 강조하지만, 98로 나누어지는 특징은 강조하지 않는다. 또 784를 $13\times60+4$로 표현하는 것은 784를 13으로 나눈 나머지가 4라는 점은 강조하지만, 완전제곱이라는 특징은 강조하지 않는다. 이처럼 수의 표기에 따라 강조점이 달라진다.

Zazkis & Sirotic(2004)은 투명성과 불투명성의 개념을 유리수와 무리수에 적용하였다. 분수 표현은 유리수의 투명 표현이며, 비순환 무한소수 표현은 무리수의 투명 표현이다. 예컨대, 3/4는 유리수의 투명 표현이며, $0.010011000111100001111\cdots$은 무리수의 투명 표현이다.

유리수와 무리수의 투명 표현 구분 하에 Zazkis & Sirotic(2004)은 46명의 예비교사를 대상으로 수 표현이 무리수성에 관한 참여자의 결정에 어떠한 영향을 미치는지를 조사하였다. 구체적으로 $0.12122122212\cdots$(1 사이의 수 2는 한 개씩 증가하는 무한소수)과 53/83(이것은 계산기에 나타내면 0.63855421687로 나타나며 순환마디는 41개의 숫자로 이루어진 것)의 무리수성을 조사하였다. 그 결과 전자의 경우 23.9%, 후자의 경우 13.1%의 예비교사가 오답으로 분류되었다.

심지어 순환마디가 쉽게 나타나지 않는 특성 역시 예비교사들의 무리수 인식에 방해가 된다는 연구 결과도 있다. Zazkis & Sirotic(2010)은 46명의 예비교사들을 대상으로 53/83을 소수로 나타내었을 경우와 분수 그 자체로 나타내었을 경우 등 다양한 방법으로 나타내고 이들 각각을 어떠한 소수로 인식하는지 알아보았다. 그 결과 같은 수를 나타내고 있음에도 불구하고 소수로 변환하는 과정에서 초반에 순환마디가 쉽게 나타나지 않자 이를 무리수로 인식하였다.

수 표현은 연산에서도 영향력을 행사한다. 김부윤·정영우(2008)에 따르면, 무한소수는 완결되어진 형태가 아니므로 어떤 일정한 길이를 나타내는 수로 생각하기 어려워 연산을 이해하는데 어려움이 따른다. 순환소수의 덧셈을 분수로 바꾸어 생각하는 것은 이와 같은 이유때문이다. 소수 표현에서 겪게 되는 덧셈의 어려움은 무한소수 표현이 갖는 완결성 인식의

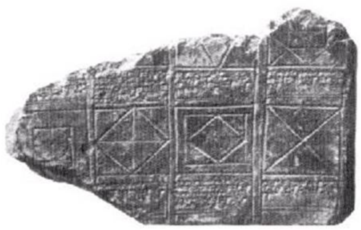
2) 본 연구에서의 투명성과 구별되는 투명성의 개념이 있기도 하다. Hierbert(1998)은 '수 기호와 관련 양 사이의 연계성이 투명한 기호를 양산한다. 기호는 관련된 참조물과 연결되면서 투명하게 된다.'고 말한다. 예컨대, 1 2/3이 설탕 한 컵과 2/3컵의 더한 양이라는 참조물과 연결될 때, 1 2/3의 투명성은 상승한다. 그가 말하는 투명성은 곧 추상적 수 표현과 관련된 참조물 사이의 연결성의 정도를 의미한다. Hierbert(1998)의 투명성은 동일 기호를 보고도 학습자의 경험에 따라 투명성의 정도가 차이가 난다는 점에서 학습자별 상대적 개념이다. 반면 본 연구에서의 투명성은 수 표현으로부터 외적으로 드러나는 특징에 주목한 개념이므로 학습자의 측면에서는 절대적 개념이다. 다만 수 표현별로 상대적 개념에 해당한다.

어려움에서 비롯된다. 다시 말해, 무한소수를 과정 중인 수로서 생각하고 대상으로 인식하지 못하는 인식론적 장애이다. 이처럼 수 표현은 연산에까지 깊숙이 개입한다.

이상의 연구 결과는 실질적으로 수를 구분하거나 수의 연산을 할 때, 형식적으로 알고 있는 정의보다 표현 방법에 많은 영향을 받고 있음을 시사한다. 특히 몇몇 선행연구의 오류 주체가 예비교사라는 점을 고려할 때, 학생들은 표현으로 인해 더욱 심각한 개념 혼란을 겪을 것으로 예측된다.

2. 무리수 표기 발전의 역사

바빌로니아 시대에 무리수는 근삿값으로 표현되어 사용되었다. 지금으로부터 4000년 전의 것으로 추정되는 고대 바빌로니아 점토판에서 $\sqrt{2}$의 흔적을 찾아볼 수 있다. [그림 Ⅱ-1]은 한 변의 길이가 30인 정사각형의 대각선의 길이를 구하는 것을 나타내고 있다.



[그림 Ⅱ-1] 고대 바빌로니아 점토판

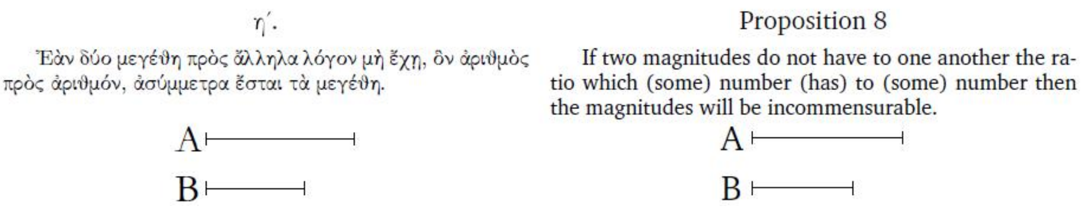
[그림 Ⅱ-1]에서 나타난 사각형의 대각선 위에는 숫자 1, 24, 51, 10이 적혀 있는데, 당시 60진법을 사용했음을 감안하여 이 수를 십진법으로 나타내면 $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}= 1.41421$를 뜻하는 것으로 $\sqrt{2}$의 근삿값에 해당한다. 또한 그림에 나타난 숫자 42, 25, 35는 $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}=42.426$을 의미하는 것으로 $30\sqrt{2}$의 근삿값으로 추정하고 있다(박윤희 외, 2004). 이처럼 바빌로니아 시대에는 무리수를 정확한 값으로 표현하지는 못하였으나, 유리수 표현을 통하여 근삿값을 구하여 사용했던 것으로 볼 수 있다. 현재의 시각에서는 근삿값이지만 당시에는 근삿값이 아닌 참값으로 간주되었을 수 있다. 또한 근삿값으로 간주되었다 하더라도 그들은 무리수가 60진법 체계에서 유한의 범위로는 표현 불가능한 수임을 인식하지는 못하였던 것으로 보인다. 다시 말해, 당시에는 유리수로 표현 불가능한 무리수의 존재에 대한 인식이 부족했던 것으로 풀이된다.

무리수에 대한 본격적인 발견은 피타고라스 학파에 의해서이다. Struik(1948)에 의하면 무리수의 발견은 수학적 성향의 귀족 철학파인 피타고라스 학파가 당시 귀족사회의 상징이었던 기하 평균을 다루는 데서 비롯된다. 구체적으로 1과 2의 기하 평균 $1:x=x:2$인 x를 구하려고 고민하다가 정사각형의 한 변과 대각선의 비가 정수 대 정수로 표현될 수 없음을 발견하였다.

무리수의 발견으로 인한 피타고라스 학파의 혼란과 충격은 상당했다. 이 발견으로 모든 기하학적 대상은 정수와 정수의 비로 표현할 수 있다는 믿음이 무너지게 되었다. 그러나 피

타고라스 학파는 이것을 누설하는 것을 금하고 비밀에 부쳤다. 그 후 무리수라 불리는 이 수는 오랫동안 이해하기 힘든 수라는 생각이 지배적이었다(Eves, 1979).

그리스 수학은 수조차도 기하적 도형으로 다룸으로써 무리수는 선분으로 표현되었다. 그리스의 수학을 집대성한 <Euclid 원론>의 통약 불가능한 크기(incommensurable magnitudes)를 다룬 제 10권에서 무리수 개념은 단지 선분으로 표현되고 있다(Fitzpatrick, 2007). 이처럼 고대 그리스 시대에서 무리수 개념은 작도에 입각한 기하학적 사고에 머물러 있었다(박윤희 외, 2004). 이것은 그리스 수학에서 무리수는 기하에 의존함으로써 독립적인 수로서의 지위를 얻지 못하였음을 의미한다.


η΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Proposition 8

If two magnitudes do not have to one another the ratio which (some) number (has) to (some) number then the magnitudes will be incommensurable.

[그림 Ⅱ-2] <Euclid 원론> 제 10권 법칙 8(Fitzpatrick, 2007)

수로서 인정받지 못하던 무리수를 독립적 수로서 취급한 것은 인도인들이었다. Brahmagupta에는 [그림 Ⅱ-3]과 같이 제곱근이 포함된 복잡한 두 수의 나눗셈이 다루어졌다(Cajory, 1928).

분자: ***ru* 3 *c* 450 *c* 75 *c* 54** →현대적 표현 $3+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54}$

분모: ***c* 18 *c* 3** →현대적 표현 $\sqrt{18}+\sqrt{3}$

[그림 Ⅱ-3] Brahmagupta에 제곱근이 포함된 복잡한 수의 표기

이 계산은 ‘$c\ 18\ c\ \dot{3}$’(현대적 표현 $\sqrt{18}-\sqrt{3}$)을 분모 분자에 곱하여 분자의 결과인 $ru\ 75\ c\ 625$ (현대적 표현 $\sqrt{75}+625$)을 얻고, 분모의 결과는 15를 얻음으로써 최종적으로 $ru\ 5\ c\ 3$(현대적 표현 $5+\sqrt{3}$)을 얻는다(Cajory, 1928). 이외에도 인도 수학자들은 $\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot 12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ 과 같이 무리수 계산을 즐겨 사용하였다(박윤희 외, 2004). 이처럼 인도의 수학자들은 분모의 유리화와 이중근호를 다루는 계산 능력을 갖추었을 만큼 무리수를 수로서 인정하고 사용하였지만, 수 체계에 대한 체계적인 정립은 이루어지지 못했다.

12세기 아랍의 수학이 유럽으로 유입되면서 제곱근에 대한 기호는 크게 네 가지로 분류되며, 여러 가지 기호의 사용 끝에 오늘날의 기호 체계가 완성된다. 기호는 크게 R(radix), l (latus), 기호 √, 분수 지수 4가지로, 일관된 기호가 자리 잡기까지 학자들의 선호에 따라 혼잡한 사용이 이루어진다.

먼저 출현한 것은 문자 R과 l이다. R은 <Euclid 원론> 제 10권에 대한 라틴어 해석을 아랍어로 변역한 책에서 최초로 등장하였으며, 여기서 radix는 ‘square root’의 의미로 사용된다. 1537년 Giel Van der Hoecke의 저서 「Arithmetic」에는 ’$R\frac{1}{5}$ van $R\frac{4}{5}$ resi $R\frac{1}{5}$(현

대적 표현 $\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}$)'라는 표현이 등장하기도 한다. l은 기원전 2세기 경 로마 사람 Junius Nipsus에 의해 'side of a square'를 의미하는 것으로 소개되었다. 프랑스의 대수학자 Vieta는 R이나 √의 표기 사용을 꺼려하고 l을 주로 사용하였다고 전한다. Peter Ramus는 'l 27 ad l 12(현대적 표현 $\sqrt{27}+\sqrt{12}=\sqrt{75}$)'라고 표기하기도 하였다(Cajory, 1928).

문자로서 사용되는 관행은 점차 새로운 기호 √로 변형되어 정교화되었다. 1525년 Rudoff는 radix의 첫 글자 r을 변형하여 √로 표시한 것으로 알려지고 있다(김근하, 2009). 그런데 √$x+7$이 $x+7$의 양의 제곱근인지 x의 양의 제곱근에 7을 더한 것인지 불분명하여 프랑스의 수학자 Descartes가 √에 가로줄을 그어 오늘날 사용하고 있는 제곱근 기호 $\sqrt{\ }$가 완성되었다고 한다. 현재 영국 등의 나라에서는 √와 $\sqrt{\ }$를 같이 사용하고 있다(황선욱 외, 2013). 이 과정에서 한때 근호가 미치는 범위 설정을 위해 점(.)이 활용되기도 하였다. 예컨대, √.5+√3.+$\sqrt{2}$는 $\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{2}$를 의미하며, √.5+√3+$\sqrt{2}$는 $\sqrt{5+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$를 의미한다. 제곱근과 세 제곱근 등을 구분하기 위하여 Stevin의 숫자 근호 인덱스 방식이 채택되기도 하였다. 세 제곱근 루트를 표현하기 위해 '√3).20+√392(현대적 표현 $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$)'라고 쓰기도 하였다. 18세기에는 근호 인덱스 방식이 점차 유행이 되어 √^{3} 또는 $\sqrt[3]{\ }$로 표기되었다(Cajory, 1928).

마침내 미국 국가 위원회(United Stated National Committee)의 권고로 오늘날의 기호 표현 $\sqrt{\ }$이 자리 잡게 되었으며, 분수 지수 표현과 연결되었다. $\sqrt{a}$(a는 양수)는 단지 양의 제곱근을 의미하고 $\sqrt[n]{a}$는 주 n번째 근(principal nth root)을 의미하며, 각각 $a^{\frac{1}{2}}$와 $a^{\frac{1}{n}}$으로 표현된다(Cajory, 1928).

이상의 기호 변천 과정을 되짚어보면 무리수를 근삿값의 형태인 유리수로 표현하던 바빌로니아 시대, 무리수를 발견하였지만 기하 선분 표현에 그친 그리스 시대, 무리수를 독립적 수로 인정한 인도인을 거쳐 점차 오늘날의 기호 체계가 완성되었다. 독립적 수로 다루기 시작한 이후의 초기 표현은 문자 다음에 숫자가 등장하는 방식으로 문자의 투명성이 숫자와 동등하였다. 예컨대, $R\frac{1}{5}$에서 문자 R와 숫자 1/5이 대등하게 등장함으로써 문자와 숫자의 투명성이 공평하게 나타난다. 그러나 기호 √와 $\sqrt{\ }$로의 발전은 문자의 투명성을 떨어지게 하였다. 결국 상대적으로 숫자의 투명성이 강화된 기호 표기로 자리 잡게 되었다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 무리수 표기 분석 방법

기호 $\sqrt{2}$에 깃든 정신을 파악하기 위해서는 유리수와 무리수에 대한 상호 비교와 또 다른 무리수 표현인 π나 e와 $\sqrt{2}$의 상호 비교가 필요하다. Ernest(1991)는 수학 기호의 사용은 특정한 상황에만 국한되어 독립적으로 사용되어질 수 없으며 다른 수학 내용과의 내적인

상호관련 및 수학 외적인 관련성에 영향을 받고 있다고 지적하고 있다. 이것은 수학 기호 및 표기법을 정확하게 이해하기 위해서는 다른 유사한 상황과 상호관련성에 근거하여 해석해야 함을 시사한다. 다시 말해, 낱낱의 개체들은 큰 기호 체계의 일부분으로 존재하고 있다는 것을 의미한다. 따라서 한 개의 기호를 이해하기 위해서는 이와 관련이 있는 다른 기호들과의 상호관련성과 상호긴밀성에 근거하여야 한다(서보억·신현용·나준영, 2013). 이런 점에 비추어 볼 때, 기호 $\sqrt{2}$의 탄생에 깃든 정신을 파악하기 위해서는 관련 개념과의 상호 비교가 필요하다. 구체적으로 유리수와 대비되는 무리수의 소수 표현과 분수 표현에 주목함으로써 기호 $\sqrt{2}$에 깃든 정신을 추출하고자 한다. 그리고 π나 e와 $\sqrt{2}$를 비교함으로써 기호 $\sqrt{2}$에 깃든 또 다른 정신을 추출하고자 한다.

아울러 근호 표기가 갖는 한계를 보여주고자 한다. 무리수의 비가산성에 주목하여 유한개의 근호로 이루어진 무리수 표기가 갖는 한계를 드러내고자 한다. 이 과정에서 가산집합에 관한 중요한 정리를 이용할 것이다. 예컨대, 유한 개의 가산집합의 합집합은 가산집합이라는 정리를 이용하여 근호 표기의 한계를 이론적으로 보여줄 것이다.

2. 교과서 분석 방법

무리수 표기와 관련한 교과서 내용을 살펴보기 위해 신항균 외(2013), 이강섭 외(2013), 황선욱 외(2013)를 검토하였다. 구체적으로 근호를 도입하는 과정에 주목하여 근호 도입의 주요 의도를 추출하고자 하였다. 또한 근호를 사용한 문제가 어느 측면을 중점적으로 다루는지를 검토하였다. 이를 통해 표기와 관련한 교과서의 특징으로부터 예상되는 몇 가지 문제점을 제안하고자 하였다. 특히 앞에서 추출한 근호 표기에 깃든 정신과 관련하여 근호 도입이 이루어지고 있는지를 중점적으로 보았다. 또 근호를 사용한 문제에서 간과된 측면을 부각시키고자 하였다.

3. 인식론적 장애와 극복 방안 제시 방법

인식론적 장애는 두 가지 측면에서 구분되어 제시된다. 하나는 이중 맥락에 따른 인식론적 장애이며, 다른 하나는 수치의 투명성 우세로 비롯된 인식론적 장애이다. 이중 맥락에서 비롯된 인식론적 장애는 표기 $\sqrt{2}$가 갖는 이중성에서 비롯된 것이다. 다시 말해, $\sqrt{2}$는 본질적으로 수이지만 표기의 측면에서는 기호의 맥락을 갖는다. 이러한 이중 맥락에서 비롯된 인식론적 장애를 제안하였다. 수치의 투명성 우세로 비롯된 인식론적 장애는 표기 $\sqrt{2}$가 갖는 수치의 투명성에서 비롯된 것이다. 다시 말해, $\sqrt{2}$는 표기 발전 과정에서 변천을 거듭하며 문자로서의 투명성에 비해 숫자로서의 투명성이 강화된 표현이 되었다. 이러한 수치의 투명성이 우세함으로 인해 몇 가지 인식론적 장애가 유발 가능하며, 이를 제안하고자 한다.

무리수 표기에서 비롯된 인식론적 장애를 극복하기 위해서는 '표기 개발의 기회 제공', '문자의 투명성이 기존보다 강화된 표기 사용 경험'이 전제될 필요가 있다. 이런 점에 주목한 구체적인 극복 방안을 제안하고자 하였다. 제안한 방안은 세 가지 근거로 타당성을 확보하고자 하였다. 첫째는 교과서가 갖는 문제점을 보완하는 측면의 타당성이며, 둘째는 역사적 표기 발달에 기반한 타당성이며, 셋째는 유리수와 무리수 개념 정의 도입의 일관성에 기반한 타당성이다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 무리수 표기에 깃든 정신과 한계

1) 기호 $\sqrt{2}$에 깃든 정신

유리수는 소수 표현과 분수 표현, 공통단위에 의한 변형이 가능한 반면, 무리수는 이러한 표현과 변형이 불가하다. 모든 유리수는 소수 측면에서 유한 내지 순환성을 지니므로 십진기수법에 의한 소수 표기가 가능하다. 분수 측면에서도 유리수성으로부터 (정수)/(정수) 꼴의 분수 표현이 가능하다. 게다가 통약 가능성을 지니므로 덧셈 연산의 결과를 공통단위에 의해 변형 가능하다. 예컨대, $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$의 합은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$이 아닌, 공통단위 $\frac{1}{6}$에 기반하여 $\frac{5}{6}$로 변형 가능하다. 반면, 무리수는 비순환성으로부터 십진기수법에 의한 소수 표현이 불가하다[3]. 분수 측면에서는 무리수성을 지니므로 분수 표현이 불가하다. 통약 불가능하므로 연산 결과를 공통단위로 변형하기 어렵다. 예컨대, $2+\sqrt{3}$에서 2와 $\sqrt{3}$은 통약 불가능하므로 공통단위에 의한 변형이 불가하다.

제곱하면 2가 되는 양수에 대한 기존 표현의 불가능성은 곧 문자와 숫자의 양립 표기로 이어질 수밖에 없었으며, 그 속에는 두 가지 정신이 깃들어 있다. 하나는 소수나 분수 표현이 불가하므로 문자로 표현해야 한다는 점이다. 분명 제곱하면 2가 되는 양수는 존재한다. 그러나 이 수는 십진기수법에 의한 소수 표현과 분수 표현이 불가하므로 π나 e와 같은 문자로서 표현될 수밖에 없었다. 다른 하나는 제곱하면 2가 되는 특징을 부각하기 위한 목적으로 문자에 수를 첨가한 점이다. 제곱하면 2가 되는 양수는 π나 e와는 다르게 '제곱하면 2가 되는 수'라는 특징이 있다. 만약 이런 특징을 감안하지 않고 π나 e와 같이 문자로서 표현한다면, 이와 같은 무리수는 암기의 대상이 된다. 혹은 편의성을 위해 문자로 구성된 무리수표가 만들어졌을 것이다. 그러나 이와 같은 대상이 무수히 많으므로 무리수표를 완성하는 것은 사실상 불가능하다. 따라서 수학자들은 제곱하면 2가 된다는 특징을 부각하기 위해 고심하였을 것이며, 그 결과로 표기 속에 2를 첨가하는 아이디어가 나타났을 것이다.

<$\sqrt{2}$의 표기에 깃든 정신>

- 문자의 투명성 측면 : 무리수는 소수 표현이나 분수 표현이 불가하므로 π나 e와 같은 문자로 표기하였다.
- 숫자의 투명성 측면 : 제곱하면 2가 되는 수'라는 특징을 부각하기 위하여 문자에 수를 첨가한 표기를 개발하였다.

$\sqrt{2}$의 표기에 깃든 정신에 입각해 보면 무리수 개념은 초등에서 가르칠 수 없는 개념에 속한다. 소수나 분수가 아닌 문자로서의 수학적 기호를 사용하는 무리수는 일상적 언어라기보다 수학적 언어에 가깝다. 따라서 자리지기(Place holder)의 의미로서 문자에 상응한 □

3) 0.10100100010000⋯은 무리수임에도 규칙성에 의해 십진기수법에 의한 소수 표현이 가능하지만 이런 예는 무리수의 극히 작은 일부에 속한다.

표현만을 사용하는 초등에서 무리수 개념을 도입하는 것은 무리인 것이다.

2) 근호 표기의 한계

근호로 표현 가능한 무리수는 제한적이다. 무리수로 나타낼 수 있는 방법에는 $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }\cdots$ 등이 있지만, 그것은 일부일 뿐이다. 현재의 표기 체계 내에서 모든 무리수를 표현하는 것은 불가능하며, 단지 표기법이 개발된 무리수로 e, π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}\cdots$ 등이 있을 뿐이다. 물론 이러한 표기에 기반하여 다양한 무리수 표현이 가능하기는 하다. 예컨대, $e+\pi$, $e+\sqrt{2}$, $\pi+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{2}}\cdots$ 등을 생각할 수 있다. 그러나 이러한 표현의 응용으로도 모든 무리수를 표기하는 것은 사실상 불가능하다[4].

유한의 범위만을 허용한 무리수 표현이 갖는 이와 같은 한계는 무리수의 비가산성과 표기의 가산성에서 비롯된 것이다. 현재의 표기로 유한의 범위 내에서 표현 가능한 무리수는 분명 가산(countable)집합이다. $\{\sqrt{x}|x\in Q\}$, $\{\sqrt[3]{x}|x\in Q\}$, $\{\sqrt[4]{x}|x\in Q\}$, $\cdots$ 등은 가산집합이다[5]. 가산 개의 가산집합에 대한 합집합은 가산집합이므로 $\cup_{k\in N}\{\sqrt[k]{x}|x\in Q\}$는 가산집합이 된다. 한편, 두 가산집합의 카테시안 곱 역시 가산집합이므로 $\{\sqrt{x}+\sqrt{y}|x\in Q, y\in Q\}$, $\{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}|x\in Q, y\in Q\}$, $\{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}|x\in Q, y\in Q\}$, $\cdots$ 등은 가산집합이다. 3개, 4개, 5개 등 유한의 범위 내에서 합이나 차로 표현된 집합의 경우에도 마찬가지로 가산집합이다. 따라서 $\cup_{k,l,m,n\in N}\{\sqrt[k]{x}\pm\sqrt[l]{y}\pm\sqrt[m]{z}\pm\sqrt[n]{w}|x,y,z,w\in Q\}$은 가산집합이다. 물론 여기에 π나 e를 추가하여도 가산집합이다. 이처럼 유한의 범위에서 근호로 표현된 무리수는 가산집합이다. 그러나 무리수는 비가산집합이다. 따라서 근호 표기의 가산성은 비가산집합인 무리수 전부를 표현하지 못하는 근본 원인이 된다.

표기가 개발되지 못한 무리수가 무수히 많음에도 불구하고, 학생들은 이들이 무리수의 전부라고 착각하는 경향이 있다. 이선비(2013)는 우리나라 65명의 예비교사를 대상으로 무리수 정의에 관한 인식을 조사하였는데, 무리수의 정의를 '$\sqrt{\ }$를 사용하지 않고 특정한 수로 표현하지 못하는 수'라고 응답한 사례가 있었다. 이는 근호 표현이 갖는 한계에 대한 예비교사들의 부족한 인식을 보여준다. 연구대상이 예비교사인 점을 감안하면 학생들은 더욱 심각할 것으로 예측된다.

2. 무리수 표기와 관련한 교과서 내용 분석

표기와 관련한 교과서 내용 전개의 특징은 크게 세 가지로 구분된다. 첫째, 근호는 제곱근을 구하는 상황에 대처하기 위한 용도로 도입된다. 세 교과서는 공통적으로 제곱근 개념 도입으로 시작된다. 이후 근호를 사용하지 않고 제곱근을 구하는 문제가 제시된다. 다음, 근호가 도입되며 근호를 사용하여 제곱근을 구하는 문제가 제시된다. 특히 이 문제는 2, 5, 1.4와 같이 제곱근을 구하기 쉽지 않은 경우이다. 이러한 전개를 볼 때, 근호의 도입은 제곱근을 구하는 상황에 대한 대비임을 알 수 있다.

---

4) 여기서 무한의 범위를 허용한 무한 급수의 합 표현이나 연분수 표현은 제외된다.

5) 여기서 이중근호는 $\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ 와 같이 변형 가능하므로 하나의 근호에 대한 것만 다루었다.

문제 1 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 64 (2) 100 (3) 0.09 (4) $\frac{1}{16}$

양수의 제곱근은 항상 두 개가 있으며, 그중에서 양수인 것을 양의 제곱근이라 하고 음수인 것을 음의 제곱근이라고 한다.

이때 양수 a의 제곱근은 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하여

양의 제곱근을 $\sqrt{a}$

음의 제곱근을 $-\sqrt{a}$

로 나타낸다.

양수 a의 제곱근
→ $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$

$\sqrt{\ }$ 는 뿌리를 뜻하는 radix의 첫 글자 r의 모양을 따서 만든 것이고, 근호라는 말은 한자의 뿌리 근(根) 자를 사용하여 정한 것이다.

여기서 기호 $\sqrt{\ }$ 를 **근호**라고 하며, $\sqrt{a}$를 '제곱근 a' 또는 '루트 a'라고 읽는다. 또 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 한꺼번에 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

예 7의 제곱근은 $\sqrt{7}$과 $-\sqrt{7}$이고, 이것을 $\pm\sqrt{7}$로 나타내기도 한다.

문제 2 다음 수의 제곱근을 근호 $\sqrt{\ }$를 사용하여 나타내어라.

(1) 2 (2) 5 (3) 1.4 (4) $\frac{1}{3}$

[그림 Ⅳ-1] 근호의 도입(신항균 외, 2013)

둘째, 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 없는 상황을 인식하게 하는 문제를 제시하지 않는다. 세 교과서는 공통적으로 근호를 도입한 이후 [그림 Ⅳ-2]와 같이 근호를 사용하지 않고 나타내라는 문제가 제시된다. 이 문제들은 $\sqrt{36}$, $\sqrt{1/4}$ 등과 같이 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 경우에 대한 것만 다룬다. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 등의 경우를 두고 근호 없이 나타내기 어려운 상황을 인식하게 하는 문제는 찾기 어렵다.

예제 1 다음을 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $\sqrt{36}$ (2) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$

풀이 (1) $6^2=36$, $(-6)^2=36$이므로 36의 제곱근은 ± 6이다.
이때 $\sqrt{36}$은 36의 양의 제곱근이므로 $\sqrt{36}=6$이다.

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{4}$의 제곱근은 $\pm\frac{1}{2}$이다.
이때 $-\sqrt{\frac{1}{4}}$은 $\frac{1}{4}$의 음의 제곱근이므로 $-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$이다.

답 (1) 6 (2) $-\frac{1}{2}$

문제 5 다음을 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $\sqrt{16}$ (2) $-\sqrt{25}$ (3) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ (4) $-\sqrt{0.16}$

[그림 Ⅳ-2] 근호를 사용하지 않고 나타내라는 문제(이강섭 외, 2013)

셋째, 근호 사용과 관련하여 의미보다 계산에 치우친 문제가 대다수이다. 세 교과서는 제곱근을 구하라는 문제, 근호를 사용하지 않고 나타내라는 문제, 제곱근의 성질과 관련한 문제, 대소 관계를 묻는 문제 위주로 이루어져 있다. 단지 대소 관계를 묻는 문제에서 사각형의 넓이를 도입함으로써 $\sqrt{2}$가 갖는 기하적 의미가 투명하게 드러날 뿐이다. 반면, $\sqrt{2}$가 갖는 대수적 의미[6]는 불투명하다. 왜냐하면 제시되는 모든 문제에서 역으로 $\sqrt{2}$의 의미를 묻는 문제는 찾기 어렵기 때문이다.

표기와 관련한 교과서의 특징으로부터 다음과 같은 문제점이 예상된다.

첫째, 근호 표기에 깃든 정신을 파악하기 어렵다. 근호는 제곱근을 구하는 상황에 대한 대비로 사전에 도입되므로, 학습자는 근호가 단순히 제곱근을 구하기 위한 도구라는 개념 이미지를 가질 우려가 크다. 다시 말해, 학습자는 근호가 도입되는 진정한 이유나 맥락을 파악하기 어렵다.

둘째, 근호를 사용하지 않고 나타내기 어려운 경우에 대한 인지적 갈등이 예상된다. $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$와 같이 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 상황만 제공되므로 이는 자칫 과잉 일반화로 이어질 염려가 있다. 다시 말해, 학생들은 근호로 이루어진 모든 수는 근호 사용 없이 구할 수 있다는 잘못된 신념을 가질 수 있다. 예컨대, '$\sqrt{2}$를 근호를 사용하지 않고 나타내면?'이라고 물을 때, 1 또는 2와 같은 대답이 나타난다면 이러한 신념에서 비롯된 것이다.

셋째, 제곱근 개념의 의미를 생각하지 않고 알고리즘에 치우칠 위험이 크다. 근호 사용과 관련하여 계산에 치중하는 문제가 주로 등장하므로 학생들은 근호를 조작적 도구로서 받아들이기 쉽다. 단지 기하적 의미만이 투명하게 드러나므로 기하 문제에서는 의미적 접근이 이루어지지만, 대수 문제에서는 절차적 접근이 두드러질 우려가 크다.

넷째, 제곱근 개념의 의미에 기반한 증명 이해가 어려울 것이다. 앞서 언급하였듯 제곱근 개념의 의미를 되짚어보는 문제는 찾기 어렵다. 제곱근의 의미에 집중하지 않는 만큼, 제곱근 개념에 기반한 증명의 이해가 어려울 것으로 예상된다. 예컨대, $(\sqrt{2})^2=2$인 이유를 $\sqrt{\ }$는 제곱하면 사라진다는 식의 도구적 이해에 그칠 공산이 크다.

이와 같은 문제점은 근본적으로 무리수 개념 표기 개발의 기회가 제공되지 않기 때문에 빚어진 현상으로 풀이된다. 현 교과서는 표기 개발의 기회는 물론이고 표기 음미의 기회조차 제공하지 않는다. 따라서 표기 개발의 기회를 제공하는 방향으로 교과 내용 개선이 필요하다.

3. 근호 표기로부터 비롯된 인식론적 장애[7]

1) 이중 맥락에 따른 인식론적 장애

① 공식 적용과 정당화에서 관점 이동의 부담

---

6) $\sqrt{2}$는 정의로부터 제곱하여 2가 되는 양수라는 대수적 의미를 지니고 있음.

7) 인식론적 장애란 특정한 맥락에서 성공한 경험이 있고 인지 구조의 일부가 되었다고 할지라도 새로운 문제 상황이나 다른 맥락에서는 적용하지 못하는 것을 말한다(박희옥·박만구, 2012). 인식론적 장애는 과학 정신의 형성과정에서 그 형성을 막는 체계화된 오류로서 과학적 활동에서의 인식론적 장애물은 사유의 정지를 가져온다. 바로 이 부분이 인식론적 장애가 문제시되는 주요 이유이다(김태훈, 2001).

근호와 관련한 중요한 정리인 $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$은 공식 적용과 정당화에서 상이한 맥락을 지닌다. 공식의 적용은 직관적 측면에서 수의 맥락을 갖는다. $\sqrt{2}\sqrt{3}$에서 $\sqrt{2\times3}$을 생각하는 것은 수치적 측면에서 자연스러운 결과이다. 이 맥락에서는 수치와 $\sqrt{\ }$를 따로 떼어 생각하는 것도 별 무리가 없다. 이 공식을 적용하는 과정에는 수치에 집중하여 수의 맥락에서 곱하고 약분하는 능력이 요구된다. 반면, 이들의 정당화는 기호 맥락을 지닌다. 만약 수의 맥락에서만 공식을 바라보고 그 정당화에 대한 필요성을 느끼지 못한다면 그것은 잘못이다. [그림 Ⅳ-3]의 증명을 이해하기 위해서는 기호 맥락의 관점이 필요하다. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$의 제곱이 2×3이라는 점과 이 수가 양수라는 점이 증명의 주요 골자이다. 이 두 사실로부터 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$은 제곱하여 2×3이 되는 양수인 $\sqrt{2\times3}$이 된다. 이처럼 [그림 Ⅳ-3]의 증명은 기호의 의미에 초점을 둔 기호 맥락의 관점을 요구한다.

먼저 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$을 제곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2&=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\\&=(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\\&=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2\\&=2\times3\end{aligned}$$

이때 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$이 양수이므로 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$은 2×3의 양의 제곱근이다.

그런데 2×3의 양의 제곱근은 $\sqrt{2\times3}$이므로 다음을 알 수 있다.

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$$

[그림 Ⅳ-3] 기호 맥락의 관점을 요구하는 정당화(황선욱 외, 2013)

$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ 역시 공식 적용과 정당화 사이에 격차가 존재한다. 공식 적용은 수의 맥락에서 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{3\times3}=\sqrt{9}=3$로 접근 가능하다. 정당화는 $\sqrt{3}$은 '제곱하면 3이 되는 양수'이므로 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$이 된다고 보는 기호 맥락의 접근을 요구한다.

공식 적용에서는 수의 맥락이었다가 정당화에서는 기호 맥락으로 관점을 이동해야 하는 것은 학생들에게 인지적 부담을 초래할 수 있다. 상황별로 일관된 맥락의 관점이 적용되는 것이 아니므로 학생들은 각 상황에 적합한 맥락의 관점을 찾아낼 수 있어야 한다. 예컨대, '$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$을 증명하시오'라는 문제에서 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{3\times3}=\sqrt{9}=3$와 같은 수의 맥락에서의 접근은 문제를 야기할 수 있음을 인지할 수 있어야 한다. 각 상황에 적합한 관점 찾기는 학습자에게 인지적 부담일 수밖에 없다.

② 곱셈과 덧셈에서 관점 이동의 부담

곱셈과 덧셈에서의 상이한 맥락 역시 학습자에게 인지적 부담을 초래하는 원인이 된다. 근호가 포함된 두 수의 곱은 수 맥락의 관점을 요구한다. 예컨대, $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$은 수 맥락의 관점이 필요하다. 곱에서 요구되는 수 맥락의 관점을 동일한 수에 대한 덧셈으로 확장하는 것은 인지적 측면에서 자연스럽다. 그 결과 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3}$이 성립할 것이라는

유추가 가능하지만, 이것은 성립하지 않는다. 동일한 수에 대한 덧셈은 기호 맥락의 접근을 요구한다. 덧셈이 수 맥락이라면 $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3+3}$이 성립해야 하지만, 기호 맥락이므로 $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$이 성립한다. 동일한 수에 대한 곱셈과 덧셈의 상이한 관점은 학습의 어려움을 가중한다.

연산이 곱인 상황에서도 연산의 대상에 따라 상이한 맥락이 발생하며, 이는 학습자에게 부담으로 작용한다. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$에서 보듯, 근호가 포함된 두 수의 곱은 수 맥락의 관점을 요구한다. 반면, 근호가 포함된 수와 포함되지 않은 수 사이의 곱은 기호 맥락의 관점을 요구한다. $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$은 $2\times a=2a$와 같은 기호 맥락에 속한다. 동일한 연산에서 대상을 달리하면 상이한 관점이 요구되므로, 제곱근의 연산은 학습자에게 어려운 인지적 과제가 되는 것이다.

심지어 보다 복잡한 두 대상의 곱은 기호 맥락과 수 맥락을 동시에 요구하기도 한다. 예컨대, $3\sqrt{2}\times4\sqrt{3}$이 주어지면 총체적 입장에서 기호 맥락으로 보아 $3a\times4b=12ab$의 계산이 필요하다. 국소적 입장에서 ab는 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$와 같은 수 맥락의 계산을 요구한다. 이처럼 대상이 복잡해질수록 상이한 맥락을 적재적소에 적용할 수 있어야 한다.

근호 표기가 갖는 수와 기호 맥락의 이중성은 곱셈의 역인 나눗셈에서 약분이 불가한 상황에서 약분할 충동을 갖게 한다. 예컨대, $\frac{\sqrt{21}}{6}$에서 $\sqrt{21}$과 6은 약분이 되지 않는다. 이것은 $\sqrt{21}$이 갖는 기호와 수 맥락이라는 이중성 때문에 빚어지는 대표적 혼란이다. 각 경우별로 적합한 맥락이 일관되지 않으므로, 혼란 초래의 원인이 된다.

학습자는 각 상황별로 상이한 맥락 요구에 대비하여 절차를 암기하는 전략을 택하기도 하며, 이런 경우 절차만을 암기하는 수준에 그칠 우려가 있다. 예컨대, 인지적 부담을 완화하기 위해 '근호는 근호끼리, 숫자는 숫자끼리 계산한다'는 절차만을 암기한 경우가 있을 수 있다. 이 경우 $\frac{\sqrt{21}}{6}$에서 $\sqrt{21}$과 6이 약분되지 않는 이유를 파악하지 못할 우려가 있다. 이처럼 상황에 따른 맥락의 상이함은 절차 암기로 치우쳐 개념에 대한 관계적 이해를 방해하는 요인이 될 수 있다.

2) 수치의 투명성 우세로 비롯된 인식론적 장애

① 덧셈 및 뺄셈의 완결성 인식의 결여

근호 표기가 갖는 수치의 투명성이 우세한 특징은 덧셈 및 뺄셈의 완결성 인식에 방해 요인이 된다. 무리수를 학습하기 이전에 초등학교에서부터 접한 수는 통약 가능한 유리수이다. 유리수의 사칙연산의 결과는 공통단위에 기반하여 다른 하나의 유리수 표현으로 변형 가능하다. 이러한 변형 가능성은 제곱근 계산에서도 성립할 것이라는 오개념을 갖게 한다. 특히 $\sqrt{2}$나 $\sqrt{3}$이 갖는 문자로서의 투명성에 비해 상대적으로 우세한 숫자로서의 투명성은 덧셈이나 뺄셈에서 하나의 수치로 변형하는 계산이 가능할 것이라는 믿음을 갖게 한다. 예컨대, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$에서 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$은 모두 숫자이므로 유리수에서와 같은 결과의 변형[8]이 가능

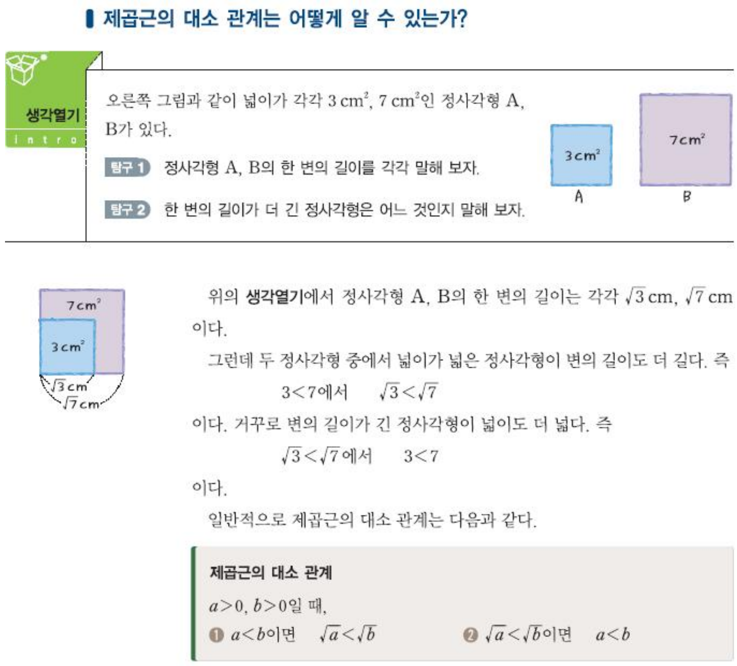
8) 덧셈이나 뺄셈의 결과가 환 가능한 것은 공통단위가 존재하기 때문이다. 예컨대, 1+2를 3으로 변환 가능한 것은 1과 2의 공통단위 1이 존재하기 때문이다.

할 것이라는 생각을 갖게 하는 것이다.

근호 표기이지만 결과의 변형이 가능한 경우 역시 이러한 생각을 더욱 부추긴다. 예컨대, $\sqrt{3}+\sqrt{3}$은 $2\sqrt{3}$으로 변형 가능하다. 이러한 변형이 가능한 것은 공통단위 $\sqrt{3}$이 존재하기 때문이다. 이런 경우를 접하게 되면 통약 불가능한 상황의 완결성을 파악하기 더욱 쉽지 않다.

② 기하학적 접근을 통한 대소 비교의 필요성 인식 결여

교과서에서 제곱근의 대소 비교는 기하학적 의미에 초점을 둔 접근을 택하고 있다(신항균 외, 2013; 이강섭 외, 2013; 황선욱 외, 2013). [그림 Ⅳ-4]는 넓이가 3인 정사각형의 한 변의 길이라는 $\sqrt{3}$의 기하학적 의미와 넓이가 7인 정사각형의 한 변의 길이라는 $\sqrt{7}$의 기하학적 의미를 통해 대소 비교를 하고 있다.


제곱근의 대소 관계는 어떻게 알 수 있는가?

생각열기 intro

오른쪽 그림과 같이 넓이가 각각 $3\,cm^2$, $7\,cm^2$인 정사각형 A, B가 있다.

탐구 1 정사각형 A, B의 한 변의 길이를 각각 말해 보자.

탐구 2 한 변의 길이가 더 긴 정사각형은 어느 것인지 말해 보자.

위의 **생각열기**에서 정사각형 A, B의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{3}$cm, $\sqrt{7}$cm 이다.

그런데 두 정사각형 중에서 넓이가 넓은 정사각형이 변의 길이도 더 길다. 즉

$3<7$에서 $\sqrt{3}<\sqrt{7}$

이다. 거꾸로 변의 길이가 긴 정사각형이 넓이도 더 넓다. 즉

$\sqrt{3}<\sqrt{7}$에서 $3<7$

이다.

일반적으로 제곱근의 대소 관계는 다음과 같다.

제곱근의 대소 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

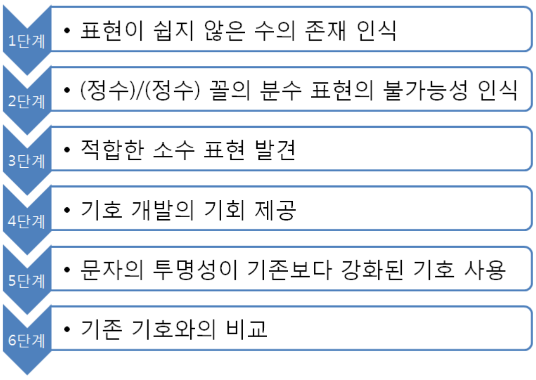
❶ $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ❷ $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

[그림 Ⅳ-4] 기하학적 접근에 기반한 제곱근의 대소 비교(황선욱 외, 2013)

근호 표기가 갖는 상대적으로 두드러진 수치의 투명성은 대소 비교를 위한 기하학적 접근의 필요성 인식에 방해가 된다. $\sqrt{\ }$와 수를 따로 떼어보는 수치 맥락에서 $\sqrt{\ }$안의 수만으로 충분히 비교 가능하다는 인식은 굳이 기하학적 접근을 택하는 이유를 파악하기 어렵게 한다. 다시 말해, 수치의 투명성이 우세함으로 인해 수치에 입각한 조작적 견지에 인식 수준이 머무는 부작용이 예상된다.

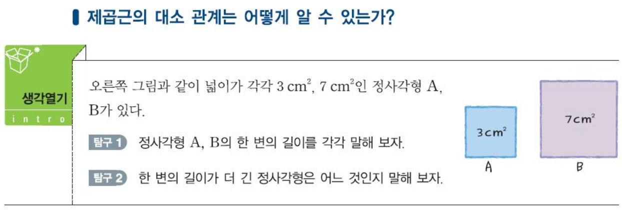
4. 무리수 표기에서 비롯된 인식론적 장애 극복 방안

무리수 표기에서 비롯된 인식론적 장애를 극복하기 위한. 구체적인 방안은 [그림 Ⅳ-5]와 같다.



[그림 Ⅳ-5] 무리수 표기에서 비롯된 인식론적 장애 극복 방안

1단계는 표현이 쉽지 않은 수의 존재성을 인식하는 단계이다. 넓이가 2인 정사각형의 한 변의 길이를 구하는 활동을 통해 그 값을 구하기 어려운 상황을 직면하고 경험하게 하는 것이다. 고대 바빌로니아 시대 수학자들이 이 값을 구하기 위한 고심과 노력을 재현하는 단계이다. 예를 들어, 황선욱 외(2013)의 제곱근 대소 비교에 등장하는 탐구 1의 내용이 우선되는 것이다. 그러나 교과서(신항균 외, 2013; 이강섭 외, 2013; 황선욱 외, 2013)는 제곱근 개념 소개에 이어 이와 같은 내용이 등장하므로 유리수의 범위에서 값을 구하는 노력이 재현되기 어려운 실정이다. 다시 말해, 곧 바로 $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$이라고 답하기 쉽다.



[그림 Ⅳ-6] 제곱근 개념 소개 이후 대소 비교에 등장하는 탐구 1(황선욱 외, 2013)

2단계는 (정수)/(정수) 꼴의 분수 표현의 불가능성을 인식하는 단계이다. 분수 표현의 불가능성 인식이 소수 표현보다 앞서야 하는 것은 유리수 정의와의 일관성 확보 때문이다. 김부윤·정영우(2008)는 무리수의 개념 정의를 도입할 때 일관성을 고려해야 한다고 주장한다. 다시 말해, 수에 대한 명확한 이해를 돕기 위해서는 유리수를 '분수 표현'으로 정의한 경우는 무리수 역시 '분수 표현'으로 도입하여야 하며, 유리수를 '소수 표현'으로 정의한 경우는 무리수 역시 '소수 표현'으로 도입해야 한다. 현 교과서는 유리수를 분수 표현으로 정의하므로 무리수 역시 분수 표현에서의 접근이 우선되어야 한다. 이 단계에서 통약 불가능성으로

부터 자연스럽게 (정수)/(정수) 꼴의 분수 표현이 불가함을 인식하도록 유도할 필요가 있다.

3단계는 유리수의 소수 표현과 결부지어 적합한 소수 표현을 발견하는 단계이다. 정수, 유한소수, 순환소수는 (정수)/(정수) 꼴의 분수 표현이 가능함을 주지한 상태에서 분수 표현이 불가능한 수의 소수 표현을 생각하게 하는 것이다. 이를 통해 스스로 이 수가 순환하지 않는 무한소수가 되어야 함을 발견하게 해야 할 것이다.

4단계는 기호 개발의 기회를 제공하는 단계이다. 순환하지 않는 무한소수를 어떻게 표현해야 할 것인가에 대한 고찰의 기회이다. 이를 통해 표기가 갖는 의미를 이해할 수 있는 계기를 마련해 줘야할 것이다. 현 교과서는 기호 개발의 기회를 제공하지 않으므로 기호는 암기의 대상이 되고 있다. 이런 상황에서 주어진 표기 $\sqrt{2}$를 보고 표기에 담긴 정신을 파악하기란 쉽지 않다. 따라서 기호 개발의 기회를 제공함으로써 '비순환 무한소수의 표현 불가성에 기반한 문자 표기라는 점'과 '제곱하면 2가 되는 특성을 부각한 표현'이라는 $\sqrt{2}$ 표기에 담긴 의미를 이해할 수 있게 도와줘야 할 것이다. 이 단계에서는 비순환 무한소수의 표기에 대한 고민을 통해 π와 같은 문자 표기의 아이디어 설정이 이루어져야 한다. 동시에 단순히 문자 표기만으로는 무수히 많은 무리수를 처리하기 어려운 한계를 인식하고 숫자 첨가의 아이디어를 떠올릴 수 있게 해야 한다. 이것이 3단계에서 본질적으로 이루어져야 할 목표이다.

5단계는 문자의 투명성이 기존보다 강화된 기호 사용을 경험하는 단계이다. 역사적 고찰에 따르면, 무리수가 독립적 수로 인정된 이후 초기 기호 표현은 문자와 숫자의 투명성이 대등하였다. 세월이 흐름에 따라 숫자의 투명성이 강화된 표현으로 변화되었다. 그로 인해 학생들은 $\sqrt{2}$를 개념적으로 보지 않고 조작적 견지에서 $\sqrt{\ }$와 2를 따로 떼어 보는 인식론적 장애가 발생하였다. 따라서 역사의 흐름을 교육에서 재현함으로써, 근호 표기가 갖는 문자 기호로서의 개념적 의미에 주목하게 만들 필요가 있다. $\sqrt{2}$를 $a(2)$라고 적으면 문자적 성질이 더욱 두드러지게 될 수 있다. 예컨대, $\sqrt{2}$를 $a(2)$로, $\sqrt{3}$을 $a(3)$로 표기한 상황에서 유리화 조작을 보면 문자 기호로서의 의미가 두드러짐을 알 수 있다.

$$\frac{1}{a(3)-a(2)}=\frac{a(3)+a(2)}{\{a(3)-a(2)\}\{a(3)+a(2)\}}=\frac{a(3)-a(2)}{\{a(3)\}^2-\{a(2)\}^2}=\frac{a(3)-a(2)}{3-2}$$
$$=a(3)-a(2)$$

또한 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$을 $a(2)\times a(3)=a(2\times 3)$로 표기하면 공식의 의미가 잘 드러나며, 공식을 증명해야 할 필요성을 보다 쉽게 인식할 수 있을 것으로 생각된다. 이처럼 기호를 문자에 가깝게 변형하면, 현상을 개념적 시각에서 접근하기 용이해진다.

6단계는 기존 기호와 문자의 투명성이 강화된 기호를 비교하는 단계이다. 이를 통해 기존 기호에서도 문자의 투명성에 주목하여 개념적 의미에 주목하는 힘을 길러줘야 할 것이다. 동시에 기존 기호를 충분히 사용하여 숙달할 수 있도록 도와줘야 할 것이다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 무리수 개념 학습의 어려움을 무리수 표기의 관점에서 분석하고, 표기로부터 비롯된 어려움을 극복할 수 있는 방안을 모색해 보았다. 이를 위해 먼저, 무리수 표기 발달의 역사를 고찰해 보았다. 다음 무리수 표기 $\sqrt{2}$에 깃든 정신과 한계를 분석하고, 현 교과서에서의 무리수 표기와 관련한 지도법이 갖는 문제점을 살펴보았다. 마지막으로 무리수 표기로부터 비롯된 인식론적 장애를 살펴보고, 이를 극복하기 위한 대안을 제시하였다.

오늘날의 무리수 표기는 무리수의 발견과 표기법에 대한 점진적 발전의 결과이다. 무리수를 유리수의 형태로 표현하던 바빌로니아 시대, 무리수를 발견하였지만 기하 선분 표현에 그친 그리스 시대, 무리수를 독립적 수로 인정한 인도인을 거쳐 점차 오늘날의 기호 체계가 완성되었다. 독립적 수로 다루면서 출현한 초기 표현은 문자 다음에 숫자가 등장하는 방식이었다. 이 기호에서 문자와 숫자의 투명성은 공평하게 드러난다. 그러나 기호 ꜜ와 $\sqrt{\ }$로의 발전은 문자의 투명성을 감소시켰다. 결국 상대적으로 숫자의 투명성이 우세한 기호 표기로 자리 잡게 되었다.

근호를 사용한 무리수 표기에는 두 가지 중요한 정신이 내재해 있다. 하나는 무리수는 소수 표현이나 분수 표현이 불가하므로 π나 e와 같은 문자로 표기해야 한다는 점이다. 다른 하나는 $\sqrt{2}$의 경우에'제곱하면 2가 되는 수'라는 특징을 부각하기 위하여 문자에 수를 첨가한 표기라는 점이다. 그러나 근호 표현은 무리수의 비가산성과 표기의 가산성에서 비롯된 격차로 인해 모든 무리수 표현이 되지 못한 한계를 지닌다.

교과서의 무리수 표기와 관련한 지도법은 몇 가지 문제점을 지니고 있었다. 첫째, 근호 표기에 깃든 정신을 파악하기 어렵다. 둘째, 근호를 사용하지 않고 나타내기 어려운 경우에 대한 인지적 갈등이 예상된다. 셋째, 제곱근 개념의 의미를 생각하지 않고 알고리즘에 치우칠 위험이 크다. 넷째, 제곱근 개념의 의미에 기반한 증명 이해가 어렵다.

이러한 고찰로부터 본 연구는 표기에서 비롯된 인식론적 장애 몇 가지를 제시하였다. 현 교과서 지도 체계에 따르면 무리수 표기에 깃든 중요한 두 가지 정신을 파악하는 것은 쉽지 않다. 더군다나 무리수 기호 발전 과정에서 문자의 투명성이 축소되어, 개념적인 측면에서의 접근이 더욱 어려워지게 되었다. 이런 이유로 다음과 같은 인식론적 장애가 예상된다. 하나는 이중 맥락에 따른 인식론적 장애로 '공식 적용과 정당화에서 관점 이동의 부담', '곱셈과 덧셈에서 관점 이동의 부담'이다. 다른 하나는 수치의 투명성 우세로 비롯된 인식론적 장애로 '덧셈 및 뺄셈의 완결성 인식의 결여', '기하학적 접근을 통한 대소 비교의 필요성 인식 결여'이다.

표기에서 비롯된 인식론적 장애를 극복하기 위해서는 '표기 개발의 기회 제공', '문자의 투명성이 기존보다 강화된 표기 사용 경험'이 전제될 필요가 있다. 본 연구는 이 원칙에 입각한 6단계로 구성된 하나의 방안을 제안하였다. 표현이 쉽지 않은 수의 존재 인식, (정수)/(정수) 꼴의 분수 표현의 불가능성 인식, 적합한 소수 표현 발견, 기호 개발의 기회 제공, 문자의 투명성이 기존보다 강화된 기호 사용, 기존 기호와의 비교 순으로 이루어진 방안이다.

방안은 무리수 표기의 문자적 특성에 주목하는 것을 돕기 위한 의도로 개발된 것이다. 무리수는 본질적으로 수이지만 문자로서 표기되고 그 사용이 기호 맥락에 가까움에도 불구하고, 때때로 두드러진 수의 투명성이 문자로서의 특성 인식에 방해가 되고 있다. 더욱이 π와는 다르게 표기 자체에 수가 첨가되므로, 더욱 이러한 인식을 어렵게 하는 요인이 된다. 따

라서 '표기 개발 기회'와 '문자의 투명성이 강화된 표기 사용 경험'을 제공하여 표기의 개념적 의미에 주목하게 만드는 방안을 제안한 것이다.

본 연구는 통약 불가능성에 주목한 기존의 무리수 관련 연구와 차별된다. 표기의 관점에서 무리수 개념 학습의 어려움을 분석하고 대안을 제안함으로써, 기존 연구와는 차별된 관점을 제시한 의의를 지닌다. 그러나 본 연구는 제안한 방안의 효력을 입증하지 않은 한계를 지닌다. 수업에서 구현할 수 있을 만큼 방안을 구체화하여 효력을 입증하는 후속 연구가 이루어져야 할 것이다.

참고 문헌

강미광 (2000). 연분수와 무리수에 관한 고찰. **한국수학사학회지, 13**(2), 49-64.

김근하 (2009). **제곱근의 문제 해결 과정에서 나타나는 오류분석: 중학교 3학년을 대상으로**. 경남대학교 교육대학원 석사학위논문.

김부윤·정영우 (2008). 중학교에서의 무리수 지도에 관하여. **한국수학사학회지, 21**(1), 139-156.

김태훈 (2001). **바슐라르(G. Bachelard)의 과학철학 연구-쿤(T. S. Kuhn)과의 비교-**. 중앙대학교 대학원 석사학위논문.

박윤희·박달원·정인철 (2004). 중학교 수학에서 무리수 개념에 관한 학습자의 이해 연구. **한국학교수학회논문집, 7**(2), 99-116.

박희옥·박만구 (2012). 비와 비율 학습에서 나타나는 초등학교 학생들의 인식론적 장애 분석. **초등수학교육, 15**(2), 159-170.

변희현·박선용 (2002). 무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안: '통약 불가능성'을 통한 무리수 고찰. **학교수학, 4**(4), 643-655.

서보억·신현용·나준영 (2013). 수직선 표기법에 대한 분석 연구. **수학교육학연구, 23**(2), 135-152.

신항균 외 6명 (2013). **중학교 수학 3**. 서울: 지학사.

이강섭 외 10명 (2013). **중학교 수학 3**. 서울: 미래엔.

이선비 (2013). 예비 중등 교사들의 무리수에 대한 이해. **한국학교수학회논문집, 16**(3), 499-518.

이영란·이경화 (2006). Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례. **수학교육학연구, 16**(4), 297-312.

이지원 (2008). **무리수 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

장혜원 (2003). 무리수 개념의 역사적 발생과 역사발생적 원리에 따른 무리수 지도. **한국수학사학회지, 16**(4), 79-90.

황선욱 외 8명 (2013). **중학교 수학 3**. 서울: 좋은책 신사고.

Arcavi, A., Bruckheimer, M. and Ben-Zvi, R. (1987), History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics, 7*(2), 18 - 23.

Cajory, F. (1928). *A history of mathematical notations (Volume 1 & 2)*. La salle, IL: The Open Court.

Enerst, P. (1991). *A philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Eves, H. (1979). *An introduction to the history of mathematics*. 이우영·신항균(공역) (2005). 수학사 서울: 경문사.

Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's elements of geometry. The Greek text of J. L. Heiberg(1883-1885) from Euclids Elementa, edidit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg, in aedibus. B. G. Teubneri, 1883-1885*. (R. Fitzpatrick, Ed., & R. Fitzpatrick, Trans.) Richard Fitzpatrick, 2007.

HIerbert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 333-355.

Lesh, R., Behr, M., and Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning mathematics (pp.41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39-46.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line - where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(4), 477-488.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. Routledge.

Struik, D. (1948). *A concise history of mathematics*. 장경윤 외(역) (2003). 간추린 수학사. 서울: 경문사.

Zazkis, R. & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), The roles of representation in school mathematics (pp. 146-165). Reston, VA: NCTM.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 497-504.*

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: exposing the missing link. Conference Board of the Mathematical Sciences issues in Mathematics Education, 16, 1-27.

Difficulties and Alternative Ways to learn Irrational Number Concept in terms of Notation[9)]

Kang, Jeong Gi[10)]

Abstract

Mathematical notation is the main means to realize the power of mathematics. Under this perspective, this study analyzed the difficulties of learning an irrational number concept in terms of notation. I tried to find ways to overcome the difficulties arising from the notation. There are two primary ideas in the notation of irrational number using root. The first is that an irrational number should be represented by letter because it can not be expressed by decimal or fraction. The second is that $\sqrt{2}$ is a notation added the number in order to highlight the features that it can be 2 when it is squared. However it is difficult for learner to notice the reasons for using the root because the textbook does not provide the opportunity to discover. Furthermore, the reduction of the transparency for the letter in the development of history is more difficult to access from the conceptual aspects. Thus 'epistemological obstacles resulting from the double context' and 'epistemological obstacles originated by strengthening the transparency of the number' is expected. To overcome such epistemological obstacles, it is necessary to premise 'providing opportunities for development of notation' and 'an experience using the notation enhanced the transparency of the letter that the existing'. Based on these principles, this study proposed a plan consisting of six steps.

Key Words : Notation, Irrational number, Transparency, Epistemological obstacles

Received March 5, 2016
Revised March 20, 2016
Accepted March 24, 2016

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97D70
10) Jinyeong Middle School (jeonggikang@gmail.com)